Examenul naţional de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=3+4\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ este întreg.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4x^2+2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2+4x+2}=64\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\{-2,-1,1,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+1}\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $MNPQ$ cu $M(2,3)$, $N(5,4)$ și $P(4,0)$. Determinați ecuația dreptei MQ.

5p **6**. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\dfrac{AB\cdot AC\cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,0)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $a\in(-\infty,0)$ și $b\in(0,+\infty)$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1,3)\cdot X=A(2,1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-(x+y)+\dfrac{2}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ(-1)=-\dfrac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1\circ\dfrac{1}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x}dx = e(e-1)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați modulul celui de-al cincilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=-1$ și $b_2=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+7x+9$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x)>0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-1)=\log_3(6-x)-2$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^{n-2}-A_n^1=5$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,-1)$, numărul real m și dreapta d de ecuație $y=(m-1)x-2m$. Determinați numărul real m pentru care distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu 0.

5p **6.** Determinați $\cos(\pi-2x)$, știind că x este număr real și $\cos x=\frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & -a & 1\\ 2 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+y-z=1\\ x-ay+z=3\\ 2x+ay-z=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.

5p **c)** Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-xy$.

5p **a)** Arătați că $(-3)*3=9$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x*4^{x-1}=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1+\frac{3}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot f'(x)}{x-4}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2xe^{x}-2x+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+2e^{x}-2x+2021$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\int_{1}^{e} f(x)\,dx=2e^{e}-4e+3$.

5p **c)** Calculați $\int_{1}^{2} x\,f(x)\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{10}-\sqrt{6}$, 2 și $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^{2021}}{x^2+1}$. Arătați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-3\cdot 2^{x+1}=16$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-2,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are măsura unghiului A de $30°$ și măsura unghiului B de $45°$. Arătați că $AC=BC\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4 & 1 & m\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}4x+y+mz=9\\ x+2y-z=4\\ -2x-3y=-7\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-10$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați inversa matricei $A(9)$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, $m\neq 10$, dacă (a,b,c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a=b+c$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $x*3=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=-46$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{5^x}{7}+3$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2x+\dfrac{1}{x}-4\ln(x+2)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 (x+2) f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m > 2$, astfel încât $\int_2^m f(x)\,dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=-5$ și rația $r=8$.

5p **2.** Determinați valorile reale nenule ale lui a pentru care ecuația $ax^2-x-a-1=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3x-\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=2x$.

5p **4.** Calculați $5A_3^2-3C_5^3$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{b}=5\vec{i}-\left(m^2+1\right)\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB>BC$, $AC=6$, $BC=10$ și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a,b)=aI_2+bA$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a,b)\cdot M(x,y)=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B=M(x,2y)+M(y,2x)$ și $C=M\left(x\sqrt{2},1\right)\cdot M\left(y\sqrt{2},1\right)$ sunt egale, atunci $x^2+y^2=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=xy+2x+2y+2$ și $x\circ y=x+y+2$.

5p **a)** Arătați că $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ3)$.

5p **b)** Demonstrați că $x*e=e$, pentru orice număr real x, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*(-n)\ge n\circ(-n)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0)\\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1+x\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

5p **b)** Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m \in (0,1)$, pentru care $\int_{m}^{1} f^2(x)g(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(2-\lg 40\right)\cdot\dfrac{1}{\lg^2 5-\lg^2 2}=1$.
5p	**2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x-m^2+1=0$ este număr real strict mai mic decât 0.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x}=4^{2x}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)!-n!\le n+2$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{BC}$.
5p	**6.** Determinați numerele reale a, $a>-2$, știind că a^2+1 și $a+2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{a}\\ 1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(4)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det\left(A(a)\cdot A(1)-A(a+1)\right)>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Arătați că matricea $B(n)=A\left(1^2\right)+A\left(2^2\right)+A\left(3^2\right)+\ldots+A\left(n^2\right)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{3}(xy+4)-3(x+y)$.
5p	**a)** Arătați că $\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Calculați $3^1\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-\operatorname{arctg} x, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{5x}{x^2+x+4}, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.
5p	**a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=16$.

5p **b)** Calculați $\int_1^3 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media geometrică a numerelor $x=\log_6 8+\log_6 27$ și $y=\sqrt{2^2\cdot 3^3+6^2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+a$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2}=7^{2x-1}$.

5p **4.** Arătați că produsul numerelor A_5^2, C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,\ a+1)$, $B(2,-3)$ și $C(3,\ 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6**. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP, dreptunghic în N, știind că $MN=12$ și $NP=16$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ 2 & 4 & -a\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=1\\ 2x+4y-az=1\\ x+ay-z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3-27}$.

5p **a)** Arătați că $2021*(-2021)=-3$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3}{x^6+7}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x^2\left(x^3-1\right)\left(x^3+7\right)}{\left(x^6+7\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\left|f(x)-f(y)\right|\le\frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{e-1}{2e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_{2021} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=2$ și $a_3=8$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ cu dreapta d de ecuație $y=-x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3^{x+2}}=27$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al numărului 48.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-4)\vec{i}+2\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=6$, $AC=3$ și unghiul A de $120°$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a & 1 & 1\\ 1 & 2a & 1\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2ax+y+z=0\\ x+2ay+z=1\\ x+ay-z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul întreg a, știind că există numerele reale y_0 și z_0 astfel încât $(1,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+5xy+y$.

5p **a)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $q=\left(-\frac{1}{2}\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,0)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^n+1}{x^2+1}$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Pentru $n=3$, se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^2+1)f(x)$. Determinați primitiva G a funcției g pentru care $G(0)=2021$.

5p **b)** Pentru $n=1$, calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_2 = 2$ și $b_3 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției f intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x+2} = 1 - x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,0)$ și $C(a,a+2)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = -2$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere întregi și $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a)\cdot X = A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea $A=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}$.

5p **a)** Arătați că numărul $a = 2\circ 4$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x\circ y \ge 4$, pentru orice $x, y \in A$.

5p **c)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+4)f(x)\,dx = 6$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^n f(x)e^{-x}\,dx < 1$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_3=5$ şi $a_5=11$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$. Determinaţi numărul real a știind că $f(a)=f(a+1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x+13}=x+1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ şi $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care dreptele OC și AB sunt perpendiculare.

5p **6.** Arătaţi că, pentru orice număr real x, $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=2$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere întregi (m,n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+2ay$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ 0=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, știind că $x\circ 1>4$ dacă și numai dacă $x\in(3,+\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă dacă şi numai dacă $a=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x$ este tangentă la graficul funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^{\pi} f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^{\pi} xf(x)\,dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx\ge\int_0^1 f^2(x)\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z_1 = 1-2i$ și $z_2 = 1+\frac{1}{2}i$, unde $i^2 = -1$, atunci $z_1 + z_2 = z_1 z_2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, astfel încât $(f\circ f)(x) = 2f(x-1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}\cdot 2^x = 50\cdot 7^{x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,2,4\}\to\{3,5,7,9\}$ cu proprietatea $f(2)\le 8$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(-2,4)$, $B(2,0)$ și C astfel încât $AC = BC$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x = \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x + 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x)) = 6^{2x}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot B = B\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 1 = 12$.

5p **b)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât $2a+2b+c\ne 0$. Știind că $c\circ a = c\circ b$, demonstrați că $a = b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ(x+1) = 5x^3 + 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x + a(x+1)$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \ln x + 1 + a$, $x\in(0,+\infty)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a = 1$, determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\frac{1}{e}$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{1} x f(x^2)\,dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^2 x^n\left(f(x) - 2x\right)dx$. Demonstrați că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_2=6$ și $b_3=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-4$. Determinați numerele reale a, pentru care $f(-a)+f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+1}=16\cdot4^{-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ şi $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ şi $B(a,b)=\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1,2))=-1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A\cdot B(a,b))=0$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** Determinați numerele reale a şi b pentru care $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=|x-y|+1$.

5p **a)** Arătați că $3\circ5=3$.

5p **b)** Calculați $a-b$, știind că $a=(2\circ3)\circ4$ şi $b=2\circ(3\circ4)$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m\circ n=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 2f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^e f(e^x)\,dx\le\int_0^e e^{f(x)}\,dx$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi termenul b_8 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, știind că $b_5=3$ și $b_6=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x-3$. Arătați că $(f\circ f)(\sqrt{3})=\sqrt{3}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\lg x=\lg(5x+6)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităţilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(-1,-2)$ și $C(a,-2)$, unde a este număr real nenul, $a\neq-1$. Determinați numărul real a pentru care ortocentrul triunghiului ABC este O.

5p **6.** În triunghiul ABC, $AB=6$, $AC=3\sqrt{6}$ și $B=\frac{\pi}{3}$. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=3$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg k pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=kA(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=3xy-2x-2y+2$.

5p **a)** Arătați că numărul $\frac{1}{3}\circ\frac{1}{3}$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x\circ x\geq\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ x\circ x=e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 f^4(x)\,dx=21$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f\left(e^x\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)}dx = 2e^2$.