

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y - 6$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 6$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2^x * 4^x = 0$ .
- 5p** e) Pentru  $a \in \mathbb{R}$ , să se calculeze  $m = \underbrace{a * a * \dots * a}_{7 \text{ termeni}}$ .
- 5p** f) Să se arate că numărul  $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} * \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$  este număr rațional.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 4$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că mulțimea  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** e) Să se calculeze  $m = \underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_{5 \text{ termeni}}$ .
- 5p** f) Să se arate că numerele  $a = (5 * 5) - 3$ ,  $b = (5 * 5 * 5) - 3$ ,  $c = (5 * 5 * 5 * 5) - 3$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- 5p** a) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x * (x + 1) = x + 2$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se arate că legea "\*" nu admite element neutru.
- 5p** d) Să se demonstreze că  $|x + y| \leq (x * y)\sqrt{2}$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** e) Să se arate că numerele  $a = (1 * 1)^2$ ,  $b = (1 * 1 * 1)^2$ ,  $c = (1 * 1 * 1 * 1)^2$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** f) Să se arate că numărul  $(1 + \sqrt{7}) * (1 - \sqrt{7})$  este pătratul unui număr natural.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (1, \infty)$  se definește operația  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = \sqrt{2}$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că mulțimea  $G$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** f) Să se rezolve ecuația  $x * 2 = 5$ , unde  $x \in G$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (0, \infty)$  se consideră legea de compoziție  $x * y = x^{\log_2 y}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = 2^{(\log_2 x)(\log_2 y)}$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se compare numerele  $a = (2^2 * 4^2) * 2^3$  și  $b = (2^2 \cdot 2^3) * (2^2 \cdot 4^2)$
- 5p** c) Să se arate că legea "\*" este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 2$ .
- 5p** e) Să se determine simetricul elementului  $x = 8^3$  în raport cu legea "\*".
- 5p** f) Să se rezolve ecuația  $x * x = 2$ , unde  $x \in G$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (0, 1)$  se definește operația  $x * y = \frac{xy}{2xy + 1 - x - y}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = \frac{1}{2}$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că mulțimea  $G$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** f) Să se rezolve ecuația  $x * \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$ , unde  $x \in G$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ .

- 5p a) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p b) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 0$ .
- 5p c) Să se demonstreze că  $\mathbb{R}$  împreună cu legea "\*" formează o structură algebrică de grup comutativ.
- 5p d) Să se arate că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de legea "\*".
- 5p e) Să se demonstreze că  $(\mathbb{R}, *, \cdot)$  este corp, unde " $\cdot$ " este înmulțirea pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p f) Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} x * y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} x, y \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$ . Se notează cu  $H$  mulțimea numerelor întregi impare.

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = \frac{1}{2}(x+1)(y+1) - 1$ , pentru oricare  $x, y \in \mathbb{Q}$ .
- 5p** b) Să se arate că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 1$ .
- 5p** d) Să se arate că  $x * y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** e) Să se determine elementele  $x \in H$  cu proprietatea că există  $x' \in H$ , astfel încât  $x * x' = x' * x = 1$ .
- 5p** f) Să se arate că  $x * \frac{1}{x} \geq 1$ , pentru orice  $x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 2(x + y) + m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = (x - 2)(y - 2) + m - 4$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine  $m$  astfel încât  $2009 * 2009 = 2007^2 + 2$ .
- 5p** c) Pentru  $m = 6$  să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x * a = a * x = a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** d) Să se determine  $m$  știind că elementul neutru al legii "\*" este  $e = 3$ .
- 5p** e) Pentru  $m = 6$  să se calculeze  $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{2009}$ , știind că legea "\*" este asociativă.
- 5p** f) Să se determine cea mai mică valoare a numărului  $m$  astfel încât  $x * y \in [2, \infty)$ , pentru orice  $x, y \in [2, \infty)$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = 2(x - 1)(y - 1) + 1$ , pentru oricare  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = \frac{3}{2}$ .
- 5p** d) Se consideră mulțimea  $G = (1, \infty)$ . Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** e) Să se arate că  $G = (1, \infty)$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup comutativ.
- 5p** f) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x = \frac{3}{2}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 1}$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = -1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** d) Să se demonstreze că expresia  $E(x) = x * (-x)$  nu depinde de  $x$ .
- 5p** e) Să se arate că  $\frac{x}{y} * \frac{y}{x} \neq 1$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^*$ .
- 5p** f) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2^x * 4^x = \sqrt[3]{3}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor raționale se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y + a$  și  $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$ , cu  $a \in \mathbb{Q}$ .

- 5p** a) Să se arate că legea "°" este asociativă.  
**5p** b) Să se verifice că legea "°" admite elementul neutru  $e = -1$ .  
**5p** c) Să se determine  $a \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$ .  
**5p** d) Să se arate că mulțimea  $\mathbb{Q}$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup comutativ.  
**5p** e) Să se determine  $m \in \mathbb{Q}$  pentru care are loc egalitatea  $x \circ x \circ x = (x + 2)^3 + m$ , oricare  $x \in \mathbb{Q}$ .  
**5p** f) Pentru  $a = 2$ , să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{Q}$  ecuația  $x * x = x \circ x$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + 4$ .

- 5p** a) Să se arate că pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ , are loc inegalitatea  $2^a * 2^{-a} \geq 6$ .
- 5p** b) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2^x * 2^{x+1} = 16$ .
- 5p** c) Să se arate că legea "\*" este asociativă.
- 5p** d) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = -4$ .
- 5p** e) Să se arate că mulțimea  $\mathbb{R}$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup comutativ.
- 5p** f) Să se rezolve ecuația  $(\log_2 x) * (\log_2 x^2) = 7$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 6x - 6y + 42$ . Fie mulțimea  $G = [5, 7] \subset \mathbb{R}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = (x - 6)(y - 6) + 6$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 7$ .
- 5p** d) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** e) Fie  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 7\}$ . Să se arate că mulțimea  $M$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup comutativ.
- 5p** f) Să se determine numerele întregi  $x$  și  $y$  pentru care  $x * y = 7$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (\sqrt{2}, \infty)$  se definește operația  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = \sqrt{(x^2 - 2)(y^2 - 2) + 2}$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = \sqrt{3}$ .
- 5p** e) Să se determine simetricul elementului  $x = \sqrt{8}$  în raport cu legea "\*".
- 5p** f) Să se arate că numerele  $a = (2 * 2)^2 - 2$ ,  $b = (2 * 2 * 2)^2 - 2$ ,  $c = (2 * 2 * 2 * 2)^2 - 2$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 3$  și  $x \circ y = xy - 3x - 3y + a$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ .

- 5p** a) Să se arate că pentru  $a = 12$  legea " $\circ$ " este asociativă.
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  știind că legea " $\circ$ " admite elementul neutru  $e = 4$ .
- 5p** c) Să se determine  $a \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$ .
- 5p** d) Să se arate că mulțimea  $\mathbb{R}$  împreună cu legea " $*$ " formează o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Pentru  $a = 12$  să se determine  $m \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $x \circ x \circ x = (x - 3)^3 + m$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Q}$ .
- 5p** f) Pentru  $a = 12$  să se rezolve sistemul  $\begin{cases} x * y = 2 \\ x \circ y = 1 \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + 3$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = -3$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că mulțimea  $\mathbb{R}$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(\log_2 x) * (\log_4 x) = 6$ .
- 5p** e) Să se arate că numerele  $a = 2 * 2 * 2$ ,  $b = a * 2$  și  $c = b * 2$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** f) Să se arate că numărul  $m = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} * \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$  este pătratul unui număr natural.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = 3(x + 2)(y + 2) - 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = -\frac{5}{3}$ .
- 5p** d) Să se determine simetricul numărului  $x = \frac{1}{3}$  în raport cu legea "\*".
- 5p** e) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  pentru care are loc egalitatea  $x * x * x = 3^n(x + 2)^3 - n, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se arate că numerele  $a = (-1) * (-1) + 2, b = (-1) * (-1) * (-1) + 2, c = (-1) * (-1) * (-1) * (-1) + 2$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (-2, 2)$  se definește operația  $x * y = \frac{4(x+y)}{4+xy}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 0$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că mulțimea  $G$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** e) Să se arate că  $x * y = \frac{2(x+2)(y+2) - 2(2-x)(2-y)}{(x+2)(y+2) + (2-x)(2-y)}$ , pentru orice  $x, y \in G$ .
- 5p** f) Să se determine  $x \in G$  pentru care  $1 * x = 1 * 1 * 1$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 1$  și  $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că legea "o" este asociativă.  
**5p** b) Să se verifice că legea "o" admite element neutru  $e = 3$ .  
**5p** c) Să se demonstreze că legea "o" este distributivă față de legea "\*".  
**5p** d) Să se arate că mulțimea  $\mathbb{R}$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup comutativ.  
**5p** e) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $a \circ x = a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  
**5p** f) Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \circ 3 \circ 1 = x \circ x$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție  $x * y = xy + 2x + 2y + a$ , cu  $a \in \mathbb{Z}$ .

- 5p** a) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  știind că legea "\*" admite element neutru.
- 5p** b) Pentru  $a = 2$  să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Dacă  $a = 2$  să se arate că  $(x + y + 2) * z = (x * z) + (y * z) + 2$ , pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** d) Pentru  $a = 2$  să se determine mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{există } x' \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x * x' = -1\}$ .
- 5p** e) Pentru  $a = 2$  să se determine  $x, y \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $x * y = 3$ .
- 5p** f) Fie mulțimea  $H = \{-3, -1\}$ . Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  astfel încât, pentru oricare  $x, y \in H$ , să rezulte că  $x * y \in H$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$ .

- 5p** a) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x * x = 1$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = 1$ .
- 5p** d) Să se determine simetricul numărului  $x = \sqrt[3]{10}$  în raport cu legea "\*".
- 5p** e) Să se arate că numerele  $a = (2 * 2)^3$ ,  $b = (2 * 2 * 2)^3$  și  $c = (2 * 2 * 2 * 2)^3$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** f) Să se arate că numărul  $m = \sqrt[3]{32} * \sqrt[3]{33}$  este pătratul unui număr natural.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = 2(x + 3)(y + 3) - 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = -\frac{5}{2}$ .
- 5p** d) Se consideră mulțimea  $G = (-3, +\infty)$ . Să se arate că pentru oricare  $x, y \in G$ , rezultă că  $x * y \in G$ .
- 5p** e) Să se arate că mulțimea  $G = (-3, +\infty)$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** f) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  pentru care are loc egalitatea  $x * x * x = 2^n(x + 3)^3 - 3, \forall x \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (2, +\infty)$  se definește operația  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 4}$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se verifice că legea "\*" admite elementul neutru  $e = \sqrt{5}$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că mulțimea  $G$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup.
- 5p** f) Să se determine numerele naturale  $x, y \in G$  pentru care  $x * y = 8$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 5$  și  $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$ .

- 5p** a) Să se arate că legea "o" este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că legea "o" admite elementul neutru  $e = 6$ .
- 5p** c) Să se arate că legea "o" este distributivă față de legea "\*".
- 5p** d) Să se demonstreze că  $\mathbb{Z}$  împreună cu legea "\*" formează o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se arate că  $(\mathbb{Z}, *, \circ)$  este inel.
- 5p** f) Să se determine numărul întreg  $x$  pentru care  $x \circ x = x^2$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - \sqrt{2}(x + y) + 2 + \sqrt{2}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $x * \sqrt{2}$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii „ $*$ ”.
- 5p** e) Să se demonstreze că structura algebrică  $(\mathbb{R}, *)$  nu este grup.
- 5p** f) Să se calculeze  $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * 1 * 0 * 1 * (\sqrt{2}) * (\sqrt{3})$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - 2009(x + y) + 2009^2 + 2009$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y = (x - 2009)(y - 2009) + 2009$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- 5p** b) Să se demonstreze că legea „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** c) Folosind eventual a) să se calculeze  $2009 \circ 2009 \circ 2009 \circ 2009$ .
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii „ $\circ$ ”.
- 5p** e) Se consideră mulțimea  $H = [2009, +\infty)$ . Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** f) Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \circ (x - 1) = 2009^2$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = \frac{(x+1)(y+1)}{2} - 1$  și

$$x \circ y = \begin{cases} \frac{(x+1)(y+1)}{2} - 1, & x \in \mathbb{R}^* \text{ sau } y \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}.$$

- 5p** a) Să se demonstreze că legea de compoziție “\*” este asociativă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că există  $e \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x * e = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se arate că structura algebrică  $(\mathbb{R}, *)$  nu este grup.
- 5p** d) Să se calculeze  $\underbrace{(-1) * 0 * 1 * (-1) * 0 * 1 * \dots * (-1) * 0 * 1}_{201 \text{ termeni}}$ .
- 5p** e) Se consideră mulțimea  $H = \{-1, 0, 1\}$ . Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** f) Să se arate că legea “ $\circ$ ” admite element neutru pe  $H = \{-1, 0, 1\}$ .

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = \frac{xy + x + y - 1}{2}$  și

$$x \circ y = \begin{cases} \frac{xy + x + y - 1}{2}, & x \in \mathbb{R}^* \text{ sau } y \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}.$$

- 5p** a) Să se demonstreze că legea de compoziție „\*” este asociativă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $x * (-1)$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $(-2009) * (-2008) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 2008 * 2009$ .
- 5p** d) Să se arate că legea „\*” admite element neutru.
- 5p** e) Se consideră mulțimea  $H = \{-1, 0, 1\}$ . Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** f) Să se arate că legea „ $\circ$ ” admite element neutru pe  $H$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe intervalul  $I = [1, +\infty)$  se definește operația  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2} + 2$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y \in I$ , pentru oricare  $x, y \in I$ .
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se determine elementul neutru al legii „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se arate că  $(x * x)^2 - 1 = (x^2 - 1)^2$ , pentru orice  $x \in I$ .
- 5p** e) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „ $*$ ” definită pe mulțimea  $H = \{0, 1, \sqrt{2}\}$ .
- 5p** f) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii  $H = \{0, 1, \sqrt{2}\}$  în raport cu legea „ $*$ ” definită pe  $H$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 2$  și  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ .

- 5p** a) Să se determine elementul neutru al legii „\*”.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea „\*” este asociativă.
- 5p** c) Să se arate că legea „ $\circ$ ” admite element neutru pe  $\mathbb{Z}$ .
- 5p** d) Se consideră mulțimea  $H = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ . Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că are loc egalitatea  $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$ , pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** f) Să se arate că  $(\mathbb{Z}, *, \circ)$  este inel.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Se consideră  $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , mulțimea tuturor resturilor obținute prin împărțirea numerelor naturale la 8. Pe mulțimea  $M$  se definesc legile de compoziție  $x \odot y = r$ , unde  $r$  este restul împărțirii produsului  $x \cdot y$  la 8 și  $x \oplus y = p$ , unde  $p$  este restul împărțirii sumei  $(x + y)$  la 8.

Se admite că legile de compoziție " $\odot$ " și " $\oplus$ " sunt asociative.

- 5p** a) Să se alcătuiască tablele legilor de compoziție " $\odot$ " și " $\oplus$ " definite pe mulțimea  $M$ .
- 5p** b) Să se arate că  $(5 \oplus 6) \odot 7 = (5 \odot 7) \oplus (6 \odot 7)$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\underbrace{7 \odot 7 \odot \dots \odot 7}_{2010 \text{ cifre}}$ .
- 5p** d) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii  $M$  în raport cu legea " $\odot$ ".
- 5p** e) Se consideră mulțimea  $H = \{0, 2, 4, 6\}$ . Să se arate că  $x \oplus y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** f) Fie mulțimea  $G = \{1, 3, 5, 7\}$ . Să se demonstreze că mulțimea  $G$  împreună cu legea de compoziție " $\odot$ " formează o structură de grup comutativ.

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (1, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = 1 + \log_3 x + \log_3 y$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se compare numerele  $a = (3^2 \circ 3^3) \circ 3^4$  și  $b = 3^2 \circ (3^3 \circ 3^4)$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $\circ$ ” nu este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că  $3^m \circ 3^n = m + n + 1$ , pentru oricare  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** e) Să se rezolve ecuația  $3^x \circ 9^x = 10$  în mulțimea  $G$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $(3^1 \circ 3^2) + (3^3 \circ 3^4) + (3^5 \circ 3^6) + \dots + (3^{11} \circ 3^{12})$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + m$ , unde  $m \in \mathbb{Z}$ .

- 5p** a) Să se arate că legea de compoziție "\*" este asociativă.
- 5p** b) Să se determine  $m$  astfel încât  $e = -6$  să fie elementul neutru al legii "\*",
- 5p** c) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x^2 * x = m$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că dacă  $m$  este număr strict pozitiv, atunci ecuația  $x^2 * x = 0$  nu are soluții reale.
- 5p** e) Să se calculeze  $(-x) * x * y * (-y)$ .
- 5p** f) Să se determine  $m$  astfel încât  $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * \sqrt{2} * \sqrt{3} = 6$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2009(x - 2009)(y - 2009) + 2009$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că legea "\*" este comutativă.
- 5p** b) Să se determine  $y \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x * y = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se determine  $z \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x * z = z, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că  $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{2009\}$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{2009\}$ .
- 5p** e) Să se arate că legea "\*" determină pe  $\mathbb{R} \setminus \{2009\}$  o structură de grup comutativ.
- 5p** f) Să se determine două numere  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  cu proprietatea că  $a * b \in \mathbb{Z}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  se definește legea de compoziție  $x * y =$  ultima cifră a produsului  $x \cdot y$ . Se admite că legea de compoziție "\*" este asociativă pe mulțimea  $M$ .

- 5p** a) Să se arate că  $5 * x = 0$ , pentru orice  $x$  număr par din mulțimea  $M$ .
- 5p** b) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție "\*".
- 5p** c) Să se calculeze  $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$ .
- 5p** d) Să se determine elementele simetrizabile mulțimii  $M$  în raport cu legea "\*".
- 5p** e) Se consideră mulțimea  $H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Să se arate că  $x * y \in H$ , pentru orice  $x, y \in H$ .
- 5p** f) Să se rezolve ecuația  $(x * 3) * 7 = 9$ , unde  $x \in M$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor naturale se definește legea de compoziție  $x * y = r$ , unde  $r$  este restul împărțirii produsului  $x \cdot y$  la 10. Se admite că legea "\*" este asociativă pe  $\mathbb{N}$ . Se consideră mulțimea  $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $10 * 0 = 0 \forall \in$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $5 * 5 * 5 * 5 * 5$ .
- 5p** c) Să se arate că  $x * y \in I$ , pentru oricare  $x, y \in I$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că legea "\*" determină pe mulțimea  $I \setminus \{5\}$  o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se calculeze  $2 * 4 * 6 * \dots * 2008 * 2010$ .
- 5p** f) Să se demonstreze că legea "\*" nu admite element neutru.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

În mulțimea  $\mathbb{Q}$  a numerelor raționale se consideră submulțimile  $M = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  și  $P = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că produsul oricăror două elemente din  $M$  este tot un element al mulțimii  $M$ .
- 5p** b) Să se arate că înmulțirea numerelor raționale determină pe mulțimea  $M$  o structură de grup comutativ.
- 5p** c) Să se arate că  $x \cdot y \in P$ , pentru oricare  $x, y \in P$ .
- 5p** d) Să se determine mulțimea  
 $U(P) = \{x \in P \mid x \text{ este element inversabil al mulțimii } P \text{ în raport cu înmulțirea numerelor întregi}\}.$
- 5p** e) Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea  $M$  care au exponenți naturali consecutivi este element al mulțimii  $P$ .
- 5p** f) Să se arate că  $M \cap P \neq \emptyset$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 8(x-8)(y-8) + 8$ . Se consideră mulțimea  $H = [8, +\infty)$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $x * 8$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** c) Să se calculeze  $(-8) * (-7) * \dots * 0 * \dots * 7 * 8$ .
- 5p** d) Să se arate că  $x * y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** e) Să se arate că legea "\*" admite element neutru pe mulțimea  $H$ .
- 5p** f) Să se arate că există  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  cu proprietatea că  $a * b \in \mathbb{Z}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor naturale se definește legea de compoziție  $x * y = r$ , unde  $r$  este restul împărțirii produsului  $x \cdot y$  la 10. Se admite că legea "\*" este asociativă pe  $\mathbb{N}$ . Se consideră mulțimea  $P = \{2, 4, 6, 8\}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $10 * 0 \notin \mathbb{N}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $6 * 6 * 6 * 6$ .
- 5p** c) Să se arate că  $x * y \in P$ , pentru oricare  $x, y \in P$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că legea "\*" determină pe mulțimea  $P$  o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația  $(x * 2) * 4 = 8$  în mulțimea  $P$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $1 * 2 * 3 * \dots * 2008 * 2009$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Fie mulțimile  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a^2 + 2b^2, a, b \in \mathbb{Z}\}$ ,  $H = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$  și legea de compoziție definită pe mulțimea  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $x * y =$  ultima cifră a numărului  $x^y$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că  $H \subset M$ .
- 5p** b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{N}$  pentru care  $1 = a^2 + 2b^2$ .
- 5p** c) Să se determine elementele inversabile din mulțimea  $M$  în raport cu operația de înmulțire a numerelor naturale.
- 5p** d) Să se verifice că  $9 * 2 \neq 2 * 9$ .
- 5p** e) Să se arate că  $x * y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** f) Să se determine o submulțime cu două elemente a mulțimii  $H$  pe care legea "\*" este comutativă.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 7(x + y) + 7^2 + 7$ . Se consideră intervalul  $I = [6, 8]$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $7 * x$ , pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y = (x - 7)(y - 7) + 7$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** d) Să se arate că dacă  $x = 6 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y = 6 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ , atunci  $x * y \in I$ .
- 5p** e) Să se arate că legea "\*" admite element neutru pe  $I$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $1 * 2 * 3 * \dots * 2008 * 2009$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Se consideră mulțimea  $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  și operațiile "+" și "." de adunare și respectiv de înmulțire a numerelor reale.

- 5p** a) Să se demonstreze că  $x + y \in M$ , pentru oricare  $x, y \in M$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $x \cdot y \in M$ , pentru oricare  $x, y \in M$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\{0, 1\} \subset M$ .
- 5p** d) Să se arate că numărul  $5 - \sqrt{2}$  nu este element inversabil al mulțimii  $M$  în raport cu operația "."
- 5p** e) Să se arate că  $(M, +)$  este grup comutativ.
- 5p** f) Să se demonstreze că orice element al mulțimii  $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$  este element inversabil în raport cu operația "." definită pe  $H$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe intervalul  $I = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}$ . Se consideră intervalul

$$I_1 = (-\infty, 1].$$

- 5p** a) Să se calculeze  $x = \sqrt{2} * (-\sqrt{2})$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in I_1$ , pentru oricare  $x, y \in I_1$ .
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" este asociativă pe  $I_1$ .
- 5p** d) Să se verifice că  $x * 1 = 1$ , pentru orice  $x \in I_1$ .
- 5p** e) Să se arate că legea "\*" nu admite element neutru pe mulțimea  $I_1$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $(-2009) * (-2008) * \dots * (-1) * 0 * 1$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe intervalul  $I = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{xy - 6}{x + y - 5}$ . Se consideră intervalul

$$I_1 = [3, +\infty).$$

- 5p** a) Să se calculeze  $\sqrt{7} * 5$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in I_1$ , pentru oricare  $x, y \in I_1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe  $I_1$ .
- 5p** d) Să se verifice că  $3 * x = 3$ , pentru orice  $x \in I_1$ .
- 5p** e) Să se arate că legea "\*" nu admite element neutru pe  $I_1$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $3 * 4 * 5 * \dots * 2008 * 2009$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție  $x * y = x \cdot y + x + y$ . Se consideră mulțimea

$$H = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- 5p** a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația  $(x-1) * x = -1$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea "\*" admite element neutru.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.
- 5p** d) Să se demonstreze că  $x * y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** e) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a * x = -1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** f) Să se demonstreze că dacă  $x \in \mathbb{Z}$  este element simetrizabil în raport cu legea "\*", atunci  $x \in H$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe intervalul  $I = [2, +\infty)$  se definește operația  $x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $\sqrt{5} * 3$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in I$ , pentru oricare  $x, y \in I$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă pe intervalul  $I$ .
- 5p** d) Să se verifice că  $2 * x = 2$ , pentru orice  $x \in I$ .
- 5p** e) Să se arate că legea "\*" nu admite element neutru pe mulțimea  $I$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $2 * 3 * 4 * \dots * 2008 * 2009$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe intervalul  $I = (-\infty, 2]$  se definește operația  $x * y = \frac{xy - 6}{x + y - 5}$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că dacă  $x = \sqrt{3}$  și  $y = -\sqrt{3}$ , atunci  $x * y \in I$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in I$ , pentru oricare  $x, y \in I$ .
- 5p** c) Să se verifice că legea "\*" este asociativă pe intervalul  $I$ .
- 5p** d) Să se verifice că  $x * 2 = 2$ , pentru orice  $x \in I$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că legea "\*" nu admite element neutru pe mulțimea  $I$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $(-2009) * (-2008) * \dots * 0 * 1 * 2$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Se consideră mulțimea  $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  și operațiile „+” și „·” de adunare și respectiv de înmulțire a numerelor reale.

- 5p** a) Să se demonstreze că  $x \cdot y \in M$ , pentru oricare  $x, y \in M$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $x + y \in M$ , pentru oricare  $x, y \in M$ .
- 5p** c) Să se arate că mulțimea  $\{0, 1\} \subset M$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că  $(M, +, \cdot)$  este inel comutativ.
- 5p** e) Să se determine simetricul elementului  $x = 2 - \sqrt{3} \in M$ , în raport cu operația „·”.
- 5p** f) Să se determine două numere  $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$  astfel încât  $x \cdot y \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Se consideră mulțimea  $M = \{a + b\sqrt{15} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  și operațiile „+” și „·” de adunare și respectiv de înmulțire a numerelor reale.

- 5p** a) Să se demonstreze că  $x \cdot y \in M$ , pentru oricare  $x, y \in M$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $x + y \in M$ , pentru oricare  $x, y \in M$ .
- 5p** c) Să se arate că mulțimea  $\{0, 1\} \subset M$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că  $(M, +, \cdot)$  este inel comutativ.
- 5p** e) Să se determine simetricul elementului  $x = 4 - \sqrt{15} \in M$ , în raport cu operația „·”.
- 5p** f) Să se determine două numere  $x, y \in M \setminus \mathbb{Q}$  astfel încât  $x \cdot y \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție  $x \perp y = x + y - \frac{xy}{2}$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $x \perp y + \frac{(2-x)(2-y)}{2} - 2$ , unde  $x, y \in \mathbb{Q}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție “ $\perp$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție “ $\perp$ ” admite element neutru.
- 5p** d) Să se determine  $a \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $x \perp a = a$ , pentru orice  $x \in \mathbb{Q}$ .
- 5p** e) Fie mulțimea  $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ . Să se demonstreze că  $(M, \perp)$  este grup comutativ.
- 5p** f) Să se calculeze  $(-8) \perp (-7) \perp \dots \perp (-1) \perp 0 \perp 1 \perp \dots \perp 7 \perp 8$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ x + y, & x < y \leq 2 \\ y - x, & x \leq 3 \text{ și } y > 2 \end{cases}$ .

- 5p** a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $\circ$ ” nu este comutativă.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\circ$ ” nu este asociativă.
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\circ$ ” admite element neutru pe  $H$ .
- 5p** e) Să se verifice că  $x \circ x = 0$ , pentru orice  $x \in H$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $(0 \circ 1) \circ (0 \circ 2)$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3}$ . Se consideră

mulțimea  $H = \left[ \frac{1}{3}, +\infty \right)$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x \circ a = a \circ x = a$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se determine  $b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x \circ b = b \circ x = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** d) Să se verifice că mulțimea  $A = \left\{ x \in H \mid \text{există } x' \in H \text{ astfel încât } x \circ x' = x' \circ x = \frac{4}{9} \right\} = H \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că  $\left( H \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}, \circ \right)$  este grup comutativ.
- 5p** f) Să se determine două numere  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  pentru care  $a \circ b = 2$ .

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție  $x * y = x \cdot y + x + y$ . Se consideră mulțimea  $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

- 5p** a) Să se determine elementul neutru al legii "\*".
- 5p** b) Să se verifice că dacă  $x * y = (-x) * (-y)$ , atunci  $x + y = 0$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $x * y \in H$ , pentru orice  $x, y \in H$ .
- 5p** d) Să se arate că  $(x * y) * z = (x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** e) Să se calculeze  $(2010 * 2009) * (-1)$ .
- 5p** f) Să se arate că dacă  $x \in \mathbb{Z}$  este element simetrizabil în raport cu legea "\*", atunci  $x * x = 0$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = |x - y|$ . Se consideră mulțimea

$$H = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru orice  $x, y \in H$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă pe  $H$ .
- 5p** c) Să se arate că legea de compoziție „ $\circ$ ” nu este asociativă pe  $H$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\circ$ ” admite element neutru pe  $H$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(x^2) \circ (-1) = 10$ .
- 5p** f) Să se determine numerele întregi  $x$  pentru care  $x \circ 1 \leq 1$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $A = [0,1)$  se definește operația  $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că  $x * y = \frac{2xy}{(2x-1)(2y-1)+1}$ , pentru orice  $x, y \in A$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in A$ , pentru oricare  $x, y \in A$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că operația "\*" este asociativă.
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „\*” admite element neutru pe  $A$ .
- 5p** e) Să se determine mulțimea  $B = \left\{ x \in A \mid \text{există } x' \in A, \text{ astfel încât } x * x' = x' * x = \frac{1}{2} \right\}$ .
- 5p** f) Să se demonstreze că  $(A \setminus \{0\}, *)$  este grup comutativ.

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (1, +\infty)$  se definește operația  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1$ , pentru orice  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se rezolve în  $G$  ecuația  $x * 2 = 2$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** e) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru pe  $G$ .
- 5p** f) Să se determine  $x \in G$  pentru care există  $x' \in G$ , astfel încât  $x * x' = x' * x = \sqrt{2}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x \perp y = xy - 4(x + y) + 20$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că  $x \perp y = (x - 4)(y - 4) + 4$ , pentru orice  $y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \perp (x + 1) = 4$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $x \perp y \geq 4$  pentru oricare  $x, y \in [4, +\infty)$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\perp$ ” este asociativă.
- 5p** e) Să se arate că 5 este element neutru pentru legea de compoziție „ $\perp$ ”.
- 5p** f) Să se calculeze  $1 \perp 2 \perp 3 \perp 4 \perp 5$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x + y + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \circ \left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \geq 0$  pentru oricare  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că legea „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $\circ$ ” admite element neutru.
- 5p** d) Să se demonstreze că  $(\mathbb{R}, \circ)$  este grup comutativ.
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\log_2(x \circ x^2) = -2$ .
- 5p** f) Să se determine  $n \in \mathbb{Z}$  pentru care  $\left(2^n + \frac{1}{4}\right) \circ \left(2^{n+1} + \frac{1}{4}\right) = 6$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că „ $*$ ” este lege de compoziție asociativă.  
**5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru pe  $\mathbb{Z}$ .  
**5p** c) Să se determine  $x \in \mathbb{Z}$  pentru care există  $x' \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $x * x' = 0$ .  
**5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $3^x * 3^{x+1} = 7$ .  
**5p** e) Să se calculeze  $0 * (-1) * (-2) * \dots * (-13)$ .  
**5p** f) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $x * y = 1$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc următoarele legi de compoziție  $a * b = a + b + ab$  și  $a \circ b = a + b - ab$ .

- 5p** a) Se consideră mulțimea  $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -1\}$ . Să se arate că  $x * y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** b) Se consideră mulțimea  $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$ . Să se arate că  $x \circ y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** e) Să se demonstreze că pentru orice  $a \in \mathbb{N}^*$  are loc inegalitatea  $\left(a * \frac{1}{a}\right) \geq 3$
- 5p** f) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $x * x = -1$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 7xy + x + y$ .

- 5p** a) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \circ 1 = 9$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $\circ$ ” este asociativă. **d)**
- 5p** Să se determine elementul neutru al legii „ $\circ$ ”.
- 5p** e) Să se arate că numărul  $-\frac{1}{7}$  este nesimetrizabil în raport cu legea „ $\circ$ ”.
- 5p** f) Să se calculeze  $\left(-\frac{3}{7}\right) \circ \left(-\frac{2}{7}\right) \circ \left(-\frac{1}{7}\right)$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 5x + 5y + xy + 20$ . Se consideră mulțimea  $G = (-5, +\infty)$ .

**5p** a) Să se arate că  $x * (-5) * x = -5$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**5p** b) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .

**5p** c) Să se demonstreze că pentru orice  $x \in G$ , există  $x' \in G$  astfel încât  $x * x' = x' * x = -4$ .

**5p** d) Să se calculeze valoarea expresiei  $E = \frac{3 * (-5) - 1}{(-5) * 2 + 3}$ .

**5p** e) Folosind eventual egalitatea  $x * y = (x + 5) \cdot (y + 5) - 5$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $(\log_2 x) * (\log_3 x) = -5$ .

**5p** f) Să se calculeze  $(-6) * [(-5) * 2009]$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $M = [0, \infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$ .

**5p** a) Să se calculeze  $\frac{1}{2} * \frac{1}{3}$ .

**5p** b) Să se demonstreze că „\*” este lege de compoziție asociativă pe  $M$ .

**5p** c) Să se demonstreze că legea „\*” admite element neutru pe  $M$ .

**5p** d) Să se arate că  $x = 0$  este singurul element simetrizabil al mulțimii  $M$  în raport cu legea “\*”.

**5p** e) Să se arate că  $\frac{1}{x} * \frac{1}{y} = x * y, \forall x, y \in (0, +\infty)$ .

**5p** f) Să se calculeze valoarea expresiei  $E = \frac{\left(1 * \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{7} * \frac{1}{8}\right)}{(1 * 2) \cdot (3 * 4) \cdot \dots \cdot (7 * 8)}$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \log_2(2^x + 2^y + 1)$ . Se consideră mulțimea  $M = [0, +\infty)$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y \in M$ , pentru orice  $x, y \in M$ .
- 5p** b) Să se determine  $x \in M$  astfel încât  $0 * x = x + 1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” nu admite element neutru pe  $M$ .
- 5p** d) Să se verifice că  $(x * x) * x = \log_2(3 \cdot 2^x + 1)$ , oricare ar fi  $x \in M$ .
- 5p** e) Să se demonstreze are loc relația  $x * (-x) > 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $2^1 * 2^2 + 2^3 * 2^4$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = [a, +\infty)$  se definește operația  $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ , cu  $a \in [0, +\infty)$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $a * a - a$ , unde  $a \in [0, +\infty)$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru pe  $G$ .
- 5p** e) Să se determine elementele din  $G$ , simetrizabile în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** f) Să se rezolve în  $G$  ecuația  $(2x) * a = a * (x + a)$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (-1, 1)$  se definește operația  $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $-\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea  $G$  ecuația  $x * x^2 = 0$ .
- 5p** c) Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , pentru orice  $x, y, z \in G$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” admite element neutru pe  $G$ .
- 5p** f) Să se determine  $x \in G$  pentru care există  $x' \in G$ , astfel încât  $x * x' = x' * x = 0$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $A = [3, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$ .

- 5p** a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care  $x * y = a(x - b)(y - b) + b$ , pentru orice  $x, y \in A$ .
- 5p** b) Să se arate că  $x * y \in A \setminus \{3\}$ , pentru oricare  $x, y \in A \setminus \{3\}$ .
- 5p** c) Să se determine  $c \in A$  pentru care are loc egalitatea  $x * c = c * x = c$ , oricare ar fi  $x \in A$ .
- 5p** d) Să se arate că  $(A \setminus \{3\}, *)$  formează o structură de grup comutativ.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația  $(\log_3 x^3) * (\log_9 x^6) = 3$ , unde  $x \in A$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $[(\log_3 27) * (\log_3 81)] * [(\log_3 243) * (\log_3 729)]$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (1, +\infty)$  se definește operația  $x \circ y = 1 + \log_2 x + \log_2 y$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se compare numerele  $a = (2^2 \circ 2^3) \circ 2^4$  și  $b = 2^2 \circ (2^3 \circ 2^4)$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $\circ$ ” nu este asociativă pe  $G$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că pentru oricare  $x, y \in G$ , are loc egalitatea  $2^x \circ 2^y = x + y + 1$ .
- 5p** e) Să se rezolve în mulțimea  $G$  ecuația  $2^x \circ 8^x = 9$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $(2^1 \circ 2^2) + (2^3 \circ 2^4) + (2^5 \circ 2^6) + \dots + (2^{11} \circ 2^{12})$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $A = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = x^{\lg y}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x^{\lg y} = 10^{\lg x \cdot \lg y}$ , pentru orice  $x, y \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Să se arate că  $(2 \circ 10) \circ 3 = 2 \circ (10 \circ 3)$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot (x \circ z)$ , pentru orice  $x, y, z \in A$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că  $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$ , oricare ar fi  $x \in A$ .
- 5p** e) Să se calculeze  $\left(\frac{1}{3} \circ \frac{1}{2}\right) \circ (1 \circ 2)$ .
- 5p** f) Să se rezolve în mulțimea  $A$  ecuația  $(x \circ 10) \cdot (x^2 \circ 10) = 27$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x + y + 2$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $(1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „ $\circ$ ” admite element neutru pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ , există  $x' \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x \circ x' = -2$ .
- 5p** e) Să se rezolve ecuația  $x \circ x = 4x^2$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se determine  $x \in \mathbb{R}^*$  pentru care  $x \circ \frac{1}{x} = x$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x * y = xy + x + y$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$  are loc relația  $x * x \geq -1$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se demonstreze că există  $e \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x * e = e * x = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** d) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$  formează o structură algebrică de grup comutativ.
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x * (1 * x) = 1$ .
- 5p** f) Să se rezolve sistemul de ecuații  $\begin{cases} x * 2 = y \\ y * 3 = x \end{cases}$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere reale.

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $G = (-2, 2)$  se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că  $\frac{1}{2}(x * y) = \frac{(x+2)(y+2) - (x-2)(y-2)}{(x+2)(y+2) + (x-2)(y-2)}$ , pentru orice  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $x * (-x)$ , unde  $x \in G$ .
- 5p** c) Să se determine  $e \in G$ , astfel încât  $x * e = e * x = x$ , pentru orice  $x \in G$ .
- 5p** d) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** e) Să se demonstreze că pentru oricare  $x \in G$ , există  $x' \in G$  astfel încât  $x * x' = x' * x = 0$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $\left(\frac{1}{8}\right) * \left(\frac{1}{7}\right) * \dots * \frac{1}{2} * \frac{1}{1} * \left(\frac{-1}{1}\right) * \left(\frac{-1}{2}\right) * \dots * \left(\frac{-1}{7}\right) * \left(\frac{-1}{8}\right)$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea  $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$  se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 1$  și

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3).$$

- 5p** a) Să se verifice că  $x \circ y = \frac{(x-1)(y-1)}{2} + 1$ , pentru orice  $x, y \in A$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ , pentru orice  $x, y, z \in A$ .
- 5p** c) Să se arate că  $x \circ 1 \circ x = 1$ , oricare ar fi  $x \in A$ .
- 5p** d) Să se determine  $x \in A$ , pentru care există  $x' \in A$  astfel încât  $x \circ x' = x' \circ x = 3$ .
- 5p** e) Să se rezolve ecuația  $(x \circ x) \circ (x \circ x) = 1$  în mulțimea  $A$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $[(-3) \circ (-1)] \circ 1$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție  $x \perp y = x + y + 1$  și  $x \circ y = x + y + xy$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că  $(2x-1) \perp x^2 = x \circ x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție " $\circ$ " este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că  $x \in \{1\} \Leftrightarrow (1) \perp x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $2^x \perp 2^{x+1} = 3 \circ 1$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $3 \perp \log_2 x = 2 \circ \log_2 x$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $(1-2^4) \circ (1-2^3) \circ (1-2^2) \circ (1-2^1) \circ (1-2^0)$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = (2x - 1)(2y - 1) + \frac{1}{2}$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se verifice dacă legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se rezolve ecuația  $x^2 * 3 = 0$ , unde  $x \in [0, \infty)$ .
- 5p** e) Să se determine numerele  $x \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $x * x = \frac{1}{2}$ .
- 5p** f) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(2^x) * (2^{2x}) = \frac{1}{2}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $2 * \frac{4}{5}$ .
- 5p** b) Se consideră mulțimea  $H = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ . Să se arate că  $x * y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** c) Să se arate că pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$  are loc relația  $(x * y) * z = x * (y * z)$ .
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** e) Să se rezolve ecuația  $(2^x) * (4^x) = \frac{3}{2}$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se determine numărul real  $a$  astfel încât  $x * a = a * x = a$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = -xy + 5x + 5y - 20$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = (x - 5)(5 - y) + 5$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Se consideră mulțimea  $G = (-\infty, 5)$ . Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** d) Să se arate că  $x * 4 = 4 * x = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** e) Se consideră expresia  $E(x) = (x + 8) * (x - 7) - 63$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Să se demonstreze că  $E(x) < 0$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se demonstreze că  $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$  este grup comutativ.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc operațiile  $x \perp y = x + y + 2$  și  $x \Delta y = xy + 2x + 2y + 2$ .

- 5p** a) Să se arate că legea de compoziție „ $\Delta$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziție „ $\Delta$ ”.
- 5p** c) Să se determine  $x \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $x \Delta (-3) = -1$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că  $x \Delta (y \perp z) = (x \Delta y) \perp (x \Delta z)$ , pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $(x \perp x) \perp (x \perp x) = -x^2 + 2$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $(2 \perp 2^2) \perp (2^3 \perp 2^4)$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = (x+1)(y+1) - 1$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Să se demonstreze că legea „\*” este asociativă.
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x * x = -1$ .
- 5p** e) Să se determine  $x \in (0, +\infty)$ , astfel încât  $(\log_2 x) * (\log_{\frac{1}{2}} x) = -1$ .
- 5p** f) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , astfel încât  $2 * \frac{n(n-1)}{2} = 11$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x + y + \sqrt{5}$ .

- 5p** a) Să se arate că operația „ $\circ$ ” este asociativă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se dea exemplu de două numere iraționale  $x$  și  $y$  cu proprietatea că  $x \circ y$  este număr întreg.
- 5p** c) Să se calculeze elementul neutru al legii „ $\circ$ ”.
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(x^3) \circ (-x) = \sqrt{5}$ .
- 5p** e) Să se arate că funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x - \sqrt{5}$  are proprietatea:  
 $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ ,  $\forall x, y \in (0, \infty)$ .
- 5p** f) Să se arate că dacă  $x$  este număr natural, atunci simetricul său în raport cu legea „ $\circ$ ” este număr irațional.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \perp y = x + y - 1$ .

- 5p** a) Să se arate că legea „ $\perp$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2^x \perp 4^x = 5$ .
- 5p** c) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $x \perp x^2 \leq 1$ .
- 5p** d) Să se determine  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , astfel încât  $1 \perp n \perp \frac{n(n-1)}{2} = 44 + n$ .
- 5p** e) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ . Să se arate că  $f(x \perp y) = f(x) \perp f(y)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $2 \perp 2^2 \perp 2^3 \perp 2^4 \perp 2^5 \perp 2^6$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y - 1$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se determine două numere  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  pentru care  $a * b \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** c) Să se arate că  $((x * y) * z) * t = x + y + z + t - 3$ , oricare ar fi  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ .
- 5p** d) Să se determine numărul real  $p = 1 * 2 * 3 * \dots * 8$ .
- 5p** e) Să se rezolve sistemul 
$$\begin{cases} (2x + 5) * (3y - 1) = 1 \\ (x - 7) * (2y + 3) = -2 \end{cases}, \text{ unde } x, y \in \mathbb{R}.$$
- 5p** f) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 2$ . Să se arate că  $f(x * y) = f(x) * f(y)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = -xy - x - y - 2$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că  $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că  $e = -2$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se găsească elementele simetrizabile din mulțimea  $\mathbb{R}$  în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(x+2) * (2x-3) = 5$ .
- 5p** f) Să se rezolve inecuația  $(x-3) * (x+1) \geq 0$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = 3(x + 2)(y + 2) - 2$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție este asociativă.
- 5p** c) Se consideră mulțimea  $M = [-2, +\infty)$ . Să se arate că  $x * y \in M$ , pentru orice  $x, y \in M$ .
- 5p** d) Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziție „\*”.
- 5p** e) Se dau numerele reale  $a = x * \frac{x}{3}$  și  $b = \frac{x}{2} * x$ . Să se determine  $x \in \mathbb{R}$ , astfel încât media aritmetică a numerelor  $a$  și  $b$  să fie egală cu 10.
- 5p** f) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $3^x * 3^{x-1} = 19$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 7$  și  $x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$ .

- 5p** a) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se verifice că  $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ , pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $7^x * 7^{x+1} * 7^{x-1} = 43$ .
- 5p** d) Se consideră mulțimea  $H = (7, +\infty)$ . Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $(x-1) \circ x < 7$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $1 * 2 * 3 * \dots * 9$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y - 6$ .

- 5p** a) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se arate că  $e = 6$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Să se determine simetricul elementului  $(-7)$  în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $(x^2 + 3x - 1) * (2x^2 - x + 6) \geq 0$ .
- 5p** e) Să se determine  $x \in \mathbb{R}$ , pentru care numerele  $a = 6 * 2x^2$ ,  $b = x * \frac{x}{2}$ ,  $c = (-11x^2) * 6$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** f) Să se demonstreze că  $\frac{1}{2} * \frac{1}{2^2} * \dots * \frac{1}{2^7} < 0$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \perp y = 2xy + 10x + 10y + 45, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

- 5p** a) Să se demonstreze că  $x \perp y = 2(x+5)(y+5) - 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se verifice că legea de compoziție „ $\perp$ ” este asociativă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Se consideră mulțimea  $M = (-5, +\infty)$ . Să se arate că pentru oricare  $x, y \in M$ , rezultă că  $x \perp y \in M$ .
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $5^x \perp 3^x = -5 + 20(3^x + 5)$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $(x+1) \perp (x-4) < -5$ .
- 5p** f) Să se determine  $n \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $x \perp x \perp x = 2^n \cdot (x+5)^3 - 5, \forall x \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că  $e = \frac{7}{2}$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se arate că  $(\mathbb{R} \setminus \{3\}, *)$  este grup comutativ.
- 5p** e) Se consideră mulțimea  $G = (3, +\infty)$ . Să se arate că  $x * y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** f) Să se determine  $n \in \mathbb{Z}$  pentru care are loc egalitatea  $x * x * x = 2^n (x-3)^3 + 3$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 2$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că are loc egalitatea  $(1 * x) * 3 = 1 * (x * 3)$ , pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se verifice că  $e = \frac{7}{3}$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** d) Să se determine mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 3\}$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $3 * \log_3(x^2 - 7) = 2$ .
- 5p** f) Să se arate că  $x = 3$  este element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „\*”.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 4$  și

$$x \circ y = xy - 4(x + y) + 20.$$

- 5p** a) Să se demonstreze că legea de compoziție „\*” este asociativă.
- 5p** b) Să se calculeze  $x \circ y - (x - 4)(y - 4) - 4$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se arate că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă.
- 5p** d) Să se calculeze  $\sqrt{u^2 + e^2}$ , unde  $e$  este element neutru pentru legea „\*”, iar  $u$  este element neutru pentru legea „ $\circ$ ”.
- 5p** e) Să se arate că are loc egalitatea  $2 \circ (x * 3) = (2 \circ x) * (2 \circ 3)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se calculeze  $2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y + 2$  și  $x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6$ .

- 5p** a) Să se verifice că operația „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se arate că  $x \circ (y * z) * (x \circ y)$  ( $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ).
- 5p** c) Să se arate că nu există  $u \in \mathbb{Z}$  pentru care  $u \circ x = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** d) Să se demonstreze că dacă  $x \circ y = -2$ , atunci  $x = -2$  sau  $y = -2$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  inecuația  $x^2 * x \leq 2$ .
- 5p** f) Dacă  $a = x * x$  și  $b = x \circ x$ , să se determine  $x \in \mathbb{Z}$  pentru care  $\frac{a+b}{2} = -2$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y + 2$  și  $x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6$ .

Se consideră mulțimea  $H = [-2, +\infty)$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y \in H$ , pentru oricare  $x, y \in H$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Dacă  $A = \{x \in H \mid x^2 * 3x = 0\}$  și  $B = \{x \in H \mid x \circ x = 0\}$ , să se calculeze  $A \cap B$ .
- 5p** e) Să se verifice că  $(x * 1) \circ 2 = (x \circ 2) * (1 \circ 2)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Dacă  $a = x * x$  și  $b = x \circ x$ , să se rezolve în  $\mathbb{R}$  inecuația  $\frac{a+b}{2} < 0$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \perp y = xy - x - y + 3$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x \perp y = (x-1)(y-1) + 2$ , pentru oricare  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție “ $\perp$ ” nu este asociativă.
- 5p** c) Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} x \perp x = y \\ x \perp y = xy - 2 \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** d) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $[(2 \perp x) \perp 2] \perp x = 10$ .
- 5p** e) Să se arate că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  are loc inegalitatea  $x \perp x \geq 2$ .
- 5p** f) Să se determine două numere distincte  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , astfel încât  $a \perp b \in \mathbb{Q}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Fie  $M = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că dacă  $x, y \in M$ , atunci  $x \circ y \in M$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă pe  $M$ .
- 5p** d) Să se determine  $e \in M$ , astfel încât  $x \circ e = e \circ x = x$ ,  $\forall x \in M$ .
- 5p** e) Să se rezolve în  $M$  ecuația  $x \circ 2 \circ x = 2$ .
- 5p** f) Să se determine elementele mulțimii  $A = \left\{x \in M \mid x \circ x = \frac{3}{4}\right\}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $x * y = 2(x + 1)(y + 1) - 1$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se verifice că  $e = -\frac{1}{2}$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se arate că dacă  $x * y = -1$ , atunci  $x = -1$  sau  $y = -1$ .
- 5p** e) Fie  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile reale ale ecuației  $x * x = 1$ . Să se calculeze  $x_1^3 + x_2^3$ .
- 5p** f) Să se arate că  $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$  formează o structură algebrică de grup comutativ.

www.mateinfo.ro



**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + ay - b$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.

- 5p** a) Să se verifice că  $(5 * 2) - (3 * 2) = 2$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care legea „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Pentru  $a = 1$ , să se determine  $b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $e = 2009$  să fie elementul neutru al legii „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se arate că dacă  $a = 1$ , atunci operația „ $*$ ” este asociativă, oricare ar fi  $b \in \mathbb{R}$ .
- 5p** e) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x * x = -b$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Pentru  $a = 1$  și  $b = 2009$  să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „ $*$ ”.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = ax + by - 1$  și  $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}^*$ .

- 5p** a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}^*$ , astfel încât legea de compoziție „ $*$ ” să fie asociativă.
- 5p** b) Să se demonstreze că  $x \circ y = y \circ x$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Pentru  $a = b = 1$ , să se arate că oricare  $x \in \mathbb{R}$  este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se determine elementul neutru al legii „ $\circ$ ”.
- 5p** e) Pentru  $a = b = 1$ , să se arate că  $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
- 5p** f) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ . Să se verifice că  $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y + 1$  și  $x \circ y = x \cdot y - 1$ . Se consideră mulțimea  $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

- 5p** a) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(x * x) + (x \circ x) = 0$ .
- 5p** b) Să se verifice că elementul neutru al legii „\*” este  $e = -1$ .
- 5p** c) Să se arate că  $x * y \in H$ , pentru orice  $x, y \in H$ .
- 5p** d) Să se arate că există  $x, y \in H$  astfel încât  $x \circ y \notin H$ .
- 5p** e) Să se demonstreze că legea de compoziție „\*” este asociativă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** f) Să se demonstreze că  $(H, *)$  este grup.

www.mateinfo.ro

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y$ .

- 5p** a) Să se arate că  $x * (-x)$  este număr negativ, pentru oricare  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se studieze existența elementului neutru în raport cu legea „ $*$ ”.
- 5p** d) Să se rezolve sistemul de ecuații  $\begin{cases} x * y = 1 + xy \\ x * x = y \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** e) Să se arate că orice element  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** f) Să se verifice dacă  $(\mathbb{R}, *)$  este grup.

www.mateinfo.ro