MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

REPERE METODOLOGICE

pentru aplicarea curriculumului la clasa a XII-a

în anul școlar 2024-2025

DISCIPLINA MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializările matematică-informatică și științe ale naturii
Filiera vocațională, profilul militar (MApN), specializarea matematică-informatică

BUCUREȘTI
2024

Cuprins

SECȚIUNEA I

Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a XII-a în anul școlar 2024-2025, învățământ liceal, filiera *teoretică*, profilul *real* specializările *matematică-informatică* și *științe ale naturii* și filiera *vocațională*, profilul *militar*, specializarea *matematică-informatică*

Material elaborat la nivelul Centrului Național de Politici și Evaluare în Educație și în cadrul GLC 39 Matematica

I.1 Recomandări privind specificul clasei a XII-a, la disciplina *matematică*, din perspectiva examenului național de bacalaureat și în relație cu profilul de formare al absolventului aprobat prin OME nr. 6731/2023

Materialul *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a XII-a, în anul școlar 2024-2025* este continuarea firească a documentelor *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a IX-a, în anul școlar 2021-2022*, *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a X-a, în anul școlar 2022-2023* și *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a, în anul școlar 2023-2024*. Elevii din prima generație care a studiat după noul curriculum național pentru învățământul primar și pentru cel gimnazial vor fi în clasa a XII-a în anul școlar 2024-2025, astfel că este necesară continuarea/integrarea noii paradigme în toate etapele și la toate nivelurile de derulare a procesului didactic. Acest material încheie un ciclu necesar, de patru ani, în care s-a urmărit armonizarea viziunii noilor programe școlare la disciplina matematică pentru clasele de gimnaziu, a învățării centrate pe elev și pe formarea de competențe, cu cea a programelor școlare în vigoare pentru învățământul liceal.

Unele dintre aspectele privind cadrul general de derulare a procesului didactic la matematică, prezentate în materialele menționate, sunt de actualitate și pentru aplicarea curriculumului la clasa a XII-a, în anul școlar 2024-2025, ca urmare se regăsesc succint și în prezentul material.

- Disciplina *matematică* vizează în primul rând competența-cheie *Competența matematică și competența în științe, tehnologie și inginerie* (*Recomandarea Consiliului* din 22.05.2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții, https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=EN,), dar și integrarea acesteia cu toate competențele-cheie și conectarea demersurilor specifice disciplinei la *descriptorii de nivel* (pentru învățământ liceal) ai atributelor prioritare care subliniază aspecte atitudinal-comportamentale din cadrul competențelor-cheie (*Profilul de formare al absolventului*, aprobat prin OME nr. 6731/2023).

- Competențele în domeniul matematicii sunt definite drept capacitatea de a dezvolta și de a folosi gândirea și raționamentul matematic pentru a rezolva o serie de probleme în situații de zi cu zi. Se pune accent atât pe procese și activități, cât și pe cunoștințe. Competențele matematice implică, la niveluri diferite, capacitatea și disponibilitatea de a utiliza moduri matematice de gândire și de prezentare (formule, modele, grafice, diagrame etc.).

- Principalele caracteristici ale cunoștințelor, deprinderilor și atitudinilor esențiale care conduc la formarea competențelor din domeniul matematicii sunt următoarele:
  a) cunoștințele necesare în domeniul matematicii includ cunoștințe temeinice privind numerele, măsurile și structurile, operațiile și reprezentările matematice de bază, o bună înțelegere a termenilor și a conceptelor matematice, precum și o sensibilizare față de întrebările la care matematica poate oferi răspunsuri;
  b) deprinderile elevilor se referă la:
     - aplicarea principiilor și proceselor matematice de bază în contexte de zi cu zi (de exemplu, deprinderi financiare);
     - urmărirea și evaluarea unor înșiruiri de argumente logice;
     - utilizarea raționamentului matematic;
     - înțelegerea utilizării dovezilor matematice;
     - comunicarea în limbaj matematic;
     - utilizarea instrumentelor ajutătoare corespunzătoare, inclusiv a datelor statistice, a graficelor etc.;
     - înțelegerea aspectelor matematice ale digitalizării;
  c) o atitudine pozitivă în matematică se bazează pe respectarea adevărului și pe dorința de a căuta raționamente și de a verifica valabilitatea acestora (sursa: *Recomandarea Consiliului* din 22.05.2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții).

Pentru anul școlar 2024-2025, procesul de predare-învățare-evaluare pentru clasa a XII-a se raportează la:

- programele școlare în vigoare pentru disciplina matematică (M1 – M5), Anexa 2 la OMEC nr. 5959/22.12.2006

- planurile-cadru în vigoare, aprobate prin OMECI nr. 3410, 3411, 3412 din 16.03.2009 și OMECTS 5347/07.09.2011
- structura anului școlar 2024-2025, aprobată prin OME nr. 3694/01.02.2024.

Disciplina *matematică* pentru clasa a XII-a continuă studiul matematicii din clasele a IX-a – a XI-a, în funcție de specificul filierei, profilurilor și specializărilor.

Programa disciplinei matematică pentru clasa a XII-a este structurată în cinci categorii, evidențiate în tabelul următor, în funcție de numărul și tipul orelor alocate acestei discipline prin planurile-cadru. Programele de matematică, M1 - M5, pentru clasa a XII-a, vizează diferite competențe generale, în funcție de filieră, profil, specializare, subsumând competențe specifice care se integrează și contribuie la formarea culturii de specialitate în domeniul specializării și, în același timp, la profilul absolventului de liceu. În acest sens, se recomandă ca accentul învățării matematicii să fie pus pe construirea experiențelor de învățare pentru elevi, pe furnizarea situațiilor-problemă care stimulează raționamentele cognitive și pe interpretarea rezultatului obținut în urma rezolvării de probleme în direcții corelate cu specificul fiecărei programe.

<table>
<tr><th>Nr. ore/săptămână</th><th>Filiera</th><th>Profilul</th><th>Specializarea</th><th>Programa școlară în vigoare</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1 oră/săptămână
(1 oră TC)</td><td rowspan="3">vocațională</td><td>pedagogic</td><td>toate specializările</td><td rowspan="2">M4</td></tr>
<tr><td>sportiv</td><td>toate specializările</td></tr>
<tr><td>teologic</td><td>toate specializările, cu excepția specializărilor Teologie ortodoxă și Patrimoniu cultural</td><td>M5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 ore/săptămână
(2 ore CD)</td><td>teoretică</td><td>umanist</td><td>științe sociale</td><td>M5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">vocațională</td><td>artistic</td><td>Arhitectură, arte ambientale și design</td><td>M3</td></tr>
<tr><td>ordine și securitate publică (MAI)</td><td>științe sociale</td><td>M5</td></tr>
<tr><td>3 ore/săptămână
(3 ore TC)</td><td>tehnologică</td><td>toate profilurile</td><td>toate specializările</td><td>M2</td></tr>
<tr><td>3 ore/săptămână
(2 ore TC + 1 oră CD)</td><td>teoretică</td><td>real</td><td>științe ale naturii</td><td>M2</td></tr>
<tr><td>4 ore/săptămână
(2 ore TC + 2 ore CD)</td><td>teoretică</td><td>real</td><td>matematică-informatică</td><td>M1</td></tr>
<tr><td>4 ore/săptămână
(2 ore TC + 2 ore CD)</td><td>vocațională</td><td>militar (MApN)</td><td>matematică-informatică</td><td>M1</td></tr>
</table>

În procesul de predare-învățare-evaluare a matematicii la clasele de la filiera teoretică, profilul real (specializările matematică-informatică și științe ale naturii) și filiera vocațională, profilul militar (specializarea matematică-informatică), se vor avea în vedere:

- dezvoltarea gândirii matematice riguroase și structurate din punct de vedere științific, care să permită modelarea și investigarea unor fenomene sau situații–problemă de la alte discipline;
- evidențierea rolului matematicii în demersurile de analizare calitativă și de optimizare a diferitelor strategii de investigare și de rezolvare a problemelor, specifice matematicii, în vederea utilizării lor eficiente și creative în diferite contexte;
- integrarea matematicii elementare în sisteme și modele cu grad ridicat de generalitate, sisteme aflate într-o permanentă evoluție și interacțiune cu celelalte discipline și cu lumea înconjurătoare;
- evidențierea legăturilor interdisciplinare ale conceptelor matematice studiate cu viața de zi cu zi și cu alte discipline în scopul dezvoltării competenței de integrare a cunoștințelor matematice cu alte domenii științifice;
- corelarea demersurilor didactice cu descriptorii pentru nivel liceal privind competențele-cheie și cu atributele prioritare ale profilului absolventului de liceu, prevăzute în documentul *Profilul de formare al absolventului*.

Profilul de formare al absolventului, aprobat prin OME nr. 6731/2023, este un instrument de lucru pentru profesori, care pot să își regleze cu ajutorul lui demersurile pentru proiectarea unor activități de predare-învățare-evaluare eficiente, pentru crearea sau utilizarea unor resurse de învățare adecvate și utilizarea acestora în contexte diferite, astfel încât să faciliteze dezvoltarea competențelor-cheie ale elevilor, menite să contribuie nu doar la achiziții solide de învățare a unor conținuturi, ci și la crearea și consolidarea unor abilități ale acestora (gândire critică, capacitate de analiză, creativitate, capacitate de negociere, reziliență), care să îi ajute să devină cetățeni valoroși din toate punctele de vedere.

În învățământul liceal, profilul de formare al absolventului are gradul cel mai mare de complexitate și conține componente de profesionalizare specifice filierelor existente (teoretică, tehnologică și vocațională). Conform cu *Profilul de formare al absolventului*, competența specifică prioritară în studiul matematicii este chiar *competența matematică și competența în științe, tehnologie și inginerie*, ai cărei descriptori de nivel sunt următorii:

3. COMPETENȚA MATEMATICĂ ȘI COMPETENȚA ÎN ȘTIINȚE, TEHNOLOGIE ȘI INGINERIE
3.1. Utilizează și se raportează critic la moduri de gândire și forme de prezentare specifice matematicii (de exemplu, formule, modele, constructe, grafice etc.), inclusiv în relație cu întrebări relevante pentru viața reală și pentru diferite contexte profesionale.
3.2. Construiește demersul de rezolvare a problemelor pe care le identifică într-o varietate de contexte, inclusiv profesionale, prin aplicarea principiilor și proceselor matematice.
3.3. Evaluează constant validitatea unor raționamente matematice aplicate în contexte diverse, inclusiv profesionale.
3.4. Aplică gândirea științifică prin cercetarea unor situații/probleme specifice științelor naturii și prin raportarea propriilor ipoteze la rezultatele experimentale validate. Evaluează, proiectează și îmbunătățește în mod independent diferite metode de investigație. Evaluează adecvat explicațiile alternative pe baza datelor și explică diferite surse de incertitudine.
3.5. Fundamentează concluzii sau decizii, utilizând date științifice și instrumente tehnologice. Evaluează validitatea și fiabilitatea afirmațiilor făcute în surse secundare, cu referire la opinii științifice, la calitatea metodologiei și la dovezile citate. Se raportează critic la tehnologiile digitale, pentru a îmbunătăți calitatea datelor obținute.

Atributele prioritare ale profilului absolventului – *comunicativ, creativ, reflexiv, colaborativ, prospectiv, autonom, rezilient, responsabil, etic* – achiziționate/dezvoltate de elevi pe întregul lor parcurs școlar din învățământul preuniversitar, în conformitate cu descriptorii de nivel pentru fiecare etapă de școlaritate, sunt pilonii dezvoltării lor personale și profesionale ulterioare și, implicit, ai reușitei la examenele de sfârșit de ciclu școlar.

Atribute prioritare	**Descriptori de nivel pentru învățământul liceal**
Comunicativ	- Comunică constructiv și asertiv în forme variate (verbal, în scris, prin canale și instrumente digitale), în diferite contexte școlare, extrașcolare și profesionale, cu respectarea regulilor și convențiilor de comunicare. - Urmărește să își îmbogățească limbajul. Utilizează adecvat termenii de specialitate din diferite domenii, inclusiv limbajul profesional. - Își asumă responsabilitatea pentru ceea ce comunică, este receptiv la feedback-ul celorlalți și își adaptează modul de comunicare la interlocutor și la situație. - Acordă atenție aspectelor de comunicare nonverbală (gesturi, mimică, privire, poziție a corpului) și paraverbale (accent, debit, intonație etc.) în comunicarea proprie și a celorlalți. - Este preocupat de lectura constantă pe diverse teme de interes școlar, profesional, personal.
Creativ	- Pentru a învăța, explorează diferite surse de informare și utilizează diferite medii, inclusiv cele bazate pe tehnologia digitală. - Dezvoltă produse, proiecte în forme variate și originale, inclusiv conținut digital complex.

	- Adaptează achizițiile din contextele precedente pentru analizarea unor situații noi, pentru rezolvarea de probleme în moduri inovative. - Poate să abordeze original și neconvențional rezolvarea unei situații din domeniul profesional, cu caracter practic, aplicativ. Contribuie creativ la proiecte în care sunt integrate elemente de tehnologie. - În lucrul în echipă contribuie cu idei noi, originale, ca produs al propriilor experiențe de învățare și de viață.
Reflexiv	- Este preocupat de propria dezvoltare fizică, cognitivă, emoțională, socială și spirituală, ca expresie a unei imagini de sine pozitive. - Conștientizează importanța învățării continue pentru dezvoltarea personală și pentru pregătirea sa profesională. - Își exprimă opiniile în contexte variate, argumentat. - Evaluează constant sursele de informație și validitatea lor în diferite contexte (inclusiv în mediul digital), ia în considerare idei din mai multe perspective, își revizuiește înțelegerea pe bază de informații și dovezi. - Poate să își autoevalueze efortul personal și rezultatele învățării în contexte școlare și de pregătire profesională, își stabilește priorități și strategii de dezvoltare pentru viitor.
Colaborativ	- Participă și inițiază activități și proiecte de grup, pe teme de interes școlar, profesional, personal. - Folosește modalități variate de colaborare, inclusiv în grupuri și comunități online. - Își asumă roluri și responsabilități diverse în activități comune cu alții, recunoaște punctele forte și valoarea membrilor grupului și a lucrului în comun. - Comunică eficient cu membrii grupului, manifestând deschidere pentru feedback și sugestii, pentru integrarea contribuțiilor tuturor membrilor. - Este preocupat să ia decizii corecte, echitabile și echilibrate pentru sine și pentru grup.
Prospectiv	- Formulează opțiuni cu privire la viitorul său în plan personal, școlar, profesional; se consultă cu cei din jur cu privire la aceste opțiuni. - Identifică diverse aspecte (de mediu, sociale, economice, culturale) ce influențează modul în care poate arăta viitorul la nivel individual, comunitar și social în ansamblu; analizează relațiile dintre aceste aspecte. Își asumă un rol activ în a aduce o contribuție pozitivă la nivelul comunității în care trăiește și la nivelul societății în general. - Utilizează diverse idei, modele și teorii pentru a investiga fenomene, procese, pentru a construi diverse tipuri de scenarii de viitor (posibil, probabil, dezirabil, pozitiv sau negativ). - Se poate adapta la schimbări, își poate redefini opțiunile pentru carieră. Identifică abilitățile personale care îi facilitează tranziția către diferite domenii tehnologice, pentru dezvoltarea propriilor proiecte și afaceri. - Se informează despre noutățile din tehnologie și impactul lor asupra viitorului personal, social, profesional. Anticipează potențialele amenințări și se preocupă de viitorul siguranței online.
Autonom	- Își asumă independent diferite sarcini și activități, acasă și la școală. Investește timp și efort pentru interesele și pasiunile sale. - Este autonom și organizat în programul zilnic de învățare, își stabilește obiective la nivel personal, școlar/academic, profesional. Este capabil să ia decizii fundamentate în contexte profesionale. - Aplică rutine și strategii care îl ajută să își organizeze și eficientizeze învățarea. - Apelează și valorifică sprijinul altor persoane și își planifică resurse de timp și efort pentru atingerea obiectivelor personale de învățare și dezvoltare. - Este conștient de realizările personale și este capabil de autoevaluare și autoapreciere obiective. - Își asumă responsabilitatea pentru învățarea și dezvoltarea sa digitală. Navighează pe internet în mod autonom, fiind conștient de responsabilități și riscuri specifice.

Rezilient	- Are încredere în capacitatea sa de a gestiona situații diverse și de a lua decizii și solicită sprijinul adulților și al colegilor, la nevoie. - Se concentrează asupra obiectivelor pe care și le-a propus în plan personal, școlar, profesional și nu abandonează demersul atunci când întâmpină dificultăți. Caută modalități constructive de rezolvare a problemelor, tratează sarcinile asumate ca pe niște provocări ce îl ajută să își descopere potențialul și să își dezvolte abilitățile de viață și profesionale. - Își asumă atât experiențele pozitive, cât și pe cele negative și caută să le valorifice constructiv și echilibrat. Folosește tehnici de autoreglare și autocontrol în situații dificile/stresante, pentru protejarea și îngrijirea sănătății sale mintale. - Are capacitatea de a se adapta unui mediu profesional, înțelegând necesitatea schimbărilor în carieră și/sau a evoluției profesionale. - Înfruntă provocările digitale cu determinare, căutând constant să învețe și să se adapteze la schimbările rapide ale tehnologiei.
Responsabil	- Înțelege conceptele de solidaritate, echitate și justiție socială. Este atent la emoțiile, comportamentele, problemele celor din jur. - Se implică în asigurarea sănătății și stării de bine proprii și a celorlalți. Exprimă comportamente adecvate în cadrul relațiilor cu ceilalți, inclusiv preventive și bazate pe consimțământ, pentru o viață sănătoasă. - Participă la activități și proiecte care promovează înțelegerea interculturală, participarea civică, cunoașterea și aplicarea drepturilor și responsabilităților ce derivă din calitatea de cetățean al României și cetățean european. - Este interesat de problemele sistemice de mediu (de exemplu, degradarea biodiversității, schimbările climatice, epuizarea resurselor naturale). Este conștient de impactul acestora asupra tinerilor și de rolul pe care ei îl pot avea în direcționarea societății pe traiectorii mai sustenabile. - Inițiază și se implică, la nivelul școlii și în comunitate, în proiecte de dezvoltare durabilă (de exemplu, spațiile urbane verzi, practicile de mediu, încurajarea producătorilor locali, valorizarea biodiversității zonei). - În mediul de pregătire profesională, respectă normele de sănătate și securitate în muncă, de prevenire și stingere a incendiilor, de prevenire și reducere a impactului negativ al activității profesionale asupra mediului. - Practică un comportament digital/online responsabil, fiind conștient de impactul personal asupra comunității online.
Etic	- Își stabilește principii și formulează reguli de comportament în acord cu valorile personale, înțelegând importanța dimensiunii etice și morale în viață. - Este deschis în a dezbate situații, cazuri și probleme, raportându-se la dimensiunea etică a diferitelor contexte din viața de zi cu zi. Identifică, discută și se implică în rezolvarea cazurilor de injustiție socială, în școală și în comunitate. - Poate să identifice valori care stau în spatele unor atitudini sau comportamente din societate, la nivel local, regional, național sau internațional. Este preocupat să înțeleagă consecințele etice ale dezvoltării științei și tehnologiei asupra oamenilor și mediului. - Apreciază produse și valori estetice și artistice, respectă identitatea, valorile și practicile comunităților culturale cu care interacționează. - Manifestă integritate morală și respectă standardele și regulamentele, inclusiv din domeniul profesional. Acționează în baza principiilor și regulilor, în situații care aduc atingere acestora. - Respectă drepturile de autor și alte norme etice specifice mediului online și le promovează în comunitatea online.

În acest context, ne propunem să explorăm principalele căi care îi pot ajuta pe profesorii de matematică să asigure o pregătire cât mai bună a elevilor de la clasă, la matematică.

- Este obligatorie identificarea și clarificarea competențelor și cunoștințelor esențiale pe care elevii trebuie să le dobândească în domeniul matematicii. Se impune o analizare detaliată a competențelor specifice din programa școlară, care pot fi împărțite în categorii/niveluri precum competențe de identificare /

recunoaștere a unor aspecte practic-aplicative asociate noțiunilor din matematică și de lecturare a unor grafice, diagrame și tabele de date, competențe de utilizare a algoritmilor specifici diferitelor domenii matematice (aritmetică, algebră, geometrie, analiză matematică, probabilități și statistică), de rezolvare a unor probleme în context matematic și de modelare a unor situații practice utilizând noțiuni și proprietăți matematice, competențe de analizare critică și de eficientizare a strategiilor de abordare a situațiilor-problemă, precum și competențe de comunicare pentru optimizarea soluționării de probleme.

- *Planificarea calendaristică* a conținutului programei, pentru fiecare an școlar, este esențială pentru o pregătire eficientă a elevilor la matematică. Este important și ca structurarea *proiectării didactice*, prin metode și strategii didactice adecvate, să ofere un cadru solid (timp suficient alocat, diversitatea experiențelor de învățare pentru formarea competențelor de bază) pentru a le asigura elevilor o bună pregătire, astfel încât ei să facă față și provocărilor specifice examenului de bacalaureat.
- Selectarea și aplicarea atentă a strategiilor planificate, în funcție de profilul și specificul fiecărei clase, sunt etape esențiale pentru sprijinirea dezvoltării competențelor elevilor și pentru o înțelegere profundă a conceptelor matematice. Profesorii pot adopta diverse strategii, cum ar fi demonstrații interactive, instruire diferențiată, învățare bazată pe problematizare, colaborare și discuție, precum și utilizarea tehnologiilor moderne și a internetului. Aceste metode și strategii pot contribui semnificativ la implicarea activă a elevilor în procesul de învățare și la dezvoltarea abilităților lor matematice într-un mod eficient și captivant. Utilizarea tehnologiilor în predarea, învățarea și evaluarea la matematică poate aduce beneficii semnificative, oferindu-le elevilor oportunități extinse pentru practică și explorare independentă, prin integrarea unor software-uri matematice interactive, a unor aplicații pentru telefon, pentru tabletă și/sau calculator. De asemenea, trebuie avute în vedere și simulări și/sau modele virtuale, precum și activități din cadrul unor comunități online de învățare.
- Elevii trebuie încurajați să abordeze probleme matematice complexe și să caute soluții creative și inovatoare. Ei trebuie învățați să aibă curajul să investigheze, prelucrând informațiile noi și corelându-le cu cele deja dobândite, să aibă disponibilitatea de a căuta metode inedite de soluționare a problemelor, analizând și aprofundând conexiuni diverse între achizițiile lor de cunoaștere recente și cele anterioare, să își găsească și să își repare erorile dintr-un parcurs matematic logic și/sau instrumental. Această strategie a profesorului contribuie la dezvoltarea gândirii critice a elevilor, la îmbunătățirea capacității lor de a rezolva probleme dintre cele mai diverse, în contexte diferite, precum și la stimularea creativității lor matematice. În acest scop, pot fi utilizate strategii precum proiectele matematice, discutarea comparativă, la clasă, a unor metode alternative de rezolvare a problemelor, colaborarea și discuțiile în grup, experimentele, feedback-ul constructiv și încurajarea, precum și conexiunile interdisciplinare.
- Implementarea unui sistem de evaluare continuă și formativă este esențială pentru monitorizarea progresului elevilor, pentru oferirea de feedback în timp real și pentru a îmbunătăți învățarea. Se recomandă stabilirea unor obiective și criterii clare de evaluare, utilizarea unor activități variate de evaluare, oferirea feedback-ului regulat și constructiv.
- Este foarte importantă adaptarea activităților de învățare la nevoile individuale ale elevilor. Identificarea elevilor care întâmpină dificultăți în înțelegerea anumitor concepte sau în utilizarea unor instrumente/algoritmi matematici și oferirea unui sprijin suplimentar, prin activități de învățare direcționate către competențele insuficient dezvoltate ale elevilor, reprezintă o prioritate a fiecărui profesor și a întregului proces educațional. Pentru aceasta, pot fi utilizate strategii precum evaluarea individuală, adaptarea materialelor, instruirea diferențiată, oferirea de feedback constructiv pe etape mici de învățare și/sau colaborarea cu părinții.

Prin abordarea detaliată și aplicarea consecventă a acestor recomandări în procesul de predare-învățare-evaluare a matematicii în clasa a XII-a, se poate crea un mediu propice pentru ca elevii să beneficieze de o pregătire completă și eficientă în vederea examenului de bacalaureat, examen care rămâne un pilon al învățământului preuniversitar și un pas important în evoluția fiecărui elev către viitorul său academic sau profesional.

SECȚIUNEA a II-a

Orientarea procesului educativ la disciplina *matematică*, învățământ liceal, filiera *teoretică*, profil *real*, specializările *matematică-informatică* și *științe ale naturii* și filiera *vocațională*, profilul *militar*, specializarea *matematică-informatică*

Material elaborat la nivelul Centrului Național de Politici și Evaluare în Educație și în cadrul GLC 39 Matematica

II.1. Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XII-a, la disciplina *matematică*, învățământ liceal, filiera *teoretică*, profilul *real*, specializarea *matematică-informatică* și filiera *vocațională*, profilul *militar* MApN, specializarea *matematică-informatică*

Unitatea de învăţământ: …………………

PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ
ANUL ŞCOLAR 2024 – 2025*

Matematică
Clasa a XII-a – programa şcolară M1 (filiera *teoretică*, profilul *real*, specializarea *matematică-informatică* și filiera *vocațională*, profilul *militar*, specializarea *matematică-informatică*)
4 ore/săptămână

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Intervalul de cursuri
Recapitulare	CS vizate de programele școlare pentru clasele a IX-a, a X-a și a XI-a	*Recapitulare - clasa a IX-a, clasa a X-a și clasa a XI-a* *Evaluare inițială* *Activități remediale și/sau de progres*	8	S1 - S2	**Intervalul de cursuri 1**
Primitive	1.2 2.2 6.2.2	• Probleme care conduc la noțiunea de integrală • Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții, proprietăți ale integralei nedefinite: liniaritate. Primitive uzuale	12	S3 - S5	
Lege de compoziție internă	1.1 2.1	• Lege de compoziție internă (operație algebrică), tabla operației, parte stabilă; proprietăți	8	S6 - S7	
Vacanță (26.10.2024 - 3.11.2024)					
Grupuri	3.1.1 4.1 5.1.1 6.1.1	• Grup; exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbb{Z}_n$ • Morfism, izomorfism de grupuri • Subgrup	8	S8 - S9	**Intervalul de cursuri 2**
Grup finit	4.1 5.1.1 6.1.1	• Grup finit, tabla operației, ordinul unui element	4	S10	

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Intervalul de cursuri
Funcții integrabile	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2 6.1.2	• Diviziuni ale unui interval $[a,b]$, norma unei diviziuni, sistem de puncte intermediare. Sume Riemann, interpretare geometrică. Definiția integrabilității unei funcții pe un interval $[a,b]$ • Formula Leibniz-Newton	6	S11 S12 (2 ore)	
Proprietăți de integrabilitate ale funcțiilor continue	5.2 6.1.2 6.2.2	• Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare • Integrabilitatea funcțiilor continue • Teorema de medie, interpretare geometrică, teorema de existență a primitivelor unei funcții continue	10	S12 (2 ore) S13 - S14	
Vacanță (21.12.2024 - 07.01.2025)					
Integrala definită: metode de integrare	3.2 5.2	• Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbare de variabilă	8	S15 - S16	**Intervalul de cursuri 3**
Inele și corpuri	3.1.1 4.1 5.1.1 6.1.1	• Inel, exemple: inele numerice ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_n$ • Inele de matrice, inele de funcții reale • Corp, exemple: corpuri numerice ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_p$, p prim, corpuri de matrice • Morfisme de inele și de corpuri	8	S17 - S18	
Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim)	1.1 2.1 3.2.1 5.2.1 6.2.1	• Forma algebrică a unui polinom, funcția polinomială, operații (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar) • Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X-a$, schema lui Horner • Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout; *c.m.m.d.c* și *c.m.m.m.c* al unor polinoame, descompunerea unor polinoame în factori ireductibili • Rădăcini ale polinoamelor, relațiile lui Viète	12	S19 - S21	
Vacanță** (22.02.2025 – 02.03.2025)					
Școala altfel***				S22	**Intervalul de cursuri 4**
Rezolvarea unor ecuații algebrice	3.2.1 5.2.1	• Rezolvarea ecuațiilor algebrice având coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ • Ecuații binome, ecuații reciproce, ecuații bipătrate	6	S23 S24 (2 ore)	

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Intervalul de cursuri
	6.2.1				
Integrala definită: integrarea funcțiilor raționale	2.2 3.2 4.2	• Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, $gradQ \le 4$, prin metoda descompunerii în fracții simple	4	S24 (2 ore) S25 (2 ore)	
Aplicații ale integralei definite	3.2 5.2 6.1.2	• Aria unei suprafețe plane • Volumul unui corp de rotație • Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită	6	S25 (2 ore) S26	
Teme de sinteză 1	Toate CS din programa examenului național de bacalaureat, clasele a IX-a – a X-a	*Clasa a IX-a* și *Clasa a X-a* • Mulțimea numere reale; mulțimea numerelor complexe • Progresii aritmetice, progresii geometrice • Funcții și ecuații: funcția de gradul I; funcția de gradul al II-lea; funcția putere cu exponent natural, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcții trigonometrice directe și inverse • Metode de numărare; matematici financiare • Vectori în plan; elemente de trigonometrie; descrierea sintetică, vectorială sau analitică a unor configurații geometrice în plan	8	S27 S28	
Vacanță (18.04.2025 – 27.04.2025)					
Săptămâna verde* **				S29	
Teme de sinteză 2	Toate CS din programa examenului național de bacalaureat	*Clasa a XI-a* și *Clasa a XII-a* • Elemente de algebră: - matrice, determinanți, sisteme de ecuații liniare - grupuri, inele și corpuri, inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ • Elemente de analiză matematică: - limite de funcții, funcții continue, funcții derivabile, studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor - primitive, integrala definită, aplicații ale integralei definite	8	S30-S31	**Intervalul de cursuri 5**
Teme de sinteză 3	Toate CS din programa examenului național de bacalaureat	• Teste pregătitoare pentru bacalaureat	12	S32-S34	

NOTE: Se utilizează exprimarea „proprietate” sau „regulă”, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.

**Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2024 – 2025, care, pentru clasa a XII-a, are 34 de săptămâni de cursuri (OME nr. 3694/2024).*
***Structura anului școlar 2024 - 2025 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 10 februarie – 2 martie 2025, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanța este stabilită în perioada 22 februarie – 2 martie 2025.*
**** Programul național „Școala altfel” și Programul „Săptămâna verde” se desfășoară în perioada 9 septembrie 2024 – 30 mai 2025, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe se planifică în interval de cursuri diferite, conform OME nr. 3694/2024. În exemplul prezentat, Programul național „Școala altfel” este planificat în săptămâna S22 (Intervalul de cursuri 4) și Programul „Săptămâna verde” este planificat în săptămâna S29 (Intervalul de cursuri 5).*

Competențele specifice (CS) din planificare sunt de forma $n.m$ (sau $n.1.m$, $n.2.m$), unde $n=\overline{1,6}$ corespunde numerotării competențelor generale din programa școlară și $m=\overline{1,2}$ corespunde conținuturilor din programa școlară, astfel:

$m=1$, pentru *Elemente de algebră*
$m=2$, pentru *Elemente de analiză matematică*

Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar 2024-2025:

Interval de cursuri	Perioada	Săptămânile de școală						
Intervalul 1	**09.09.2024 – 25.10.2024** (7 săptămâni)	1	2	3	4	5	6	7
Intervalul 2	**04.11.2024 – 20.12.2024** (7 săptămâni)	8	9	10	11	12	13	14
Intervalul 3	**08.01.2025 – 21.02.2025** (7 săptămâni)	15	16	17	18	19	20	21
Intervalul 4	**03.03.2025 – 17.04.2025** (7 săptămâni)	22	23	24	25	26	27	28
Intervalul 5	**28.04.2025 – 06.06.2025** (6 săptămâni)	29	30	31	32	33	34	

II.2. Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XII-a, la disciplina *matematică*, învățământ liceal, filiera *teoretică*, profilul *real*, specializarea *științe ale naturii*

Unitatea de învățământ: …………………

PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ
ANUL ŞCOLAR 2024 – 2025*

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (filiera *teoretică*, profilul *real*, specializarea *științe ale naturii*)
3 ore/săptămână

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Intervalul de cursuri
[*se menționează titluri/teme*]	[*se precizează numărul criterial al competențelor specifice din programa școlară*]	[*din conținuturile programei școlare*]	[*stabilite de către cadrul didactic*]	[*se precizează săptămâna sau săptămânile*]	[*se menționează, de exemplu, modificări în urma realizării activității didactice la clasă*]
Recapitulare	CS vizate de programele școlare pentru clasele a IX-a, a X-a și a XI-a	*Recapitulare – clasa a IX-a, clasa a X-a, clasa a XI-a* *Evaluare inițială* *Activități remediale și/sau de progres*	6	S1 – S2	**Intervalul de cursuri 1**
Lege de compoziţie internă	1.1 2.1.1	• Lege de compoziţie internă, tabla operaţiei; proprietăți	6	S3 – S4	
Primitive	1.2 2.2	• Probleme care conduc la noţiunea de integrală • Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite • Primitive uzuale	9	S5 – S7	
Vacanță (26.10.2024 – 03.11.2024)					

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Intervalul de cursuri
Grupuri	2.1.1 2.2.1 3.1.1 4.1 5.1.1	• Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbb{Z}_n$ • Morfisme și izomorfisme de grupuri	9	S8 – S10	**Intervalul de cursuri 2**
Integrala definită: metode de calcul	2.2 3.2 4.2	• Definirea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula Leibniz – Newton • Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare • Metode de calcul ale integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbarea de variabilă	12	S11 – S14	
Vacanță (21.12.2024 – 07.01.2025)					
Inele și corpuri	2.1.1 2.2.1 4.1	• Inel, exemple: inele numerice ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_n$ • Inele de matrice, inele de funcții reale • Corp, exemple: corpuri numerice ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_p$ p prim	6	S15 – S16	**Intervalul de cursuri 3**
Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ	2.2.1 3.2.1 4.1 5.2.1	• Forma algebrică a unui polinom. Operații cu polinoame (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar) • Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X-a$, schema lui Horner • Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bezout, *c.m.m.d.c.* și *c.m.m.m.c.* al unor polinoame, descompunerea unui polinom în factori ireductibili	12	S17 – S20	
Școala altfel* **				S21	
Vacanță** (22.02.2025 – 02.03.2025)					
Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice	3.2.1 5.2.1 6.1.1 6.2.1	• Rădăcini ale polinoamelor; relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4 • Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ • Ecuații binome, ecuații reciproce, ecuații bipătrate	10	S22 – S24 S25 (1 oră)	**Intervalul de cursuri 4**
Integrala definită: integrarea	2.2 3.2 4.2	• Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, $gradQ \le 4$ prin metoda descompunerii în fracții simple	4	S25 (2 ore) S26 (2 ore)	

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Intervalul de cursuri
funcțiilor raționale					
Aplicații ale integralei definite	5.2 6.2	• Aria unei suprafețe plane • Volumul unui corp de rotație	4	S26 (1 oră) S27	
Săptămâna verde* **				S28	
Vacanță (18.04.2025 – 27.04.2025)					
Teme de sinteză 1	Toate CS din programa examenului național de bacalaureat	*Clasa a IX-a* și *Clasa a X-a* • Mulțimea numere reale; mulțimea numerelor complexe • Progresii aritmetice, progresii geometrice • Funcții și ecuații: funcția de gradul I; funcția de gradul al II-lea; funcția putere cu exponent natural, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcții trigonometrice directe și inverse • Metode de numărare; matematici financiare • Vectori în plan; elemente de trigonometrie; descrierea sintetică, vectorială sau analitică a unor configurații geometrice în plan	6	S29– S30	
Teme de sinteză 2	Toate CS din programa examenului național de bacalaureat	*Clasa a XI-a* și *Clasa a XII-a* • Elemente de algebră: - matrice, determinanți, sisteme de ecuații liniare - grupuri, inele și corpuri, inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ • Elemente de analiză matematică: - limite de funcții, funcții continue, funcții derivabile, studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor - primitive, integrala definită, aplicații ale integralei definite	6	S31-32	**Intervalul de cursuri 5**
Teme de sinteză 3	Toate CS din programa examenului național de bacalaureat	Subiecte structurate, tip bacalaureat	6	S33-S34	

NOTĂ: Se utilizează exprimarea „proprietate” sau „regulă”, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.

**Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2024 – 2025, care, pentru clasa a XII-a, are 34 de săptămâni de cursuri (OME nr. 3694/2024).*
***Structura anului școlar 2024 - 2025 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 10 februarie – 2 martie 2025, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanța este stabilită în perioada 22 februarie – 2 martie 2025.*
****Programul național „Școala altfel" și Programul „Săptămâna verde" se desfășoară în perioada 9 septembrie 2024 – 30 mai 2025, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe se planifică în interval de cursuri diferite, conform OME nr. 3694/2024. În exemplul prezentat, Programul național „Școala altfel" este planificat în săptămâna S 21 (Intervalul de cursuri 3) și Programul „Săptămâna verde" este planificat în săptămâna S 28 (Intervalul de cursuri 4).*

Competențele specifice (CS) din planificare sunt de forma $n.m$ (sau $n.1.m$, $n.2.m$), unde $n=\overline{1,6}$ corespunde numerotării competențelor generale din programa școlară și $m=\overline{1,2}$ corespunde conținuturilor din programa școlară, astfel:

$m=1$, pentru *Elemente de algebră*
$m=2$, pentru *Elemente de analiză matematică*

Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar 2024-2025:

Interval cursuri	Perioada	Săptămânile de școală						
Intervalul 1	**09.09.2024 – 25.10.2024** (7 săptămâni)	1	2	3	4	5	6	7
Intervalul 2	**04.11.2024 – 20.12.2024** (7 săptămâni)	8	9	10	11	12	13	14
Intervalul 3	**08.01.2025 – 21.02.2025** (7 săptămâni)	15	16	17	18	19	20	21
Intervalul 4	**03.03.2025 – 07.04.2025** (7 săptămâni)	22	23	24	25	26	27	28
Intervalul 5	**28.04.2025 – 06.06.2025** (6 săptămâni)	29	30	31	32	33	34	

SECȚIUNEA a III-a

Procesul de predare-învățare-evaluare. Recomandări și exemplificări la disciplina *matematică*

Material elaborat la nivelul Centrului Național de Politici și Evaluare în Educație și în cadrul GLC 39 Matematica

III.1 Test de evaluare inițială la matematică, clasa a XII-a, specializarea *matematică-informatică* (4 ore/săptămână)

Clasa a XII-a – programa școlară M1 (matematică-informatică) 4 ore/săptămână
Matematică

Test de evaluare inițială

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 40 de minute.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns doar o variantă este corectă.**

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

Subiectul I (20 de puncte)

	Pentru cerințele **1 - 4**, se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}a+1&1&1\\1&a+2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.			
5p	**1.** Determinantul matricei $X(a)$ este egal cu:			
	A. a^2-a	**B.** a^2+a	**C.** 0	**D.** a^2+1
5p	**2.** Mulțimea numerelor reale a, pentru care matricea $X(a)$ **nu** este inversabilă, este:			
	A. $\{0,-1\}$	**B.** $\{0,1\}$	**C.** $\{-1,1\}$	**D.** $\mathbb{R}$
5p	**3.** Numărul real a pentru care $X(2)+X(a)=2X(5)$, este:			
	A. 3	**B.** 6	**C.** 8	**D.** 12
5p	**4.** Știind că $X(-2)\cdot B=I_3$ și $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, elementul b_{11} al matricei B este egal cu:			
	A. -1	**B.** $-\frac{1}{2}$	**C.** $\frac{1}{2}$	**D.** 1

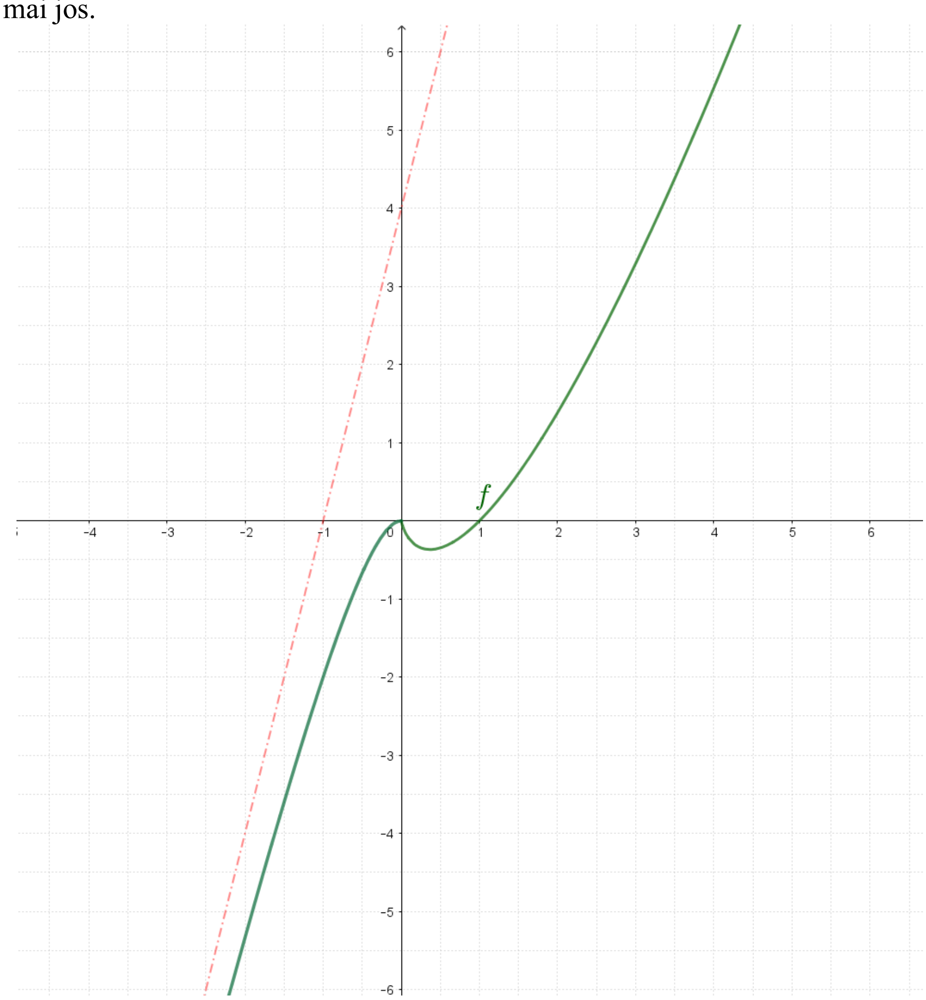
Subiectul al II-lea (25 de puncte)

2p	**1.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5$ este:			
	A. 0	**B.** 1	**C.** x	**D.** $5x$
2p	**2.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ este:			
	A. 0	**B.** 2	**C.** 3	**D.** x
2p	**3.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ este:			
	A. 0	**B.** $2+x$	**C.** x	**D.** $2x$
2p	**4.** Derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ este:			
	A. $\frac{\sqrt{x}}{2}$	**B.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	**C.** $\frac{2}{x}$	**D.** $\frac{2}{\sqrt{x}}$
2p	**5.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ este:			
	A. e^x	**B.** xe^{x-1}	**C.** xe	**D.** e^{x-1}

2p	**6.** Derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ este: **A.** $\ln 1$ **B.** x **C.** $\frac{1}{x}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$
2p	**7.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x$ este: **A.** $-\cos x+\sin x$ **B.** $\cos x-\sin x$ **C.** $\cos x-\sin x$ **D.** $-\cos x-\sin x$
2p	**8.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$ este: **A.** $\frac{1}{x^2+1}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **C.** x^2+1 **D.** $\sqrt{x^2+1}$
4p	**9.** Derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ este: **A.** $-\frac{1}{x}$ **B.** 1 **C.** $-\frac{1}{x^2}$ **D.** $\ln x$
5p	**10.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)e^{-x}$ este: **A.** $1-e^{-x}$ **B.** $(x+3)e^{-x}$ **C.** $(-x-1)e^{-x}$ **D.** $3e^{-x}$

Subiectul al III-lea (45 de puncte)

Pentru cerințele **1 – 9,** se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{x-1}, & x\in(-\infty,0] \\ x\ln x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$, al cărei grafic este reprezentat mai jos.



5p	**1.** Numărul $f(-1)$ este egal cu: **A.** -2 **B:** -1 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0
5p	**2.** Numărul punctelor de extrem ale funcției f este egal cu: **A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3
5p	**3.** Numărul asimptotelor graficului funcției f este egal cu: **A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3
5p	**4.** Mulțimea numerelor reale m, pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții, este: **A.** $\varnothing$ **B.** $\left(-\frac{1}{e},0\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{e},1\right)$ **D.** $(0,1)$
5p	**5.** Enunțul corect este: **A**. Funcția f este injectivă și este surjectivă. **B.** Funcția f este injectivă și nu este surjectivă. **C.** Funcția f nu este injectivă și este surjectivă. **D.** Funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.
5p	**6.** Enunțul „Funcția f este derivabilă în 0” este: **A**. Adevărat **B.** Fals
5p	**7.** Pentru $x\in(-\infty,0)$, derivata funcției f este: **A.** $f'(x)=8x$ **B.** $f'(x)=\frac{8x}{(x-1)^2}$ **C.** $f'(x)=\frac{4x(x-2)}{(x-1)^2}$ **D.** $f'(x)=\frac{4x(3x-2)}{(x-1)^2}$
5p	**8.** Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f este: **A.** $y=3x-1$ **B.** $y=2x+1$ **C.** $y=2x-1$ **D.** $y=3x+1$
5p	**9.** Se consideră numerele $a=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{5}\ln\frac{7}{5}$ și $c=\sqrt{2}\ln\sqrt{2}$. Relația corectă este: **A.** $a<c<b$ **B.** $b<a<c$ **C.** $c<a<b$ **D.** $b<c<a$

Barem de corectare și de notare

Subiectul I

1	2	3	4
B	A	C	B
5p	5p	5p	5p

Subiectul al II-lea

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	D	B	A	C	B	A	C	C
2p	2p	2p	2p	2p	2p	2p	2p	4p	5p

Subiectul al III-lea

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	C	B	B	C	B	C	D	D
5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p

Matricea de specificații

Test de evaluare inițială – clasa a XII-a, matematică-informatică

Competențe de evaluat / **Conținuturi**	**IX CS 1.3**	**XI CS 3.1**	**XI CS 3.2**	**XI CS 4.2**	**IX CS 5.3**	**X CS 5.2**	**XI CS 5.2**	**XI CS 6.1**	**XI CS 6.2**	**Total**
IX Funcții; lecturi grafice	III.1 (5p)									**5p**
X Funcții și ecuații						III.5(5p)				**5p**
XI Matrice		I.2(5p) I.3(5p)								**10p**
XI Determinanți		I.1(5p)						I.4 (5p)		**10p**
XI Derivabilitate			II.1(2p) II.2(2p) II.3(2p) II.4(2p) II.5(2p) II.6(2p) II.7(2p) II.8(2p) II.9(4p) II.10(5p)	III.3(5p) III.7(5p)	III.8(5p)		III.2(5p) III.6(5p)		III.9 (5p)	**55p**
XI Reprezentarea grafică a funcțiilor							III.4(5p)			**5p**
Total	**5p**	**15p**	**25p**	**10p**	**5p**	**5p**	**15p**	**5p**	**5p**	**90p**

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare inițială:

IX.CS 1.3 Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică a acesteia
XI.CS 3.1 Aplicarea algoritmilor de calcul în situații practice
XI.CS 3.2 Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme şi modelarea unor procese
XI.CS 4.2 Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
XI.CS 5.2 Studierea unor funcții din punct de vedere cantitativ și calitativ utilizând diverse procedee: majorări, minorări pe un interval dat, proprietățile algebrice și de ordine ale mulțimii numerelor reale în studiul calitativ local, utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți
XI.CS 6.1 Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii şi metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)
XI.CS 6.2 Explorarea unor proprietăți cu caracter local şi/sau global ale unor funcții utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică

Testul de evaluare inițială pentru clasa a XII-a, specializarea *matematică-informatică* (4 ore), poate fi accesat și online la adresa https://forms.gle/M1rm6o6EKaDCYJ689 .

III.2 Test de evaluare inițială la matematică, clasa a XII-a, specializarea *științe ale naturii* (3 ore/săptămână)

Clasa a XII-a – programa școlară M2 (științe ale naturii) 3 ore/săptămână
Matematică

Test de evaluare inițială

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 40 de minute.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns, doar o variantă este corectă.**

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

Subiectul I (20 de puncte)

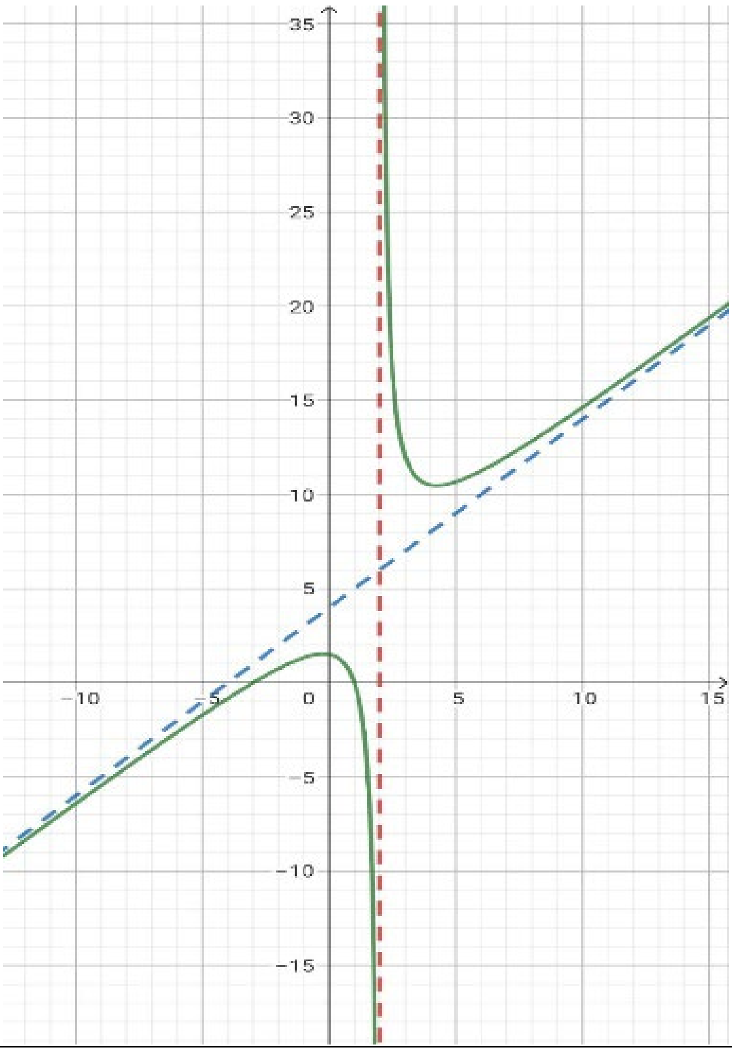
	Pentru cerințele **1 - 3**, se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.			
5p	**1.** Determinantul matricei A este egal cu:			
	A. -24	**B.** 0	**C.** 12	**D.** 24
5p	**2.** Numărul real m pentru care $A\cdot B=B\cdot A$ este:			
	A. $-\frac{3}{4}$	**B.** $\frac{3}{4}$	**C.** $-\frac{4}{3}$	**D.** $\frac{4}{3}$
5p	**3.** Enunțul corect este:			
	A. $A+I_2=A$	**B.** $A\cdot I_2=I_2$	**C.** $A\cdot I_2=A$	**D.** $A\cdot I_2=-A$
5p	**4.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(0,3)$ și $C(2,5)$. Aria triunghiului ABC este egală cu:			
	A. 2	**B.** 4	**C.** 6	**D.** 8

Subiectul al II-lea (25 de puncte)

2p	**1.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5$ este:			
	A. 0	**B.** 1	**C.** x	**D.** $5x$
2p	**2.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ este:			
	A. 0	**B.** 1	**C.** x	**D.** -1
2p	**3.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ este:			
	A. 0	**B.** $2+x$	**C.** x	**D.** $2x$
2p	**4.** Derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ este:			
	A. $\frac{\sqrt{x}}{2}$	**B.** $\frac{2}{\sqrt{x}}$	**C.** $\frac{2}{x}$	**D.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
2p	**5.** Derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ este:			
	A. $\ln 1$	**B.** x	**C.** $\frac{1}{x}$	**D.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2p	**6.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$ este: **A.** e^x **B.** xe^{x-1} **C.** xe **D.** e^{x-1}
2p	**7.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$ este: **A.** 2^x **B.** $x2^{x-1}$ **C.** $2^x\ln 2$ **D.** 2^{x-1}
2p	**8.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$ este: **A.** $\sin x$ **B.** $\cos x$ **C.** $-\sin x$ **D.** $-\cos x$
4p	**9.** Derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ este: **A.** $-\frac{1}{x}$ **B.** 1 **C.** $-\frac{1}{x^2}$ **D.** $\ln x$
5p	**10.** Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)e^x$ este: **A.** $1+e^x$ **B.** $(x+3)e^x$ **C.** $(x+1)e^x$ **D.** $2e^x$

Subiectul al III-lea (45 de puncte)

	Pentru cerințele **1 – 7,** se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-2}$, al cărei grafic este reprezentat mai jos: 

5p	**1.** Numărul $f(3)$ este egal cu: **A.** 30	**B.** 12	**C.** 9	**D.** 5
5p	**2.** Numărul punctelor de extrem ale funcției f este egal cu: **A.** 0	**B.** 1	**C.** 2	**D.** 3
5p	**3.** Numărul asimptotelor graficului funcției f este egal cu: **A.** 0	**B.** 1	**C.** 2	**D.** 3
5p	**4.** Pe intervalul $[5,+\infty)$, funcția f este: **A.** periodică	**B.** descrescătoare	**C.** constantă	**D.** crescătoare
5p	**5.** Enunțul corect este: **A.** Funcția f este injectivă și este surjectivă. **B.** Funcția f este injectivă și nu este surjectivă. **C.** Funcția f nu este injectivă și este surjectivă. **D.** Funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.			
5p	**6.** Derivata funcției f este: **A.** $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$	**B.** $f'(x)=\dfrac{3x^2-7}{(x-2)^2}$	**C.** $f'(x)=\dfrac{2x+2}{(x-2)^2}$	**D.** $f'(x)=2x+2$
5p	**7.** Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f este: **A.** $y=-4x+4$	**B.** $y=-x$	**C.** $y=1$	**D.** $y=0$
5p	**8.** Numărul real a pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+a, & \text{dacă } x\le 2 \\ x^2-1, & \text{dacă } x>2 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ este: **A.** 0	**B.** 1	**C.** 2	**D.** 3
5p	**9.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x}-1$. O funcție $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ pentru care $g'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$ este: **A.** $g(x)=6x-\dfrac{1}{x^2}-x$	**B.** $g(x)=x^3\ln x-x$	**C.** $g(x)=x^3+\ln x-x$	**D.** $g(x)=6x-\sqrt{x}-x$

Barem de corectare și de notare

Subiectul I

1	2	3	4
B	A	C	B
5p	5p	5p	5p

Subiectul al II-lea

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	D	D	C	A	C	B	C	B
2p	2p	2p	2p	2p	2p	2p	2p	4p	5p

Subiectul al III-lea

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	C	C	D	D	A	A	B	C
5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p

Matricea de specificații

Test de evaluare inițială – clasa a XII-a, științe ale naturii

Competențe de evaluat / Conținuturi	IX CS 1.3	XI CS 3.1	XI CS 3.2	XI CS 4.2	IX CS 5.3	X CS 5.2	XI CS 5.2	XI CS 6.1	Total
IX Funcții; lecturi grafice	III.1(5p)				III.4(5p)				**10p**
X Funcții și ecuații						III.5(5p)			**5p**
XI Matrice		I.2(5p) I.3(5p)							**10p**
XI Determinanți		I.1(5p)						I.4(5p)	**10p**
XI Funcții continue				III.8(5p)					**5p**
XI Funcții derivabile			II.1(2p) II.2(2p) II.3(2p) II.4(2p) II.5(2p) II.6(2p) II.7(2p) II.8(2p) II.9(4p) II.10(5p)	III.6(5p) III.9(5p)	III.7(5p)				**40p**
XI Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor							III.2(5p) III.3(5p)		**10p**
Total	**5p**	**15p**	**25p**	**15p**	**10p**	**5p**	**10p**	**5p**	**90p**

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare inițială:

IX.CS 1.3 Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică a acesteia
XI.CS 3.1 Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice
XI.CS 3.2 Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme

XI.CS 4.2 Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
IX.CS 5.3 Deducerea unor proprietăți ale funcțiilor numerice prin lectură grafică
X.CS 5.2 Interpretarea, pe baza lecturii grafice, a proprietăților algebrice ale funcțiilor
XI.CS 5.2 Utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți
XI.CS 6.1 Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii și metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)

Testul de evaluare inițială pentru clasa a XII-a, specializarea *științe ale naturii* (3 ore), poate fi accesat și online la adresa https://forms.gle/pyzDr7rLX4TtucQTA .

III.3 Elemente de proiectare didactică, specializarea *matematică-informatică*

Pentru unitatea de învățare *Integrala definită, metode de integrare*, programa școlară M1 (4 ore/ săptămână), exemplificăm în continuare următoarele elemente de proiectare didactică:

- *reactualizarea noțiunilor și a competențelor ancoră*, necesare pentru înțelegerea și aplicarea metodelor de integrare pentru integrala definită (integrarea prin părți și integrarea prin schimbare de variabilă); profesorul poate utiliza la clasă *Fișa de lucru 1* (un exemplu de test de evaluare inițială) și *Formularul Google* atașat, pentru oferirea unui feedback personalizat și, în același timp, pentru identificarea elevilor care au nevoie de suport remedial; testul de evaluare inițială, propus pentru evaluarea de la începutul unității de învățare, are asociat atât *Baremul de corectare și de notare,* cât și *Matricea de specificații,* matrice care stabilește corespondența dintre itemii testului, competențele specifice și unitățile de conținut evaluate;
- *exemple de activități de învățare* (recomandate de programa școlară sau altele adecvate pentru formarea/dezvoltarea competențelor specifice asociate conținuturilor vizate);
- *fișe de lucru* asociate tuturor activităților de învățare propuse în cadrul proiectului didactic; se recomandă ca profesorul să selecteze exercițiile și metodele de lucru adecvate, în funcție de ritmul de învățare și de particularitățile elevilor clasei, identificând durata și oportunitatea activităților desfășurate la clasă pe baza efortului și/sau a ritmului individual al elevilor în relație cu activitățile ce solicită efortul colectiv (perechi, echipe);
- *fișe de lucru – recomandări metodice pentru profesor* (asociate fiecărei fișe de lucru); acestea conțin recomandări metodice pentru utilizarea fiecărei fișe de lucru și rezolvări complete ale exercițiilor propuse în fișe; astfel profesorul poate selecta ușor, dintre exercițiile din fiecare fișă de lucru, ceea ce este mai potrivit pentru un anumit colectiv de elevi; de asemenea, se recomandă ca evaluarea activității elevilor, activitate desfășurată în clasă, să se facă în termeni calitativi, prin referire la esențialitate, funcționalitate, durabilitate, stabilitate, mobilitate, diversificare, amplificare treptată;
- *exemplu de evaluare sumativă* (*Fișa de lucru 4*), care poate fi utilizată (parțial sau în totalitate) pentru evaluarea de la finalul unității de învățare; testul de evaluare sumativă are asociat atât *Baremul de corectare și de notare,* cât și *Matricea de specificații,* matrice care stabilește corespondența dintre itemii testului, competențele specifice și unitățile de conținut evaluate;
- *exemple de activități remediale și/sau de progres* (*Fișa de lucru 5*), exemple care au legătură cu rezultatele posibile, obținute de fiecare dintre elevii unei clase la care s-a aplicat evaluarea sumativă la finalul acestei unități de învățare; dintre activitățile propuse, profesorul poate selecta acele exemple potrivite pentru elevii săi.

Având în vedere specificul/dinamica psiho-comportamentală a generațiilor aflate la etapa școlarității, este necesară și eficientă diversificarea formelor de evaluare desfășurate pe parcursul unității de învățare și orientarea acestora către metode colaborative, prin utilizarea inter-evaluării elev-elev în cadrul activităților desfășurate în perechi/pe echipe și/sau al derulării de proiecte pe grupuri de elevi, în cadrul lecțiilor.
De asemenea, atât evaluarea inițială, cât și evaluarea la finalul unității de învățare pot fi derulate sub diferite forme, fie prin utilizarea testelor clasice, administrate pe hârtie, fie prin utilizarea unor aplicații digitale pentru computer/tabletă/telefon, fie prin activități desfășurate în perechi/pe grupuri de elevi sau prin proiecte desfășurate în clasă, organizate de profesor în funcție de specificul clasei; în cadrul tuturor acestor activități pot fi utilizați itemi din testele propuse pentru această proiectare didactică.

Proiectul unității de învățare *Integrala definită, metode de integrare*

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Nr. total de ore: 8 ore

Conținuturi (detalieri)	**Competențe specifice**	**Activități de învățare**	**Resurse**	**Evaluare**
[*se menționează detalieri de conținut care explicitează anumite parcursuri*]	[*se precizează nr. criterial al competențelor specifice din programa școlară*]	[*vizate/recomandate de programa școlară sau altele adecvate pentru realizarea competențelor specifice*]	[*se precizează resurse de timp, de loc, material didactic, forme de organizare a clasei*]	[*se menționează metodele, instrumentele sau modalitățile de evaluare utilizate*]
L1 - L3. Integrarea prin părți (3 ore)	**4.2** **2.2** **3.2**	• Recapitularea noțiunilor ancoră *Elemente de conținut vizate: primitive uzuale, proprietăți ale integralei definite (liniaritate) formula Leibniz-Newton* • Identificarea și demonstrarea metodei de integrare prin părți, folosind formula pentru derivarea produsului a două funcții derivabile; exemplificarea folosirii ei în calculul unor integrale simple • Explicarea opțiunilor de a alege „părțile” în calculul integralelor definite ale unor funcții	• *Fișa de lucru 1* (evaluare inițială) • *Formular Google – Fișa de lucru 1* Activitate individuală • *Fișa de lucru 2* – exercițiile 1 - 6, subpunctele a) Activitate frontală	Administrarea și corectarea probei Oferirea de feedback personalizat Identificarea elevilor care necesită suport remedial Discuție frontală
	4.2	• Calculul unor integrale cu un grad diferit de dificultate, folosind integrarea prin părți	• *Fișa de lucru 3* – exercițiile I.1 – I.8, subpunctele a) Alegerea exercițiilor se va face în funcție de nivelul clasei și al diferitelor grupe de elevi din aceasta • Activitate diferențiată	Discuție frontală Verificare și feedback pe grupe

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
	4.2 5.2	• Redactarea soluțiilor unor probleme cu grade diferite de complexitate în care apare integrarea prin părți, folosind formulele studiate	• *Fișa de lucru 3* – exercițiile II.1 – II.3 • Activitate diferențiată	Verificare și feedback pe grupe Inter-evaluare elev-elev
L4 – L6. Integrarea prin schimbarea de variabilă (3 ore)	3.2 4.2	• Identificarea/recunoașterea unei funcții și a derivatei sale în diferite integrale definite • Utilizarea unor formule standard în calculul integralelor definite • Redactarea unor demonstrații utilizând terminologia adecvată și făcând apel la propoziții matematice studiate • Evidențierea diverselor forme de aplicare a schimbării de variabilă	• *Fișa de lucru 4* – exercițiile I.1 – I.7 Activitate frontală	Verificare și feedback pe grupe Inter-evaluare elev-elev
	5.2	• Folosirea creativă a unor reprezentări variate pentru depășirea unor dificultăți în calculul integralelor definite	• *Fișa de lucru 4* – exercițiile I.8 – I.10 • *Fișa de lucru 4* – exercițiile II.1 – II.2 Activitate pe grupe	Verificare și feedback pe grupe Inter-evaluare elev-elev
	6.2.2	• Utilizarea rezultatelor și metodelor pentru crearea de strategii de lucru în vederea calculării unor integrale definite • Analizarea rezolvării unei probleme din punctul de vedere al corectitudinii, al simplității, al clarității și al semnificației rezultatelor	• *Fișa de lucru 4* – exercițiile III.1 – III.3 Activitate diferențiată	Oferire de feedback personalizat
L7. Evaluare sumativă (1 oră)	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2	• Evaluare sumativă	• *Fișa de lucru 5* (test de evaluare) Activitate individuală	Administrarea probei

Conținuturi (detalieri)	**Competențe specifice**	**Activități de învățare**	**Resurse**	**Evaluare**
	6.2.2			
L8. Activități remediale și/sau de progres (1 oră)	**1.2** **2.2** **3.2** **4.2**	• Discutarea rezolvării testului de evaluare • Activități remediale și/sau de progres	• *Fișa de lucru 6* Activitate în perechi	Verificare și feedback perechi

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Elemente de analiză matematică***
Unitatea de învățare: ***Integrala definită, metode de integrare***
Evaluare inițială

Fișa de lucru 1 – test de evaluare inițială

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 15 de minute.**
- **Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns doar o variantă este corectă.**

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

10p	**1.** $\int_1^4 3dx =$			
	A. 0	**B.** 3	**C.** 9	**D.** 12
10p	**2.** $\int_0^3 xdx =$			
	A. $\frac{1}{2}$	**B.** $\frac{3}{2}$	**C.** 3	**D.** $\frac{9}{2}$
15p	**3.** $\int_0^1 \left(8x^3 + e^{-x}\right)dx =$			
	A. $1+\frac{1}{e}$	**B.** $1-\frac{1}{e}$	**C.** $3-e$	**D.** $3-\frac{1}{e}$
15p	**4.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx =$			
	A. $\frac{1}{4}$	**B.** $\frac{1}{2}$	**C.** $\ln 2$	**D.** $\ln 4$
15p	**5.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos xdx =$			
	A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**B.** $-\frac{1}{2}$	**C.** $\frac{1}{2}$	**D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
15p	**6.** $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx =$			
	A. $\ln 2$	**B.** $\frac{\pi}{4}$	**C.** $\frac{\pi}{2}$	**D.** 4
10p	**7.** O primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2x+1)e^x$ este:			
	A. $\left(x^2+x\right)e^x$	**B.** $(2x-1)e^x$	**C.** $2e^x$	**D.** $(2x+3)e^x$

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Evaluare inițială

Barem de corectare și de notare

1	2	3	4	5	6	7
C	D	D	B	C	A	D
10p	10p	15p	15p	15p	15p	10p

Matricea de specificații

Test de evaluare inițială

Competențe de evaluat / Conținuturi	XII CS 2.2	XII CS 3.2	XII CS 4.2	Total
Primitive	7 (10p)			**10p**
Formula Leibniz-Newton	1 (10p) 2 (10p)	4 (15p) 5 (15p)		**50p**
Proprietăți ale integralei definite		3 (15p)	6 (15p)	**30p**
Total	**30p**	**45p**	**15p**	**90p**

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare inițială în cadrul unității de învățare:
XII CS 2.2 Identificarea unor metode de calcul ale integralelor, prin realizarea de legături cu reguli de derivare
XII CS 3.2 Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite
XII CS 4.2 Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor

Testul de evaluare inițială pentru unitatea de învățare *Integrala definită, metode de integrare* poate fi accesat online la adresa https://forms.gle/GKUucCgqo7Y3PdkP6 .

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Lecția L1: Integrarea prin părți

Fișa de lucru 2

Integrare prin părți

Dacă funcțiile $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele f' și g' continue, atunci

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx .$$

Exerciții:

Calculați următoarele integrale, folosind metoda integrării prin părți:

1. **a)** $\int_0^1 x\cdot e^x dx$ **b)** $\int_0^1 (x+2)e^x dx$

2. **a)** $\int_1^e x^3\cdot \ln x\, dx$ **b)** $\int_1^e x\cdot \ln x\, dx$

3. **a)** $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot \cos x\, dx$ **b)** $\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$

4. **a)** $\int_0^{\pi} e^x\cdot \sin x\, dx$ **b)** $\int_0^{\pi} e^x\cdot \cos x\, dx$

5. **a)** $\int_0^1 (x^2+x)\cdot e^x dx$ **b)** $\int_0^1 (x^2-2)\cdot e^x dx$

6. **a)** $\int_1^e \ln x\, dx$ **b)** $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Lecția L1: Integrarea prin părți

Fișa de lucru 2 – recomandări metodice pentru profesor

Integrare prin părți

Dacă funcțiile $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt derivabile, cu derivatele f' și g' continue, atunci

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx.$$

Demonstrație: Funcțiile f și g sunt derivabile, cu f' și g' continue, deci funcția $f\cdot g$ este derivabilă, iar funcția $f'\cdot g + f\cdot g'$ este continuă pe intervalul $[a,b]$. Deoarece $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$, funcția $f\cdot g$ este o primitivă a funcției $f'\cdot g + f\cdot g'$ pe intervalul $[a,b]$. Aplicând teorema Leibniz-Newton, obținem:

$$\int_a^b \left(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\right)dx = \int_a^b \left(f'(x)\cdot g(x)\right)' dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b.$$

Folosind proprietatea de liniaritate a integralei, deducem $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$,

așadar $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx$.

Comentarii metodice:

- Se recomandă a se analiza oportunitatea discutării detaliate a demonstrației formulei de integrare prin părți prin raportare la specificul clasei de elevi.
- Se recomandă implicarea nemijlocită a elevilor în rezolvarea sarcinilor de lucru și utilizarea abordărilor propuse de aceștia, ca punct de plecare pentru clarificarea sau justificarea unor idei, algoritmi, metode, căi de rezolvare etc.
- Formula de integrare prin părți se aplică atunci când avem de calculat o integrală, iar funcția de sub integrală se poate scrie sub forma unui produs de funcții continue, astfel încât cel puțin una dintre ele să fie derivabilă.
- De cele mai multe ori, avem de calculat $I = \int_a^b u(x)\cdot v(x)dx$, cu u și v funcții derivabile pe intervalul $[a,b]$, așadar oricare dintre ele poate fi scrisă ca derivata unei alte funcții (adică funcțiile u și v sunt primitive ale altor funcții). Înainte de a aplica formula de integrare prin părți, investigăm pe care dintre funcțiile u și v este mai bine să o scriem sub forma derivatei unei alte funcții, astfel încât după utilizarea teoremei anterioare să obținem o nouă integrală care să fie mai simplu de calculat decât integrala I.
Dacă după aplicarea metodei, scriind funcția u ca primitivă a unei alte funcții, calculele se complică, atunci aplicăm metoda scriind funcția v ca primitivă a unei alte funcții. Dacă niciuna dintre alegerile anterioare nu ne conduce la calcule mai simple, este posibil ca metoda integrării prin părți să nu fie eficientă pentru calculul integralei respective, caz în care vom folosi alte abordări, pe care le vom vedea în lecțiile viitoare.
- Metoda de integrare prin părți se poate aplica de mai multe ori într-un exercițiu, dacă sunt îndeplinite condițiile din teoremă.

- Dacă avem de calculat $I=\int_a^b x^n \cdot g(x)dx$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, unde funcția g este derivabilă pe intervalul $[a,b]$, uneori este util să scriem $g=h'$, pentru ca după aplicarea metodei de integrare prin părți să scadă gradul la care se află x.

- Pentru fișa de lucru, se recomandă rezolvarea în clasă, sub îndrumarea profesorului, a subpunctelor a) și rezolvarea individuală, eventual ca temă, a subpunctelor b). În funcție de caracteristicile grupului de elevi, profesorul decide utilizarea/adaptarea acestei strategii.

Sugestii metodice pentru rezolvarea exercițiilor:

Calculați următoarele integrale, folosind metoda integrării prin părți:

1) a) $\int_0^1 x\cdot e^x dx$

Alegem $f'(x)=e^x$ și $g(x)=x$, deci

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=e^x \Rightarrow f(x)=e^x \\ g(x)=x \Rightarrow g'(x)=1 \end{array}}$$

Integrând prin părți obținem:

$$\int_0^1 x\cdot e^x dx=\int_0^1 x\cdot\left(e^x\right)' dx = x\cdot e^x\Big|_0^1-\int_0^1 x'\cdot e^x dx=e-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big\|_0^1=e-e+1=1.$$

2) a) $\int_1^e x^3\cdot\ln x dx$

Deoarece dorim ca după integrare să dispară logaritmul, alegem $f'(x)=x^3$ și $g(x)=\ln x$, deci

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=x^3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4}{4} \\ g(x)=\ln x \Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}}$$

Integrând prin părți, obținem:

$$\int_1^e x^3\cdot\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^4}{4}\right)'\cdot\ln x dx=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^4}{4}\cdot(\ln x)'\,\mathrm{d}x=\frac{e^4}{4}-\int_1^e\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx=$$

$$=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^e=\frac{e^4}{4}-\frac{e^4-1}{16}=\frac{3e^4+1}{16}.$$

3) a) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\cos x\,dx$

Alegem $f'(x)=\cos x$ și $g(x)=x^2$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=\cos x \Rightarrow f(x)=\sin x \\ g(x)=x^2 \Rightarrow g'(x)=2x \end{array}}$$

Integrând prin părți obținem:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\cos x dx=\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot(\sin x)' dx\,\mathrm{dx}=x^2\cdot\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\right)'\cdot\sin x dx=2\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot(-\sin x)dx$$

Integrăm din nou prin părți, alegând $f'(x)=-\sin x$ și $g(x)=x$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=-\sin x \Rightarrow f(x)=\cos x \\ g(x)=x \Rightarrow g'(x)=1 \end{array}}$$

$$I=2\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot(\cos x)' dx=2x\cdot\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}-2\int_{-\pi}^{\pi} x'\cdot\cos x dx=-4\pi-2\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx=-4\pi-2\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}=-4\pi .$$

4) a) $\int_{0}^{\pi} e^x\cdot\sin x\,dx$

Notăm $I=\int_{0}^{\pi} e^x\cdot\sin x dx$. Alegem $f'(x)=e^x$ și $g(x)=\sin x$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=e^x \Rightarrow f(x)=e^x \\ g(x)=\sin x \Rightarrow g'(x)=\cos x \end{array}}$$

Integrând prin părți, deducem:

$$I=\int_{0}^{\pi}\left(e^x\right)'\cdot\sin x dx=e^x\cdot\sin x\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi} e^x\cdot(\sin x)' dx=-\int_{0}^{\pi} e^x\cdot\cos x dx .$$

Alegem din nou $f'(x)=e^x$, iar $g(x)=\cos x$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=e^x \Rightarrow f(x)=e^x \\ g(x)=\cos x \Rightarrow g'(x)=-\sin x \end{array}}$$

$$I=-\int_{0}^{\pi}\left(e^x\right)'\cdot\cos x dx=-e^x\cdot\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi} e^x\cdot(\cos x)' dx=e^\pi+1-\int_{0}^{\pi} e^x\cdot\sin x dx=e^\pi+1-I .$$

În consecință, $I=\dfrac{e^\pi+1}{2}$.

5) a) $\int_{0}^{1}\left(x^2+x\right)\cdot e^x dx$

Alegem $f'(x)=e^x$ și $g(x)=x^2+1$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=e^x \Rightarrow f(x)=e^x \\ g(x)=x^2+x \Rightarrow g'(x)=2x+1 \end{array}}$$

Integrând prin părți obținem:

$$\int_0^1 \left(x^2+x\right)\cdot e^x dx=\int_0^1 \left(x^2+x\right)\cdot\left(e^x\right)' dx=\left(x^2+x\right)\cdot e^x\Big|_0^1-\int_0^1 \left(x^2+x\right)'\cdot e^x dx=2e-\int_0^1 (2x+1)\cdot e^x dx=$$

$$=2e-\int_0^1 (2x+1)\cdot\left(e^x\right)' dx=2e-(2x+1)\cdot e^x\Big|_0^1+\int_0^1 (2x+1)'\cdot e^x dx=2e-3e+1+\int_0^1 2e^x dx=1-e+2e^x\Big|_0^1=e-1.$$

6) a) $\int_1^e \ln x dx=\int_1^e 1\cdot\ln x dx$

Alegem $f'(x)=1$ și $g(x)=\ln x$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=1 \Rightarrow f(x)=x \\ g(x)=\ln x \Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}}$$

Integrând prin părți obținem:

$$\int_1^e \ln x dx=\int_1^e x'\cdot\ln x dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot(\ln x)' dx=e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x} dx=e-x\Big|_1^e=1.$$

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Elemente de analiză matematică***
Unitatea de învățare: ***Integrala definită, metode de integrare***
Lecțiile L1 – L3: Integrarea prin părți

Fișa de lucru 3

I. Folosind metoda de integrare prin părți, calculați:

1. **a)** $\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx$ **b)** $\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin x\,dx$

2. **a)** $\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{e^x}dx$ **b)** $\int_0^1 \frac{2x+1}{e^x}dx$

3. **a)** $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

4. **a)** $\int_1^e (x^2-1)\cdot\ln x\,dx$ **b)** $\int_1^e (x^2+2x)\cdot\ln x\,dx$

5. **a)** $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\,dx$ **b)** $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$

6. **a)** $\int_2^3 \ln\frac{x}{x-1}dx$ **b)** $\int_1^2 \ln\frac{x}{x+2}dx$

7. **a)** $\int_0^1 \sqrt{9-x^2}\,dx$ **b)** $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

8. **a)** $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$ **b)** $\int_0^1 \ln(x+3)\,dx$

II.

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e \ln^n x\,dx$.

a) Calculați I_2.

b) Demonstrați că $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $J_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

a) Calculați J_2.

b) Demonstrați că $J_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}\cdot J_n$, pentru orice număr natural nenul n.

3. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+8}\,dx$.

a) Calculați I_1.

b) Demonstrați că $I_{n+2}=\frac{27}{n+4}-\frac{8(n+1)}{n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\cdot\operatorname{arctg} x, & x\le 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{-1}^{e-1} f(x)\,dx$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Lecțiile L1 – L3: Integrarea prin părți

Fișa de lucru 3 – recomandări metodice pentru profesor

Se recomandă rezolvarea în clasă, sub îndrumarea profesorului, a subpunctelor a) și rezolvarea individuală, eventual ca temă, a subpunctelor b). În funcție de caracteristicile grupului de elevi, profesorul decide utilizarea/adaptarea acestei strategii.

Profesorul selectează exercițiile și metodele de lucru în funcție de ritmul de învățare și de particularitățile elevilor, identificând durata și oportunitatea activităților bazate pe efortul și/sau ritmul individual al elevului cu activitățile ce solicită efortul colectiv (perechi, echipe). Se recomandă ca evaluarea activității elevilor să se facă în termeni calitativi, prin referire la esențialitate, funcționalitate, durabilitate, stabilitate, mobilitate, diversificare, amplificare treptată.

1. a) $\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx=\int_0^{\pi} x\cdot(-\cos x)'\,dx=-x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} x'\cdot\cos x\,dx=\pi+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi$.

2. a) Deoarece $I=\int_0^1\frac{x^2+2x+3}{e^x}dx=\int_0^1\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^{-x}\,dx=-\int_0^1\left(x^2+2x+3\right)\cdot\left(e^{-x}\right)'\,dx$, integrând de două ori prin părți obținem $I=-\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1(2x+2)e^{-x}dx=-\frac{6}{e}+3-\int_0^1(2x+2)\left(e^{-x}\right)'dx=$

$$=-\frac{6}{e}+3-(2x+2)\cdot e^{-x}\Big|_0^1+2\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{6}{e}+3-\frac{4}{e}+2-2e^{-x}\Big|_0^1=-\frac{12}{e}+7.$$

3. a) $I=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{2\pi}(-\cos x)'\cdot\sin x\,dx=-\cos x\cdot\sin x\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos x\cdot(\sin x)'\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=$

$=\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 x\right)dx=x\Big|_0^{2\pi}-I$, deci $I=\pi$.

4. a) $\int_1^e\left(x^2-1\right)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}-x\right)'\ln x\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{e^3-3e}{3}-\int_1^e\left(\frac{x^2}{3}-1\right)dx=$

$=\frac{e^3-3e}{3}-\left(\frac{x^3}{9}-x\right)\Big|_1^e=\frac{2e^3-8}{9}$.

5. a) $I=\int_0^1\sqrt{x^2+4}\,dx=\int_0^1 x'\cdot\sqrt{x^2+4}\,dx$. Alegem $f'(x)=x'$ și $g(x)=\sqrt{x^2+4}$. Integrând prin părți, obținem:

$I=x\cdot\sqrt{x^2+4}\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx=\sqrt{5}-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{5}-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{5}-\int_0^1\frac{x^2+4-4}{\sqrt{x^2+4}}dx$, deci

$$I=\sqrt{5}-\int_0^1\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx=\sqrt{5}-\int_0^1\sqrt{x^2+4}\,dx+4\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{5}-I+4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\Big|_0^1$$

Deoarece $I=\sqrt{5}-I+4\ln\left(1+\sqrt{5}\right)-4\ln 2$, deducem că $I=\frac{\sqrt{5}}{2}+2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. a) $\int_2^3\ln\frac{x}{x-1}dx=\int_2^3 x'\cdot\ln\frac{x}{x-1}dx=x\cdot\ln\frac{x}{x-1}\Big|_2^3-\int_2^3 x\cdot\left(\ln\frac{x}{x-1}\right)'dx=x\cdot\ln\frac{x}{x-1}\Big|_2^3-\int_2^3 x\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}dx=$

$=3\ln\frac{3}{2}-2\ln 2+\int_2^3\frac{1}{x-1}dx=\ln\frac{27}{16}$.

7. a) $I=\int_0^1\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^1 x'\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx=x\cdot\sqrt{9-x^2}\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\left(\sqrt{9-x^2}\right)'dx=2\sqrt{2}+\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$, deci

$I=2\sqrt{2}-\int_0^1\frac{-x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=2\sqrt{2}-\int_0^1\frac{9-x^2-9}{\sqrt{9-x^2}}dx=2\sqrt{2}-\int_0^1\left(\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{9}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx=2\sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{9-x^2}\,dx+$

$+9\int_0^1\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=2\sqrt{2}-I+9\arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^1=2\sqrt{2}-I+9\arcsin\frac{1}{3}$, deci $I=\sqrt{2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}$.

8. a) $\int_0^{\sqrt{3}}x'\cdot\operatorname{arctg}x\,dx=x\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=$

$=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$.

b) $\int_0^1\ln(x+3)\,dx=\int_0^1 x'\cdot\ln(x+3)\,dx$. Alegem $f'(x)=1=x'$ și $g(x)=\ln(x+3)$. Integrând prin părți, obținem

$\int_0^1\ln(x+3)dx=x\cdot\ln(x+3)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot(\ln(x+3))'\,dx=\ln 4-\int_0^1\frac{x}{x+3}dx=\ln 4-\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=$

$=\ln 4-\int_0^1 1\,dx+3\int_0^1\frac{(x+3)'}{x+3}dx=\ln 4-x\Big|_0^1+3\int_0^1(\ln(x+3))'\,dx=\ln 4-1+3\ln(x+3)\Big|_0^1=4\ln 4-3\ln 3-1$.

II.

1. b) $I_{n+1}=\int_1^e\ln^{n+1}x\,dx=\int_1^e x'\cdot\ln^{n+1}x\,dx=x\cdot\ln^{n+1}x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\left(\ln^{n+1}x\right)'dx=e-\int_1^e x\cdot\frac{(n+1)\ln^n x}{x}dx=$

$=e-(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

2. a) $J_2=\int_0^1\left(1-x^2\right)^2dx=\int_0^1\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}$.

b) $J_{n+1}=\int_0^1 x'\cdot\left(1-x^2\right)^{n+1}dx = x\left(1-x^2\right)^{n+1}\Big|_0^1+(2n+2)\int_0^1 x^2\cdot\left(1-x^2\right)^n dx=-(2n+2)\int_0^1\left(-x^2\right)\left(1-x^2\right)^n dx$,

deci $J_{n+1}=-(2n+2)\int_0^1\left(\left(1-x^2\right)-1\right)\left(1-x^2\right)^n dx=-(2n+2)\int_0^1\left(\left(1-x^2\right)^{n+1}-\left(1-x^2\right)^n\right)dx$.

Rezultă $J_{n+1}=-(2n+2)J_{n+1}+(2n+2)J_n$, așadar $J_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}\cdot J_n$.

3. a) $I_1=\int_0^1 x\sqrt{x^2+8}\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\sqrt{x^2+8}\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt{x^2+8}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+8}}dx=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^3+8x-8x}{\sqrt{x^2+8}}dx$, deci

$$I_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x\left(x^2+8\right)}{\sqrt{x^2+8}}-\frac{8x}{\sqrt{x^2+8}}\right)dx=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x\sqrt{x^2+8}\,dx-\int_0^1\frac{8x}{\sqrt{x^2+8}}dx\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}I_1+4\sqrt{x^2+8}\Big|_0^1.$$

Rezultă $I_1=\dfrac{27-16\sqrt{2}}{3}$.

b) $I_{n+2}=\int_0^1 x^{n+2}\sqrt{x^2+8}\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^{n+3}}{n+3}\right)'\sqrt{x^2+8}\,dx=\frac{x^{n+3}}{n+3}\cdot\sqrt{x^2+8}\Big|_0^1-\frac{1}{n+3}\int_0^1\frac{x^{n+4}}{\sqrt{x^2+8}}dx$.

$$I_{n+2}=\frac{3}{n+3}-\frac{1}{n+3}\int_0^1\frac{x^{n+4}+8x^{n+2}-8x^{n+2}}{\sqrt{x^2+8}}dx=\frac{3}{n+3}-\frac{1}{n+3}\left(\int_0^1\frac{x^{n+2}\left(x^2+8\right)}{\sqrt{x^2+8}}dx-8\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\cdot x^{n+1}dx\right)\Leftrightarrow$$

$$I_{n+2}=\frac{3}{n+3}-\frac{1}{n+3}\int_0^1 x^{n+2}\cdot\sqrt{x^2+8}\,dx+\frac{8}{n+3}\int_0^1\left(\sqrt{x^2+8}\right)'\cdot x^{n+1}dx.$$

Așadar $I_{n+2}=\dfrac{3}{n+3}-\dfrac{1}{n+3}\cdot I_{n+2}+\dfrac{8}{n+3}\sqrt{x^2+8}\cdot x^{n+1}\Big|_0^1-\dfrac{8(n+1)}{n+3}I_n=\dfrac{27}{n+3}-\dfrac{1}{n+3}\cdot I_{n+2}-\dfrac{8(n+1)}{n+3}I_n$.

În consecință, $I_{n+2}=\dfrac{27}{n+4}-\dfrac{8(n+1)}{n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

4. a) f este continuă pe $(-\infty,0)$ (produs de funcții continue) și pe $(0,+\infty)$ (compunere de funcții continue), iar $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=f(0)=0$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_1^{e-1}f(x)dx=\int_{-1}^0 x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx+\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\frac{x^2}{x^2+1}dx+x\cdot\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}-$

$$-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx+e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{\pi}{8}+e-1+\frac{\operatorname{arctg}x-x}{2}\Big|_{-1}^0+(\ln(x+1)-x)\Big|_0^{e-1}=$$

$$=\frac{\pi}{8}+e-1+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+1-e+1=\frac{\pi+2}{4}.$$

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Lecțiile L4 – L6: Integrarea prin schimbare de variabilă

Fișa de lucru 4

I. Exerciții pentru fixarea cunoștințelor

Folosind metoda schimbării de variabilă, calculați următoarele integrale definite:

1. **a)** $\int_{-1}^{1}\frac{1}{3x+5}dx$ **b)** $\int_{0}^{1}\frac{1}{3-x}dx$

2. **a)** $\int_{0}^{1}\frac{x}{2x^2+1}dx$ **b)** $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+6}dx$

3. **a)** $\int_{0}^{2}\frac{8x}{\left(x^2+2\right)^3}dx$ **b)** $\int_{3}^{4}\frac{1}{(x-2)^3}dx$

4. **a)** $\int_{0}^{4}x\sqrt{x^2+9}\,dx$ **b)** $\int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$

5. **a)** $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x^6+1}dx$ **b)** $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^4+1}dx$

6. **a)** $\int_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$ **b)** $\int_{1}^{e}\frac{3-2\ln x}{x}dx$

7. **a)** $\int_{1}^{4}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **b)** $\int_{0}^{1}x\cdot e^{x^2}dx$

8. **a)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$ **b)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$

9. **a)** $\int_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}dx$ **b)** $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$

10. **a)** $\int_{1}^{9}\frac{1}{2+\sqrt{x}}dx$ **b)** $\int_{1}^{4}\frac{1}{4+\sqrt{x}}dx$

II. Exerciții pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

a) Calculați $\int_{-1}^{1}\left|xf(x)\right|dx$.

b) Arătați că $\int_{1}^{e}\left(f(x)-1\right)\ln x\,dx\le\frac{1}{2}$.

2. Calculați următoarele integrale definite:

a) $\int_{0}^{1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$ **b)** $\int_{0}^{1}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ **c)** $\int_{1}^{e}\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$ **d)** $\int_{0}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx$

III. Exerciții cu grad sporit de dificultate

1. Calculați:

a) $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$ **b)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

2. a) Se consideră $a>0$ și $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și impară. Arătați că $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1}\sin x\cdot\ln\left(1+x^2\right)dx$.

3. Se consideră funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$. Calculați $\int_{1}^{3}f^{-1}(x)dx$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Lecțiile L4 – L6: Integrarea prin schimbare de variabilă

Fișa de lucru 4 – recomandări metodice pentru profesor

Se recomandă rezolvarea în clasă, sub îndrumarea profesorului, a subpunctelor a) și rezolvarea individuală, eventual ca temă, a subpunctelor b). În funcție de caracteristicile grupului de elevi, profesorul decide utilizarea/adaptarea acestei strategii.

I. Exerciții pentru fixarea cunoștințelor

1. a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{3x+5}dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=3x+5$, de unde obținem $dt=3dx$.
Schimbăm limitele de integrare

$x=-1 \Rightarrow t=2$
$x=1 \Rightarrow t=8$

Integrala devine $\int_{-1}^{1} \frac{1}{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{3}{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int_{2}^{8} \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}\ln t \Big|_2^8 = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2\ln 2}{3}$.

2. a) $\int_{0}^{1} \frac{x}{2x^2+1}dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=2x^2+1$, de unde obținem $dt=4x\,dx$.
Schimbăm limitele de integrare

$x=0 \Rightarrow t=1$
$x=1 \Rightarrow t=5$

Integrala devine $\int_{0}^{1} \frac{x}{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \frac{4x}{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int_{1}^{5} \frac{1}{t}dt = \frac{1}{4}\ln t \Big|_1^5 = \frac{1}{4}\ln 5$.

3. a) $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{8x}{\left(x^2+2\right)^3}dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=x^2+2$, de unde obținem $dt=2x\,dx$.
Schimbăm limitele de integrare

$x=0 \Rightarrow t=2$
$x=\sqrt{2} \Rightarrow t=4$

Integrala devine $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{8x}{\left(x^2+2\right)^3}dx = 4\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{2x}{\left(x^2+2\right)^3}dx = 4\int_{2}^{4} \frac{1}{t^3}dt = 4\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\Big|_2^4 = 4\left(-\frac{1}{32}+\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{32}$.

4. a) $\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=x^2+9$, de unde obținem $dt=2x\,dx$.

Schimbăm limitele de integrare

$x=0 \Rightarrow t=9$
$x=4 \Rightarrow t=25$

Integrala devine $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_9^{25} = \frac{t\sqrt{t}}{3}\Bigg|_9^{25} = \frac{98}{3}$.

5. a) Putem scrie $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(x^3\right)^2+1}\cdot 3x^2 dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t = x^3$, de unde obținem $dt = 3x^2 dx$.
Schimbăm limitele de integrare

$x=0 \Rightarrow t=0$
$x=1 \Rightarrow t=1$

Integrala devine $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{12}$.

6. a) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t = 1+\ln x$, de unde obținem $dt = \frac{1}{x}dx$.

Schimbăm limitele de integrare

$x=1 \Rightarrow t=1$
$x=e \Rightarrow t=2$

$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx = \int_1^2 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}$.

7. a) Considerăm schimbarea de variabilă $t = \sqrt{x}$, de unde obținem $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Schimbăm limitele de integrare

$x=1 \Rightarrow t=1$
$x=4 \Rightarrow t=2$

Integrala devine $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 e^t\,dt = e^t\Big|_1^2 = e(e-1)$.

8. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cdot\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)\cdot\cos x\,dx$
Considerăm schimbarea de variabilă $t = \sin x$, de unde obținem $dt = \cos x\,dx$.
Schimbăm limitele de integrare

$x=0 \Rightarrow t=0$
$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$

Integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^1 \left(1-t^2\right)dt = \left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$.

9. a) Considerăm schimbarea de variabilă $t = \operatorname{arctg} x$, de unde obținem $dt = \frac{1}{x^2+1}dx$.

Schimbăm limitele de integrare

$x=0 \Rightarrow t=\operatorname{arctg} 0=0$
$x=1 \Rightarrow t=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}dx=\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^3}{192}.$$

10. a) $\int_1^9 \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx=\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)}dx=2\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)}dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=\sqrt{x}$, de unde obținem $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=9\Rightarrow t=3 \end{array}}$$

Integrala devine $\int_1^9 \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx=2\int_1^3 \frac{t}{2+t}dt=2\int_1^3\left(1-\frac{2}{2+t}\right)dt=2\left(t-2\ln(2+t)\right)\Big|_1^3=4+4\ln\frac{3}{5}.$

Observație: Considerăm $\int_1^9 \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx$. Pentru calculul acestei integrale, cu schimbarea de variabilă $t=\sqrt{x}$ avem $x=t^2$, $dx=2t\,dt$.

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=9\Rightarrow t=3 \end{array}}$$

Integrala devine $\int_1^9 \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx=\int_1^3 \frac{1}{2+t}\cdot 2t\,dt=2\int_1^3\left(1-\frac{2}{2+t}\right)dt=2\left(t-2\ln(2+t)\right)\Big|_1^3=4+4\ln\frac{3}{5}.$

II. Exerciții pentru aprofundarea cunoștințelor

1. a) $\int_{-1}^1 |xf(x)|dx=\int_{-1}^0 -x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx+\int_0^1 x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=-x$ pentru prima integrală.

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow t=1 \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{array}}$$

Integrala devine $\int_{-1}^1 |xf(x)|dx=2\int_0^1 x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx=2\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{x^2+4}\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{5}-2\right)=\frac{2\sqrt{5}-3}{2}.$

b) $\int_1^e \left(f(x)-1\right)\ln x dx=\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+4}}dx$ și, cum $x^2+4\geq 4x$, pentru orice $x\in[1,e]$, obținem

$$\int_1^e \left(f(x)-1\right)\ln x dx=\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+4}}dx\leq\int_1^e \frac{\ln x}{2x}dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e=\frac{1}{2}.$$

2. d) $\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=x^2+1$, de unde obținem $dt=2x\,dx$.

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=2 \end{array}}$$

Integrala devine

$$\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\,dt=\frac{1}{2}\int_1^2 t'\cdot\ln t\,dt=\frac{1}{2}t\ln t\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 t\cdot\frac{1}{t}dt=\ln 2-\frac{t}{2}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+\ln 2$$

III. Exerciții cu grad sporit de dificultate

1. a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $t=-x$, de unde obținem $dx=-dt$.
Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=-1\end{array}}$$

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=-\int_{1}^{-1}\frac{(-t)^2}{e^{-t}+1}dt=\int_{-1}^{1}\frac{t^2e^t}{1+e^t}dt \text{ și atunci}$$

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\text{, de unde obținem } I=\frac{1}{3}.$$

b) $\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=3A+2B$, unde $\displaystyle A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$ și $\displaystyle B=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$.

$$2A+3B=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2} \text{ și } 2B-3A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx=\ln\left(2\sin x+3\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln 5.$$

Rezolvând sistemul $\begin{cases}2A+3B=\dfrac{\pi}{2}\\ -3A+2B=\ln 5\end{cases}$, obținem $\begin{cases}A=\dfrac{1}{13}(\pi-3\ln 5)\\ B=\dfrac{1}{13}\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\ln 5\right)\end{cases}$, de unde $I=\dfrac{1}{13}(6\pi-5\ln 5)$.

2. a) Considerăm $\displaystyle I=\int_{-a}^{a}f(x)dx$. Considerând schimbarea de variabilă $t=-x$ avem $x=-t$, $dx=-dt$.

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=-a\Rightarrow t=a\\ x=a\Rightarrow t=-a\end{array}}$$

$$I=-\int_{a}^{-a}f(-t)dt=\int_{-a}^{a}f(-t)dt=-\int_{-a}^{a}f(t)dt=-I\text{, de unde obținem } I=0.$$

b) Funcția de sub integrală este continuă și impară. Conform exercițiului 2. a), obținem

$$\int_{-1}^{1}\sin x\cdot\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=0.$$

3. $f'(x)=3x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Observăm că $f(0)=1$ și $f(1)=3$, deci $f^{-1}(1)=0$ și $f^{-1}(3)=1$. Cu schimbarea de variabilă $t=f^{-1}(x)$ avem $x=f(t)$, $\mathrm{d}x=f'(t)\mathrm{d}t=\left(3t^2+1\right)\mathrm{d}t$

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1\Rightarrow t=0\\ x=3\Rightarrow t=1\end{array}}$$

Integrala devine $\int_1^3 f^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 t\left(3t^2+1\right)dt = \int_0^1 \left(3t^3+t\right)dt = \left(\frac{3t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{4}$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Elemente de analiză matematică*
Unitatea de învățare: *Integrala definită, metode de integrare*
Lecția L7: Evaluare sumativă la finalul unității de învățare

Fișa de lucru 5 – test de evaluare sumativă

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 45 de minute.**

I. Calculați următoarele integrale definite:

10p	**1.** $\int_0^1 \frac{1}{4x^2+1}dx$
10p	**2.** $\int_1^2 \frac{x}{x^2+5}dx$
10p	**3.** $\int_0^1 (4x-1)e^x dx$
10p	**4.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$
10p	**5.** $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$
10p	**6.** $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\, dx$

II.

20p	**1.** Pentru orice număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^{2n-1}e^{-x}dx$. **a)** Demonstrați că $I_{n+1} = 2n(2n+1)I_n - \frac{2(n+1)}{e}$, pentru orice număr natural nenul n. **b)** Arătați că $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.
10p	**2.** Determinați numărul real m pentru care $m\int_1^2 e^{mx^2+\ln x}dx = \frac{e^m(e-1)}{2}$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Elemente de analiză matematică***
Unitatea de învățare: ***Integrala definită, metode de integrare***
Lecția L7. Evaluare sumativă la finalul unității de învățare

Test de evaluare sumativă

Barem de corectare și de notare

I.

1.	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+\frac{1}{4}}dx =$	**5p**
	$= \frac{1}{4}\cdot 2 \cdot \operatorname{arctg} 2x \Big\vert_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}$	**5p**
2.	$\int_1^2 \frac{x}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\left(x^2+5\right)'}{x^2+5}dx =$	**5p**
	$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)\Big\vert_1^2 = \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 6 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$	**5p**
3.	$\int_0^1 (4x-1)e^x dx = (4x-1)e^x \Big\vert_0^1 - \int_0^1 4e^x dx =$	**5p**
	$= 3e - 4e^x \Big\vert_0^1 = 4 - e$	**3p**
4.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)' dx = x\sin x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$	**5p**
	$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$	**5p**
5.	$\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(x^3+1\right)'\sqrt{x^3+1}dx =$	**5p**
	$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(x^3+1\right)\sqrt{x^3+1}\Big\vert_0^2 = 13$	**5p**
6.	$\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x dx = \int_1^e x\ln x dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$,	**2p**
	$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_1^e = \frac{1}{2}$	**3p**

	$\int_1^e x\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x \Big\vert_1^e - \frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e = \frac{e^2+1}{4}$,	3p
	$\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x dx = \frac{e^2+3}{4}$	2p

II.

1.a)	$I_{n+1} = \int_0^1 x^{2n+1}\left(-e^{-x}\right)' dx = x^{2n+1}\left(-e^{-x}\right)\Big\vert_0^1 + (2n+1)\int_0^1 x^{2n}e^{-x}dx = -\frac{1}{e} + (2n+1)\int_0^1 x^{2n}\left(-e^{-x}\right)' dx =$	5p
	$= -\frac{1}{e} - (2n+1)x^{2n}e^{-x}\Big\vert_0^1 + (2n+1)2nI_n = \frac{2n+2}{e} + 2n(2n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	5p
1.b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{2n-1}\left(x^2-1\right)e^{-x}dx$, pentru orice număr natural nenul n	3p
	$x\in[0,1] \Rightarrow x^2-1\le 0$, deci $x^{2n-1}\left(x^2-1\right)e^{-x}\le 0$, de unde obținem $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n	2p
2.	$m\int_1^2 e^{mx^2}\cdot e^{\ln x}dx = \frac{e^m(e-1)}{2}$, deci $m\int_1^2 x\cdot e^{mx^2}dx = \frac{e^m(e-1)}{2}$	5p
	$\frac{1}{2}e^{mx^2}\Big\vert_1^2 = \frac{e^m(e-1)}{2}$, de unde obținem $m=\frac{1}{3}$	5p

Matricea de specificații
Test de evaluare sumativă

Competențe de evaluat / Conținuturi	CS 1.2	CS 2.2	CS 3.2	CS 4.2	CS 5.2	CS 6.1.2	CS 6.2.2	Total
Formula Leibniz – Newton	I.1(10p)							**10p**
Integrarea prin părți			I.3(10p) I.4(10p)		I.6(10p)			**30p**
Integrarea prin schimbare de variabilă		I.2(10p)		I.5(10p)	II.1a) (10p)	II.1b) (10p)	II.2 (10p)	**50p**
Total	**10p**	**10p**	**20p**	**10p**	**20p**	**10p**	**10p**	**90p**

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare sumativă:

CS 1.2 Identificarea legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia.
CS 2.2 Identificarea unor metode de calcul ale integralelor, prin realizarea de legături cu reguli de derivare.

CS 3.2 Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite.
CS 4.2 Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor.
CS 5.2 Folosirea proprietăților unei funcții continue, pentru calcularea integralei acesteia pe un interval.
CS 6.1.2 Utilizarea proprietăților de monotonie a integralei în estimarea valorii unei integrale definite si în probleme cu conținut practic
CS 6.2.2 Modelarea comportării unei funcții prin utilizarea primitivelor sale

Matematică
Clasa a XII-a – programa şcolară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conţinut: ***Elemente de analiză matematică***
Unitatea de învăţare: ***Integrala definită, metode de integrare***
Lecţia L8: Activităţi remediale şi/sau de progres

Fişa de lucru 6

Activităţi remediale

I. Derivatele funcţiilor elementare

II. Calculaţi, utilizând formula Leibniz-Newton:

a) $\int_1^4 \left(x^2+e^x\right)dx$ **b)** $\int_1^4 e^{-x}dx$ **c)** $\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx$ **d)** $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

III. Calculaţi, utilizând metoda de integrare prin părţi:

a) $\int_0^1 (x+5)e^x dx$ **b)** $\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx$ **c)** $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\ln x dx$ **d)** $\int_1^4 x^2\cdot \ln x dx$

IV. Calculaţi, utilizând metoda de integrare prin schimbare de variabilă:

a) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx$ **b)** $\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$ **c)** $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{2x^2+9}}dx$ **d)** $\int_0^1 \frac{x}{\left(2x^2+1\right)^2}dx$

e) $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx$ **f)** $\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}dx$ **g)** $\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1}dx$ **h)** $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

Activităţi de progres

1. Calculaţi:

a) $\int_1^e \sqrt{x}\cdot \ln x dx$ **b)** $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx$ **c)** $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x}dx$

d) $\int_0^2 e^x\cdot |x-1|\, dx$ **e)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx$ **f)** $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^{2\pi}\cos^n x dx$. Determinaţi o relaţie de recurenţă pentru şirul $(I_n)_{n\geq 1}$.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}x}\ln\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)dt$.

a) Arătaţi că funcţia f este derivabilă şi determinaţi funcţia f'.

b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

4. Arătaţi că $\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2+3}dx=\frac{\pi\ln 3}{12\sqrt{3}}$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M1 (*matematică-informatică*) 4 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Elemente de analiză matematică***
Unitatea de învățare: ***Integrala definită, metode de integrare***
Lecția L8: Activități remediale și/sau de progres

Fișa de lucru 5 – recomandări metodice pentru profesor

Activități remediale

În derularea activităților remediale, se recomandă identificarea formulelor standardizate în lecturarea enunțurilor matematice și în descrierea modalităților de soluționare a acestora, evidențierea etapelor de rezolvare ale unei probleme, eventual folosind diferite forme grafice de prezentare/vizualizare a unor elemente matematice, utilizarea schemelor logice si a diagramelor logice de lucru în rezolvarea de probleme. Este esențială implicarea directă a elevilor în analizarea datelor unei probleme și în identificarea, explicarea și eventual compararea unor variante de rezolvare, precum și evaluarea/oferirea de feedback, de către profesor, pentru fiecare etapă de lucru.

Activități de progres

1. Calculați: **d)** $\int_0^2 e^x \cdot |x-1|\,dx$; **e)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\text{tg}x)\,dx$; **f)** $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

d) $I=\int_0^2 e^x \cdot |x-1|\,dx=\int_0^1 e^x\cdot(1-x)dx+\int_1^2 e^x\cdot(x-1)dx=e^x\cdot(1-x)\Big|_0^1+\int_0^1 e^x dx+e^x\cdot(x-1)\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx$, deci

$I=-1+e^x\Big|_0^1+e^2-e^x\Big|_1^2=-1+e-1+e^2-e^2+e=2e-2$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\text{tg}\,x)\,dx$

Considerăm schimbarea de variabilă $x=\frac{\pi}{4}-y$, de unde obținem $dx=-dy$.

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow y=0 \end{array}}$$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\text{tg}\,x)\,dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2-\ln(1+\text{tg}\,y)\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\text{tg}\,x)\,dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$, de unde obținem $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

f) Calculăm integrala, utilizând în două moduri integrarea prin părți

$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x\left(e^{\arcsin x}\right)' dx=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x}dx$ și

$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} \left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} dx$. Adunând cele două relații, obținem $2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{6}}$, deci $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \cdot e^{\frac{\pi}{6}}$

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx$. Determinați o relație de recurență pentru șirul $(I_n)_{n\geq 1}$.

Pentru $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, avem $I_n = \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos^{n-1} x \, \mathrm{d}x$. Alegem $f'(x) = \cos x$ și $g(x) = \cos^{n-1} x$. Integrând prin părți, deducem

$$I_n = \int_0^{2\pi} (\sin x)' \cdot \cos^{n-1} x \, \mathrm{d}x = \sin x \cdot \cos^{n-1} x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \left(\cos^{n-1} x\right)' \mathrm{d}x, \text{ deci}$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2 x\right) \cdot \left(\cos^{n-2} x\right) \mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{2\pi} \left(\cos^{n-2} x - \cos^n x\right) \mathrm{d}x.$$

Așadar $I_n = (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n$. Obținem $n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2}$, deci $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$, pentru orice $n \geq 3$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} x} \ln\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right) dt$.

a) Arătați că funcția f este derivabilă și determinați funcția f'.

b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

3. a) Pentru orice număr real x, $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci dacă $x \geq 1$, atunci $\left[\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} x\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, iar dacă $x \leq 1$, atunci $\left[\operatorname{arctg} x, \frac{\pi}{4}\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, așadar există funcția f.

Considerăm funcția continuă $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ g(t) = \ln\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)$ și G o primitivă a sa. Folosind formula Leibniz-Newton, deducem că $f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} x} g(t) dt = G(\operatorname{arctg} x) - G\left(\frac{\pi}{4}\right)$, deci funcția f este derivabilă (fiind diferența dintre compunerea a două funcții derivabile și o funcție constantă). Obținem

$$f'(x) = G'(\operatorname{arctg} x) \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \frac{g(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}, \text{ pentru orice număr real } x. \quad (1)$$

3. b) Deoarece $f(1) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(t) dt = 0$, integrând prin părți obținem

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x'\cdot f(x)dx=x\cdot f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot f'(x)dx\overset{(1)}{=}-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)dx=-\frac{1}{4}\int_0^1\left(\ln^2\left(1+x^2\right)\right)'dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{4}\ln^2 2.$$

4. Arătați că $\int_1^3\frac{\ln x}{x^2+3}dx=\frac{\pi\ln 3}{12\sqrt{3}}$.

Considerăm schimbarea de variabilă $t=\frac{3}{x}$, adică $x=\frac{3}{t}$, de unde obținem $dx=-\frac{3}{t^2}dt$.

Schimbăm limitele de integrare

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1\Rightarrow t=3\\ x=3\Rightarrow t=1\end{array}}$$

Integrala devine $I=\int_1^3\frac{\ln x}{x^2+3}dx=-\int_3^1\frac{\ln\frac{3}{t}}{\left(\frac{3}{t}\right)^2+3}\cdot\frac{3}{t^2}dt=3\int_3^1\frac{\ln 3-\ln t}{9+3t^2}dt=\int_1^3\frac{\ln 3}{t^2+3}dt-\int_1^3\frac{\ln t}{t^2+3}dt$, de unde

obținem $2I=\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_1^3$, deci $I=\frac{\ln 3}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\ln 3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\ln 3}{12\sqrt{3}}$.

III.4 Elemente de proiectare didactică, specializarea *științe ale naturii*

Pentru unitatea de învățare *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*, programa școlară M2 (3 ore/ săptămână), exemplificăm în continuare următoarele elemente de proiectare didactică:

- *reactualizarea noțiunilor și a competențelor ancoră*: relațiile lui Viète pentru ecuația de gradul al II-lea, forma algebrică a unui polinom, împărțirea polinoamelor, împărțirea polinoamelor prin $X-a$, divizibilitatea polinoamelor; profesorul poate utiliza la clasă *Fișa de lucru 1* (un exemplu de test de evaluare inițială) și *Formularul Google* atașat, pentru oferirea unui feedback personalizat și, în același timp, pentru identificarea elevilor care au nevoie de suport remedial; testul de evaluare inițială, propus pentru evaluarea de la începutul unității de învățare, are asociat atât *Baremul de corectare și de notare,* cât și *Matricea de specificații,* matrice care stabilește corespondența dintre itemii testului, competențele specifice și unitățile de conținut evaluate;
- *exemple de activități de învățare* (recomandate de programa școlară sau altele adecvate pentru formarea/dezvoltarea competențelor specifice asociate conținuturilor vizate); fiecare activitate de învățare din cadrul lecțiilor are un paragraf dedicat în fișa suport, cu caracter teoretic și un paragraf în fișa de lucru asociată lecției, cu caracter aplicativ;
- *fișe suport și fișe de lucru* asociate tuturor activităților de învățare propuse în cadrul proiectului unității de învățare; fișele suport sunt concepute astfel încât să susțină integral lecțiile prevăzute în proiectarea unității de învățare; se recomandă ca profesorul să selecteze exercițiile și metodele de lucru adecvate, în funcție de ritmul de învățare și de particularitățile elevilor, identificând durata și oportunitatea activităților desfășurate la clasă pe baza efortului și/sau a ritmului individual al elevilor în relație cu activitățile ce solicită efortul colectiv (perechi, echipe);
- *fișe de lucru – recomandări metodice pentru profesor* (asociate fiecărei fișe de lucru); acestea conțin recomandări metodice pentru utilizarea fiecărei fișe de lucru și rezolvări complete ale exercițiilor propuse în fișe; astfel profesorul poate selecta ușor, dintre exercițiile din fiecare fișă de lucru, ceea ce este mai potrivit pentru un anumit colectiv de elevi; de asemenea, se recomandă ca evaluarea activității elevilor, activitate desfășurată în clasă, să se facă în termeni calitativi, prin referire la esențialitate, funcționalitate, durabilitate, stabilitate, mobilitate, diversificare, amplificare treptată;
- *exemplu de evaluare sumativă* (*Fișa de lucru 7*), care poate fi utilizată (parțial sau în totalitate) pentru evaluarea de la finalul unității de învățare; testul de evaluare sumativă are asociat atât *Baremul de corectare și de notare,* cât și *Matricea de specificații,* matrice care stabilește corespondența dintre itemii testului, competențele specifice și unitățile de conținut evaluate;
- *exemple de activități remediale și/sau de progres* (*Fișa de lucru 8*), exemple care au legătură cu rezultatele posibile, obținute de fiecare dintre elevii unei clase la care s-a aplicat evaluarea sumativă la finalul acestei unități de învățare; dintre activitățile propuse, profesorul poate selecta acele exemple potrivite pentru elevii săi.

Conținutul fișelor suport alocate activităților de învățare recomandate în proiectarea unității urmărește formarea și consolidarea competențelor specifice prevăzute de programa școlară. Aceste competențe se regăsesc și printre competențele evaluate în cadrul examenului de bacalaureat, au utilitate în rezolvarea aplicațiilor cu caracter practic, modelate matematic cu ajutorul polinoamelor și sunt indispensabile pentru parcurgerea optimă a capitolului referitor la polinoame, împreună cu aplicațiile acestora în alte domenii matematice.

Având în vedere specificul/dinamica psiho-comportamentală a generațiilor aflate la etapa școlarității, este necesară și eficientă diversificarea formelor de evaluare desfășurate pe parcursul unității de învățare și orientarea acestora către metode colaborative, prin utilizarea inter-evaluării elev-elev în cadrul activităților desfășurate în perechi/pe echipe și/sau al derulării de proiecte pe grupuri de elevi, în cadrul lecțiilor.
De asemenea, atât evaluarea inițială, cât și evaluarea la finalul unității de învățare pot fi derulate sub diferite forme, fie prin utilizarea testelor clasice, administrate pe hârtie, fie prin utilizarea unor aplicații digitale pentru computer/tabletă/telefon, fie prin activități desfășurate în perechi/pe grupuri de elevi sau prin proiecte desfășurate în clasă, organizate de profesor în funcție de specificul clasei; în cadrul tuturor acestor activități pot fi utilizați itemi din testele propuse pentru această proiectare didactică.

Proiectul unității de învățare *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (* $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$*, p prim)*
Unitatea de învățare: *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*
Nr. total de ore: 10 ore

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
[*se menționează detalieri de conținut care explicitează anumite parcursuri*]	[*se precizează nr. criterial al competențelor specifice din programa școlară*]	[*vizate/recomandate de programa școlară sau altele adecvate pentru realizarea competențelor specifice*]	[*se precizează resurse de timp, de loc, material didactic, forme de organizare a clasei*]	[*se menționează metodele, instrumentele sau modalitățile de evaluare utilizate*]
L1. Rădăcini ale polinoamelor, soluții ale ecuațiilor algebrice **(1 ore)**	**1.1** **3.2.1** **5.2.1**	• Recapitularea noțiunilor ancoră *Elemente de conținut vizate:* *Relațiile lui* Viète *pentru ecuația de gradul al II-lea, forma algebrică a unui polinom, împărțirea polinoamelor, împărțirea polinoamelor prin* $X-a$*, divizibilitatea polinoamelor,* • Ecuație algebrică atașată unui polinom • Determinarea rădăcinilor unui polinom prin rezolvarea ecuației algebrice atașate • Utilizarea operațiilor cu polinoame pentru rezolvarea unei ecuații algebrice	• *Fișa de lucru 1 (evaluare inițială)* • *Formular Google – Fișa de lucru 1* Activitate individuală • *Fișa suport 2*– paragraful I și II Activitate frontală • *Fișa suport 2* - Fișa de lucru Activitate frontală	Administrarea probei Corectarea probei Oferirea de feedback personalizat Identificarea elevilor care necesită suport remedial Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi
L2. – L3. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4 **(2 ore)**	**3.2.1** **5.2.1** **6.2.1**	• Particularizarea relațiilor lui Viète pentru polinomul de grad 2 • Scrierea polinomului de gradul 2 când se cunosc rădăcinile sale • Particularizarea relațiilor lui Viète pentru polinomul de grad 3	• *Fișa suport 3* – paragraful I Activitate frontală • *Fișa suport 3* – paragraful II Activitate frontală	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Verificarea notițelor elevilor Evaluare prin sondaj Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
		• Scrierea polinomului de gradul 3 când se cunosc rădăcinile sale		
	3.2.1 5.2.1 6.2.1	• Particularizarea relațiilor lui Viète pentru polinomul de grad 4 • Scrierea polinomului de gradul 4 când se cunosc rădăcinile sale • Aplicarea relațiilor lui Viète pentru calculul unor expresii care conțin rădăcinile unui polinom de grad cel mult 4 • Stabilirea naturii soluțiilor unei ecuații/rădăcinilor unui polinom, în condiții date • Determinarea unor polinoame ale căror rădăcini verifică condiții date	• *Fișa suport 3* – paragraful III Activitate frontală • *Fișa suport 3* – fișa de lucru 3 Activitate pe grupe	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Prezentarea activității din fiecare grupă
L4. Aplicații ale relațiilor lui Viète în rezolvarea unor ecuații algebrice **(1 ore)**	1.1 3.2.1 5.2.1. 6.2.1	• Reactualizarea elementelor teoretice necesare rezolvării aplicațiilor • Determinarea rădăcinilor unui polinom/soluțiilor unei ecuații algebrice care verifică o condiție dată • Determinarea rădăcinilor unui polinom care are o rădăcină dublă sau triplă • Determinarea unui parametru când rădăcinile unui polinom/soluțiile unei ecuații algebrice verifică o condiție dată	• *Fișa suport 4* – fișa de lucru, paragraful I Activitate frontală • *Fișa suport 4* – fișa de lucru, paragraful II Activitate pe grupe • *Fișa suport 4* – fișa de lucru, paragraful III Activitate frontală	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Evaluare prin sondaj Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Prezentarea activității din fiecare grupă Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Evaluare prin sondaj
L5. – L6. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ **(2 ore)**	5.2.1	• Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	• *Fișa suport 5* – paragrafele I și II • *Fișa suport 5* – fișa de lucru, exercițiul 1 Activitate frontală	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Evaluare prin sondaj
	5.2.1	• Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$	• *Fișa suport 5* – paragraful III Activitate frontală • *Fișa suport 5* – fișa de lucru, exercițiile 2 și 3	Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Evaluare prin sondaj

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
			Activitate frontală	
L7. – L8. Ecuații binome, ecuații bipătrate, ecuații reciproce **(2 ore)**	**1.1** **3.2.1** **5.2.1**	• Identificarea unor ecuații binome; metode de rezolvare • Exemplificarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor binome • Discutarea rezolvării unei ecuații binome • Identificarea unor ecuații bipătrate; metode de rezolvare • Exemplificarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor bipătrate	• *Fișa suport 6* – paragraful I Activitate frontală • *Fișa suport 6* – fișa de lucru, exercițiul I Activitate pe grupe • *Fișa suport 6* – paragraful II Activitate frontală • *Fișa suport 6* – fișa de lucru, exercițiul II Activitate pe grupe	Verificarea notițelor elevilor Evaluare prin sondaj Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Verificarea notițelor elevilor Evaluare prin sondaj
	1.1 **3.2.1** **5.2.1**	• Identificarea unor ecuații reciproce de gradul al treilea; metode de rezolvare a ecuației reciproce de gradul al treilea • Exemplificarea rezolvării unei ecuații reciproce de gradul al treilea • Determinarea unui parametru astfel încât o ecuație de gradul al treilea să fie ecuație reciprocă • Determinarea unui parametru astfel încât o ecuație reciprocă de gradul al treilea să aibă toate soluțiile reale • Identificarea unor ecuații reciproce de gradul al patrulea; metode de rezolvare a ecuației reciproce de gradul al patrulea • Exemplificarea etapelor de rezolvare a unei ecuații reciproce de gradul al patrulea • Discutarea, în funcție de un parametru, a naturii soluțiilor unei ecuații reciproce de gradul 4	• *Fișa suport 6* – paragraful III Activitate frontală • *Fișa suport 6* – fișa de lucru, exercițiul III Activitate pe grupe • *Fișa suport 6* – paragraful IV Activitate pe grupe • *Fișa suport 6* – fișa de lucru, exercițiul IV Activitate pe grupe	Evaluare prin sondaj Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi Prezentarea activității din fiecare grupă Validarea și discutarea răspunsurilor oferite de elevi
L9. Evaluare sumativă	**1.1** **3.2.1**	• Evaluare sumativă	• *Fișa de lucru 7 (test de evaluare sumativă)*	Administrarea probei Discutarea unor itemi din test

Conținuturi (detalieri)	Competențe specifice	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
	5.2.1 **6.2.1**		Activitate individuală	
L10. Activitate remedială și/sau de progres **(1 ore)**	**1.1** **3.2.1** **5.2.1**	• Discutarea rezolvării testului de evaluare • Activitate remedială și/sau de progres	• *Fișa de lucru 8* Activitate frontală Activitate în perechi	Corectarea probei Verificare și feedback perechi

Competențe specifice
CS 1.1 Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere, de polinoame și de matrice
CS 3.2.1 Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice
CS 5.2.1 Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date
CS 6.1.1 Exprimarea unor probleme practice, folosind structuri algebrice sau calcul polinomial
CS 6.2.1 Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***

Fișa de lucru 1 **– test de evaluare inițială**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 15 de minute.**
- **Pentru fiecare item, dintre cele patru variante de răspuns doar o variantă este corectă.**
- **Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.**

	Pentru cerințele **1 – 2**, se consideră x_1 și x_2, soluțiile ecuației $x^2-3x-5=0$.
7p	**1.** $x_1+x_2=$ **A.** 5 **B.** 3 **C.** -3 **D.** -5
8p	**2.** $x_1\cdot x_2=$ **A.** 5 **B.** 3 **C.** -3 **D.** -5
15p	**3.** Pentru $m=1$, gradul polinomului $f=(1-m)X^4+\left(m^2-3m+2\right)X^3+mX^2-X+1$ este egal cu: **A.** 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1
15p	**4.** Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+X-6$. O rădăcină a polinomului f este egală cu: **A.** -3 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 6
15p	**5.** Valoarea polinomului $f=3X^3-X^2+1$ în $\alpha=-1$ este egală cu: **A.** -3 **B.** -2 **C.** -1 **D.** 3
15p	**6.** Restul împărțirii polinomului $f=3X^3-X^2+1$ la polinomul $g=X-1$ este egal cu: **A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3
15p	**7.** Câtul împărțirii polinomului $f=X^3+2X^2+X+2$ la polinomul $g=X+2$ este egal cu: **A.** 0 **B.** X^2 **C.** X^2+1 **D.** X^2+2

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***

Barem de corectare și de notare

1	2	3	4	5	6	7
B	D	C	C	A	D	C
7p	8p	15p	15p	15p	15p	15p

Matricea de specificații
Test de valuare inițială

Competențe de evaluat / Conținuturi	XII CS 1.1	XII CS 3.2.1	IX CS 5.6	XII CS 5.2.1	Total
Utilizarea relațiilor lui Viète pentru caracterizarea soluțiilor unei ecuații de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații			1(10p) 2(10p)		**20p**
Forma algebrică a unui polinom	3 (10p) 4 (10p)	5 (10p)			**30p**
Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X-a$, schema lui Horner		6 (10p) 8 (10p)		7 (10p)	**30p**
Divizibilitatea polinoamelor				9 (10p)	**10p**
Total	**20p**	**30p**	**20p**	**20p**	**90p**

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare inițială în cadrul unității de învățare:
XII CS.1.1 Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere, de polinoame și de matrice
XII CS.3.2.1 Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice
XII CS.5.2.1 Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date
IX CS.5.5 Utilizarea relațiilor lui Viète pentru caracterizarea soluțiilor ecuației de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații
XII CS 6.2.1 Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor

Testul de evaluare inițială pentru unitatea de învățare *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice* poate fi accesat online la adresa https://forms.gle/qiz79Sz3QGvBjvwu5 .

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$*, p prim)*
Unitatea de învățare: *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*
Lecția L1: Rădăcini ale polinoamelor, soluții ale ecuațiilor algebrice

Fișa suport 2

I. *Reamintim:*
Considerăm K unul din corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sau $\mathbb{Z}_p$ cu p prim și un polinom $f \in K[X]$.

Definiție: Un element $\alpha \in K$ se numește **rădăcină** a polinomului f dacă $f(\alpha)=0$.

Teorema lui Bezout: Se consideră un polinom $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$. Numărul α este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă polinomul $X-\alpha$ divide polinomul f.

Definiție: Se consideră un polinom $f \in K[X]$ de grad $n \in \mathbb{N}^*$, un număr natural nenul m, $m \le n$ și $\alpha \in K$. α se numește **rădăcină multiplă de ordin** m a polinomului f dacă m este cel mai mare număr natural pentru care $(X-\alpha)^m \mid f$. Numărul m se numește **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α.

Observație: $\alpha \in K$ este rădăcină cu ordinul de multiplicitate m pentru un polinom f dacă, atunci când determinăm toate rădăcinile polinomului, sunt m rădăcini egale cu α.

Rădăcinile multiple de ordinul 2 se mai numesc și **rădăcini duble** ($(X-\alpha)^2 \mid f$), iar cele de ordinul 3 **rădăcini triple** ($(X-\alpha)^3 \mid f$). O rădăcină cu ordin de multiplicitate 1 se numește **rădăcină simplă**.

II. Definiția: Dacă polinomul f are gradul cel puțin 1, atunci ecuația $f(x)=0$ se numește **ecuație algebrică** cu coeficienți în corpul K și necunoscuta x.

Observații: **1)** Dacă $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in K[X]$, $a_n \ne 0$, atunci ecuația algebrică atașată polinomului f este $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ și are gradul n și coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$.

2) Un element $\alpha \in K$ este soluție a ecuației algebrice dacă acesta verifică ecuația, ceea ce înseamnă că $f(\alpha)=0$, adică α este rădăcină a polinomului f.

3) A rezolva ecuația algebrică $f(x)=0$ înseamnă a determina toate soluțiile ei, deci a determina toate rădăcinile polinomului f.

Exemplul 1: Fiind dat un polinom de gradul I, $f = aX + b$, cu $a,b \in \mathbb{C}$, $a \ne 0$, determinăm rădăcina sa ca soluție a ecuației algebrice atașate, $ax+b=0$. Soluția ecuației este $x = -\frac{b}{a}$, deci polinomul f are rădăcina $-\frac{b}{a}$.

Exemplul 2: Fiind dat un polinom de gradul II, $f = aX^2 + bX + c$, cu $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$, determinăm rădăcinile sale ca soluții ale ecuației algebrice atașate, $ax^2+bx+c=0$. Recunoaștem aici o ecuație de gradul al doilea, iar soluțiile sale sunt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$, pentru $\Delta \ge 0$ sau $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pentru $\Delta < 0$. Acestea reprezintă rădăcinile polinomului f.

Exemplul 3: Considerăm polinomul $f = 3X^3 + 2X^2 - X$. Pentru a determina toate rădăcinile sale, rezolvăm ecuația algebrică atașată $3x^3 + 2x^2 - x = 0$. Aceasta se poate scrie $x(3x^2 + 2x - 1) = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $3x^2 + 2x - 1 = 0$, deci soluțiile sunt $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{3}$. Așadar, rădăcinile polinomului f sunt -1, 0 și $\frac{1}{3}$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecția L1: Rădăcini ale polinoamelor, soluții ale ecuațiilor algebrice

Fișa suport 2 – fișa de lucru

1) Verificați dacă $\alpha = 2$ este rădăcină a polinomului $f = -2X^3 + X^2 - X + 14$.

2) Determinați numărul real m pentru care ecuația $x^4 - mx^3 - (m+1)x + 4 = 0$ are soluția $\alpha = -1$.

3) Determinați rădăcinile complexe ale fiecăruia dintre următoarelor polinoame:
- **a)** $f = 3X + 4$;
- **b)** $g = -2X^2 + 5X - 2$;
- **c)** $h = 2X^3 - X^2 - X + 2$;
- **d)** $k = X^4 + X^2 - 2$;
- **e)** $f = X^3 - 5X^2 - 6X$;
- **f)** $f = X^3 - 3X^2 - 4X + 12$.

4) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$, știind că admite soluția $\alpha = 3$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$***,*** p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecția L1: Rădăcini ale polinoamelor, soluții ale ecuațiilor algebrice

Fișa suport 2 – fișa de lucru – recomandări metodice pentru profesor

1) Verificați dacă $\alpha = 2$ este rădăcină a polinomului $f = -2X^3 + X^2 - X + 14$.

Rezolvare: $f(2) = -2\cdot 2^3 + 2^2 - 2 + 14 = -16 + 4 - 2 + 14 = 0$, $\alpha = 2$ este rădăcină a polinomului f.

2) Determinați numărul real m pentru care polinomul $f = X^4 - mX^3 - (m+1)X + 4$ are rădăcina $\alpha = -1$.

Rezolvare: $\alpha = -1$ este rădăcină a polinomului f, deci $f(-1) = 0$.

$(-1)^4 - m\cdot(-1)^3 - (m+1)\cdot(-1) + 4 = 0$, de unde obținem $m = -3$.

3) Determinați rădăcinile fiecăruia dintre următoarele polinoame:

a) $f = 3X + 4$;

b) $g = -2X^2 + 5X - 2$;

c) $h = 2X^3 - X^2 - X + 2$;

d) $k = X^4 + X^2 - 2$;

e) $f = X^3 - 5X^2 - 6X$;

f) $f = X^3 - 3X^2 - 4X + 12$.

Rezolvare: Pentru determinarea rădăcinilor polinoamelor, rezolvăm ecuațiile algebrice atașate.

a) Ecuația algebrică atașată lui f este $3x + 4 = 0$ cu soluția $x = -\frac{4}{3}$ care este și rădăcina polinomului f.

b) Ecuația algebrică atașată lui g este $-2x^2 + 5x - 2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = 2$ care sunt rădăcinile polinomului g.

c) Ecuația algebrică atașată polinomului h este $2x^3 - x^2 - x + 2 = 0$, care se scrie $(x+1)\left(2x^2 - 3x + 1\right) = 0$, și are soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ și $x_3 = \frac{1}{2}$, care sunt și rădăcinile polinomului h.

d) Ecuația algebrică atașată polinomului k este $x^4 + x^2 - 2 = 0$, care se scrie $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 2\right) = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -i\sqrt{2}$ și $x_4 = i\sqrt{2}$, care sunt și rădăcinile polinomului k.

e) Ecuația algebrică atașată polinomului f este $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$, care se scrie $x\left(x^2 - 5x - 6\right) = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ și $x_3 = 6$, care sunt și rădăcinile polinomului f.

f) Ecuația algebrică asociată polinomului f este $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$, care se scrie $(x-3)\left(x^2 - 4\right) = 0$, de unde obținem $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ și $x_3 = 2$.

4) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$, știind că admite soluția $\alpha = 3$.

Rezolvare: Considerăm $f = 2X^3 - X^2 - 13X - 6$. Conform teoremei lui Bezout, deoarece $\alpha = 3$ este rădăcină a polinomului f, rezultă că $X - 3$ divide f. În urma împărțirii lui f la $X - 3$ se obține $f = (X-3)\left(2X^2 + 5X + 2\right)$, deci ecuația algebrică devine $(x-3)\left(2x^2 + 5x + 2\right) = 0$, de unde se obțin soluțiile $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ și $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecțiile L2–L3: Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4

Fișa suport 3

În programa claselor a IX-a și a X-a se face referire la relațiile care se pot stabili între soluțiile unei ecuații de gradul al doilea și coeficienții acesteia, relații pe care le vom reaminti în cele ce urmează.

Relații analoage au loc și în cazul ecuațiilor sau a polinoamelor de grad superior. Acestea au fost stabilite de către François Viète (1540-1603) - matematician francez care a contribuit semnificativ la dezvoltarea algebrei și este cunoscut pentru lucrările sale în domeniul ecuațiilor algebrice.

Relațiile lui Viète stabilesc o legătură între coeficienții și rădăcinile unui polinom, respectiv soluțiile unei ecuații algebrice. Aceste relații sunt deosebit de utile în rezolvarea ecuațiilor algebrice, deoarece permit extragerea informațiilor despre soluții fără a fi necesar să le calculăm explicit.

I. Relațiile lui Viète pentru polinomul de grad 2 cu coeficienți complecși

Pentru polinomul de grad doi $f = aX^2 + bX + c$ cu $a \neq 0$ și rădăcinile x_1 și x_2, relațiile lui Viète se scriu astfel:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Observăm că cele două relații de mai sunt relațiile studiate în clasele a IX-a și a X-a la ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali.

Reciproc, dacă x_1, x_2 sunt numere complexe, atunci un polinom f de gradul 2, care are rădăcinile x_1 și x_2 este de forma $f = a\left(X^2 - SX + P\right)$, cu $a \neq 0$, unde $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 x_2$.

Observații:

1) În acest caz, aceste formule ne permit să calculăm suma și produsul soluțiilor ecuației de gradul al doilea, fără a calcula efectiv aceste soluții.

2) În unele cazuri, se pot calcula mintal soluțiile unei ecuații de gradul al doilea. Există ecuații de gradul al doilea cu soluții reale, care pot fi precizate dacă știm suma și produsul rădăcinilor.

3) De regulă, dacă pentru o ecuație de gradul al doilea se precizează o relație între soluțiile acesteia, atunci sunt utile relațiile lui Viète pentru determinarea soluțiilor ecuației.

Exemplu: Pentru polinomul $f = 3X^2 - X + \frac{33}{10}$, suma rădăcinilor sale este $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, iar produsul este $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{33}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{10} = 1{,}1$.

Evident, suma și produsul celor două rădăcini erau dificil de calculat dacă s-ar fi determinat efectiv rădăcinile și apoi s-ar fi calculat suma și produsul acestora.

II. Relațiile lui Viète pentru polinoamele de grad 3

Pentru polinomul de grad trei $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, cu $a \neq 0$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3 relațiile lui Viète se scriu astfel:

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$$

$$s_3 = x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

Reciproc, dacă x_1, x_2, x_3 sunt numere complexe, atunci un polinom de gradul 3 cu coeficienți complecși care are rădăcinile x_1, x_2, x_3 este de forma $f = a\left(X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3\right)$, cu $a \neq 0$.

Exemplul 1: Scrieți relațiile lui Viète pentru fiecare dintre polinoamele:

a) $f = X^3 - X^2 - 2X - 12$;

b) $f = X^3 - 3X + 2$.

Rezolvare:

a) Pentru acest polinom coeficienții sunt $a_3 = 1$, $a_2 = -1$, $a_1 = -2$ și $a_0 = -12$, iar relațiile lui Viète sunt următoarele:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{-1}{1} \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{-2}{1} \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -\dfrac{-12}{1} \end{cases}, \text{ deci } \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2 \\ s_3 = x_1x_2x_3 = 12 \end{cases}$$

b) Pentru acest polinom coeficienții sunt $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = -3$ și $a_0 = 2$, iar relațiile lui Viète sunt următoarele:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{0}{1} \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{-3}{1} \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -\dfrac{2}{1} \end{cases}, \text{ deci } \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3 \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$$

III. Relațiile lui Viète pentru polinoamele de grad 4

Pentru polinomul de grad patru $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$, cu $a \neq 0$ și rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, relațiile lui Viète se scriu astfel:

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$s_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$$

Reciproc, dacă $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile unui polinom f, atunci $f = a\left(X^4 - s_1X^3 + s_2X^2 - s_3X + s_4\right)$, cu $a \neq 0$.

Exemplul 1: Scrieți relațiile lui Viète pentru polinomul $f = 2X^4 + X^3 - 1$.

Cum $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$ și $e = -1$, relațiile lui Viète sunt

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$$

$$s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$$

$$s_4 = x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{2}$$

Exemplul 2. Determinați suma soluțiilor ecuației $x^4 - x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

Prima relație a lui Viète este $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{-1}{1}$, deci $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

Exemplul 3. Determinați numărul real m, astfel încât produsul rădăcinilor polinomului $f = -X^4 + 4X^2 + 3X - m$ este egal cu 5.

Conform relațiilor lui Viète, $x_1x_2x_3x_4 = \frac{-m}{-1} = m$, deci $m = 5$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$***,*** p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecțiile L2–L3: Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4

Fișa suport 3 – fișa de lucru

I.

1. Se consideră x_1 și x_2, rădăcinile polinomului $f = X^2 - 5X + 3$.

a) Calculați $x_1 + x_2$;

b) Calculați $x_1 \cdot x_2$;

c) Arătați că $x_1^2 + x_2^2 = 19$;

d) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 = 80$.

II.

1. Determinați suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - 4X + 5$.

2. Determinați produsul rădăcinilor polinomului $g = X^3 - X^2 + 6$.

3. Se consideră polinomul $f = 2X^3 + mX^2 + X - 2m + 3$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3 = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

4. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + 2X - 9$.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

b) Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

III.

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + 3X^2 + 5X - 1$.

a) Arătați că 0 nu este rădăcină a polinomului f.

b) Calculați $x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1}$.

2. Determinați polinomul de gradul 4, cu coeficientul dominant egal cu 2, care are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ și $x_4 = -5$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecțiile L2–L3: Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4

Fișa suport 3 – fișa de lucru – recomandări metodice pentru profesor

În funcție de particularitățile și nevoile de învățare ale elevilor, profesorul poate decide intercalarea unor exerciții din fișa de lucru în paragrafele I, II și III. Fișa poate fi utilizată pentru lucrul în echipe/perechi și pentru activitate diferențiată, dacă este cazul.

I.

1. Se consideră x_1 și x_2, rădăcinile polinomului $f = X^2 - 5X + 3$.

a) Calculați $x_1 + x_2$;

b) Calculați $x_1 \cdot x_2$;

c) Calculați $x_1^2 + x_2^2$;

d) Calculați $x_1^3 + x_2^3$.

Rezolvare: Scriem relațiile lui Viète și obținem:

a) $S = x_1 + x_2 = -\frac{-5}{1} = 5$;

b) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{1} = 3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 25 - 2 \cdot 3 = 19$;

d) $x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0$, deci $x_1^3 - 5x_1^2 + 3x_1 = 0$

$x_2^2 - 5x_2 + 3 = 0$, deci $x_2^3 - 5x_2^2 + 3x_2 = 0$

Adunând cele două egalități, obținem $x_1^3 + x_2^3 - 5\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 3(x_1 + x_2) = 0$, de unde obținem $x_1^3 + x_2^3 = 5\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 3(x_1 + x_2)$, deci $x_1^3 + x_2^3 = 5 \cdot 19 - 3 \cdot 5 = 80$

Observație. Calculul expresiilor de mai sus se poate efectua și dacă se determină efectiv rădăcinile polinomului și valorile lor se înlocuiesc în expresiile respective. Însă această metodă generează calcule laborioase, în timp ce aplicarea relațiilor lui Viète conduce la calcule scurte și simple.

II.

1. Determinați suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - 4X + 5$.

Rezolvare: Cum $a = 1$, $b = 0$, obținem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

2. Determinați produsul rădăcinilor polinomului $g = X^3 - X^2 + 6$.

Rezolvare: Cum $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ și $d = 6$, obținem $x_1 x_2 x_3 = -6$.

3. Se consideră polinomul $f = 2X^3 + mX^2 + X - 2m + 3$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3 = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Rezolvare: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{m}{2}$, $x_1 x_2 x_3 = \frac{2m-3}{2}$, deci $-\frac{m}{2} - \frac{2m-3}{2} = 0$, de unde obținem $m = 1$

4. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + 2X - 9$.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

b) Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

a) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 2$ și $(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = 1$, deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 1$, de unde obținem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -3$.

b) Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -3 < 0$, rezultă că polinomul f nu are toate rădăcinile numere reale

III.

Exercițiul 1. Se consideră polinomul $f = X^4 + 3X^2 + 5X - 1$.

a) Arătați că 0 **nu** este rădăcină a polinomului f.

b) Calculați $x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1}$.

Rezolvare:

a) $f(0) = -1 \neq 0$, deci 0 **nu** este rădăcină a polinomului f.

b) $x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \dfrac{s_3}{s_4}$ și, cum

$s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -5$ și $s_4 = x_1x_2x_3x_4 = -1$, obținem $x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1} = \dfrac{-5}{-1} = 5$.

Exercițiul 2. Determinați polinomul de gradul 4 cu coeficientul dominant egal cu 2 și rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ și $x_4 = -5$.

Rezolvare: Calculăm $s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3$, $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -11$, $s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 3$ și $s_4 = x_1x_2x_3x_4 = 10$. Atunci polinomul cu aceste rădăcini și coeficientul dominant 2 este $f = 2\left(X^4 + 3X^3 - 11X^2 - 3X + 10\right)$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecția L4: Rezolvarea unor ecuații algebrice utilizând relațiile lui Viete

Fișa suport 4 – fișa de lucru

I. Rezolvarea unei ecuații algebrice ale cărei soluții verifică o condiție dată
Exercițiul 1. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile următoare, știind că, fiecare ecuație are soluția specificată:

a) $2x^3+3x^2-1=0$, $x_1=\frac{1}{2}$;

b) $x^3-3x^2+x+2=0$, $x_1=2$.

Exercițiul 2. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile următoare, știind că, pentru fiecare ecuație, are loc condiția specificată pentru soluții:

a) $x^3-9x^2+23x-15=0$, $x_1+x_2=8$;

b) $x^3+7x^2+7x-15=0$, $x_1\cdot x_2=15$;

c) $x^3+4x^2-4x-16=0$, $x_1\cdot x_2=x_3$;

d) $x^4-6x^3-7x^2+48x-36=0$, $x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4=0$.

II. Determinarea rădăcinilor unui polinom care are o rădăcină dublă sau triplă
Exercițiul 3. a) Determinați rădăcinile polinomului $f=X^3-3X^2+4$, știind că are rădăcina dublă $\alpha=2$.

b) Determinați rădăcinile polinomului $f=X^4-X^3-3X^2+5X-2$, știind că are rădăcina triplă $\alpha=1$.

Exercițiul 4: Determinați rădăcinile polinomului $f=X^4-3X^3+X^2+4$, știind că are rădăcina dublă 2.

Exercițiul 5: Determinați numerele reale m știind că polinomul $f=X^3-5X^2+8X+m$ are o rădăcină dublă.

III. Determinarea unui parametru când soluțiile unei ecuații algebrice/rădăcinile unui polinom verifică anumite condiții date
Exercițiul 6: Rezolvați ecuațiile următoare știind că, pentru fiecare ecuație, soluțiile ei verifică relația specificată:

a) $x^3-3x^2+mx+3=0$, $x_1+x_2=0$;

b) $x^3+3x^2+mx-1=0$, $x_1x_2=1$;

c) $x^3-3x^2-4x+m=0$, $2x_1=3x_2$.

Exercițiul 7: Rezolvați ecuația $x^3-12x^2+mx-28=0$, unde m este număr real, știind că soluțiile ecuației sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Exercițiul 8: Rezolvați ecuația $x^3+3mx^2+(5m-1)x+8=0$, unde m este număr real, știind că soluțiile ecuației sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Pentru consolidarea competențelor din programa școlară și pregătirea pentru performanță, se recomandă utilizarea resursei deschise:
https://www.youtube.com/watch?v=ewJRMCx58wU&list=PLnmTPGJ1y05MAsL6vbsGc8nYzCgNwVFu5&index=9

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecția L4: Rezolvarea unor ecuații algebrice utilizând relațiile lui Viete

Fișa suport 4 – fișa de lucru – recomandări metodice pentru profesor

Se recomandă utilizarea flexibilă a fișei de lucru, alternând activitatea frontală cu cea individuală, diferențiată, în acord cu ritmurile și nevoile de învățare ale elevilor. Fișa include și exerciții pentru temă/studiu individual, astfel încât profesorul poate selecta aplicațiile în funcție de caracteristicile individuale și de grup ale elevilor. De asemenea, se recomandă formarea obișnuinței elevilor de a identifica și compara/analiza diferitele modalități de rezolvare a unei ecuații algebrice sau a unor etape din rezolvare. Argumentarea, de către elevi, a corectitudinii logice și instrumentale a unei metode de rezolvare constituie o formă de învățare elev-elev eficientă și stimulativă.

I.
Exercițiul 1: Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile următoare, știind că fiecare ecuație are soluția specificată:

a) $2x^3+3x^2-1=0$, $x_1=\frac{1}{2}$;

b) $x^3-3x^2+x+2=0$, $x_1=2$;

Rezolvare: **a)** Din prima și din ultima relație a lui Viète pentru o ecuație de gradul al treilea avem: $x_1+x_2+x_3=-\frac{3}{2}$ și $x_1x_2x_3=\frac{1}{2}$. Întrucât $x_1=\frac{1}{2}$, obținem $x_2+x_3=-2$ și $x_2x_3=1$. Știind suma și produsul celor două numere x_2 și x_3, acestea pot fi determinate ca soluții ale ecuației de gradul al doilea $x^2-Sx+P=0$, adică ale ecuației $x^2+2x+1=0$. Aceste sunt $x_2=x_3=-1$.

b) Procedând ca la punctul a), avem: $x_1=2$, $x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2x_3=-2$, de unde obținem $x_2+x_3=1$ și $x_2x_3=-1$. Așadar, x_2 și x_3 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2-x-1=0$, deci $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Exercițiul 2: Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile următoare, știind că, pentru fiecare ecuație, are loc condiția specificată pentru soluții:

a) $x^3-9x^2+23x-15=0$, $x_1+x_2=8$;

b) $x^3+7x^2+7x-15=0$, $x_1\cdot x_2=15$;

c) $x^3+4x^2-4x-16=0$, $x_1\cdot x_2=x_3$;

d) $x^4-6x^3-7x^2+48x-36=0$, $x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4=0$.

Rezolvare: **a)** Din prima relație a lui Viète pentru o ecuație de gradul al treilea obținem $x_1+x_2+x_3=9$ și, cum $x_1+x_2=8$, rezultă că $x_3=1$. Din a treia relație a lui Viète avem $x_1x_2x_3=15 \Rightarrow x_1x_2=15$ și x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2-8x+15=0$, deci $x_1=3$ și $x_2=5$.

b) Din a treia relație a lui Viète pentru o ecuație de gradul al treilea obținem $x_1x_2x_3=15$ și, cum $x_1x_2=15$, rezultă că $x_3=1$. Din prima relație a lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=-7 \Rightarrow x_1+x_2=-8$ și x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2+8x+15=0$, deci $x_1=-3$ și $x_2=-5$.

c) Din a treia relație a lui Viète pentru o ecuație de gradul al treilea obținem $x_1x_2x_3=16$ și, cum $x_1x_2=x_3$, rezultă că $x_3{}^2=16 \Rightarrow x_3=\pm 4$.

Pentru $x_3=4$, utilizăm prima relație a lui Viète $x_1+x_2+x_3=-4 \Rightarrow x_1+x_2=-8$, iar $x_1x_2=4$ și x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2+8x+4=0$, deci $x_{1,2}=-4\pm 2\sqrt{3}$, care nu convin (nu verifică a doua relație a lui Viète pentru ecuația dată)

Pentru $x_3=-4$, din prima relație a lui Viète obținem $x_1+x_2=0$ și, cum $x_1x_2=-4$, obținem $x_1=-2$ și

$x_2 = 2$, care convin.
d) Din ultima relație a lui Viète pentru o ecuație de gradul al patrulea obținem $x_1x_2x_3x_4 = -36$.
Cum $x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -x_3 \cdot x_4$, obținem $x_1x_2 = 6$ și $x_3x_4 = -6$ sau $x_1x_2 = -6$ și $x_3x_4 = 6$.
Din a treia relație a lui Viète obținem $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -48$, care se scrie și $x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -48$. Alegând $x_1x_2 = 6$ și $x_3x_4 = -6$, obținem $(x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = -8$. Corelând cu prima relație a lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, obținem $x_1 + x_2 = 7$ și $x_3 + x_4 = -1$. Prin urmare, x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 - 7x + 6 = 0$, deci $x_1 = 1$ și $x_2 = 6$, iar x_3 și x_4 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 + x - 6 = 0$, deci $x_3 = 2$ și $x_4 = -3$.
II.
Exercițiul 3: **a)** Determinați rădăcinile polinomului $f = X^3 - 3X^2 + 4$, știind că are rădăcina dublă $\alpha = 2$.
b) Determinați rădăcinile polinomului $f = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$, știind că are rădăcina triplă $\alpha = 1$.
Rezolvare: **a)** Considerând $x_1 = x_2 = 2$, din prima relație a lui Viète obținem $x_3 = -1$.
b) Considerând $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ și prima relație a lui Viète obținem $x_4 = -2$.
Exercițiul 4: Determinați rădăcinile polinomului $f = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$, știind că are rădăcina dublă 2.
Rezolvare: Considerăm $x_1 = x_2 = 2$ și, cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ și $x_1x_2x_3x_4 = 4$, obținem $x_3 + x_4 = -1$ și $x_3x_4 = 1$. x_3 și x_4 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 + x + 1 = 0$, deci $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
Exercițiul 5: Determinați numerele reale m, știind că polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 8X + m$ are o rădăcină dublă.
Rezolvare: Considerăm $x_1 = x_2 = \alpha$. Din prima relație a lui Viète obținem $x_3 = 5 - 2\alpha$. A doua relație a lui Viète devine $3\alpha^2 - 10\alpha + 8 = 0$, cu soluțiile $\alpha = 2$ sau $\alpha = \dfrac{4}{3}$.
Pentru $\alpha = 2$, rădăcinile sunt $x_1 = x_2 = 2$ și $x_3 = 1$, iar din $x_1x_2x_3 = -m \Rightarrow m = -4$.
Pentru $\alpha = \dfrac{4}{3}$, rădăcinile sunt $x_1 = x_2 = \dfrac{4}{3}$ și $x_3 = \dfrac{7}{3}$, iar din $x_1x_2x_3 = -m \Rightarrow m = -\dfrac{112}{27}$.
III.
Exercițiul 6: Rezolvați ecuațiile următoare știind că, pentru fiecare ecuație, soluțiile ei verifică relația specificată:
a) $x^3 - 3x^2 + mx + 3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$;
b) $x^3 + 3x^2 + mx - 1 = 0$, $x_1x_2 = 1$;
c) $x^3 - 3x^2 - 4x + m = 0$, $2x_1 = 3x_2$.
Rezolvare: Vom utiliza pentru fiecare ecuație relațiile lui Viète.
a) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m$ și $x_1x_2x_3 = -3$.
Având $x_1 + x_2 = 0$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 3$. Din $x_1x_2x_3 = -3 \Rightarrow x_1x_2 = -1$, iar x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 - 1 = 0$, deci $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$.
Se poate determina și numărul real m, utilizând a doua relație a lui Viète; obținem $m = -1$.
b) $x_1 + x_2 + x_3 = -3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m$ și $x_1x_2x_3 = 1$.
Deoarece $x_1x_2 = 1$, din $x_1x_2x_3 = 1$, avem: $x_3 = 1$.
Din $x_1 + x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow x_1 + x_2 = -4$, iar x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 + 4x + 1 = 0$, deci $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ și $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.
c) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -4$ și $x_1x_2x_3 = -m$.
Din $2x_1 = 3x_2$ obținem $x_1 = \dfrac{3x_2}{2}$ pe care îl înlocuim în primele două relații ale lui Viète, se obține un sistem cu două ecuații și necunoscutele x_2 și x_3. Din acest sistem se determină x_2 și x_3, apoi x_1.
Exercițiul 7: Rezolvați ecuația $x^3 - 12x^2 + mx - 28 = 0$, știind că soluțiile sale sunt în progresie aritmetică.

Rezolvare: x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației, deci $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, deci $x_1 + x_3 = 2x_2$. Din prima relație a lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, se obține $x_2 = 4$. Așadar, $x_1 + x_3 = 8$ și $x_1 x_3 = 7$, iar x_1 și x_3 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 - 8x + 7 = 0$, deci $x_1 = 1$ și $x_3 = 7$.

Prin înlocuirea necunoscutei cu una din soluțiile calculate, se poate determina și numărul real m: $1^3 - 12 \cdot 1^2 + m \cdot 1 - 28 = 0 \Rightarrow m = 39$.

Exercițiul 8: Rezolvați ecuația $x^3 + 3mx^2 + (5m-1)x + 8 = 0$, unde m este număr real, știind că soluțiile sale sunt în progresie geometrică.

Rezolvare: ${x_2}^2 = x_1 x_3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației. Din a treia relație a lui Viète, $x_1 x_2 x_3 = -8$, se obține ${x_2}^3 = -8 \Rightarrow x_3 = -2$. Înlocuind soluția găsită în ecuație, determinăm numărul real m: $(-2)^3 + 3m(-2)^2 + (5m-1) \cdot (-2) + 8 = 0 \Rightarrow m = -1$.

Prima și a treia relație a lui Viète devin $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ și $x_1 x_2 x_3 = -8$, de unde $x_1 + x_2 = 5$ și $x_1 x_2 = 4$. Prin urmare, x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 - 5x + 4 = 0$, deci $x_1 = 1$ și $x_3 = 4$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$*, p prim)*
Unitatea de învățare: *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*
Lecțiile L5-L6: Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Fișa suport 5

Evidențiem în continuare câteva modalități de a studia existența anumitor tipuri de soluții pentru ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ și, eventual, de a rezolva aceste ecuații.

I. Rezolvarea unor ecuații algebrice cu coeficienți reali

Se consideră polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_0$, având coeficienți reali, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Dacă numărul complex $z = a + bi$, cu $b \neq 0$ este rădăcină a polinomului f, atunci:

1) numărul $\overline{z} = a - bi$ este rădăcină a lui f;
2) z și $\overline{z}$ au același ordin de multiplicitate.

Exemplul 1: Rezolvați ecuația $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$, știind că are soluția $x_1 = -1 - i$.

Rezolvare: Ecuația are coeficienții reali și $x_1 = -1 - i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, deci $x_2 = -1 + i$.

Cum $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{3}{2}$, obținem $-2 + x_3 = -\dfrac{3}{2}$, deci $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

Exemplul 2: Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + mx + 15$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $z = 2 - i$ este rădăcină a polinomului f.

Rezolvare: Polinomul are coeficienții reali și $x_1 = 2 - i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, deci $x_2 = 2 + i$.

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$, de unde obținem $x_3 = -3$ și, cum $f(-3) = 0$, obținem $m = -7$.

Observație: Pentru determinarea numărului real m se poate utiliza direct $f(2 - i) = 0$, dar calculele sunt mai ample.

Consecințe:

1. Orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe care nu sunt reale.
2. Orice polinom cu coeficienți reali, de grad impar, are cel puțin o rădăcină reală.

II. Rezolvarea unor ecuații algebrice cu coeficienți raționali

Se consideră polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_0$, având coeficienți raționali, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Dacă numărul $r_1 = a + \sqrt{b}$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$ și $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$, este rădăcină a polinomului f, atunci:

1) numărul $r_2 = a - \sqrt{b}$ este rădăcină a lui f;
2) r_1 și r_2 au același ordin de multiplicitate.

Exemplul 1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 7X + m$, unde m este număr rațional. Determinați numărul rațional m, știind că numărul $2 + \sqrt{3}$ este rădăcină a polinomului f.

Rezolvare: Polinomul are coeficienți raționali și $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, deci $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Cum $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, obținem $x_3 = -2$, deci $f(-2) = 0$, de unde obținem $m = 2$.

III. Rezolvarea unor ecuații algebrice cu coeficienți întregi

Se consideră polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_0$ cu coeficienți întregi, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$.

1) Dacă numărul $m=\frac{p}{q}$ (unde p, q sunt numere prime între ele) este o rădăcină rațională a polinomului f, atunci p este divizor al termenului liber $\left(p / a_0\right)$ și q este divizor al coeficientului dominant $\left(q / a_n\right)$.
2) În particular, dacă numărul întreg m este rădăcină a polinomului f, atunci m este divizor al termenului liber (m / a_0)

Observații: Reformulând enunțurile anterioare, obținem:

1) Rădăcinile raționale ale unui polinom cu coeficienți raționali se găsesc printre numerele de forma $\frac{\text{divizor al termenului liber}}{\text{divizor al coeficientului dominant}}$.
2) Rădăcinile întregi ale unui polinom cu coeficienți întregi se găsesc printre divizorii termenului liber al polinomului.
3) Rezultatele anterioare oferă o modalitate de a eficientiza căutarea unor rădăcini ale unor polinoame, respectiv soluții ale unor ecuații algebrice.

Exemplul 1. Rezolvați ecuația algebrică $x^4-3x^3+4x^2-6x+4=0$.
Rezolvare: Ecuația algebrică are coeficienții întregi, deci soluțiile întregi, dacă există, sunt printre divizorii întregi ai numărului 4. Mulțimea divizorilor întregi ai numărului 4 este $D_4=\{-4,-2,-1,1,2,4\}$. Prin verificare în ecuație, obținem că 1 și 2 sunt soluții, deci $x_1=1$, $x_2=2$.
Cum $x_1+x_2+x_3+x_4=3$ și $x_1x_2x_3x_4=4$, obținem $x_3+x_4=0$ și $x_3x_4=2$, deci x_3 și x_4 sunt soluțiile ecuației $x^2+2=0$, de unde obținem $x_3=i\sqrt{2}$ și $x_4=-i\sqrt{2}$.

Exemplul 2. Determinați rădăcinile raționale ale polinomului $f=4X^3+3X+2$.
Rezolvare: Polinomul are coeficienți raționali. Pentru a determina rădăcinile raționale utilizăm $D_1=\{-1,+1\}$ și $D_4=\{-4,-2-1,+1,+2+4\}$ și rădăcinile raționale sunt printre elementele mulțimii $\left\{-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}$.
Obținem că $x_1=-\frac{1}{2}$ este singura rădăcină rațională a polinomului f.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecțiile L5-L6: Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Fișa suport 5 – fișa de lucru

1. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile, știind că fiecare ecuație are soluția indicată:
a) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$, $x_1=i$;
b) $x^3+mx^2-13x-6=0$, $x_1=1-\sqrt{2}$ și m este număr întreg.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile algebrice:
a) $x^3-5x^2+x+3=0$;
b) $6x^3+5x^2-2x-1=0$;
c) $x^4-3x^3+5x^2-9x+6=0$;
d) $2x^3+x^2-4x-3=0$.

3. Se consideră ecuația $x^3+mx^2+nx-1=0$, unde m și n sunt numere întregi. Determinați numerele întregi m și n pentru care ecuația are două rădăcini întregi distincte.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ* ($\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p *prim)*
Unitatea de învățare: *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*
Lecțiile L5-L6: Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Fișa suport 5 – fișa de lucru – recomandări metodice pentru profesor

1. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile, știind că fiecare ecuație are soluția indicată:
a) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$, $x_1=i$;
b) $x^3+mx^2-13x-6=0$, $x_1=1-\sqrt{2}$ și m este număr întreg.
Rezolvare:
a) Ecuația are coeficienții reali, deci $x_2=-i$ și, cum $x_1+x_2+x_3+x_4=2$ și $x_1x_2x_3x_4=3$, obținem $x_3+x_4=2$ și $x_3x_4=3$. Așadar, x_3 și x_4 sunt soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2-2x+3=0$, deci $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{2}$.
b) Ecuația algebrică are coeficienții raționali, deci $x_2=1+\sqrt{2}$ și, cum $x_1x_2x_3=6$, obținem $x_3=-6$.
$f(-6)=0$, de unde obținem $m=4$, care convine.
2. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile algebrice:
a) $x^3-5x^2+x+3=0$;
b) $6x^3+5x^2-2x-1=0$;
c) $x^4-3x^3+5x^2-9x+6=0$;
d) $2x^3+x^2-4x-3=0$.
Rezolvare:
a) Ecuația are coeficienții întregi cu termenul liber 3. Verificând, obținem $x_1=1$. Din relațiile lui Viète obținem $x_2+x_3=4$ și $x_2x_3=-3$, deci $x_2=2-\sqrt{7}$ și $x_3=2+\sqrt{7}$.
b) Ecuația are coeficienții întregi cu termenul liber -1. Verificând, obținem că $x_1=-1$. Din relațiile lui Viète obținem $x_2+x_3=\frac{1}{6}$ și $x_2x_3=-\frac{1}{6}$, deci $x_2=\frac{1}{2}$ și $x_3=-\frac{1}{3}$.
c) Ecuația are coeficienții întregi cu termenul liber 6. Verificând, obținem $x_1=1$, $x_2=2$. Din relațiile lui Viète obținem $x_3+x_4=0$ și $x_3x_4=3$, deci $x_3=i\sqrt{3}$ și $x_4=-i\sqrt{3}$.
d) Ecuația are coeficienții întregi cu termenul liber -3. Verificând, obținem că $x_1=-1$. Din relațiile lui Viète obținem $x_2=-1$ și $x_3=\frac{3}{2}$.
3. Se consideră ecuația $x^3+mx^2+nx-1=0$, unde m și n sunt numere întregi. Determinați numerele întregi m și n pentru care ecuația are două rădăcini întregi distincte.
Rezolvare:
Cum ecuația $x^3+mx^2+nx-1=0$, unde m și n sunt numere întregi, are coeficienții întregi, soluțiile întregi sunt printre divizorii termenului liber. Obținem că -1 și 1 sunt soluții, deci $(-1)^3+n(-1)^2+m(-1)-1=0$ și $1^3+n\cdot 1^2+m-1=0$, de unde obținem $m=1$ și $n=-1$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecțiile L7-L8: Ecuații binome, ecuații bipătrate, ecuații reciproce

Fișa suport 6

I. Ecuații binome

1. Definiție: O ecuație de forma $x^n = a$, unde $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}$ se numește **ecuație binomă**.

Exemple de ecuații binome: $x^2 = 5$, $x^5 = 1+i$, $x^3 = -8$, $x^4 = 4$.

Scriind numărul a sub forma trigonometrică $a = r(\cos t + i \sin t)$, rezolvarea ecuației $x^n = a$ se reduce la determinarea rădăcinilor de ordinul n ale numărului complex a.

Observație: Ne reamintim scrierea numărului complex $a = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ sub forma trigonometrică $a = r(\cos t + i \sin t)$, unde $r = |a| = \sqrt{x^2 + y^2}$ este modulul numărului complex a, iar numărul t se determină din relațiile $\cos t = \frac{x}{r}$, $\sin t = \frac{y}{r}$, $t \in [0, 2\pi)$.

Ecuația $x^n = a$ este echivalentă cu ecuația $x^n = r(\cos t + i \sin t)$ și are n soluții distincte $x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i \sin\frac{t+2k\pi}{n}\right)$, unde $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

2. Observații:

1) Ecuația $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$, pentru $a \geq 0$ și $x_{1,2} = \pm i\sqrt{-a}$, pentru $a < 0$.

2) Ecuația $x^3 = a^3$, $a \in \mathbb{R}^*$, se poate rezolva folosind formula $x^3 - a^3 = (x-a)\left(x^2 + ax + a^2\right)$. Această ecuație are o soluție reală $x_1 = a$ și două soluții complexe care nu sunt reale, adică soluțiile ecuației $x^2 + ax + a^2 = 0$.

3) Ecuația $x^{2k} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, are pentru $a > 0$ două soluții reale $x_{1,2} = \pm\sqrt[2k]{a}$ și celelalte $2k-2$ soluții sunt numere complexe care nu sunt reale, iar pentru $a < 0$, are toate soluțiile numere complexe care nu sunt reale.

4) Ecuația $x^{2k+1} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, are o singură soluție reală $x_1 = \sqrt[2k+1]{a}$, iar celelalte $2k$ soluții sunt numere complexe care nu sunt reale.

5) Este important de reținut că metodele generale de rezolvare a ecuațiilor algebrice pot fi utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor binome (sau alte ecuații de tip particular).

II. Ecuații bipătrate

Definiție: O ecuație algebrică de forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ se numește **ecuație bipătrată**.

Pentru rezolvarea unei ecuații bipătrate parcurgem următoarele etape:

1) Notăm $x^2 = t$ și obținem ecuația $at^2 + bt + c = 0$.

2) Rezolvăm ecuația $at^2 + bt + c = 0$, obținând soluțiile t_1 și t_2.

3) Rezolvăm ecuațiile $x^2 = t_1$ și $x^2 = t_2$, care sunt ecuații binome și obținem soluțiile ecuației bipătrate x_1, x_2, x_3, x_4.

Observații:

1) Când rezolvăm ecuația în necunoscuta t, este important să notăm corect soluțiile sale cu t_1 și t_2, pentru a nu se confunda cu cele ale ecuației date.

2) Dacă grupăm în mod convenabil termenii ecuației și aplicăm factorul comun, putem scrie ecuația $ax^4 + bx^2 + c = 0$ sub forma $a\left(x^2 - t_1\right)\left(x^2 - t_2\right) = 0$, de unde obținem direct ecuațiile $x^2 = t_1$ și $x^2 = t_2$.

III. Ecuații reciproce de gradul 3

Definiție: O ecuație de forma $ax^3+bx^2+bx+a=0$, cu $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ se numește **ecuație reciprocă de gradul 3**.

Se observă că $x=-1$ este soluție a acestei ecuații, deci putem descompune $ax^3+bx^2+bx+a=(x+1)\left(ax^2+(b-a)x+a\right)$, folosind grupări convenabile și dând factor comun $x+1$ sau împărțind polinomul asociat ecuației la $X+1$ (sau se pot utiliza relațiile lui Viète pentru determinarea celorlalte două soluții). Soluțiile ecuației reciproce sunt $x_1=-1$ și x_2, x_3 care sunt soluțiile ecuației $ax^2+(b-a)x+a=0$.

Observație: Cum $x_2\cdot x_3=1$ (relațiile lui Viète), avem $x_3=\dfrac{1}{x_2}$.

IV. Ecuații reciproce de gradul 4

Definiție: O ecuație de forma $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, cu $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, se numește **ecuație reciprocă de gradul 4**.

Pentru a rezolva ecuația, parcurgem etapele:

1) Împărțim ecuația cu x^2 (putem împărți pentru că $x=0$ nu este soluție a ecuației și considerăm $x\neq 0$) și obținem $ax^2+bx+c+\dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{x^2}=0$.

2) Grupăm termenii cu coeficienți egali și ecuația devine $a\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+c=0$.

3) Notăm $x+\dfrac{1}{x}=t$ și rezultă $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$ care se înlocuiesc în ecuația de la punctul 2).

4) Obținem ecuația $at^2+bt+c-2a=0$, cu soluțiile $t_1,t_2\in\mathbb{C}$.

5) Revenim la substituția $x+\dfrac{1}{x}=t$ și obținem ecuațiile $x+\dfrac{1}{x}=t_1$ și $x+\dfrac{1}{x}=t_2$ sau $x^2-t_1x+1=0$ și $x^2-t_2x+1=0$ cu soluțiile x_1,x_2,x_3,x_4.

Observație: Cum $x_1\cdot x_2=1$ și $x_3\cdot x_4=1$ (din relațiile lui Viète), $x_2=\dfrac{1}{x_1}$ și $x_4=\dfrac{1}{x_3}$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecțiile L7-L8: Ecuații binome, ecuații bipătrate, ecuații reciproce

Fișa suport 6 – fișa de lucru

I. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
a) $x^4 = -1$;
b) $x^3 - 1 = 0$;
c) $x^3 = -8$;
d) $x^4 = 4$.

II. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$;
b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

III.
1. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
a) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$;
b) $3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$.
2. Se consideră ecuația $(a+1)x^3 + 5x^2 + (b+2)x + 3a - 1 = 0$, unde a și b sunt numere reale.
a) Determinați numerele reale a și b pentru care ecuația este ecuație reciprocă de gradul 3.
b) Pentru $a = 1$ și $b = 3$, rezolvați ecuația.
3. Determinați numărul real m pentru care ecuația $x^3 + mx^2 + mx + 1 = 0$ are toate soluțiile reale.

IV.
1. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
a) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;
b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.
2. Discutați în funcție de numărul real m, natura soluțiilor ecuației $x^4 + (m-1)x^3 + mx^2 + (m-1)x + 1 = 0$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ* ($\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p *prim*)
Unitatea de învățare: *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*
Lecțiile L7-L8: Ecuații binome, ecuații bipătrate, ecuații reciproce

Fișa suport 6 – fișa de lucru – recomandări metodice pentru profesor

Se recomandă utilizarea flexibilă a fișei de lucru, alternând activitatea frontală cu cea individuală, diferențiată, în acord cu ritmurile și nevoile de învățare ale elevilor. Fișa include și exerciții pentru temă/studiu individual, astfel încât profesorul poate selecta aplicațiile în funcție de caracteristicile individuale și de grup ale elevilor. Se recomandă formarea obișnuinței elevilor de a identifica și compara/analiza diferitele modalități de rezolvare a unei ecuații algebrice, prin metode generale sau, dacă este cazul, prin metode specifice unui tip de ecuație algebrică. Argumentarea, de către elevi, a eficienței/optimalității unei metode de rezolvare, reprezintă o formă de învățare elev-elev care dezvoltă mai mult decât competențele matematice ale acestora.

I. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
a) $x^4=-1$;
b) $x^3-1=0$;
c) $x^3=-8$;
d) $x^4=4$.
Rezolvare:
a) Scriem forma trigonometrică a numărului complex -1: $\left|-1\right|=1$, $\cos t=-1$, $\sin t=0$, deci $t=\pi$ și obținem $-1=\cos\pi+i\sin\pi$. Soluțiile ecuației $x^4=-1$ sunt $x_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}$, $k\in\{0,1,2,3\}$. Înlocuind valorile lui k, se obține forma algebrică a fiecărei soluții.
b) $1^3-1=0$, deci $x_1=1$ și, cum $x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2x_3=1$, obținem $x_2+x_3=-1$ și $x_2x_3=1$. x_2 și x_3 sunt soluțiile ecuației $x^2+x+1=0$, de unde obținem $x_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ și $x_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
c) Pentru a rezolva ecuația $x^3=-8$ putem proceda ca în exemplele precedente: $x^3=-8\Leftrightarrow x^3=8(\cos\pi+i\sin\pi)$ cu soluțiile $x_k=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$, $k\in\{0,1,2\}$ sau folosim formula $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ și obținem $x^3+8=0\Leftrightarrow(x+2)\left(x^2-2x+4\right)=0$ de unde rezultă soluțiile $x_1=-2$, $x_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}$.
d) Putem rezolva ecuația $x^4=4$ procedând ca la punctele **a)** și **b)** sau folosind descompunerea în produs, caz în care obținem $x^4-4=0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)=0\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+i\sqrt{2}\right)\left(x-i\sqrt{2}\right)=0$ cu soluțiile $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ și $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$.

II. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:
a) $x^4-4x^2+3=0$; **b)** $x^4-3x^2-4=0$.
Rezolvare:
a) Notăm $x^2=t$ și obținem ecuația $t^2-4t+3=0$ cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=3$.
Revenim la substituție și obținem ecuațiile $x^2=1$ și $x^2=3$ cu soluțiile $x_1=-1$, $x_2=1$, $x=-\sqrt{3}$ și $x_4=\sqrt{3}$.
b) Notăm $x^2=t$ și obținem ecuația $t^2-3t-4=0$ cu soluțiile $t_1=-1$ și $t_2=4$.
Revenim la substituție și obținem ecuațiile $x^2=-1$ și $x^2=4$ cu soluțiile $x_1=-i$, $x_2=i$, $x_3=-2$ și $x_4=2$.

III.

1. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $x^3-2x^2-2x+1=0$;

b) $3x^3+2x^2+2x+3=0$.

Rezolvare:

a) $x^3-2x^2-2x+1=(x^3+1)-2(x^2+x)=(x+1)(x^2-x+1)-2x(x+1)=(x+1)(x^2-3x+1)=0$, de unde obținem $x_1=-1$ și $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) Cum $x=-1$ este soluție a ecuației, vom descompune polinomul $f=3X^3+2X^2+2X+3$ împărțindu-l la $X+1$, utilizând schema lui Horner:

	X^3	X^2	X	X^0
	3	2	2	3
-1	3	-1	3	0

Obținem $f=(X+1)(3X^2-X+3)$ iar soluțiile ecuației $3x^3+2x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^2-x+3)=0$ sunt $x_1=-1, x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{35}}{6}$.

2. Se consideră ecuația $(a+1)x^3+5x^2+(b+2)x+3a-1=0$, unde a și b sunt numere reale.

a) Determinați numerele reale a și b pentru care ecuația este ecuație reciprocă de gradul 3.

b) Pentru $a=1$ și $b=3$, rezolvați ecuația.

Rezolvare:

$a+1=3a-1$ și $b+2=5 \Rightarrow a=1$ și $b=3$.

b) Ecuația $2x^3+5x^2+5x+2=0$ se scrie $(x+1)(2x^2+3x+2)=0$ și are soluțiile $x_1=-1, x_{2,3}=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{4}$.

3. Determinați numărul real m pentru care ecuația $x^3+mx^2+mx+1=0$ are toate soluțiile reale.

Rezolvare:

Ecuația se scrie $(x+1)(x^2+(m-1)x+1)=0$; $x_1=-1$ și ecuația $x^2+(m-1)x+1=0$ are soluții reale când $\Delta=(m+1)(m-3)\geq 0$ deci $m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

IV.

1) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$;

b) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

Rezolvare:

a) Împărțim ecuația cu x^2 și obținem $x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$. Grupăm $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$ și notăm $x+\frac{1}{x}=t, x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Obținem ecuația $t^2+t-6=0$ cu $t_1=-3$ și $t_2=2$. Avem ecuațiile $x+\frac{1}{x}=-3$ și $x+\frac{1}{x}=2$ sau $x^2+3x+1=0$ și $x^2-2x+1=0$, de unde se obțin soluțiile ecuației reciproce $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}, x_3=x_4=1$.

b) Cum 0 nu este soluție a ecuației, împărțim ecuația cu x^2, grupăm și notăm $x+\frac{1}{x}=t, x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

Obținem ecuația $t^2-3t+2=0$ cu soluțiile .$t_1=1$ și $t_2=2$. Avem ecuațiile $x+\frac{1}{x}=1$ și $x+\frac{1}{x}=2$ sau $x^2-x+1=0$ și $x^2-2x+1=0$ cu soluțiile $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, x_3=x_4=1$.

2) Discutați în funcție de numărul real m, natura rădăcinilor ecuației $x^4+(m-1)x^3+mx^2+(m-1)x+1=0$.

Rezolvare:

Împărțind ecuația cu x^2, grupând termenii și notând $x+\frac{1}{x}=t, x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ obținem ecuația $t^2+(m-1)t+m-2=0$ cu soluțiile $t_1=-m+2$ și $t_2=-1$. Vom avea ecuațiile $x^2+x+1=0$ și $x^2+(m-1)x+1=0$. Ecuația $x^2+x+1=0$ are $\Delta=-3<0$ deci $x_1,x_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ iar ecuația $x^2+(m-1)x+1=0$ are $\Delta=(m+1)(m-3)$, deci pentru $m\in(-1,3)$, $\Delta<0$ și $x_3,x_4\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, iar pentru $m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$, $\Delta\geq 0$ și $x_3,x_4\in\mathbb{R}$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Lecția L9: Evaluare sumativă la finalul unității de învățare

Fișa de lucru 7 – test de evaluare sumativă

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 40 de minute.**

I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

10p **1.** O rădăcină a polinomului $f=2X^3-3X^2-4X+1$ este:

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 2

10p **2.** Suma soluțiilor ecuației algebrice $x^3-x^2-5x+3=0$ este egală cu:

A. 1 **B.** -1 **C.** 5 **D.** -3

10p **3.** Numărul rădăcinilor întregi ale polinomului $f=2X^3-2X^2-X-1$ este egal cu:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

II. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+4X+1$, cu rădăcinile x_1,x_2 și x_3, unde m este număr real.

10p **a)** Arătați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, $\alpha=0$ **nu** este rădăcină a polinomului f.

10p **b)** Arătați că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-4$, pentru orice număr real m.

10p **c)** Pentru $m=4$, determinați rădăcinile polinomului f.

10p **d)** Demonstrați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale, pentru orice $m\in\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$.

2. Se consideră ecuația $x^4-2x^2+ax-8=0$, unde a este număr real.

10p **a)** Determinați numărul real a pentru care 2 este rădăcină a polinomului f.

10p **b)** Pentru $a=0$, rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: *Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ* ($\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p *prim)*
Unitatea de învățare: *Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice*
Lecția L9: Evaluare sumativă la finalul unității de învățare

Test de evaluare sumativă
Barem de corectare și de notare

I.	**1. C**	**10p**
	2. A	**10p**
	3. B	**10p**
II.1.	**a)** $f(0)=0^3+m\cdot 0^2+4\cdot 0+1=1$, pentru orice număr real m	**5p**
	$f(0)\neq 0\Rightarrow \alpha=0$ nu este rădăcină a polinomului f	**5p**
	b) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=4$ și $x_1x_2x_3=-1$	**4p**
	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{4}{-1}=-4$	**6p**
	c) $f(-1)=(-1)^3+4\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+1=0$, deci $x_1=-1$	**4p**
	$x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	**6p**
	d) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=m^2-8$	**5p**
	$m\in\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)\Rightarrow m^2-8<0\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2<0$, deci f nu are toate rădăcinile numere reale	**5p**
II.2.	**a)** $2^4-2\cdot 2^2+a\cdot 2-8=0$, deci $16-8+2a-8=0$	**6p**
	$a=0$	**4p**
	b) $x^4-2x^2-8=0$, deci $\left(x^2+2\right)\left(x^2-4\right)=0$	**6p**
	$x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-i\sqrt{2}$, $x_4=i\sqrt{2}$	**4p**

Matricea de specificații
Test de evaluare sumativă

Conținuturi \ Competențe de evaluat	CS 1.1	CS 3.2.1	CS 5.2.1	CS 6.2.1	Total
Rădăcini ale polinoamelor	I.1. (10p) II.1.a) (10p)		II.2a) (10p)		**30p**
Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4		I.2 (10p) II.1.b) (10p) II.1.c) (10p)	II.1 c) (10p)		**40p**
Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$				I.3 (10p)	**10p**
Ecuații binome, ecuații bipătrate, ecuații reciproce			II.2b) (10p)		**10p**
Total	**20p**	**30p**	**30p**	**10p**	**90p**

Competențe de evaluat asociate testului de evaluare sumativă:
CS 1.1 Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere, de polinoame și de matrice
CS 3.2.1 Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice
CS 5.2.1 Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date
CS 6.2.1 Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Activități remediale sau de progres

Fișa suport – fișa de lucru 8

Activități remediale

1. Verificați, pentru fiecare polinom, dacă numărul dat este rădăcină a polinomului f :

a) $f = X^3 + X^2 - X - 1$, $x = -1$;

b) $f = 2X^3 - 5X - 6$, $x = 2$;

c) $f = X^4 - 5X - 6$, $x = 1$.

2. Scrieți relațiile lui Viète pentru fiecare dintre polinoamele următoare:

a) $f = X^3 + 2X^2 + 3X - 1$;

b) $f = X^3 - 2X + 3$;

c) $f = X^3 + 2X^2 + 2$.

3. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 - 6$, cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3.

a) Arătați că 0 **nu** este rădăcină a polinomului f.

b) Calculați $x_1x_2x_3\left(x_1 + x_2 + x_3\right)$.

c) Calculați $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3}$.

4. Determinați rădăcinile fiecăruia dintre polinoamele următoare:

a) $f = X^3 - 3X^2 - 10X$;

b) $f = X^3 - X^2 - X - 2$;

c) $f = X^3 + 2X^2 - X - 2$;

Activități de progres

1. Se consideră ecuația $x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$. Calculați $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt soluțiile ecuației algebrice date.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + aX - a$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\left(1 - x_1\right)\left(1 - x_2\right)\left(1 - x_3\right) = 3$, pentru orice număr real a.

b) Arătați că există un unic număr natural a pentru care polinomul f are toate rădăcinile numere întregi.

3. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 - 6X^2 + 2X + a$, unde a este număr real.

a) Determinați numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X - 1$.

b) Pentru $a = 1$, arătați că polinomul f are o rădăcină dublă.

4. Arătați că ecuația $x^4 - x^3 + 3x^2 + mx + p = 0$ **nu** are toate soluțiile reale, pentru orice numere reale m și p.

5. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^4 - (1 + i)x^2 + i = 0$.

Matematică
Clasa a XII-a – programa școlară M2 (*științe ale naturii*), 3 ore/săptămână
Domeniul de conținut: ***Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (*** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$, p ***prim)***
Unitatea de învățare: ***Rădăcini ale polinoamelor, ecuații algebrice***
Activități remediale sau de progres

Fișa suport – fișa de lucru 8 – recomandări metodice pentru profesor

Activități remediale

Pentru activitățile remediale, se recomandă utilizarea unor formule standardizate în înțelegerea ipotezei, descrierea detaliată a instrumentelor/proprietăților matematice utilizate și a secvențelor logice din etapele de rezolvare a unei probleme, precum și implicarea elevilor în identificarea unor conexiuni între ipoteze și algoritmi de lucru.

Activități de progres

1. Se consideră ecuația $x^3-x^2+4x-1=0$. Calculați $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt soluțiile ecuației algebrice date.

Rezolvare: $x^3-x^2+4x-1=0$ și, cum x_i, $i=\overline{1,3}$ este soluție a ecuației, obținem $x_i^3-x_i^2+4x_i-1=0$, $i=\overline{1,3}$ și adunând termen cu termen egalitățile obținem $x_1^3+x_2^3+x_3^3-x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1+4x_2+4x_3-3=0$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4(x_1+x_2+x_3)+3$.

$x_1+x_2+x_3=1$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=4$, de unde obținem $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-7$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-8$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+aX-a$, unde a este număr real.

a) Arătați că $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=3$, pentru orice număr real a.

b) Arătați că există un unic număr natural a pentru care polinomul f are toate rădăcinile numere întregi.

Rezolvare:

a) $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=3$.

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4-2a$ și, cum a este număr natural și polinomul f are toate rădăcinile numere întregi, obținem că $4-2a$ este număr natural, deci $a=0$ sau $a=1$ sau $a=2$.

Pentru $a=0$, $f=X^3+2X^2=X^2(X+2)$, cu rădăcinile $x_1=x_2=0$ și $x_3=-2$, deci $a=0$ convine

Pentru $a=1$, $f=X^3+2X^2+X-1$, care ar putea avea rădăcinile întregi -1 sau 1, dar $f(-1)=-1$ și $f(1)=3$, deci $a=1$ nu convine.

Pentru $a=2$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ și rădăcinile sunt numere întregi, deci $x_1=x_2=x_3=0$, adică $f(0)=0$; cum $f=X^3+2X^2+2X-2$, obținem $f(0)=-2$, contradicție, deci $a=2$ nu convine

3. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^3-6X^2+2X+a$, unde a este număr real.

a) Determinați numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X-1$.

b) Pentru $a=1$, arătați că polinomul f are o rădăcină dublă.

Rezolvare:

a) f se divide cu $g=X-1$, deci $f(1)=0$, de unde obținem $a=1$.

b) Ecuația atașată polinomului este $x^4+2x^3-6x^2+2x+1=0$ care, prin împărțire la x^2 cu x nenul, devine $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$; notând $x+\frac{1}{x}=y$, rezultă $y^2+2y-8=0$, cu soluțiile $y_1=2$ și $y_2=-4$

$x+\frac{1}{x}=2$, de unde obținem $x_1=x_2=1$ și $x+\frac{1}{x}=-4$, de unde obținem $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$, deci polinomul f are o rădăcină dublă.

4. Arătați că ecuația $x^4 - x^3 + 3x^2 + mx + p = 0$ nu are toate soluțiile reale, pentru orice numere reale m și p.

Rezolvare:

Presupunând că ecuația $x^4 - x^3 + 3x^2 + mx + p = 0$ ar avea toate soluțiile reale, ar rezulta că $x_1^2 \geq 0$, $x_2^2 \geq 0$, $x_3^2 \geq 0$ și $x_4^2 \geq 0$, de unde s-ar obține $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0$. Calculăm suma pătratelor soluțiilor cu ajutorul relațiilor lui Viète și avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = s_1^2 - 2s_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$. Observăm astfel că obținem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 0$ ceea ce contrazice afirmația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0$. Așadar, presupunerea de la începutul rezolvării este falsă și ecuația nu poate avea toate soluțiile numere reale.

5. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^4 - (1+i)x^2 + i = 0$.

Rezolvare:

Ecuația se scrie $x^4 - x^2 - ix^2 + i = 0$, deci $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - i\right) = 0$.

Ecuația $x^2 = 1$ are soluțiile $x_{1,2} = \pm 1$.

Ecuația binomă $x^2 = i$ se scrie sub forma $x^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ și are soluțiile $x_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}$ unde $k \in \{0,1\}$, deci $x_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Observație: Putem rezolva ecuația $x^2 = i$ și scriind $x = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ x^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 0 + 1 \cdot i$, de unde obținem $a^2 - b^2 = 0$ și $2ab = 1$ deci $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Așadar soluțiile ecuației bipătrate sunt $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resurse bibliografice

1. Legea învățământului preuniversitar 198/2023, https://legislatie.just.ro/Public/DetaliiDocumentAfis/271896
2. Profilul de formare al absolventului, https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/profilul-absolventului
3. Programe școlare pentru clasa a XII-a, matematică, https://rocnee.eu/images/rocnee/fisiere/programe_scolare/2023/MATE_ST/Matematica_programa%201_2_3_4_5_clasa%20a%20XII-a.pdf
4. Programe valabile pentru probele examenului național de bacalaureat 2024,
5. https://www.edu.ro/programe_probe_examen_bacalaureat_2024
6. Repere metodologice pentru consolidarea achizițiilor din anul școlar 2019-2020, https://www.ise.ro/wp-content/uploads/2022/05/Matematica.pdf
7. Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a IX-a, în anul școlar 2021-2022,
8. Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a X-a, în anul școlar 2022-2023,
9. Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a XI-a, în anul școlar 2023-2024, https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice
10. Recomandarea Consiliului din 22 mai 2018 privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții, https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)

Colectivul de autori

Streinu-Cercel Gabriela	Ministerul Educației
Stoleriu Anca	Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație, București
Andronache Marian	Societatea de Științe Matematice din România
Cerbu-Sfarghiu Vladimir	Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare”, Câmpulung Moldovenesc, județul Suceava
Cristea Cătălin	Colegiul Național Pedagogic „Ștefan Velovan”, Craiova, județul Dolj
Dogaru Cătălina Gabriela	Școala Gimnazială „Mihai Codreanu”, Iași, județul Iași
Ezaru Lorena Mihaela	Colegiul Național Militar „Dimitrie Cantemir”, Breaza, județul Prahova
Friedrich Gabriela	Colegiul Economic „Nicolae Titulescu”, Baia Mare, județul Maramureș
Heuberger Daniela	Colegiul Național „Vasile Lucaciu”, Baia Mare, județul Maramureș
Iancu Emilia	Colegiul Național „Matei Basarab”, București
Muntean Doina Valerica	Colegiul Național „Ioan Slavici” , Satu Mare, județul Satu Mare
Perianu Marius	Colegiul Național „Ion Minulescu”, Slatina, județul Olt
Plugariu Andrei	Colegiul Național „Costache Negruzzi”, Iași, județul Iași
Pravăț Cristian	Colegiul Național „Garabet Ibrăileanu”, Iași, județul Iași
Prelipceanu Gabriela	Liceul Teoretic Național, București
Șontea Ovidiu	Colegiul Național „Tudor Vianu”, București