

# MATEMATICĂ

FILIERA TEHNOLOGICĂ

CLASA a XII-a



REPERE METODOLOGICE  
PENTRU APLICAREA CURRICULUMULUI  
ÎN ANUL ȘCOLAR  
2024-2025

**CUPRINS**

Secțiunea	Subsecțiuni	Pagina
<b>I.</b>	<b>Specificul disciplinei matematică. Învățământul liceal, filiera tehnologică. Clasa a XII-a</b>	
<b>II.</b>	<b>Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XII-a, la disciplina matematică, programa școlară M2 (Tehnologic)</b>	
	<b>II.1.</b> Exemplu de planificare calendaristică anuală, anul școlar 2024– 2025	
	<b>II.2.</b> Lista competențelor generale și a celor specifice, precum și corespondența acestora cu domeniile de conținut, conform programei școlare, învățământ liceal, filiera tehnologică, clasa a XII-a	
	<b>II.3.</b> Lista competențelor generale și a competențelor specifice, precum și corespondența acestora cu domeniile de conținut, conform programei de examen pentru disciplina matematică ( <i>M_tehnologic</i> ), Anexa nr. 2 la <i>ordinul ministrului educației naționale nr. 4430/29.08.2014</i>	
<b>III.</b>	<b>Prezentare structurată a unor itemi din componența subiectelor I, II și III din instrumentele de evaluare ale probei de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat (variante date, modele, variante de la simulare) în vederea utilizării acestora în cadrul unor activități de învățare/recapitulare</b>	
	<b>III.1.</b> Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a IX-a	
	<b>III.2.</b> Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a X-a	
	<b>III.3.</b> Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a XI-a	
	<b>III.4.</b> Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a XII-a	
<b>IV.</b>	<b>Prezentare comentată a utilizării, în cadrul unor activități de învățare/recapitulare, a unei probleme/a unui item ales dintre subiectele asociate probei de matematică la Simularea examenului național de bacalaureat (martie 2024). Perspectiva elevului – Perspectiva profesorului</b>	
	<b>IV.1.</b> Comentarii din perspectiva <i>elevului</i>	
	<b>IV.1.1.</b> Sunt elev/elevă. <i>Comentarii din perspectiva rezolvării cerinței de evaluare</i>	
	<b>IV.1.2.</b> Sunt absolvent/absolventă de liceu. <i>Comentarii din perspectiva susținerii probei de examen național de bacalaureat, la matematică, inclusiv din perspectiva redactării rezolvării pe foaia de examen</i>	
	<b>IV.2.</b> Comentarii din perspectiva <i>profesorului</i>	
	<b>IV.2.1.</b> <i>Comentarii privind utilizarea unei cerințe de evaluare în context de recapitulare pentru a obține maximum de beneficiu pentru elevi</i>	
	<b>IV.2.2.</b> <i>Comentarii din perspectiva momentului de final al activității de recapitulare, cu asigurarea timpului necesar pentru reflecție, precum și asigurarea transferului (fixare/consolidare) prin teme pentru activitate individuală</i>	
	<b>IV.2.2.1.</b> Etapa de reflecție	



	<b><u>IV.2.2.2.</u></b>	Teme pentru activitate individuală în vederea asigurării transferului (fixare/consolidare), asigurarea învățării diferențiate	
	<b><u>IV.2.3.</u></b>	Sunt profesor evaluator la examenul de bacalaureat. <i>Comentarii din perspectiva realizării unei evaluări conforme și obiective în cadrul examenului național de bacalaureat</i>	
<b><u>V.</u></b>	<b>Anexe</b>		
	<b><u>Anexa nr. 1</u></b>	Îmi va fi, vreodată, matematica de folos?	
	<b><u>Anexa nr. 2</u></b>	Exemplificare de interacțiune elev/elevă sau profesor/profesoară cu aplicații care au componentă IA (inteligență artificială generativă)	
	<b><u>Anexa nr. 3</u></b>	<b><u>3.1.</u></b> Acțiunile (cerințele, verbele) incluse în itemii subiectelor propuse în cadrul Simulării examenului național de bacalaureat, martie 2024	
		<b><u>3.2.</u></b> Niveluri de competență și exemple de acțiuni/verbe asociate (având la bază taxonomia Bloom revizuită/extinsă)	
		<b><u>3.3.</u></b> Descrierea unor acțiuni (verbe) specifice domeniului matematic și care sunt utilizate în formularea unei cerințe de lucru/de evaluare	
	<b><u>Anexa nr. 4</u></b>	<b><u>4.1.</u></b> Lista simbolurilor și scrierilor simbolic-matematice utilizate în enunțul subiectului comentat în secțiunea a IV-a	
		<b><u>4.2.</u></b> Exemple de organizatoare (hărți mentale) în cadrul activităților de recapitulare – aplicație la subiectul I.1 din cadrul Simulării examenului național de bacalaureat 2024	
	<b><u>Anexa nr. 5</u></b>	Exemplu de cerințe de (auto)evaluare a competențelor de literație/alfabetizare matematică, având la bază subiectul I din cadrul instrumentului de evaluare asociat probei de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat	
	<b><u>Anexa nr. 6</u></b>	Recomandări de resurse educaționale deschise: prezentarea comentată a itemilor selectați din Subiectul I din cadrul testelor de antrenament elaborate de Ministerul Educației în perioada martie-iunie 2020, ca suport la învățării elevilor în contextul pandemiei COVID-19, precum și promovarea lecțiilor filmate în cadrul programului Teleșcoală (TVR 2)	
<b><u>VI.</u></b>	<b>Referințe web</b>		
<b><u>VII.</u></b>	<b>Colectiv de autori</b>		







# SECȚIUNEA I



**SECȚIUNEA I**  
**Specificul disciplinei matematică**  
**Învățământul liceal, filiera tehnologică**  
**Clasa a XII-a**

*Dacă mi-aș începe din nou studiile,  
aș urma sfaturile lui Platon  
și aș începe cu matematica.*

**Galileo Galilei**

**Pentru anul școlar 2024-2025, la disciplina matematică, procesul de predare-învățare-evaluare pentru clasa a XII-a se raportează, în principal, la:**

- **programele școlare în vigoare:**
  - **Anexa nr. 2 la ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5959/22.12.2006** – programa școlară 2 pentru filiera tehnologică, toate calificările profesionale, ciclul superior al liceului, disciplina matematică, clasa a XII-a, (aplicabilă și pentru clasa a XIII-a, învățământ liceal, filiera tehnologică) – 3 ore/săptămână, alocate din trunchiul comun  
([https://rocnee.eu/images/rocnee/fisiere/programe\\_scolare/2023/MATE\\_ST/Matematica\\_programa%201\\_2\\_3\\_4\\_5\\_clasa%20a%20XII-a.pdf](https://rocnee.eu/images/rocnee/fisiere/programe_scolare/2023/MATE_ST/Matematica_programa%201_2_3_4_5_clasa%20a%20XII-a.pdf))
- **programa de examen, pentru proba E c) Matematică din cadrul examenului național de bacalaureat:**
  - **Anexa nr. 2 la ordinul ministrului educației naționale nr. 4430/29.08.2014** privind organizarea și desfășurarea examenului național de bacalaureat (programa M-Tehnologic - [https://www.edu.ro/programe\\_probe\\_examen\\_bacalaureat\\_2024](https://www.edu.ro/programe_probe_examen_bacalaureat_2024))
- **planurile-cadru în vigoare**, aprobate prin **O.M.E.C.I. nr. 3410, 3411, 3412/2009, O.M.E.C.T.S. 53247/2011**, cu modificările și completările ulterioare  
(<https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/planuri-cadru-actuale>)
- **profilul de formare al absolventului**, aprobat în Anexa la ordinul ministrului educației nr. 6731/28.11.2023  
(<https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/profilul-absolventului>)
- **structura anului școlar 2024-2025**, aprobată prin **O.M.E. nr. 3694/01.02.2024**

Având în vedere că pentru clasa a XII-a, la disciplina matematică, se aplică programele școlare utilizate și în anii școlari anteriori, precum și că actuala structură a anului școlar este similară cu cele deja aplicate pentru învățământul preuniversitar în anii școlari precedenți (2022-2023 și 2023-2024), considerăm că majoritatea recomandărilor din **SECȚIUNEA I – Premise pentru aplicarea curriculumului la clasa a X-a în anul școlar 2022-2023**, din cadrul reperelor metodologice elaborate în august 2022 rămân în atenția corpului profesoral și pentru anul școlar 2024-2025. Recomandări utile pentru profesori sunt cuprinse și în celelalte repere elaborate pentru clasele a IX-a și a XI-a.



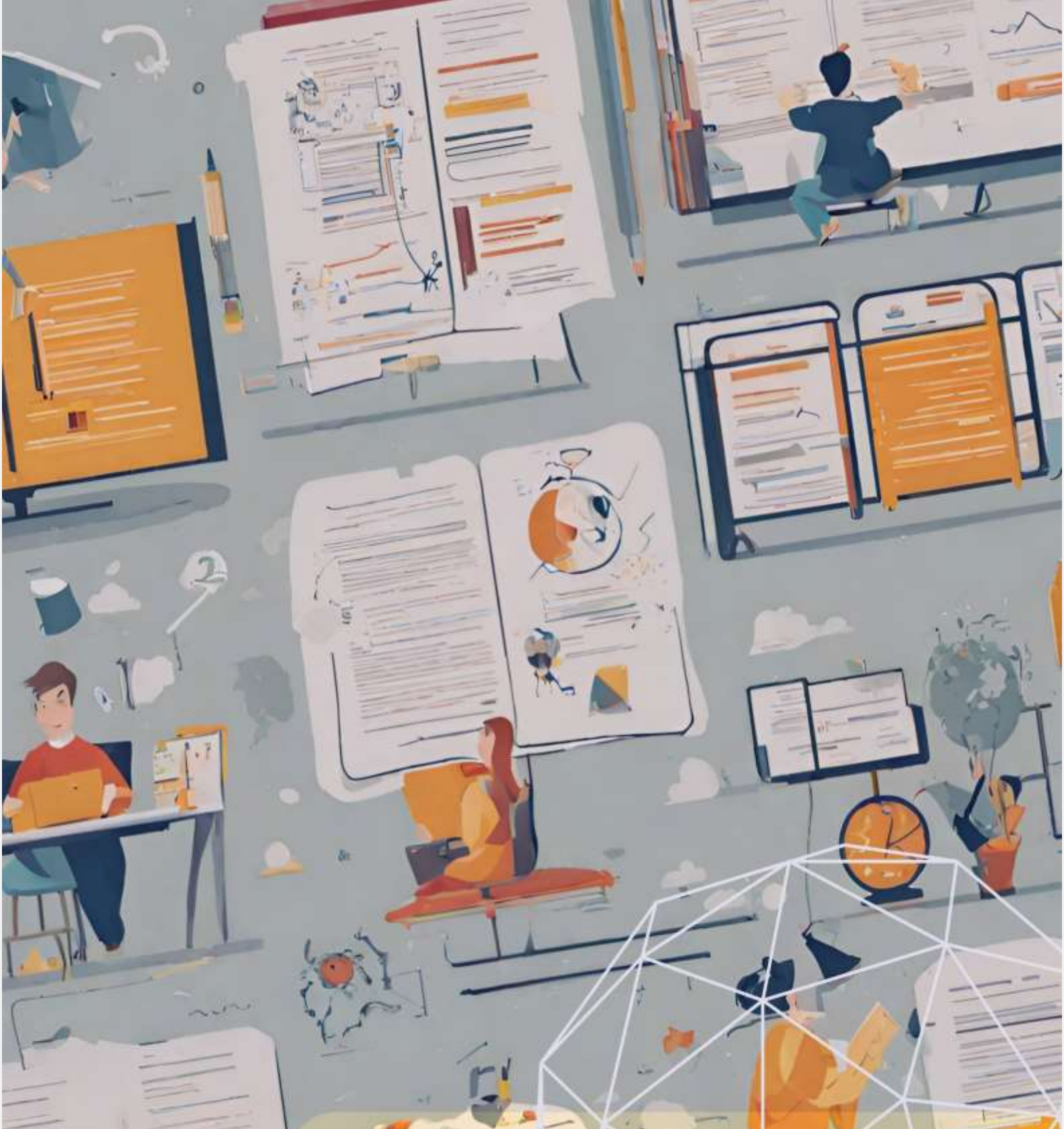
În acest sens, reamintim că accesarea documentelor elaborate anterior se poate face la:  
<https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice> (link general);  
<https://www.rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice/reperemetodologice2022>  
(link pentru repere-clasa a X-a).

**Având în vedere specificul clasei a XII-a** (an de studiu în care la învățământul liceal, forma cu frecvență zi, se finalizează parcursul educațional preuniversitar obligatoriu, cu susținerea examenului național de bacalaureat), **pentru învățământul liceal tehnologic, la disciplina matematică, colectivul de autori a considerat necesar să se axeze pe:**

- *exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XII-a, învățământ liceal, filiera tehnologică;*
- *prezentarea comentată a unor itemi selectați din instrumentele de evaluare asociate probei de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat (variante date la examen/simulare sau modele), care pot constitui un bun suport în activități de învățare din cadrul unor ore de recapitulare, cu accent pe pregătirea elevilor pentru susținerea probei E c) de la examenul național de bacalaureat;*
- *considerații metodice asupra unui item propus la simularea examenului național de bacalaureat 2024, din perspectiva elevului și din perspectiva profesorului, inclusiv cu evidențierea legăturilor cu profilul de formare al absolventului de liceu;*
- *o serie de anexe care fie să vină în sprijinul creșterii motivației pentru studiul matematicii, fie prin care se aduc în atenție verbele/acțiunile specifice domeniului matematic; o anexă prezintă un exemplu de utilizare cu scop de învățare/didactic a aplicațiilor care au o componentă de inteligență automată generativă, iar o ultimă anexă prezintă o abordare alternativă a unor cerințe de lucru, cu accent pe literație matematică.*

Ținând cont de faptul că reperele de anul acesta vizează anul de final al studiilor liceale (clasa a XII-a, frecvență zi și clasa a XIII-a, frecvență seral sau frecvență redusă), viitorul absolvent având în fața sa o serie de provocări privind alegerile pe care le va face, fie de continuare a studiilor la nivel postliceal sau universitar, fie optând pentru încadrarea pe piața muncii, fie de asumare a ambelor alternative, am considerat oportun să includem în **anexa nr. 1** un material intitulat „Îmi va fi, vreodată, matematica de folos?”, din care profesorii de matematică să poată extrage informații privind *rolul și importanța matematicii aproape în orice domeniu al cunoașterii umane, cu accent pe aplicabilitatea conceptelor matematice*. Invităm profesorii să reflecteze asupra acestui material și să-l dezvolte pentru elevi, în funcție de nevoile și interesele acestora.





## SECȚIUNEA a II-a



## SECȚIUNEA a II-a

Exemplu de planificare calendaristică pentru clasa a XII-a, la disciplina matematică,  
programa școlară M2 (Tehnologic)

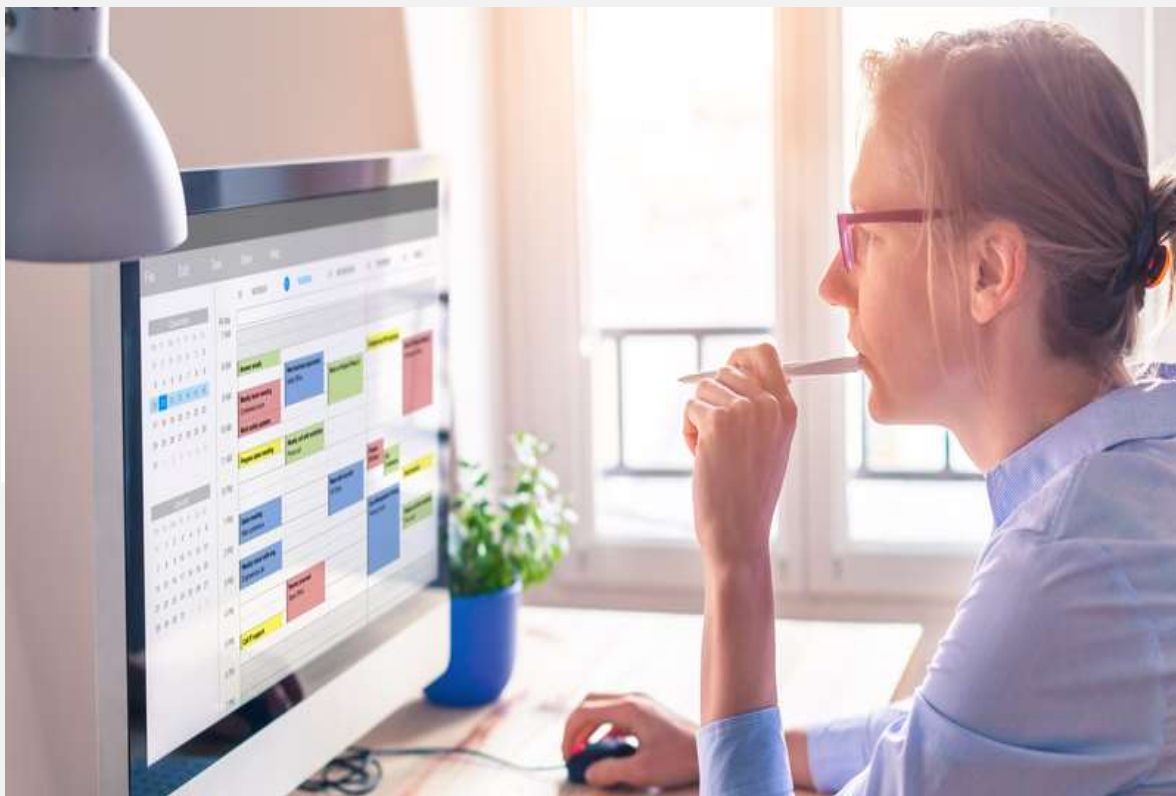
*A nu cunoaște matematica  
este o limitare severă  
pentru înțelegerea lumii.*  
**Richard P. Feynman**

Destinăm și în acest material o secțiune în care includem un exemplu de planificare calendaristică pentru disciplina matematică, clasa a XII-a, filiera tehnologică, cu titlul de orientare a cadrelor didactice în elaborarea propriilor documente de proiectare și planificare, având în vedere o serie de posibile reconfigurări ale intervalelor de cursuri (al treilea interval de vacanță fiind mobil), precum și alte decizii ale unităților de învățământ de distribuire a săptămânilor dedicate stagiilor de pregătire practică.

Am asociat exemplului de planificare calendaristică structura anului școlar 2024-2025 care a stat la baza bugetului de timp al unităților de învățare.

Am considerat util să extragem din programa școlară pentru disciplina matematică, pentru filiera tehnologică, setul de competențe generale și specifice, ca o imagine asupra a ceea ce trebuie să se urmărească prin activitatea didactică la clasa a XII-a.

Din perspectiva examenului național de bacalaureat pe care elevii/elevele îl vor susține, având în vedere că prin planificarea calendaristică s-au bugetat ore pentru recapitulare, ne-am raportat la programa de examen din care am extras, de asemenea, întreg setul de competențe generale și specifice.







**II.1. EXEMPLU DE PLANIFICARE CALENDARISTICĂ ANUALĂ  
ANUL ȘCOLAR 2024– 2025 *\*.\*.\*.\*.\****

**Disciplina: Matematică**

**Clasa a XII-a, filiera tehnologică, toate calificările profesionale**

**3 ore/săptămână**

**Unitatea de învățământ: .....**

Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Interval de cursuri (IC)
[se menționează titluri/teme]	[se precizează numărul criterial al competențelor specifice din programa școlară]	[din conținuturile programei școlare]	[stabilite de către cadrul didactic]	[se precizează săptămâna sau săptămânile]	[se menționează, de exemplu, modificări în urma realizării activității didactice la clasă]
<b>Recapitulare inițială</b>	CS vizate de programa școlară a clasei a XI-a	Recapitulare – clasa a XI-a (Operații cu matrice, Determinanți de ordin 2 și 3, Ecuații matriceale, Reguli de derivare, Studiul monotoniei cu ajutorul derivatelor) Evaluare inițială Activități remediale și/sau de progres	<b>6</b>	<b>S1 – S2</b>	<b>IC 1</b>  <b>OBS</b>
<b>Primitive (antiderivate)</b>	1. Identificarea legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia 2. Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial 6. Aplicarea calculului diferențial sau integral în probleme practice	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Probleme care conduc la noțiunea de integrală</li> <li>• Primitivele unei funcții</li> <li>• Integrala nedefinită a unei funcții continue</li> <li>• Integrarea funcțiilor elementare</li> <li>• Proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite</li> <li>• Primitive uzuale</li> <li>• Evaluare primitive</li> </ul>	<b>9</b>	<b>S3 – S5</b>	



Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Interval de cursuri (IC)
<b>Legi de compoziție, proprietăți</b>	1. Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere și de matrice 2.1 Identificarea unei structuri algebrice, prin verificarea proprietăților acesteia 2.2 Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri 4. Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice 5. 1. Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lege de compoziție internă, tabla operației</li> <li>• Parte stabilă</li> <li>• Asociativitate</li> <li>• Comutativitate</li> <li>• Element neutru</li> <li>• Elemente simetrizabile</li> <li>• Evaluare legi de compoziție</li> </ul>	6	S6 - S7	
<b>Vacanță (26.10.2024 – 03.11.2024)</b>					
<b>Integrala definită</b>	1. Identificarea legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia 2. Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial 3. Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite 4. Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor 6. Aplicarea calculului diferențial sau integral în probleme practice	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Integrala definită a unei funcții continue</li> <li>• Formula lui <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>• Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie</li> <li>• Proprietate a integralei definite: aditivitate în raport cu intervalul de integrare</li> <li>• Metode de calcul a integralelor definite: integrarea prin părți</li> <li>• Metode de calcul a integralelor definite: integrarea prin schimbarea de variabilă</li> <li>• Evaluare integrale definite</li> </ul>	12	S8 – S11	<b>IC 2</b>  <b><u>OBS</u></b>
<b>Grupuri</b>	1. Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere și de matrice 2.1 Identificarea unei structuri algebrice, prin verificarea proprietăților acesteia 2.2 Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri 3.1. Verificarea faptului că o funcție dată este morfism sau izomorfism	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grup, exemple: grupuri numerice</li> <li>• Grupuri de matrice</li> <li>• Grupuri de permutări</li> <li>• Grupul <math>Z_n</math></li> <li>• Morfism de grupuri. Izomorfism de grupuri</li> <li>• Evaluare grupuri</li> </ul>	6	S12 – S13	





Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Interval de cursuri (IC)
	4. Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice 5.1. Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice 6.1 Exprimarea unor probleme practice, folosind structuri algebrice				
<b>Stagiu de pregătire practică - 1 săptămână</b>				<b>S14 SPP</b>	
<b>Vacanță (21.12.2024 – 07.01.2025)</b>					
<b>Integrala definită</b>	2. Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial 3. Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite 4. Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculul integralelor de forma <math>\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx</math>, <math>\text{grad} Q \leq 4</math>, prin metoda descompunerii în fracții simple</li> <li>• Metoda coeficienților nedeterminați</li> <li>• Evaluare integrarea funcțiilor raționale</li> </ul>	<b>6</b>	<b>S15 – S16</b>	<b>IC 3</b>  <b>OBS</b>
<b>Inele și corpuri</b>	1. Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere și de matrice 2.1 Identificarea unei structuri algebrice, prin verificarea proprietăților acesteia 2.2 Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri 4. Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice 5. 1. Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice 6.1 Exprimarea unor probleme practice, folosind structuri algebrice	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Inel, exemple: inele numerice (<math>\mathbf{Z}</math>, <math>\mathbf{Q}</math>, <math>\mathbf{R}</math>, <math>\mathbf{C}</math>)</li> <li>• Inelul <math>\mathbf{Z}_n</math></li> <li>• Inele de matrice</li> <li>• Inele de funcții reale.</li> <li>• Corp, exemple: corpuri numerice (<math>\mathbf{Q}</math>, <math>\mathbf{R}</math>, <math>\mathbf{C}</math>).</li> <li>• Corpul <math>\mathbf{Z}_p</math>, <math>p</math> prim</li> <li>• Evaluare inele și corpuri</li> </ul>	<b>9</b>	<b>S17 – S19</b>	<b>OBS</b>



Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Interval de cursuri (IC)
<b>Aplicații ale integralei definite</b>	3. Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite 5. Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calculul integral, și compararea rezultatelor cu cele obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie 6. Aplicarea calculului diferențial sau integral în probleme practice	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aria unei suprafețe plane</li> <li>Volumul unui corp de rotație</li> <li>Evaluare - aplicații ale integralei definite</li> </ul>	6	S20 – S21	
<b>Vacanță (24.02.2025 – 02.03.2025)</b>					
<b>Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (<math>\mathbb{Q}</math>, <math>\mathbb{R}</math>, <math>\mathbb{C}</math>, <math>\mathbb{Z}_p</math>, <math>p</math> prim)</b>	1. Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere, de polinoame 3.2. Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice 5.2. Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date 6.1 Exprimarea unor probleme practice, folosind structuri algebrice sau calcul polinomial 6.2 Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor	<ul style="list-style-type: none"> <li>Forma algebrică a unui polinom</li> <li>Operații cu polinoame (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar)</li> <li>Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor</li> <li>Împărțirea cu <math>X - a</math>, schema lui <i>Horner</i></li> <li>Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui <i>Bézout</i></li> <li><i>C.m.m.d.c.</i> și <i>c.m.m.m.c.</i> ale unor polinoame</li> <li>Descompunerea unui polinom în factori ireductibili.</li> <li>Rădăcini ale polinoamelor</li> <li>Relațiile lui <i>Viète</i> pentru polinoame de grad cel mult patru</li> <li>Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în <math>\mathbb{Z}</math>, <math>\mathbb{Q}</math>, <math>\mathbb{R}</math>, <math>\mathbb{C}</math></li> <li>Ecuații binome</li> <li>Ecuații reciproce</li> <li>Ecuații bipătrate</li> <li>Evaluare polinoame</li> </ul>	15	S22 – S26	<b>IC 4</b>  <b><u>OBS</u></b>
<b>Stagii de pregătire practică - 2 săptămâni</b>				S27 – S28 SPP	





Unități de învățare	Competențe specifice	Conținuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observații/ Interval de cursuri (IC)
<b>Vacanță (18.04.2025 – 27.04.2025)</b>					
<b>Teme de sinteză pentru bacalaureat/admiteri la facultate</b>	CS vizate de: - programa de examen - programele școlare	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mulțimi de numere. Calcul numeric</li> <li>Funcția de gradul I și de gradul al II-lea</li> <li>Ecuatii exponențiale, ecuații logaritmice, iraționale</li> <li>Aplicații ale trigonometriei în geometrie</li> <li>Rolul derivatei I în studiul funcțiilor: monotonie, puncte de extrem</li> <li>Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor: concavitate, convexitate.</li> <li>Integrala nedefinită/definită a unei funcții continue</li> <li>Integrarea prin părți</li> <li>Schimbarea de variabilă</li> <li>Ecuatii ale dreptei în plan. Condiții de paralelism și perpendicularitate</li> <li>Matrice. Determinanți</li> <li>Sisteme de ecuații</li> </ul>	<b>12</b>	<b>S29 – S32</b>	<b>IC 5</b>
					<b><u>OBS</u></b>
<b>Stagii de pregătire practică - 2 săptămâni</b>				<b>S33 – S34 SPP</b>	

**NOTE:**

Se utilizează exprimarea „proprietate” sau „regulă”, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.

\*Planificarea calendaristică este realizată pentru anul școlar 2024 – 2025, pentru clasa a XII-a profil tehnologic, cu 34 de săptămâni de cursuri, dintre care 5 săptămâni stagii de pregătire practică.

\*\*Structura anului școlar 2024 – 2025, stabilită prin OME nr. 3694/01.02.2024 prevede o vacanță de o săptămână, în perioada 10 februarie – 2 martie 2025, la decizia inspectoratelor școlare județene/al municipiului București. În exemplul de planificare prezentat, această vacanță este stabilită în perioada 24 februarie 2025 – 2 martie 2025.

\*\*\*Programul „Săptămâna verde” și Programul național „Școala altfel” se desfășoară în perioada 9 septembrie 2024 – 30 mai 2025, în intervale de câte 5 zile consecutive lucrătoare, a căror planificare se află la decizia unității de învățământ. Derularea celor două programe nu se planifică în același interval de cursuri. Conform OME nr. 3694/2024, art. 4 alin (2), la clasele din învățământul liceal - filiera tehnologică, în perioadele dedicate programelor „Școala altfel” și „Săptămâna verde” se organizează activități de instruire practică, urmărind și scopul acestor programe.



Planificarea este realizată pentru următoarea structură a anului școlar:

Intervale de cursuri	Perioada	Săptămânile de școală							
		1	2	3	4	5	6	7	
<b>IC 1</b> (7 săptămâni)	9 septembrie – 25 octombrie 2024	9-13.IX	16-20.IX	23-27.IX	30.IX-04.X	07-11.X	14-18.X	21-25.X	VACANȚĂ 28.X-01.XI
<b>IC 2</b> (6 săptămâni + 1 săptămână SPP)	4 noiembrie – 20 decembrie 2024	8 04-08.XI	9 11-15.XI	10 18-22.XI	11 25-29.XI	12 02-06.XII	13 09-13.XII	14 (SPP) 16-20.XII	VACANȚĂ 23.XII.2024 - 07.01.2025
<b>IC 3</b> (7 săptămâni)	8 ianuarie – 21 februarie 2025	15 08-10.I	16 13-17.I	17 20-23.I	18 27-31.I	19 03-07.II	20 10-14.II	21 17-21.II	VACANȚĂ 24-28.II
<b>IC 4</b> (5 săptămâni + 2 săptămâni SPP)	3 martie – 17 aprilie 2025	22 03-07.III	23 10-14.III	24 17-21.III	25 24-28.III	26 31.III-04.IV	27 (SPP) 07-11.IV	28 (SPP) 14-17.IV	VACANȚĂ 18-25.IV
<b>IC 5</b> (4 săptămâni + 2 săptămâni SPP)	28 aprilie – 20 iunie 2025	29 28.IV-02.V	30 05-09.V	31 12-16.V	32 19.23.V	33 (SPP) 26-30.V	34 (SPP) 02-06.VI		VACANȚĂ 21.VI-05.IX

SPP - Stagii de pregătire practică propuse pentru săptămânile: S14, S27, S28, S33, S34 (5 săptămâni)



**II.2. Lista competențelor generale și a celor specifice, precum și corespondența acestora cu domeniile de conținut, conform programei școlare, învățământ liceal, filiera tehnologică, clasa a XII-a**

Nr. crt.	Competențe generale*	Nr. crt.	Competențe specifice*	Domeniu de conținut*
XII_CG_1	Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite	XII_CS_1_AL	Recunoașterea structurilor algebrice, a mulțimilor de numere, de polinoame și de matrice	Elemente de algebră
		XII_CS_1_AN	Identificarea legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia	Elemente de analiză matematică
XII_CG_2	Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice	XII_CS_2.1_AL	Identificarea unei structuri algebrice, prin verificarea proprietăților acesteia	Elemente de algebră
		XII_CS_2.2_AL	Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri	Elemente de algebră
		XII_CS_2_AN	Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial	Elemente de analiză matematică
XII_CG_3	Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete	XII_CS_3.1_AL	Verificarea faptului că o funcție dată este morfism sau izomorfism	Elemente de algebră
		XII_CS_3.2_AL	Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice	Elemente de algebră
		XII_CS_3_AN	Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite	Elemente de analiză matematică
XII_CG_4	Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora	XII_CS_4_AL	Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice	Elemente de algebră
		XII_CS_4_AN	Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor	Elemente de analiză matematică



Nr. crt.	Competențe generale*	Nr. crt.	Competențe specifice*	Domeniu de conținut*
XII_CG_5	Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă în scopul găsirii de strategii pentru optimizarea soluțiilor	XII_CS_5.1_AL	Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice	Elemente de algebră
		XII_CS_5.2_AL	Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date	Elemente de algebră
		XII_CS_5_AN	Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calculul integral, și compararea rezultatelor cu cele obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie	Elemente de analiză matematică
XII_CG_6	Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii	XII_CS_6.1_AL	Exprimarea unor probleme practice, folosind structuri algebrice sau calcul polinomial	Elemente de algebră
		XII_CS_6.2_AL	Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor	Elemente de algebră
		XII_CS_6_AN	Aplicarea calculului diferențial sau integral în probleme practice	Elemente de analiză matematică

\*Conform Anexei nr. 2 la ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5959/22.12.2016 – programa școlară 2 pentru filiera tehnologică, toate calificările profesionale, ciclul superior al liceului, disciplina matematică, clasa a XII-a,



**II.3. Lista competențelor generale și a competențelor specifice, precum și corespondența acestora cu domeniile de conținut, conform programei de examen pentru disciplina matematică (*M\_tehnologic*), Anexa nr. 2 la ordinul ministrului educației naționale nr. 4430/29.08.2014**

CG	CS	Competențe specifice*	Domeniu de conținut*
CG_1	IX_CS_1_1	<i>Identificarea</i> în limbaj cotidian sau în probleme de matematică a unor noțiuni specifice logicii matematice și teoriei mulțimilor	Mulțimi și elemente de logică matematică
	IX_CS_1_2	<i>Recunoașterea</i> unor corespondențe care sunt șiruri, progresii aritmetice sau geometrice	Șiruri
	IX_CS_1_3	<i>Identificarea</i> valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică a acesteia	Funcții; lecturi grafice
	IX_CS_1_4	<i>Recunoașterea</i> funcției de gradul I descrisă în moduri diferite	Funcția de gradul I
	IX_CS_1_5	<i>Diferențierea</i> , prin exemple, a variației liniare de cea pătratică	Funcția de gradul al II-lea
	IX_CS_1_6	<i>Recunoașterea</i> corespondenței dintre seturi de date și reprezentări grafice	Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea
	IX_CS_1_7	<i>Identificarea</i> unor elemente de geometrie vectorială în diferite contexte	Vecori în plan
	IX_CS_1_8	<i>Identificarea</i> elementelor necesare pentru calcularea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri	Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie
	X_CS_1_1	<i>Identificarea</i> caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră și a formei de scriere a unui număr real în contexte specifice	Mulțimi de numere
	X_CS_1_2	<i>Trasarea</i> prin puncte a graficelor unor funcții	Funcții și ecuații
	X_CS_2_3	<i>Diferențierea</i> problemelor în funcție de numărul de soluții admise	Metode de numărare
	X_CS_2_4	<i>Recunoașterea</i> unor date de tip probabilistic sau statistic în situații concrete	Matematici financiare
	X_CS_2_5	<i>Descrierea</i> unor configurații geometrice analitic sau utilizând vectori	Geometrie
	XI_CS_1_1	<i>Identificarea</i> unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare
	XI_CS_1_2	<i>Caracterizarea</i> unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare	Elemente de analiză matematică
	XII_CS_1_AL	<i>Recunoașterea</i> structurilor algebrice, a mulțimilor de numere, de polinoame și de matrice	Elemente de algebră
	XII_CS_1_AN	<i>Identificarea</i> legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia	Elemente de analiză matematică



CG	CS	Competențe specifice	Domeniu de conținut
CG_2	IX_CS_2_1	<i>Reprezentarea</i> adecvată a mulțimilor și a operațiilor logice în scopul identificării unor proprietăți ale acestora	Mulțimi și elemente de logică matematică
	IX_CS_2_2	<i>Calcularea</i> valorilor unor șiruri care modelează situații practice în scopul caracterizării acestora	Șiruri
	IX_CS_2_3	<i>Determinarea</i> soluțiilor unor ecuații, inecuații utilizând reprezentările grafice	Funcții; lecturi grafice
	IX_CS_2_4	<i>Utilizarea</i> unor metode algebrice sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații	Funcția de gradul I
	IX_CS_2_5	<i>Completarea</i> unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea	Funcția de gradul al II-lea
	IX_CS_2_6	<i>Reprezentarea</i> grafică a unor date diverse în vederea comparării variației lor	Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea
	IX_CS_2_7	<i>Aplicarea</i> regulilor de calcul pentru determinarea caracteristicilor unor segmente orientate pe configurații date	Vecitori în plan
	IX_CS_2_8	<i>Utilizarea</i> unor tabele și formule pentru calcule în trigonometrie și în geometrie	Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie
	X_CS_2_1	<i>Compararea și ordonarea</i> numerelor reale utilizând metode variate	Mulțimi de numere
	X_CS_2_2	<i>Prelucrarea</i> informațiilor ilustrate prin graficul unei funcții în scopul deducerii unor proprietăți ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, continuitate, convexitate)	Funcții și ecuații
	X_CS_2_3	<i>Identificarea</i> tipului de formulă de numărare adecvată unei situații-problemă date	Metode de numărare
	X_CS_2_4	<i>Interpretarea</i> primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor și a diagramelor	Matematici financiare
	X_CS_2_5	<i>Descrierea</i> analitică, sintetică sau vectorială a relațiilor de paralelism	Geometrie
	XI_CS_2_1	<i>Asocierea</i> unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare
	XI_CS_2_2	<i>Interpretarea</i> unor proprietăți ale funcțiilor cu ajutorul reprezentărilor grafice	Elemente de analiză matematică
	XII_CS_2_1_AL	<i>Identificarea</i> unei structuri algebrice prin verificarea proprietăților acesteia	Elemente de algebră
	XII_CS_2_2_AL	<i>Determinarea și verificarea</i> proprietăților unei structuri algebrice	Elemente de algebră
	XII_CS_2_AN	<i>Stabilirea</i> unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial	Elemente de analiză matematică



CG	CS	Competențe specifice	Domeniu de conținut
CG_3	IX_CS_3_1	<i>Alegerea și utilizarea</i> de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale, cu mulțimi, cu propoziții/predicate	Mulțimi și elemente de logică matematică
	IX_CS_3_2	<i>Alegerea și utilizarea</i> unor modalități adecvate de calculare a elementelor unui șir	Șiruri
	IX_CS_3_3	<i>Alegerea și utilizarea</i> unei modalități adecvate de reprezentare grafică în vederea evidențierii unor proprietăți ale funcțiilor	Funcții; lecturi grafice
	IX_CS_3_4	<i>Descrierea</i> unor proprietăți desprinse din reprezentarea grafică a funcției de gradul I sau din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații	Funcția de gradul I
	IX_CS_3_5	<i>Aplicarea</i> unor algoritmi pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea (prin puncte semnificative)	Funcția de gradul al II-lea
	IX_CS_3_6	<i>Aplicarea</i> formulelor de calcul și a lecturii grafice pentru rezolvarea unor ecuații, inecuații și sisteme de ecuații	Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea
	IX_CS_3_7	<i>Utilizarea</i> operațiilor cu vectori pentru a descrie configurații geometrice date	Vectori în plan
	IX_CS_3_8	<i>Determinarea</i> măsurii unor unghiuri și a lungimii unor segmente utilizând relații metrice	Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie
	X_CS_3_1	<i>Aplicarea</i> unor algoritmi specifici calculului cu puteri, radicali, logaritmi în contexte variate	Mulțimi de numere
	X_CS_3_2	<i>Utilizarea unor proprietăți</i> ale funcțiilor în trasarea graficelor și în rezolvarea unor ecuații	Funcții și ecuații
	X_CS_3_3	<i>Utilizarea</i> unor formule combinatoriale în raționamente de tip inductiv	Metode de numărare
	X_CS_3_4	<i>Utilizarea</i> unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităților pentru analiza de caz	Matematici financiare
	X_CS_3_5	<i>Utilizarea</i> informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcularea unor distanțe și a unor arii	Geometrie
	XI_CS_3_1	<i>Aplicarea</i> algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare
	XI_CS_3_2	<i>Aplicarea</i> unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme	Elemente de analiză matematică
	XII_CS_3_1_AL	<i>Verificarea</i> faptului că o funcție dată este morfism sau izomorfism	Elemente de algebră
	XII_CS_3_2_AL	<i>Aplicarea</i> unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice	Elemente de algebră
	XII_CS_3_AN	<i>Utilizarea</i> algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite	Elemente de analiză matematică





CG	CS	Competențe specifice	Domeniu de conținut
CG_4	IX_CS_4_1	<i>Deducerea</i> unor rezultate și verificarea acestora utilizând inducția matematică sau alte raționamente logice	Mulțimi și elemente de logică matematică
	IX_CS_4_2	<i>Interpretarea</i> grafică a unor relații provenite din probleme practice	Șiruri
	IX_CS_4_3	<i>Exprimarea</i> monotoniei unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice	Funcții; lecturi grafice
	IX_CS_4_4	<i>Exprimarea</i> legăturii între funcția de gradul I și reprezentarea ei geometrică	Funcția de gradul I
	IX_CS_4_5	<i>Exprimarea</i> proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice	Funcția de gradul al II-lea
	IX_CS_4_6	<i>Exprimarea</i> prin reprezentări grafice a unor condiții algebrice; exprimarea prin condiții algebrice a unor reprezentări grafice	Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea
	IX_CS_4_7	<i>Utilizarea</i> limbajului calculului vectorial pentru a descrie anumite configurații geometrice	Vectori în plan
	IX_CS_4_8	<i>Transpunerea</i> într-un limbaj specific trigonometriei și geometriei a unor probleme practice	Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie
	X_CS_4_1	<i>Alegerea</i> formei de reprezentare a unui număr real în vederea optimizării calculelor	Mulțimi de numere
	X_CS_4_2	<i>Exprimarea</i> în limbaj matematic a unor situații concrete și reprezentarea prin grafice a unor funcții care descriu situații practice	Funcții și ecuații
	X_CS_4_3	<i>Exprimarea</i> caracteristicilor unor probleme în scopul simplificării modului de numărare	Metode de numărare
	X_CS_4_4	<i>Transpunerea</i> în limbaj matematic prin mijloace statistice, probabilistice a unor probleme practice	Matematici financiare
	X_CS_4_5	<i>Exprimarea</i> analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice	Geometrie
	XI_CS_4_1	<i>Rezolvarea</i> unor sisteme utilizând algoritmi specifici	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare
	XI_CS_4_2	<i>Exprimarea</i> cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții	Elemente de analiză matematică
	XII_CS_4_AL	<i>Explicarea</i> modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice	Elemente de algebră
	XII_CS_4_AN	<i>Explicarea</i> opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor	Elemente de analiză matematică



CG	CS	Competențe specifice	Domeniu de conținut
CG_5	IX_CS_5_1	<i>Redactarea</i> rezolvării unei probleme, corelând limbajul uzual cu cel al logicii matematice și al teoriei mulțimilor	Mulțimi și elemente de logică matematică
	IX_CS_5_2	<i>Analizarea</i> datelor în vederea aplicării unor formule de recurență sau a raționamentului de tip inductiv în rezolvarea problemelor	Șiruri
	IX_CS_5_3	<i>Reprezentarea</i> geometrică a graficului unei funcții prin puncte și aproximarea acestuia printr-o curbă continuă	Funcții; lecturi grafice
	IX_CS_5_4	<i>Interpretarea</i> graficului funcției de gradul I utilizând proprietățile algebrice ale funcției	Funcția de gradul I
	IX_CS_5_5	<i>Utilizarea</i> relațiilor lui Viète pentru caracterizarea soluțiilor ecuației de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații	Funcția de gradul al II-lea
	IX_CS_5_6	<i>Determinarea</i> unor relații între condiții algebrice date și graficul funcției de gradul al II-lea	Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea
	IX_CS_5_7	<i>Identificarea</i> condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică să verifice cerințe date	Vectori în plan
	IX_CS_5_8	<i>Utilizarea</i> unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului oarecare	Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie
	X_CS_5_1	<i>Alegerea</i> strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor	Mulțimi de numere
	X_CS_5_2	<i>Interpretarea</i> , pe baza lecturii grafice, a proprietăților algebrice ale funcțiilor	Funcții și ecuații
	X_CS_5_3	<i>Interpretarea</i> unor situații-problemă având conținut practic, cu ajutorul elementelor de combinatorică	Metode de numărare
	X_CS_5_4	<i>Analizarea și interpretarea</i> unor situații practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice	Matematici financiare
	X_CS_5_5	<i>Interpretarea</i> perpendicularității în relație cu paralelismul și minimul distanței	Geometrie
	XI_CS_5_1	<i>Stabilirea</i> unor condiții de existență și/sau compatibilitate a unor sisteme și identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare
	XI_CS_5_2	<i>Utilizarea</i> reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți	Elemente de analiză matematică
	XII_CS_5_1_AL	<i>Utilizarea</i> structurilor algebrice în rezolvarea unor probleme practice	Elemente de algebră
	XII_CS_5_2_AL	<i>Determinarea</i> unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date	Elemente de algebră
	XII_CS_5_AN	<i>Determinarea</i> ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calculul integral și compararea rezultatelor cu cele obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie	Elemente de analiză matematică



CG	CS	Competențe specifice	Domeniu de conținut
CG_6	IX_CS_6_1	<i>Transpunerea</i> unei situații-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului	Mulțimi și elemente de logică matematică
	IX_CS_6_2	<i>Analizarea și adaptarea</i> scrierii termenilor unui șir în funcție de context	Șiruri
	IX_CS_6_3	<i>Deducerea</i> unor proprietăți ale funcțiilor numerice prin lectură grafică	Funcții; lecturi grafice
	IX_CS_6_4	<i>Rezolvarea</i> cu ajutorul funcțiilor a unei situații-problemă și interpretarea rezultatului	Funcția de gradul I
	IX_CS_6_5	<i>Identificarea</i> unor metode grafice de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații	Funcția de gradul al II-lea
	IX_CS_6_6	<i>Utilizarea</i> monotoniei și a punctelor de extrem în optimizarea rezultatelor unor probleme practice	Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea
	IX_CS_6_7	<i>Aplicarea</i> calculului vectorial în rezolvarea unor probleme din domenii conexe	Vectori în plan
	IX_CS_6_8	<i>Analizarea și interpretarea</i> rezultatelor obținute prin rezolvarea unor probleme practice	Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie
	X_CS_6_1	<i>Determinarea</i> unor analogii între proprietățile operațiilor cu numere reale scrise în forme variate și utilizarea acestora în rezolvarea unor ecuații	Mulțimi de numere
	X_CS_6_2	<i>Utilizarea</i> echivalenței dintre bijectivitate și inversabilitate în trasarea unor grafice și în rezolvarea unor ecuații algebrice	Funcții și ecuații
	X_CS_6_3	<i>Alegerea</i> strategiilor de rezolvare a unor probleme în scopul optimizării rezultatelor	Metode de numărare
	X_CS_6_4	<i>Corelarea</i> datelor statistice sau probabilistice în scopul predicției comportării unui sistem prin analogie cu modul de comportare în situații studiate	Matematici financiare
	X_CS_6_5	<i>Modelarea</i> unor configurații geometrice analitic, sintetic sau vectorial	Geometrie
	XI_CS_6_1	<i>Optimizarea</i> rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii și metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare
	XI_CS_6_2	<i>Determinarea</i> unor optimuri situaționale prin aplicarea calculului diferențial în probleme practice	Elemente de analiză matematică
	XII_CS_6_1_AL	<i>Exprimarea</i> unor probleme practice, folosind structuri algebrice sau calcul polinomial	Elemente de algebră
	XII_CS_6_2_AL	<i>Aplicarea</i> , prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor	Elemente de algebră
	XII_CS_6_AN	<i>Aplicarea</i> calculului diferențial sau integral în probleme practice	Elemente de analiză matematică





SECȚIUNEA a III-a



## SECȚIUNEA a III-a.

Prezentare structurată a unor itemi din componența subiectelor I, II și III din instrumentele de evaluare ale probei de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat (variante date, modele, variante de la simulare) în vederea utilizării acestora în cadrul unor activități de învățare/recapitulare

*Singura modalitate  
de a învăța matematica  
este să faci matematică.*

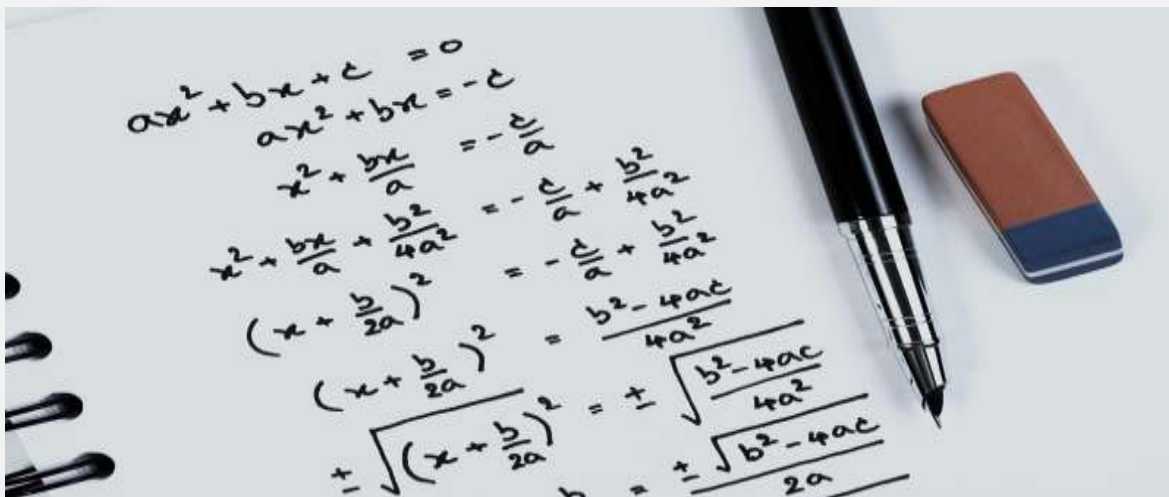
**Paul Halmos**

În această secțiune, pe baza instrumentelor de evaluare asociate probei de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat/simulării acestui examen sau modelelor publice realizate la nivelul Ministerul Educației, autorii au selectat o serie de itemi asupra cărora au realizat o serie de comentarii ([http://subiecte.edu.ro/2024/simulare/simulare\\_bac\\_XII/](http://subiecte.edu.ro/2024/simulare/simulare_bac_XII/), <http://subiecte2023.edu.ro/2023/>).

Pornind de la intenția de a veni în sprijinul cadrelor didactice de specialitate în organizarea învățării elevilor/elevelor în cadrul unor ore de recapitulare pentru pregătirea examenului național de bacalaureat, secțiunea fost împărțită pe patru subsecțiuni, fiecare dintre acestea fiind destinate studiului matematicii la câte una dintre clasele a IX-a – a XII-a, în această ordine.

În cadrul fiecărei subsecțiuni au fost exemplificați itemi, prezentarea lor comentată urmând, în mare, următoarea schemă:

- enunțul itemului și identificarea acestuia în instrumentul de evaluare din care a fost selectat;
- competența specifică vizată;
- structurarea raționamentelor, pornind de la ce știm/ce se cere/ cum rezolvăm;
- punctarea noțiunilor teoretice/conceptelor/metodelor implicate în rezolvare;
- reflecție asupra erorilor/greșelilor ce pot interveni în rezolvare;
- relația dintre rezolvare și baremul asociat itemului;
- evidențierea unor aspecte de avut în vedere de către profesor/elev;
- concluzii/considerente finale;
- exemple de cerințe de lucru/evaluare pentru exersare.



*Oriunde este număr,  
există frumusețe.*

**Proclus**

### III.1. Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a IX-a

Utilizarea, în cadrul unor activități de învățare/recapitulare, a unor itemi selectați din subiectul I, în corespondență cu noțiuni/concepte studiate în clasele a IX-a, din instrumentele de evaluare la proba de matematică a examenului național de bacalaureat, la simulările acestui examen sau ca modele pentru această probă.







Itemi selectați pentru clasa a IX-a (din cadrul subiectului I, instrumente de evaluare asociate examenului, simulării sau modelelor de bacalaureat), care sunt prezentați în cadrul subsecțiunii dedicate anului de studiu

Nr. crt.	Item	Selectat din:
1.	Arătați că $1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 3$ .	<a href="#">Bacalaureat (august 2023)</a>
2.	Arătați că $\frac{1}{8} + 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 2$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
3.	Arătați că $4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 1$ .	<a href="#">Bacalaureat (rezervă august 2023)</a>
4.	Arătați că $(1 - 0,2) : 2 + 0,3 \cdot 2 = 1$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2023)</a>
5.	Determinați termenul $a_1$ al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că $a_2 = 7$ și $a_6 = 23$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2023)</a>
6.	Determinați termenul $a_3$ al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că $a_1 = 10$ și $a_2 = 20$ .	<a href="#">Bacalaureat (sesiune specială 2023)</a>
7.	Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = 5 - x$ . Arătați că $f(0) - f(1) = 1$ .	<a href="#">Bacalaureat (august 2023)</a>
8.	Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = x + 2$ . Determinați numărul real $a$ pentru care $f(a) = 6$ .	<a href="#">Bacalaureat (iulie 2023)</a>
9.	Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = 8x - 5$ . Determinați numărul real $a$ pentru care punctul $A(a, 3a)$ aparține graficului funcției.	<a href="#">Bacalaureat (model 2023)</a>
10.	Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = x^2 - 3x + 2$ și $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $g(x) = x + m$ , unde $m$ este un număr real. Determinați numărul real $m$ pentru care $f(2) = g(2)$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2023)</a>
11.	Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = 2x + 3$ . Determinați numărul real $a$ pentru care $f(a) = 7$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2024)</a>
12.	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu $AB = 5$ și $AC = 2AB$ . Arătați că aria triunghiului $ABC$ este egală cu 25.	<a href="#">Bacalaureat (august 2022)</a>
13.	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu aria egală cu 50 și $AC = 5$ . Arătați că lungimea laturii $AB$ este egală cu 20.	<a href="#">Bacalaureat (august 2023)</a>



14.	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu $BC = 16$ și măsura unghiului $B$ egală cu $30^\circ$ . Arătați că aria triunghiului $ABC$ este $32\sqrt{3}$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2023)</a>
15.	Arătați că $\sqrt{2} \cdot (\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) \cdot \sin 30^\circ = 1$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
16.	Arătați că $\sqrt{3} \sin 45^\circ + 2 \sin 30^\circ - \sqrt{2} \cos 30^\circ = 1$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2023)</a>
17.	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu $AB = 4$ și măsura unghiului $C$ egală cu $45^\circ$ . Arătați că aria triunghiului $ABC$ este egală cu 8.	<a href="#">Bacalaureat (sesiunea specială 2023)</a>
18.	Se consideră triunghiul $ABC$ , dreptunghic în $A$ , cu $AC = \sqrt{2}$ și $BC=2$ . Arătați că triunghiul $ABC$ este isoscel.	<a href="#">Bacalaureat (iulie 2023)</a>

<b>Clasa: a IX-a</b>	<b>Subiectul: I</b>	<b>Problema: 1 – Bacalaureat (august 2023)</b>
<b>Item</b>	Arătați că $1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 3$ .	
<b>Competența</b>	<b>C.S.3.1. Alegerea și utilizarea</b> de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale, cu mulțimi, cu propoziții/predicade	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de tipul <i>arătați că/verificați că</i> implică validarea unui enunț printr-un procedeu logico-matematic;</li> <li>- a verifica o egalitate poate însemna prelucrarea unui membru sau a ambilor membri, inclusiv prin aplicarea de transformări prin echivalență a relației de egalitate.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere</i> să se verifice că expresia numerică din membrul stâng este egală cu 3.
	<b>Cum rezolv?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de acest tip presupune efectuarea unui calcul numeric;</li> <li>- avantajul formulărilor de acest tip îl reprezintă existența răspunsului la care trebuie ajuns prin aplicarea corectă a proprietăților operațiilor studiate, ceea ce permite verificarea calculelor și identificarea eventualelor erori în cazul în care răspunsul nu coincide cu cel precizat în problemă.</li> </ul> <p><b>Varianta 1</b> Deoarece desfacerea parantezei reprezintă în acest caz un avantaj, începem rezolvarea prin înmulțirea fiecărui termen din paranteze cu 3, apoi efectuăm adunarea. <math>1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 3 \Leftrightarrow 1,5 + 3 - 1,5 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3</math>, relație adevărată.</p> <p><b>Varianta 2</b> Efectuăm calculele dintre paranteze, înmulțim rezultatul obținut cu 3 și apoi adunăm cu 1,5. <math>1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 3 \Leftrightarrow 1,5 + 3 \cdot 0,5 = 3 \Leftrightarrow 1,5 + 1,5 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3</math>, relație adevărată.</p> <p><b>Deși mai puțin recomandabile, includem și alte posibile variante de rezolvare.</b></p> <p><b>Varianta 3</b> Transformăm fracțiile zecimale în fracții ordinare, apoi eliminăm paranteza rotundă prin înmulțirea fiecărui termen din paranteză cu 3 și la final efectuăm adunarea. <math>1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 3 \Leftrightarrow \frac{15}{10} + 3 \cdot \left(1 - \frac{5}{10}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{15}{10} + 3 - \frac{15}{10} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3</math>, relație adevărată.</p>

	<p><b>Varianta 4</b> Transformăm fracțiile zecimale în fracții ordinare, efectuăm calculele din paranteză, înmulțim cu 3 și la final efectuăm adunarea.</p> $1,5 + 3 \cdot (1 - 0,5) = 3 \Leftrightarrow \frac{15}{10} + 3 \cdot \left(1 - \frac{5}{10}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{15}{10} + 3 \cdot \left(\frac{10}{10} - \frac{5}{10}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{15}{10} + 3 \cdot \frac{5}{10} = 3 \Leftrightarrow \frac{15}{10} + \frac{15}{10} = 3,$ $\Leftrightarrow \frac{30}{10} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3, \text{ relație adevărată.}$
<b>Noțiuni teoretice/ concepte necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale și reciproc</li> <li>- ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare, respectiv fracții zecimale</li> <li>- reguli de calcul cu fracții ordinare, respectiv fracții zecimale</li> </ul>
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot înmulți cu 3 doar primul termen al sumei din paranteză.</li> <li>- Elevii pot obține un rezultat greșit la înmulțirea cu 3 a fracției zecimale din paranteză.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot efectua greșit scăderea din paranteză.</li> <li>- Elevii pot efectua greșit produsul dintre 3 și rezultatul obținut în paranteză, ceea ce duce evident la o sumă greșită.</li> </ul> <p><b>Varianta 3:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot transforma corect fracțiile zecimale, dar înmulțesc doar primul termen din paranteză cu 3, de exemplu:</li> </ul> $\frac{15}{10} + 3 \cdot \left(1 - \frac{5}{10}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{15}{10} + 3 - \frac{5}{10} = 3$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- Pot obține o relație de genul: <math>\frac{10}{10} + 3 = 3 \Leftrightarrow 0 + 3 = 3</math>, considerând că <math>\frac{10}{10} = 0</math>, ceea ce evident nu este corect.</li> </ul> <p><b>Varianta 4:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot greși la transformarea fracției zecimale în fracție ordinară, scriind eventual <math>1 - 0,5 = 1 - \frac{0}{5} = \frac{1}{5}</math>.</li> <li>- Elevii pot greși scăderea, fără a aduce la numitor comun (ignoră primul termen al scăderii), de exemplu:</li> </ul> $\frac{15}{10} + 3 \cdot \left(1 - \frac{5}{10}\right) = \frac{15}{10} + 3 \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{10} + \frac{15}{10} = \frac{30}{10} = 3.$



<b>Explicații privind baremul de notare:</b> <i>(cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</i>	<b>Punctaj în barem: 5p</b>	
	<b>Varianta 1:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Înmulțirea fiecărui termen al sumei cu 3.</li> <li>- Obținerea rezultatului corect (3, respectiv 1,5).</li> <li>- Finalizare <math>3 = 3</math>, relație adevărată.</li> </ul>	2p 2p 1p
	<b>Varianta 2:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Efectuarea corectă a diferenței din paranteză: <math>1 - 0,5 = 0,5</math></li> <li>- Înmulțirea cu 3 a rezultatului obținut în paranteză: <math>3 \cdot 0,5 = 1,5</math></li> <li>- Efectuarea corectă a adunării: <math>1,5 + 1,5 = 3</math>.</li> <li>- Finalizare <math>3 = 3</math>, relație adevărată.</li> </ul>	2p 1p 1p 1p
	<b>Varianta 3:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Transformarea <math>1,5 = \frac{15}{10}</math> sau, mai mult, transformarea în fracție ordinară ireductibilă, <math>1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}</math>.</li> <li>- Transformarea <math>0,5 = \frac{5}{10}</math> sau, mai mult, transformarea în fracție ordinară ireductibilă, <math>0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}</math>.</li> <li>- Eliminarea corectă a parantezei, prin înmulțirea cu 3 a fiecărui termen,</li> <li>- Finalizare <math>5 = 5</math>, relație adevărată</li> </ul>	1p 1p 2p 1p
<b>Varianta 4:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Transformarea <math>1,5 = \frac{15}{10}</math> sau, mai mult, transformarea în fracție ordinară ireductibilă, <math>1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}</math>.</li> <li>- Transformarea <math>0,5 = \frac{5}{10}</math> sau, mai mult, transformarea în fracție ordinară ireductibilă, <math>0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}</math>.</li> <li>- Efectuarea corectă a diferenței din paranteză, cu aducerea la același numitor</li> <li>- Înmulțirea cu 3 a rezultatului obținut în paranteză</li> <li>- Efectuarea corectă a adunării</li> <li>- Finalizare <math>3 = 3</math>, relație adevărată</li> </ul>	1p 1p 1p 1p	

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să asigure ancore în învățarea anterioară a elevilor, cu reamintirea noțiunilor teoretice/conceptele/metodelor necesare în rezolvarea problemelor de acest tip: transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale, transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare, ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare, ordinea efectuării operațiilor cu fracții zecimale, reguli de calcul cu fracții ordinare, respectiv cu fracții zecimale;</li> <li>- să îndrume elevii pentru a stabili clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, după caz cu transpunerea în limbaj matematic a acestor date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să identifice eventuale erori/să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă, cu precădere, prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul/raționament care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșală apărută în raționament/redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/Ce se cere?);</li> <li>- să aplice corect regula de transformare a unei fracții ordinare în fracție zecimală;</li> <li>- să aplice corect regula de transformare a unei fracții zecimale în fracție ordinară;</li> <li>- să efectueze corect adunarea și înmulțirea numerelor raționale;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale</b> , clasa a IX-a (noțiunile necesare rezolvării acestui tip de exercițiu sunt introduse încă din gimnaziu – clasa a V-a și sunt tratate și în clasa a VI-a, respectiv a VII-a – <b>Mulțimea numerelor raționale</b> ).	

**Exemple de  
itemi de  
antrenament**

1. Arătați că  $(1-0,2):2+0,3\cdot 2=1$  (simulare martie 2023)
2. Arătați că  $2,5+5\cdot(1-0,7)=4$ .
3. Arătați că  $(8+0,1):9+0,7\cdot 3=3$ .
4. Arătați că  $(7,2+0,8):5+0,2\cdot 2=2$ .
5. Arătați că  $0,6\cdot 8+(10-0,4):3=8$ .
6. Arătați că  $(3-0,2):2+0,3\cdot 2=2$ .
7. Arătați că  $3,4+7\cdot(1-0,2)=9$ .
8. Arătați că  $(8+2,8):6+4\cdot 0,8=5$ .
9. Arătați că  $(5,4+0,6):5+0,7\cdot 4=4$ .
10. Arătați că  $(4-0,2):2+0,6\cdot 2=3,1$ .

Clasa: a IX-a

Subiectul: I

Problema: 1 – model 2024

<b>Item</b>	Arătați că $\frac{1}{8} + 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 2$ .	
<b>Competența</b>	<b>C.S.3.1. Alegerea și utilizarea</b> de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale, cu mulțimi, cu propoziții/prediccate	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de tipul <i>arătați că</i> /<i>verificați că</i> implică validarea unui enunț printr-un procedeu logico-matematic;</li> <li>- a verifica o egalitate poate însemna prelucrarea unui termen sau a ambilor membri, inclusiv prin aplicarea de transformări prin echivalență a relației de egalitate.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere să se verifice că membrul stâng, prin calcul numeric, are ca rezultat numărul 2.
	<b>Cum rezolv?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de acest tip presupune efectuarea unui calcul numeric;</li> <li>- avantajul formulărilor de acest tip îl reprezintă existența răspunsului la care trebuie să se ajungă prin aplicarea corectă a regulilor de calcul, a proprietăților operațiilor studiate, ceea ce permite verificarea calculelor și identificarea eventualelor erori în cazul în care răspunsul nu coincide cu cel precizat în problemă.</li> </ul> <p><b>Varianta 1:</b> Deoarece desfacerea parantezei reprezintă în acest caz un avantaj, putem începe rezolvarea cu eliminarea parantezei prin înmulțirea fiecărui termen din paranteză cu 3, apoi efectuăm adunarea.</p> $\frac{1}{8} + 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} + 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{3}{8} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} + 3 - \frac{9}{8} = 2 \Leftrightarrow -\frac{8}{8} + 3 = 2 \Leftrightarrow -1 + 3 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2, \text{ relație adevărată.}$ <p><b>Varianta 2:</b> Efectuăm calculele din paranteză, înmulțim rezultatul obținut cu 3, apoi adunăm cu <math>\frac{1}{8}</math>.</p> $\frac{1}{8} + 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} + 3 \cdot \left(\frac{8}{8} - \frac{3}{8}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{5}{8} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} + \frac{15}{8} = 2 \Leftrightarrow \frac{16}{8} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2, \text{ relație adevărată.}$
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare.</li> <li>- Reguli de calcul cu fracții ordinare.</li> <li>- Aducerea fracțiilor la același numitor.</li> </ul>	



	- Amplificarea unei fracții ordinare cu un număr natural.	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot înmulți cu 3 doar primul termen al sumei din paranteză, pe cel de-al doilea lăsându-l neschimbat;</li> <li>- La înmulțirea cu 3 a fracției <math>\frac{3}{8}</math>, pot înmulți atât numărătorul, cât și numitorul;</li> <li>- Elevii pot înmulți fiecare termen din paranteză cu 3 dar pot greși la calcule, ceea ce va duce la un răspuns eronat.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot efectua greșit scăderea din paranteză (ori nu aduc la același numitor, ori amplifică corect dar greșesc operațiile elementare);</li> <li>- Elevii pot efectua greșit produsul dintre 3 și fracția <math>\frac{5}{8}</math> (pot înmulți atât numărătorul, cât și numitorul fracției), ceea ce duce evident, la un răspuns eronat.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Înmulțirea cu 3 a fiecărui termen al sumei (<math>\frac{1}{8} + 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{3}{8}</math>) <span style="float: right;">2p</span></li> <li>- Obținerea rezultatului corect la înmulțirea cu 3 a termenilor din paranteză (3, respectiv <math>\frac{9}{8}</math>) <span style="float: right;">2p</span></li> <li>- Finalizare <math>2 = 2</math>, relație adevărată <span style="float: right;">1p</span></li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Efectuarea corectă a diferenței din paranteză: (<math>1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}</math>) <span style="float: right;">2p</span></li> <li>- Înmulțirea cu 3 a rezultatului obținut în paranteză: <math>3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{8}</math> <span style="float: right;">1p</span></li> <li>- Efectuarea corectă a adunării: <math>\frac{1}{8} + \frac{15}{8} = \frac{16}{8}</math> <span style="float: right;">1p</span></li> <li>- Finalizare <math>2 = 2</math>, relație adevărată <span style="float: right;">1p</span></li> </ul>	

De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare în rezolvarea exercițiilor de acest tip: ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare, eliminarea parantezelor prin înmulțirea unui factor cu fiecare termen din interiorul parantezei, regula semnelor la înmulțire, amplificarea fracțiilor ordinare, aducerea la același numitor, adunarea, scăderea și înmulțirea fracțiilor ordinare.</li><li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date.</li><li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare.</li><li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate.</li><li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li></ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li><li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul/raționament care pot interveni;</li><li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li><li>- să atenționeze elevii că fiecare greșală apărută în raționament/ redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li></ul>
	Pentru elev	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/ Ce se cere?);</li><li>- să calculeze corect numitorul comun al fracțiilor ordinare;</li><li>- să amplifice corect o fracție ordinară;</li><li>- să efectueze corect adunarea, scăderea și înmulțirea numerelor raționale;</li><li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li></ul>
Considerente finale	Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale</b> , clasa a IX-a (noțiunile necesare rezolvării acestui tip de exercițiu sunt introduse încă din gimnaziu – clasa a V-a și sunt tratate și în clasa a VI-a, respectiv a VII-a – <b>Mulțimea numerelor raționale</b> ).	

**Exemple de itemi de  
antrenament**

1. Arătați că  $4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 1$ . (rezervă august, 2023)
2. Arătați că  $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$  (examen iunie, 2023)
3. Arătați că  $6 \cdot \left(2 + \frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5} = 15$ .
4. Arătați că  $\left(3 + \frac{1}{7}\right) \cdot 4 + \frac{10}{7} = 14$ .
5. Arătați că  $2 \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) + \frac{14}{8} = 3$ .
6. Arătați că  $\left(5 - \frac{1}{3}\right) \cdot 4 + \frac{1}{3} = 19$ .
7. Arătați că  $4 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = 5$ .
8. Arătați că  $\left(6 - \frac{3}{5}\right) \cdot 2 - \frac{4}{5} = 10$ .
9. Arătați că  $2 \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) - \frac{3}{7} = 1$ .
10. Arătați că  $\left(9 + \frac{1}{5}\right) \cdot 2 + \frac{8}{5} = 20$ .

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 1 – rezervă august 2023
<b>Item</b>	Arătați că $4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 1$ .	
<b>Competența</b>	<b>C.S.3.1. Alegerea și utilizarea</b> de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale, cu mulțimi, cu propoziții/ predicate	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de tipul <i>arătați că/verificați că</i> implică validarea unui enunț printr-un procedeu logico-matematic;</li> <li>- a verifica o egalitate poate însemna prelucrarea unuia sau ambilor membri, inclusiv prin aplicarea de transformări prin echivalență a relației de egalitate.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere</i> să se arate că suma celor doi termeni este egală cu 1.
	<b>Cum rezolv?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de acest tip presupune efectuarea unui calcul numeric;</li> <li>- avantajul formulărilor de acest tip este existența răspunsului la care trebuie ajuns prin aplicarea corectă a proprietăților operațiilor studiate, ceea ce permite verificarea calculelor și identificarea eventualelor erori în cazul în care răspunsul nu coincide cu cel precizat în problemă.</li> </ul> <p><b>Varianta 1:</b> Deoarece desfacerea parantezei reprezintă în acest caz un avantaj, putem începe rezolvarea cu eliminarea parantezei prin înmulțirea fiecărui termen din paranteză cu 4, apoi efectuăm adunarea.</p> $4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{16}{5} + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{15}{5} = 1 \Leftrightarrow 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ relație adevărată.}$ <p><b>Varianta 2:</b> Efectuăm calculele din paranteză, înmulțim rezultatul obținut cu 4 și apoi adunăm cu <math>\frac{1}{5}</math>.</p> $4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{5}{5} - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{5} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ relație adevărată.}$
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare.</li> <li>- Reguli de calcul cu fracții ordinare.</li> <li>- Aducerea fracțiilor la același numitor.</li> <li>- Amplificarea unei fracții ordinare cu un număr natural pentru a aduce la același numitor.</li> </ul>	



<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot înmulți cu 4 doar primul termen al diferenței din paranteză, pe cel de-al doilea lăsându-l neschimbat;</li> <li>- La înmulțirea cu 4 a fracției <math>\frac{4}{5}</math> pot înmulți și numărătorul, și numitorul, ceea ce ar duce, evident la un rezultat greșit;</li> <li>- Elevii pot înmulți fiecare termen din paranteză cu 4 dar pot greși ulterior calculele cu fracții ordinare, ceea ce va duce la un răspuns eronat.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot efectua greșit scăderea din paranteză (ori nu aduc la același numitor, ori amplifică corect dar greșesc operațiile elementare);</li> <li>- Elevii pot efectua greșit produsul dintre 4 și fracția <math>\frac{4}{5}</math> (pot înmulți atât numărătorul, cât și numitorul fracției), ceea ce duce evident, la un răspuns eronat.</li> </ul>
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Înmulțirea cu 4 a fiecărui termen al sumei (<math>4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5}</math>) <span style="float: right;">2p</span></li> <li>- Obținerea rezultatului corect la înmulțirea cu 4 a termenilor din paranteză (4, respectiv <math>\frac{16}{5}</math>) <span style="float: right;">2p</span></li> <li>- Finalizare <math>1 = 1</math>, relație adevărată <span style="float: right;">1p</span></li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Efectuarea corectă a diferenței din paranteză: (<math>{}^5)1 - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}</math>) <span style="float: right;">2p</span></li> <li>- Înmulțirea cu 4 a rezultatului obținut în paranteză: <math>4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}</math> <span style="float: right;">1p</span></li> <li>- Efectuarea corectă a adunării: <math>\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{5} = 1</math> <span style="float: right;">1p</span></li> <li>- Finalizare <math>1 = 1</math>, relație adevărată <span style="float: right;">1p</span></li> </ul>

De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare în rezolvarea exercițiilor de acest tip: ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare, eliminarea parantezelor prin înmulțirea unui factor cu fiecare termen din interiorul parantezei, regula semnelor la înmulțire, ce reprezintă amplificarea fracțiilor ordinare, aducerea la același numitor, adunarea, scăderea și înmulțirea fracțiilor ordinare;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare al itemului propus și să observe/discute/prezinte dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze/enumere greșelile care pot apărea în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor prevăzute în barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă în rezolvarea subiectului.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă în primul rând prezentarea/discutarea variantei de lucru mai aproape de raționamentul elevilor, mai simplă, mai accesibilă vârstei lor;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul/raționament care pot interveni;</li> <li>- să prezinte cât mai multe variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșală apărută în raționament, respectiv în redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	Pentru elev	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să fie atent, receptiv la indicațiile cadrului didactic;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/ Ce se cere?);</li> <li>- să calculeze corect numitorul comun al fracțiilor ordinare;</li> <li>- să amplifice corect o fracție ordinară;</li> <li>- să efectueze corect adunarea, scăderea și înmulțirea numerelor raționale;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
Considerente finale	Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale</b> , clasa a IX-a (noțiunile necesare rezolvării acestui tip de exercițiu sunt introduse încă din gimnaziu – clasa a V-a și sunt tratate și în clasa a VI-a, respectiv a VII-a – <b>Mulțimea numerelor raționale</b> ).	

**Exemple de itemi de  
antrenament**

1. Arătați că  $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$ . (examen iunie, 2023)
2. Arătați că  $6 \cdot \left(2 + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} = 13$ .
3. Arătați că  $\left(2 + \frac{1}{7}\right) \cdot 3 - \frac{10}{7} = 5$ .
4. Arătați că  $4 \cdot \left(4 - \frac{3}{8}\right) + \frac{20}{8} = 17$ .
5. Arătați că  $\left(5 - \frac{2}{3}\right) \cdot 2 + \frac{1}{3} = 9$ .
6. Arătați că  $7 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{10}{3} = 6$ .
7. Arătați că  $\left(5 - \frac{3}{5}\right) \cdot 2 - \frac{4}{5} = 8$ .
8. Arătați că  $3 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) - \frac{4}{7} = 2$ .
9. Arătați că  $\left(6 + \frac{1}{5}\right) \cdot 2 + \frac{3}{5} = 13$ .
10. Arătați că  $\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 4\right) = 9$ .
11. Arătați că  $7 \cdot \left(2 - \frac{2}{7}\right) - 2 = 10$ .
12. Arătați că  $\left(4 + \frac{1}{5}\right) \cdot 3 - \frac{38}{5} = 5$ .
13. Arătați că  $6 \cdot \left(1 + \frac{13}{12}\right) - \frac{1}{2} = 12$ .
14. Arătați că  $\left(1 + \frac{5}{6}\right) \cdot 2 + \frac{7}{3} = 6$ .

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 1 – simulare 2023
<b>Item</b>	Arătați că $(1 - 0,2) : 2 + 0,3 \cdot 2 = 1$ .	
<b>Competența</b>	<b>C.S.3.1. Alegerea și utilizarea</b> de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale, cu mulțimi, cu propoziții/ predicate	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de tipul <i>arătați că / verificați că</i> implică validarea unui enunț printr-un procedeu logico-matematic;</li> <li>- a verifica o egalitate poate însemna prelucrarea unuia sau a ambilor membri, inclusiv prin aplicarea de transformări prin echivalență a relației de egalitate.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere</i> să se demonstreze că suma celor doi termeni este egală cu 1.
	<b>Cum rezolv?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- o cerință de acest tip presupune efectuarea unui calcul numeric;</li> <li>- aceste formulări permit elevilor să verifice corectitudinea calculelor lor; dacă ajung la un răspuns diferit de cel precizat în enunțul problemei, își pot revizui procesul de gândire și operațiile efectuate pentru a identifica eventualele greșeli.</li> </ul> <p><b>Varianta 1:</b> Efectuăm scăderea din paranteză, după care vom efectua împărțirea la 2, înmulțirea, apoi efectuăm adunarea.  <math>(1 - 0,2) : 2 + 0,3 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 0,8 : 2 + 0,6 = 1 \Leftrightarrow 0,4 + 0,6 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1</math> relație adevărată.</p> <p><b>Varianta 2:</b> Transformăm fracțiile zecimale în fracții ordinare, efectuăm calculele din paranteză, înmulțesc cu <math>\frac{1}{2}</math>, efectuăm înmulțirea cu <math>\frac{3}{10} \cdot 2</math>, și la final efectuăm adunarea.  <math>(1 - \frac{2}{10}) : 2 + \frac{3}{10} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow (\frac{10}{10} - \frac{2}{10}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{10} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{10} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{10} + \frac{6}{10} = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{10} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1</math>, relație adevărată.</p>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale și reciproc.</li> <li>- Ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare, respectiv fracții zecimale.</li> <li>- Reguli de calcul cu fracții ordinare, respectiv fracții zecimale.</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot greși la scădere</li> <li>- Elevii pot obține un rezultat greșit la împărțirea cu 2 a fracției zecimale din paranteză.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot greși la transformarea fracției zecimale în fracție ordinară, scriind eventual <math>1 - 0,2 = 1 - \frac{0}{2} = 1</math></li> <li>- Elevii pot greși scăderea, fără a aduce la numitor comun (ignoră primul termen al scăderii), pot greși împărțirea cu 2</li> </ul>	



<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rezolvarea corectă a scăderii din paranteză respectiv a înmulțirii cu 2 ; <math>0,8:2+0,6=1</math> 2p</li> <li>- Obținerea rezultatului corect <math>0,4+0,6=1</math> 2p</li> <li>- Finalizare <math>1=1</math>, relație adevărată 1p</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Transformarea <math>0,2 = \frac{2}{10}</math> sau, mai mult, transformarea în fracție ordinară ireductibilă, <math>0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}</math>. Transformările 1p</li> <li><math>0,5 = \frac{5}{10}</math> și <math>0,3 = \frac{3}{10}</math>. Efectuarea corectă a diferenței din paranteză, cu aducerea la același numitor 1p</li> <li>- Împărțirea cu 2 a rezultatului obținut în paranteză 1p</li> <li>- Efectuarea corectă a scăderii 1p</li> <li>- Finalizare <math>1=1</math>, relație adevărată 1p</li> </ul>		
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze cu elevii următoarele noțiuni teoretice: transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale, transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare, ordinea efectuării operațiilor cu fracții ordinare, ordinea efectuării operațiilor cu fracții zecimale, reguli de calcul cu fracții ordinare, respectiv cu fracții zecimale;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul/raționament care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșală apărută în raționament/ redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, ducă la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>	



	<b>Pentru elev</b>	<i>Este important ca elevul:</i> <ul style="list-style-type: none"><li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă?/ ce se cere?);</li><li>- să utilizeze corect regula de transformare a unei fracții ordinare în fracție zecimală;</li><li>- să utilizeze corect regula de transformare a unei fracții zecimale în fracție ordinară;</li><li>- să efectueze corect scăderea și înmulțirea numerelor raționale;</li><li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li></ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <i>Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale</i> , clasa a IX-a (noțiunile necesare rezolvării acestui tip de exercițiu sunt introduse încă din gimnaziu – clasa a V-a și sunt tratate și în clasa a VI-a, respectiv a VII-a – <i>Mulțimea numerelor raționale</i> ).	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Arătați că <math>(2-0,2):2 + 2,1=3</math></li><li>2. Arătați că <math>(1+0,3):2+0,4=3</math></li><li>3. Arătați că <math>(6,4+1,6):5 + 0,2 \cdot 2=2</math></li><li>4. Arătați că <math>(11-1,4):3 + 0,8 \cdot 6=8</math>.</li><li>5. Arătați că <math>(5,2-1):3+2 \cdot 0,8 =3</math>.</li><li>6. Arătați că <math>(2+1,8):2 + 2,1 =4</math>.</li></ol>	

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 1 – model pentru examen, 2023
<b>Item</b>	Determinați termenul $a_1$ al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că $a_2 = 7$ și $a_6 = 23$ .	
<b>Competența</b>	<b>C.S.3.2. Alegerea și utilizarea</b> unor modalități adecvate de calculare a elementelor unui șir	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- știm că este vorba despre o progresie aritmetică;</li> <li>- cunoaștem valoarea celui de-al doilea termen și a celui de-al șaselea termen, dintre cei ai progresiei.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere să se determine</i> valoarea primului termen al progresiei aritmetice.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cunoașterea oricăror doi termeni dintr-o progresie permite determinarea rației acesteia;  <math>a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow 7 = a_1 + r</math>, unde <math>r</math> este rația progresiei aritmetice. <math>a_6 = a_1 + 5r \Leftrightarrow 23 = a_1 + 5r</math>.</li> </ul> <p>Din cele două relații obținem, prin scăderea membru cu membru: <math>23 - 7 = 4r \Leftrightarrow 4r = 16 \Leftrightarrow r = 4</math>, apoi înlocuind în prima relație obținem <math>a_1 = 3</math>.</p> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cunoașterea unui termen și a rației progresiei permite determinarea formulei progresiei, deci calculul oricărui termen al acesteia.  <math>a_6 = a_2 + 4r \Leftrightarrow 23 = 7 + 4r</math>, de unde obținem <math>r = 4</math> și <math>a_1 = 3</math>.</li> </ul>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificarea termenilor care aparțin unei progresii aritmetice.</li> <li>- Recunoașterea unui șir de numere care formează o progresie aritmetică, prin diferența constantă a oricăror doi termeni consecutivi.</li> <li>- Determinarea rației unei progresii aritmetice.</li> <li>- Utilizarea termenului general în determinarea unor termeni ai unui șir de numere.</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie corect formula, dar efectuează greșit scăderea sau împărțirea.</li> <li>- Elevii pot confunda valoarea rației cu valoarea primului termen al progresiei.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie corect formula, dar efectuează greșit scăderea sau împărțirea.</li> </ul>	

<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (<i>cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului</i>)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b>  <math>a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow a_1 = 7 - r</math> și <math>a_6 = a_1 + 5r \Leftrightarrow 23 = a_1 + 5r</math>, unde <math>r</math> este rația progresiei aritmetice.                  Din cele două relații obținem: <math>23 = 7 + 4r \Leftrightarrow 4r = 16 \Leftrightarrow r = 4</math>. Înlocuind apoi în prima relație obținem <math>a_1 = 3</math>.</p> <p><b>Varianta 2:</b>  <math>a_6 = a_2 + 4r \Leftrightarrow 23 = 7 + 4r</math>                  Finalizare <math>r = 4</math> și <math>a_1 = 3</math>.</p>		<p>2p 3p  3p 2p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip: identificarea termenilor unui șir care aparțin unei progresii aritmetice; recunoașterea unui șir de numere care formează o progresie aritmetică prin diferența oricăror doi termeni consecutivi; determinarea rației unei progresii aritmetice; utilizarea termenului general în determinarea unor termeni ai unui șir de numere;</li> <li>- să stabilească clar care sunt ipotezele problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul/raționament care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșeală apărută în raționament/redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>	



	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/Ce se cere?);</li> <li>- să identifice corect termenii unui șir care aparțin unei progresii aritmetice;</li> <li>- să recunoască cu ușurință un șir de numere care formează o progresie aritmetică, prin diferența oricăror doi termeni consecutivi;</li> <li>- să determine corect rația unei progresii aritmetice;</li> <li>- să utilizeze termenul general în determinarea unor termeni ai unui șir de numere;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Modalități de a descrie un șir; șiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor <math>n</math> termeni ai unei progresii</b> , clasa a IX-a.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculați termenul <math>a_4</math> al progresiei aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_1 = 7</math> și <math>a_6 = 17</math>.</li> <li>2. Calculați termenul <math>a_2</math> al progresiei aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_1 = 2</math> și <math>a_6 = 22</math>.</li> <li>3. Calculați termenul <math>a_3</math> al progresiei aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_5 = 13</math> și <math>a_7 = 19</math>.</li> <li>4. Calculați termenul <math>a_1</math> al progresiei aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_4 = 9</math> și <math>a_8 = 17</math>.</li> <li>5. Calculați termenul <math>a_8</math> al progresiei aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_1 = 2</math> și <math>a_5 = 12</math>.</li> <li>6. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_1 = 8</math> și <math>a_4 = 26</math>.</li> <li>7. Determinați produsul primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_1 = 2</math> și <math>a_4 = 8</math>.</li> <li>8. Determinați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_3 = 15</math> și <math>a_6 = 30</math>.</li> <li>9. Determinați produsul primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_2 = 4</math> și <math>a_5 = 10</math>.</li> <li>10. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice <math>(a_n)_{n \geq 1}</math>, știind că <math>a_1 = 11</math> și <math>a_4 = 44</math>.</li> </ol>	

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 1 – sesiune specială 2023
<b>Item</b>	Determinați termenul $a_3$ al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că $a_1 = 10$ și $a_2 = 20$ .	
<b>Competența</b>	<b>C.S.3.2. Alegerea și utilizarea</b> unor modalități adecvate de calculare a elementelor unui șir	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- știm că este vorba despre o progresie aritmetică;</li> <li>- cunoaștem valoarea primilor doi termeni ai progresiei.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere</i> să se determine valoarea celui de-al treilea termen al progresiei aritmetice.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cunoașterea oricăror doi termeni consecutivi dintr-o progresie permite determinarea rației acesteia; <math>a_2 - a_1 = r \Rightarrow r = 20 - 10 \Rightarrow r = 10</math>, unde <math>r</math> este rația progresiei aritmetice.</li> </ul> <p>Astfel, din relația <math>a_3 = r + a_2 \Rightarrow a_3 = 10 + 20</math>, obținem în final valoarea termenului căutat, <math>a_3 = 30</math>.</p> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Deoarece în această progresie aritmetică se cunosc primii doi termeni, prin enumerarea termenilor, conform regulii de formare a șirului identificăm imediat cel de-al treilea termen ca fiind <math>a_3 = 30</math>.</li> </ul> <p><b>Varianta 3:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Știind că trei numere sunt în progresie aritmetică dacă cel de-al doilea termen este media aritmetică a termenilor alăturați <math>a_2 = (a_1 + a_3) : 2</math>, după înlocuirea datelor problemei, obținem că <math>20 = (10 + a_3) : 2</math>, ceea ce duce la <math>40 = 10 + a_3</math>, de unde obținem că termenul <math>a_3 = 30</math>.</li> </ul>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificarea termenilor unui șir care aparțin unei progresii aritmetice.</li> <li>- Recunoașterea unui șir de numere care formează o progresie aritmetică prin diferența oricăror doi termeni consecutivi.</li> <li>- Determinarea rației unei progresii aritmetice.</li> <li>- Utilizarea corectă a condiției ca <math>n</math> numere să fie în progresie aritmetică pentru <math>n \geq 3</math>.</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie corect formula dar calculează greșit scăderea.</li> <li>- Elevii pot confunda valoarea rației cu valoarea unui termen al progresiei.</li> </ul>	

	<p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot confunda progresia aritmetică cu cea geometrică.</li> </ul> <p><b>Varianta 3:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie corect formula mediei aritmetice dar pot greși la calculul sumei (în loc de înmulțire să efectueze împărțirea între 20 și 2), lucru care va duce evident la un rezultat greșit în final.</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> $a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow r = 20 - 10 = 10$ , unde $r$ este rația progresiei aritmetice. Obținem $a_3 = a_2 + r \Leftrightarrow a_3 = 20 + 10 = 30$ . <p><b>Varianta 3:</b></p> Știind că trei numere sunt în progresie aritmetică dacă cel de-al doilea este media aritmetică a termenilor alăturați $a_2 = (a_1 + a_3) : 2$ . După înlocuire obținem: $20 = (10 + a_3) : 2 \Rightarrow 40 = 10 + a_3$ . Finalizare și obținerea lui $a_3 = 30$ .	<p>2p 3p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip: identificarea termenilor unui șir care aparțin unei progresii aritmetice; recunoașterea unui șir de numere care formează o progresie aritmetică prin diferența oricăror doi termeni consecutivi; determinarea rației unei progresii aritmetice; utilizarea termenului general în determinarea unor termeni ai unui șir de numere; utilizarea condiției ca trei termeni ai șirului să fie în progresie aritmetică;</li> <li>- să formuleze sarcini de prelucrare variate a informațiilor, cu scopul de a genera deschideri către diferite domenii ale matematicii, în scopul formării competențelor vizate de programa școlară;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> </ul>

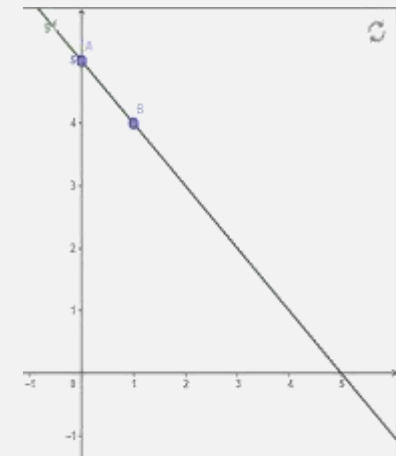
		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul/raționament care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să folosească strategii diferite în rezolvarea aceleiași probleme;</li> <li>- să solicite frecvent corelații intra/interdisciplinare;</li> <li>- să ofere elevului situații în care acesta este nevoit să formuleze sarcini de lucru adecvate;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșeală apărută în raționament/ redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/ Ce se cere?);</li> <li>- să identifice corect termenii unui șir care aparțin unei progresii aritmetice;</li> <li>- să recunoască cu ușurință un șir de numere care formează o progresie aritmetică prin diferența oricărui doi termeni consecutivi;</li> <li>- să determine corect rația unei progresii aritmetice;</li> <li>- să utilizeze termenul general în determinarea unor termeni ai unui șir de numere;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Modalități de a descrie un șir; șiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor <math>n</math> termeni ai unei progresii</b>, clasa a IX-a.</p>	

**Exemple de itemi de  
antrenament**

1. Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 3$  și  $a_2 = 6$ .
2. Determinați termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 18$  și  $a_4 = 24$ .
3. Determinați termenul  $a_2$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_4 = 10$  și  $a_5 = 13$ .
4. Determinați termenul  $a_3$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_6 = 13$  și  $a_7 = 19$ .
5. Determinați termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_5 = 40$  și  $a_6 = 48$ .
6. Determinați suma primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 6$  și  $a_3 = 10$ .
7. Determinați suma primilor șase termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 3$  și  $a_2 = 5$ .
8. Determinați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 22$  și  $a_3 = 33$ .
9. Determinați produsul primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 5$  și  $a_4 = 7$ .
10. Determinați produsul primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 5$  și  $a_3 = 8$ .



Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 2 – august 2023
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 - x$ . Arătați că $f(0) - f(1) = 1$ .	
<b>Competența</b>	<b>Utilizarea unor metode</b> algebrice sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații <b>Descrierea unor proprietăți</b> desprinse din reprezentarea grafică a funcției de gradul I sau din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Știm că este vorba despre o funcție de gradul I
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere să se arate că diferența a două valori ale funcției este egală cu 1.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b> Calcularea valorilor unei funcții se face prin înlocuirea variabilei <math>x</math> cu respectivele valori particulare. Pentru <math>x = 0</math>, <math>f(0) = 5 - 0 = 5</math> Pentru <math>x = 1</math>, <math>f(1) = 5 - 1 = 4</math> În concluzie, <math>f(0) - f(1) = 5 - 4 = 1</math>, ceea ce trebuia arătat.</p> <p><b>Varianta 2:</b> <math>f(0) - f(1) = (5 - 0) - (5 - 1)</math> <math>f(0) - f(1) = 5 - 5 + 1 = 1</math>.</p> <p><b>Varianta 3 (cu rol de consolidare a învățării, prin realizarea de legături intradisciplinare):</b> Pentru a arăta că <math>f(0) - f(1) = 1</math>, putem reprezenta grafic această situație. Pentru <math>x = 0</math> avem <math>f(0) = 5</math>, acest lucru înseamnă că punctul este pe axa <math>Oy</math>, <math>A(0,5)</math>. Pentru <math>x = 1</math> avem <math>f(1) = 4</math>, deci vom avea punctul <math>B(1,4)</math>. Vom reprezenta graficul funcției cu aceste două puncte (în imaginea alăturată). Prin reprezentarea grafică, cum <math> y_A - y_B  =  5 - 4  = 1</math>, putem observa că diferența dintre ordonata punctului <math>A</math> și ordonata punctului <math>B</math>, ordonatele fiind pozitive, este cea indicată în enunț.</p>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinarea valorilor unei funcții.</li> <li>- Ordinea efectuării operațiilor.</li> <li>- Reprezentarea grafică a unei funcții de gradul I folosind două puncte distincte, convenabil alese.</li> <li>- Identificarea punctelor de intersecție cu axele de coordonate.</li> </ul>	



<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<b>Variantele 1 și 2:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot înlocui corect valoarea, dar efectuează greșit scăderea.</li> <li>- Elevii pot confunda calculul valorilor funcției cu rezolvarea ecuațiilor <math>f(x) = 0</math> și <math>f(x) = 1</math>.</li> </ul> <b>Varianta 3:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot înlocui corect valoarea, dar efectuează greșit scăderea.</li> <li>- Elevii pot calcula suma ordonatelor.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> ( <i>cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului</i> )	<b>Punctaj în barem: 5p</b>  <b>Varianta 1:</b> Calcularea valorilor funcției în punctele indicate $f(0) = 5 - 0 = 5$ $f(1) = 5 - 1 = 4$ . $f(0) - f(1) = 5 - 4 = 1$ , <b>adevărat.</b> <b>Varianta 2:</b> Calcularea diferenței valorilor funcției în punctele indicate $f(0) - f(1) = (5 - 0) - (5 - 1)$ $f(0) - f(1) = 5 - 5 + 1 = 1$ <b>Varianta 3:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Pentru a arăta că <math>f(0) - f(1) = 1</math>, putem reprezenta grafic această situație.                      Calcularea valorilor funcției în <math>x = 0</math> și <math>x = 1</math>                      Pentru <math>x = 0</math> avem <math>f(0) = 5</math>, <math>A(0,5)</math>.                      Pentru <math>x = 1</math> avem <math>f(1) = 4</math> și punctul <math>B(1,4)</math> de pe reprezentarea grafică a funcției. Reprezentăm grafic funcția.  <math> y_A - y_B  =  5 - 4  = 1</math> corespunde diferenței dintre ordonata punctului A și ordonata punctului B.</li> </ul>	2p 3p  2p 3p  2p 3p
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare recunoașterii formei unei funcții de gradul I, determinarea valorilor unei funcții, determinarea coordonatelor unor puncte situate pe reprezentarea grafică a unei funcții de gradul I, reprezentarea grafică a funcțiilor de gradul I, determinarea punctelor de intersecție ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I cu axele de coordonate, determinarea unor proprietăți ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I (de exemplu calcularea unor distanțe);</li> </ul>

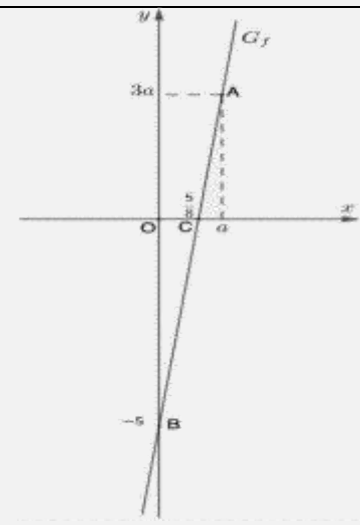
		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșală apărută în redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă?/ce se cere?);</li> <li>- să calculeze corect valorile unei funcții;</li> <li>- să determine corect punctele necesare realizării graficului funcției;</li> <li>- să identifice corect abscisa și ordonata și punctele de intersecție cu axe de coordonate;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este un exemplu pentru funcția de gradul I, clasa a IX-a ( calculul valorilor unei funcții se întâlnește și în gimnaziu clasa a VIII-a la funcții ). Asemănător se pot rezolva itemi în care se cere să se arate că un produs sau o sumă de valori ale unei funcții este egală cu un număr, folosind una dintre variantele 1,2 sau 3.</p>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se consideră funcția <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5x + 3</math>. Arătați că <math>f(-1) - f(1) = -10</math>.</li> <li>2. Se consideră funcția <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4 - x</math>. Arătați că <math>f(0) - f(1) = 1</math>.</li> <li>3. Se consideră funcția <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2 - x</math>. Arătați că <math>f(1) - f(-2) = -3</math>.</li> <li>4. Se consideră funcția <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1</math>. Arătați că <math>f(1) - f(-1) = 4</math>.</li> <li>5. Se consideră funcția <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - 7</math>. Arătați că <math>f(3) - f(2) = 1</math>.</li> <li>6. Se consideră funcțiile <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 3</math> și <math>g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 6 - x</math>. Arătați că <math>f(1) - g(1) = -1</math>.</li> </ol>	

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 2 – iulie 2023
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 2$ . Determinați numărul real $a$ pentru care $f(a) = 6$ .	
<b>Competența</b>	<b>Utilizarea unor metode algebrice sau grafice</b> pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Știm că este vorba despre o funcție de gradul I
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea unui număr, știind valoarea funcției în acel număr (determinarea preimaginii).
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se înlocuiește <math>x</math> cu <math>a</math> în legea care definește funcția și se scrie <math>f(a)</math>.</li> </ul> $f(a) = a + 2$ $f(a) = 6$ $a + 2 = 6 \Leftrightarrow a = 4.$ <p><b>Varianta 2 (în intenția de a face legături intradisciplinare):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Pentru a determina abscisa punctului de ordinată 6 care aparține reprezentării grafice a funcției, putem realiza reprezentarea acesteia. Vom determina punctele de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate.</li> <li>- <math>G_f \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0; x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Leftrightarrow A(-2, 0)</math>.</li> <li>- <math>G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = f(0) = 0 + 2 = 2 \Leftrightarrow B(0, 2)</math>.</li> <li>- Reprezentăm grafic funcția în baza acestor două puncte. După reprezentarea grafică, vom reprezenta și punctul <math>M(a, 6) \in G_f</math>. Din reprezentarea grafică, pentru determinarea abscisei punctului <math>M</math>, vom lua cele două triunghiuri asemenea care se formează și aplicând asemănarea, rezultă proporționalitatea</li> </ul> $\frac{2}{a} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow a = 4.$
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinarea abscisei știind ordonata unui punct care aparține graficului unei funcții.</li> <li>- Identificarea punctelor de intersecție cu axele de coordonate, reprezentarea grafică a funcției de gradul I și determinarea abscisei unui punct de pe grafic știind ordonata.</li> <li>- Cazurile de asemănare a două triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării.</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Variantele 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii nu înlocuiesc variabila cu <math>a</math> și rezolvă ecuația cu <math>x</math>, găsind un <math>x</math> asemănător la răspuns cu răspunsul corect.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot identifica greșit punctele la intersecția cu axele, nerecunoscând abscisa sau ordonata..</li> </ul>	

- Elevii nu scriu corespunzător proporționalitatea laturilor din asemănare.		
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 5p</b>	
	<b>Varianta 1:</b> - Înlocuirea lui $x$ cu $a$ în funcție și scriere lui $f(a)$ . $f(a) = a + 2$ $f(a) = 6$ - Determinarea ecuației și găsirea soluției $a + 2 = 6 \Rightarrow a = 4$ . <b>Varianta 2:</b> - Determinarea punctelor de intersecție a graficului unei funcții cu axele de coordonate. $G_f \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0; x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow A(-2, 0)$ . $G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = f(0) = 0 + 2 = 2 \Leftrightarrow B(0, 2)$ . - Realizarea graficului și reprezentarea punctului $M(a, 6) \in G_f$ . Determinarea abscisei punctului $M$ folosind asemănarea triunghiurilor, $\frac{2}{a} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow a = 4$ .	
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare recunoașterii formei unei funcții de gradul I; determinarea valorilor unei funcții; determinarea coordonatelor unor puncte situate pe reprezentarea grafică a unei funcții de gradul I; reprezentarea grafică a funcțiilor de gradul I; determinarea punctelor de intersecție ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I cu axele de coordonate; determinarea unor proprietăți ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I ( de exemplu găsirea unei distanțe folosind asemănarea);</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul>



		<p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșeală apărută în redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/Ce se cere?);</li> <li>- să determine corect punctele necesare realizării graficului funcției;</li> <li>- să identifice corect abscisa și ordonata și punctele de intersecție cu axele de coordonate;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Definiție, reprezentarea grafică a funcției</b> $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b$ , unde $a, b \in \mathbf{R}$ , <b>intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația</b> $f(x) = 0$ , clasa a IX-a.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - 2</math>. Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>f(a) = 0</math>.</li> <li>2. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 3</math>. Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>f(a) = 5</math>.</li> <li>3. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 - x</math>. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>f(m) = 4</math>.</li> <li>4. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x + 1</math>. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>f(m) = -3</math>.</li> <li>5. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 4</math>. Determinați numărul real <math>b</math> pentru care <math>f(b) = -2</math>.</li> <li>6. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3 - x</math>. Determinați numărul real <math>c</math> pentru care <math>f(c) = 9</math>.</li> </ol>	

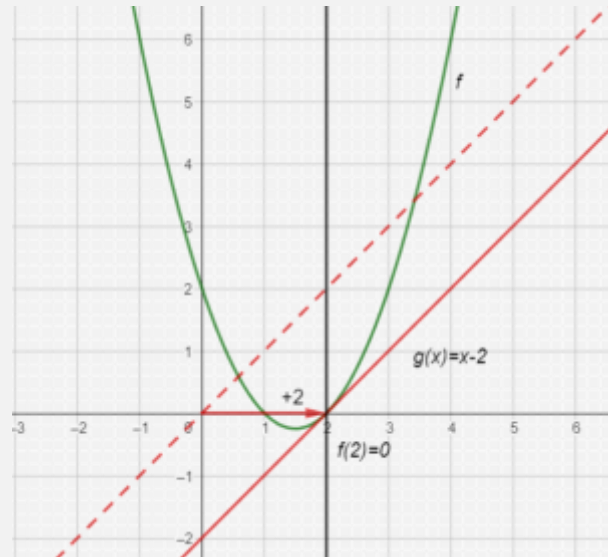
Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 2 – model , 2023
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 8x - 5$ . Determinați numărul real $a$ pentru care punctul $A(a, 3a)$ aparține graficului funcției.	
<b>Competența</b>	<b>Utilizarea unor metode algebrice sau grafice</b> pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Știm că este vorba despre o funcție de gradul I și un punct care aparține graficului funcției.
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea unui număr real $a$ pentru care punctul $A(a, 3a)$ aparține graficului.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b>                      Punctul <math>A(a, 3a) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = 3a</math> *                      În legea prin care se definește funcția, înlocuim necunoscuta <math>x</math> cu variabila <math>a</math>, deci  <math>8a - 5 = 3a \Leftrightarrow 8a - 3a = 5 \Leftrightarrow a = 1</math>, număr real.</p> <p><i>*În acest caz, funcția este definită pe mulțimea numerelor reale, cu valori în aceeași mulțime; astfel oricare ar fi numărul real <math>a</math>, atât acesta cât și <math>3a</math> reprezintă valori din domeniul de definiție, respectiv din codomeniu. În situația în care funcția este definită și are valori pe submulțimi ale lui <math>\mathbf{R}</math>, diferite de <math>\mathbf{R}</math>, atunci o condiție de tipul dat implică verificarea egalității implicate de legea funcției, precum și apartenența valorilor variabilei și imaginii acesteia la domeniul/codomeniu.</i></p> <p><b>Varianta 2 (observare/testare/verificare):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Verificăm pentru <math>a = 1 \Rightarrow</math> abscisa punctului va fi 1 și ordonata 3 <math>\Rightarrow A(1, 3) \in G_f</math>.</li> <li>Verificăm <math>f(1) = 3</math> ; <math>f(1) = 8 \cdot 1 - 5 = 3</math>, adevărat .</li> <li>- Cum se cere determinarea unei singure valori (număr) și <math>a = 1</math> verifică relația din enunț, înseamnă că am determinat acel număr.</li> </ul> <p><b>Varianta 3 (legături intradisciplinare, întărirea învățării – propunere spre reflecție către elevi):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Știm că <math>y = f(x) \Rightarrow y = 8x - 5</math>. Panta dreptei ce reprezintă grafiicul funcției este 8. Vom determina punctele de intersecție a reprezentării graficului funcției cu axele de coordonate. <math>G_f \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0</math> ;  <math>8x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow C\left(\frac{5}{8}, 0\right)</math>. <math>G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = f(0) = 8 \cdot 0 - 5 = -5 \Leftrightarrow B(0, -5)</math>. Realizăm grafiicul funcției cu aceste două puncte.</li> </ul>
	<b>Cum rezolv?</b>	

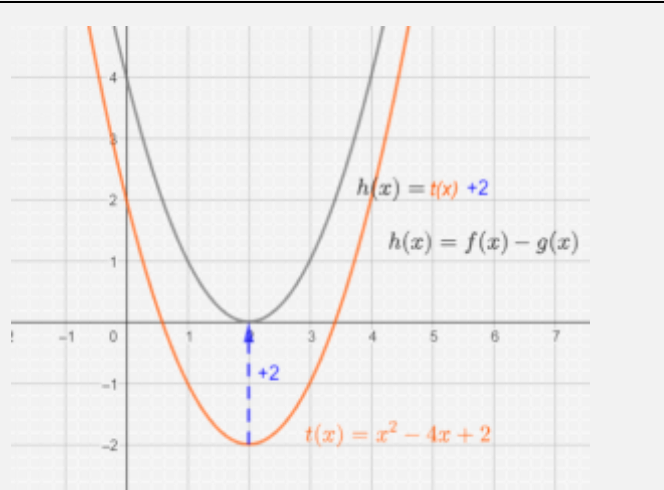
	<p>După realizarea graficului vom reprezenta și punctul <math>A(a,3a) \in G_f</math>. Din reprezentarea grafică, folosind intersecția cu axa <math>Ox</math> și punctul <math>A</math>, în triunghiul dreptunghic format vom calcula <math>tg\alpha = \frac{3a}{a - \frac{5}{8}}</math>;</p> <p><math>tg\alpha = \text{panta dreptei } AC = 8</math>. Atunci vom avea</p> $8 = \frac{3a}{a - \frac{5}{8}} \Rightarrow 8\left(a - \frac{5}{8}\right) = 3a \Rightarrow 8a - 5 = 3a \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1, \text{ număr real.}$
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Condiția ca un punct să aparțină graficului unei funcții.</li> <li>- Identificarea punctelor de intersecție cu axele de coordonate, reprezentarea grafică a funcției de gradul I și determinarea abscisei unui punct de pe grafic știind ordonata.</li> <li>- Determinarea, din reprezentarea grafică a funcției de gradul I, a unor puncte ale căror coordonate îndeplinesc anumite condiții date.</li> <li>- Funcții trigonometrice în triunghiul dreptunghic.</li> </ul>
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Variantele 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii nu înlocuiesc variabila cu <math>a</math> și rezolvă ecuația cu <math>x</math>.</li> </ul> <p><b>Variantele 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii nu identifică corect valoarea variabilei <math>a</math>, care verifică funcția.</li> </ul> <p><b>Varianta 3:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot identifica greșit punctele la intersecția cu axele, nerecunoscând abscisa sau ordonata.</li> <li>- Elevii nu știu ce este panta unei drepte și scriu greșit definiția tangentei.</li> </ul>
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Condiția ca un punct să aparțină graficului unei funcții. Punctul <math>A(a,3a) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = 3a</math></li> <li>- Înlocuirea în funcție a necunoscutei <math>x</math> cu variabila <math>a</math> rezolvare ecuației: <math>8a - 5 = 3a \Leftrightarrow 8a - 3a = 5 \Leftrightarrow a = 1</math> număr real.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificarea corectă pentru <math>a = 1 \Rightarrow</math> abscisa punctului este 1 și ordonata 3.</li> <li>- Verificăm <math>f(1) = 3</math> ; <math>f(1) = 8 \cdot 1 - 5 = 3</math>, adevărat.</li> </ul>

	<p><b>Varianta 3:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>y = f(x) \Rightarrow y = 8x - 5</math>. Identificarea faptului că panta graficului funcției drepte este egală cu 8.</li> <li>- Determinarea punctele de intersecție a graficului unei funcții cu axele de coordonate.</li> </ul> $G_f \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0; 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow C\left(\frac{5}{8}, 0\right).$ $G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = f(0) = 8 \cdot 0 - 5 = -5 \Rightarrow B(0, -5).$ <p>Realizarea graficului și reprezentarea punctului <math>A(a, 3a) \in G_f</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Din reprezentarea grafică, folosind intersecția cu axa <math>Ox</math> și punctul <math>A</math>, în triunghiul dreptunghic format vom calcula <math>tg \alpha = \frac{3a}{a - \frac{5}{8}}</math>; <math>tg \alpha = \text{panta dreptei } AC = 8</math> (în cazul situării punctului <math>A</math> la dreapta punctului <math>C</math>). Atunci vom avea</li> </ul> $8 = \frac{3a}{a - \frac{5}{8}} \Rightarrow 8\left(a - \frac{5}{8}\right) = 3a \Rightarrow 8a - 5 = 3a \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1, \text{ număr real.}$	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare recunoașterii formei unei funcții de gradul I; determinarea valorilor unei funcții; determinarea coordonatelor unor puncte situate pe reprezentarea grafică a unei funcții de gradul I a unor coordonate care îndeplinesc anumite condiții; reprezentarea grafică a funcțiilor de gradul I; determinarea punctelor de intersecție ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I cu axele de coordonate; determinarea unor proprietăți ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul>

		<p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșeală apărută în redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/Ce se cere?);</li> <li>- să știe care este condiția ca un punct să aparțină graficului funcției;</li> <li>- să identifice corect abscisa și ordonata și punctele de intersecție cu axele de coordonate.</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Definiție, reprezentarea grafică a funcției</b> <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b</math>, unde <math>a, b \in \mathbf{R}</math>, <b>intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația <math>f(x) = 0</math></b>, clasa a IX-a.</p>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x - 2</math>. Determinați numărul real <math>a</math> pentru care punctul <math>A(a - 1, a + 5)</math> aparține graficului funcției <math>f</math>.</li> <li>2. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -2x + 11</math>. Determinați numărul real <math>a</math> pentru care punctul <math>A(a + 1, -7a)</math> aparține graficului funcției <math>f</math>.</li> <li>3. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 3</math>. Determinați numărul real <math>a</math> pentru care punctul <math>A(a + 1, a - 1)</math> aparține graficului funcției <math>f</math>.</li> <li>4. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4 - x</math>. Determinați numărul real <math>a</math> pentru care punctul <math>A(a + 1, a - 4)</math> aparține graficului funcției <math>f</math>.</li> <li>5. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x + 4</math>. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care punctul <math>A(m + 1, 1 - 3m)</math> aparține graficului funcției <math>f</math>.</li> <li>6. Se consideră funcția <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3 - 2x</math>. Determinați numărul real <math>a</math> pentru care punctul <math>A(a, a + 6)</math> aparține graficului funcției <math>f</math>.</li> </ol>	



Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 2 – simulare 2023
<b>Item</b>	Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = x^2 - 3x + 2$ și $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $g(x) = x + m$ , unde $m$ este un număr real. Determinați numărul real $m$ pentru care $f(2) = g(2)$ .	
<b>Competența</b>	Exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiții algebrice; exprimarea prin condiții algebrice a unor reprezentări grafice	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Știm că este vorba despre o funcție de gradul al II-lea, o funcție de gradul I și o relație ce leagă ambele funcții.
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea unui număr real $m$ pentru care $f(2) = g(2)$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Calculăm valorile funcției în <math>x = 2</math>: <math>f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0</math> și <math>g(2) = 2 + m</math>.</li> <li>- Cum <math>f(2) = g(2) \Leftrightarrow 2 + m = 0 \Rightarrow m = -2</math>, număr real.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <p>Știm din clasa a VIII-a că, pentru a afla punctul de intersecție dintre graficele a două funcții, se rezolvă ecuația <math>f(x) = g(x)</math> cu determinarea lui <math>x</math>, apoi a lui <math>y = f(x)</math> sau <math>y = g(x)</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dacă <math>f(2) = g(2) \Rightarrow x = 2</math> este abscisa unuia dintre punctele de intersecție a celor două grafice <math>I(2, y_I)</math></li> <li>- <math>f(2) = y_I \Rightarrow y_I = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 \Rightarrow y_I = 0</math>.</li> <li>- <math>g(2) = y_I \Rightarrow y_I = 2 + m</math>.</li> <li>- <math>y_I = 0 \Rightarrow 0 = 2 + m \Rightarrow m = -2</math>, număr real.</li> </ul> <p style="text-align: right;">Cum</p>  <p><b>Varianta 3 (aprofundare):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definim <b>funcția auxiliară</b> (de sprijin) <math>h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}</math>, <math>h(x) = f(x) - g(x)</math></li> <li>- Ținând cont de legile în baza cărora se definesc funcțiile din enunț, rezultă:  <math display="block">h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 3x + 2) - (x + m) = x^2 - 4x + (2 - m) \quad (1)</math> </li> </ul>

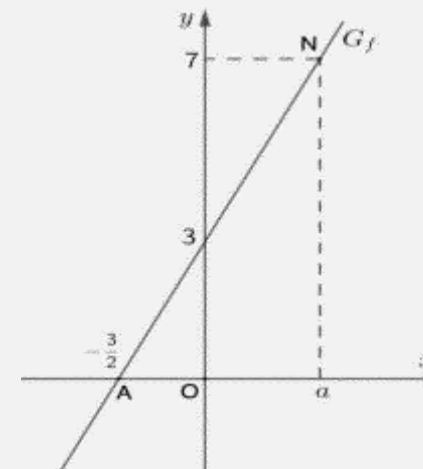
		<p>Din relația <math>f(2) = g(2)</math>, rezultă  <math>h(2) = f(2) - g(2) = 0</math> (2)</p> <p>În (1), pentru <math>x = 2</math> rezultă  <math>h(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + (2 - m) = -2 - m</math> (3)</p> <p>Din (2) și (3), rezultă <math>-2 - m = 0</math>, deci <math>m = -2 \in \mathbb{R}</math>.</p>	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcularea unor valori ale funcției.</li> <li>- Condiția ca un punct să aparțină graficului unei funcții.</li> <li>- Identificarea punctelor de intersecție cu axele de coordonate, reprezentarea grafică a funcției de gradul I și determinarea abscisei unui punct de pe grafic știind ordonata.</li> <li>- Determinarea, din reprezentarea grafică a funcției de gradul I, a unor puncte ale căror coordonate îndeplinesc anumite condiții date.</li> </ul>		
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Variantele 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii nu înlocuiesc valoarea 2 corect.</li> <li>- Elevii nu calculează corect după înlocuirea lui <math>x</math> cu 2.</li> <li>- Calculează valorile funcției în 2 și nu mai egalează funcțiile, pentru a afla <math>m</math>.</li> </ul> <p><b>Variantele 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie greșit condiția pentru a afla abscisa punctului de intersecție și nu identifică ordonata.</li> </ul> <p><b>Varianta 3:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot identifica greșit punctele de intersecție cu axele, nerecunoscând abscisa sau ordonata.</li> <li>- Elevii nu identifică corect ordonata și nu calculează corect <math>m</math>.</li> </ul>		

<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcularea valorii funcției <math>f</math> pentru <math>x = 2</math> . <math>f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0</math></li> <li>- Calcularea valorii funcției <math>g</math> pentru <math>x = 2</math> <math>g(2) = 2 + m</math> .</li> <li>- Cum <math>f(2) = g(2) \Rightarrow m = -2</math> , număr real.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <p>Știm din clasa a VIII-a că abscisele punctelor de intersecție ale graficelor a două funcții <math>f</math> și <math>g</math> (dacă există) sunt soluțiile ecuației <math>f(x)=g(x)</math> care aparțin domeniilor de definiție ale funcțiilor, iar ordonatele lor se află din <math>y = f(x)</math> sau <math>y = g(x)</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificarea abscisei punctului de intersecție dintre graficele a două funcții <math>\Rightarrow x = 2</math> este abscisa unui punct de intersecție a celor două grafice: <math>I(2, y_I)</math>.</li> <li>- Calcularea valorilor celor două funcții în <math>x = 2</math> .</li> <li>- <math>f(2) = y_I \Rightarrow y_I = 0</math> ; <math>g(2) = y_I \Rightarrow y_I = 2 + m</math></li> <li>- Finalizare <math>y_I = 0 \Rightarrow 0 = 2 + m \Rightarrow m = -2</math> , număr real.</li> </ul>		<p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare recunoașterii formei unei funcții de gradul I ; determinarea valorilor unei funcții; determinarea coordonatelor unor puncte situate pe reprezentarea grafică a unei funcții de gradul I a unor coordonate care îndeplinesc anumite condiții; reprezentarea grafică a funcțiilor de gradul I; determinarea punctelor de intersecție ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I cu axele de coordonate; determinarea unor proprietăți ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I;</li> <li>- să reamintească elevilor reprezentarea grafică a funcției <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c ; a, b, c \in \mathbf{R} , a \neq 0</math>, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația <math>f(x) = 0</math>, simetria față de drepte de forma <math>x=m</math>, cu <math>m \in \mathbf{R}</math></li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul>	

		<p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșeală apărută în redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (Ce se dă?/ Ce se cere?);</li> <li>- să știe care este condiția ca un punct să aparțină graficului funcției;</li> <li>- să identifice corect abscisa și ordonata și punctele de intersecție cu axele de coordonate.</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>		<p>- Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Reprezentarea grafică a funcției</b> <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c</math>; <math>a, b, c \in \mathbf{R}</math>, <math>a \neq 0</math>, <b>intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația</b> <math>f(x) = 0</math>, <b>simetria față de drepte de forma</b> <math>x = m</math>, <b>cu</b> <math>m \in \mathbf{R}</math>; <b>Definiție, reprezentarea grafică a funcției</b> <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b</math>, <b>unde</b> <math>a, b \in \mathbf{R}</math>, <b>intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația</b> <math>f(x) = 0</math>, clasa a IX-a.</p>
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>		<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se consideră funcțiile <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 5x + 4</math> și <math>g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x + m</math>, unde <math>m</math> este un număr real. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>f(-1) = g(-1)</math>.</li> <li>2. Se consideră funcțiile <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 6</math> și <math>g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x - m</math>, unde <math>m</math> este un număr real. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>f(2) = g(2)</math>.</li> <li>3. Se consideră funcțiile <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 6x + 9</math> și <math>g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = m - x</math>, unde <math>m</math> este un număr real. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>f(3) = g(3)</math>.</li> <li>4. Se consideră funcțiile <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - x - 2</math> și <math>g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 2x + m</math>, unde <math>m</math> este un număr real. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>f(1) = g(1)</math>.</li> <li>5. Se consideră funcțiile <math>f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 10x + 9</math> și <math>g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 3m + x</math>, unde <math>m</math> este un număr real. Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>f(-1) = g(-1)</math>.</li> </ol>

6. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = -x - 2m$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(2) = g(2)$ .

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 2 – simulare 2024
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 3$ . Determinați numărul real $a$ pentru care $f(a) = 7$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor metode algebrice sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Știm că este vorba despre o funcție de gradul I;
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea unui număr, știind valoarea funcției în acel număr.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Înlocuim <math>x</math> cu <math>a</math> în legea care definește funcția și efectuăm calcule:  <math>f(a) = 2a + 3</math>  <math>f(a) = 7</math>  <math>2a + 3 = 7 \Rightarrow a = 2, \forall a \in \mathbf{R}.</math></li> </ul> <p><b>Varianta 2 (legături intradisciplinare, consolidarea învățării):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pentru a determina abscisa punctului pentru care ordonata este 7, putem reprezenta grafic această situație. Vom determina punctele de intersecție a graficului unei funcții cu axele de coordonate.</li> <li><math>G_f \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0; 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow A\left(-\frac{3}{2}, 0\right).</math></li> <li><math>G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow B(0, 3).</math></li> <li>Realizăm graficul funcției folosind aceste două puncte. După realizarea graficului vom reprezenta și punctul <math>N(a, 7) \in G_f</math>. Deoarece <math>y_N &gt; y_B</math>, avem <math>a &gt; 0</math>. Din reprezentarea grafică pentru determinarea abscisei punctului <math>N</math>, vom lua cele două triunghiuri asemenea care se formează și aplicând asemănarea rezultă proporționalitatea <math>\frac{\frac{3}{2}}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 2.</math></li> </ul>





<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinarea abscisei știind ordonata unei funcții.</li> <li>- Identificarea punctelor de intersecție cu axele de coordonate, reprezentarea grafică a funcției de gradul I și determinarea abscisei unui punct de pe grafic știind ordonata.</li> <li>- Cazurile de asemănare a două triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării.</li> </ul>
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Variantele 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii nu înlocuiesc variabila cu <math>a</math> și rezolvă ecuația în necunoscuta <math>x</math>, găsind răsăuns asemănător cu cel corect.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot identifica greșit punctele de intersecție cu axele, nerecunoscând abscisa sau ordonata.</li> <li>- Elevii nu scriu corespunzător proporționalitatea laturilor, din asemănarea triunghiurilor.</li> </ul>
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> <i>(cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</i>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Înlocuirea lui <math>x</math> cu <math>a</math> în funcție și scrierea lui <math>f(a)</math>.  <math>f(a) = 2a + 3</math>  <math>f(a) = 7</math></li> <li>- Determinarea ecuației și găsirea soluției  <math>2a + 3 = 7 \Rightarrow a = 2.</math></li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinarea punctului de intersecție a graficului unei funcții de gradul I cu axele de coordonate.  <math>G_f \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0; 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow A\left(-\frac{3}{2}, 0\right).</math>  <math>G_f \cap Oy \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow B(0, 3).</math></li> <li>- Realizarea graficului și reprezentarea punctului <math>N(a, 7) \in G_f</math>. Determinarea abscisei punctului <math>N</math>, folosind asemănarea triunghiurilor, <math>\frac{3}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 2.</math></li> </ul>

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare recunoașterii formei unei funcții de gradul I ; determinarea valorilor unei funcții; determinarea coordonatelor unor puncte situate pe reprezentarea grafică a unei funcții de gradul I; reprezentarea grafică a funcțiilor de gradul I; determinarea punctelor de intersecție ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I cu axele de coordonate; determinarea unor proprietăți ale reprezentării grafice a unei funcții de gradul I ( de exemplu găsirea unei distanțe folosind asemănarea);</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aleagă cu precădere prezentarea variantei mai simple de rezolvare;</li> <li>- să evidențieze întotdeauna greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să prezinte și variante de abordare alternativă;</li> <li>- să atenționeze elevii că fiecare greșeală apărută în redactarea rezolvării sau omiterea unor etape din rezolvare, duce la neacordarea punctajului maxim.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă?/ ce se cere?);</li> <li>- să determine corect punctele necesare realizării graficului funcției;</li> <li>- să identifice corect abscisa și ordonata și punctele de intersecție cu axele de coordonate;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru domeniul de conținut/conținutul <b>Definiție, reprezentarea grafică a funcției <math>f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b</math> , unde <math>a, b \in \mathbf{R}</math> , intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația <math>f(x) = 0</math> , clasa a IX-a.</b>	

**Exemple de itemi de  
antrenament**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 2$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 0$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4x + 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 7$ .
3. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 - 2x$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(m) = 3$ .
4. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -2x + 11$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(m) = -3$ .
5. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -5x + 4$ . Determinați numărul real  $b$  pentru care  $f(b) = -21$ .
6. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 3$ . Determinați numărul real  $c$  pentru care  $f(c) = 9$ .

Clasa: a IX-a		Subiectul: I	Problema: 6 - august 2022
Item	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu $AB = 5$ și $AC = 2AB$ . Arătați că aria triunghiului $ABC$ este egală cu 25.		
Competența	Utilizarea unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului. Determinarea măsurii unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice.		
Rezolvare	Ce știm?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- lungimea unei catete a triunghiului <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>;</li> <li>- o relație metrică între catete.</li> </ul>	
	Ce se cere?	Se cere să se arate că aria triunghiului $ABC$ este egală cu 25.	
	Cum rezolv?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- calculăm <math>AC = 2AB = AC = 2AB = 2 \cdot 5 = 10</math>;</li> </ul> Aria $\Delta ABC$ va fi $A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$	
Noțiuni teoretice necesare	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formula ariei triunghiului dreptunghic</li> <li>- Deprinderea de a efectua corect calculele cu numere</li> </ul>		
Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie greșit formula ariei triunghiului dreptunghic.</li> <li>- Elevii pot identifica eronat catetele.</li> <li>- Elevii pot face greșeli de calcul la aflarea ariei.</li> </ul>		
Explicații privind baremul de notare: (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 5p</b> Calculează $AC = 2AB = 10$ .  Scrie formula ariei, înlocuiește valorile lungimilor catetelor și finalizează calculul. $A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$		2p
			3p (1p,1p,1p)
De avut în vedere – important	Pentru profesor	<b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească formula ariei triunghiului dreptunghic;</li> <li>- să reamintească elevilor și formulele pentru ariile altor tipuri de triunghiuri și să evidențieze informațiile necesare pentru a putea determina ariile în diverse situații (pentru triunghiul echilateral, pentru triunghiul oarecare), sau cum putem afla elemente ale triunghiului știind aria acestuia;</li> </ul>	

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să avertizeze elevii privind depunctarea la corectare dacă sunt omise etape esențiale sau dacă sunt greșeli în rezolvare.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recunoască tipul de triunghi – dreptunghic, isoscel, etc pe baza datelor problemei pentru a putea stabili strategia de rezolvare;</li> <li>- să recapituleze formulele ariilor diferitelor tipuri de triunghiuri;</li> <li>- să identifice corect elementele triunghiului pe baza enunțului problemei.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este specific domeniului de conținut/conținutului <i>Aplicații ale trigonometriei în geometrie-rezolvarea triunghiurilor, clasa a IX-a</i> (formulele ariilor și alte teoreme specifice triunghiurilor particulare fiind reluate din gimnaziu – clasa a VII-a). Asemănător se pot rezolva itemi de următoarele tipuri:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Aflarea celei de a doua catete în triunghi, când știm o catetă și aria.</li> <li>2. Aflarea ariei unui triunghi echilateral, când avem informații cu care putem afla latura.</li> </ol>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>AB = 8</math> și aria egală cu 16. Arătați că <math>AC = 4</math>.</li> <li>2. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>AB = 7</math> și aria egală cu 24,5. Arătați că triunghiul este isoscel.</li> <li>3. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> isoscel, dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>BC = 6</math>. Arătați că aria triunghiului este 9.</li> <li>4. Se consideră triunghiul echilateral <math>ABC</math> cu perimetrul egal cu <math>6\sqrt{3}</math>. Să se arate că aria triunghiului este <math>3\sqrt{3}</math>.</li> </ol>	



Clasa: a IX-a		Subiectul: I	Problema: 6 – august 2023
Item	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu aria egală cu 50 și $AC = 5$ . Arătați că lungimea laturii $AB$ este egală cu 20.		
Competența	Utilizarea unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului. Determinarea măsurii unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice.		
Rezolvare	Ce știm?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- lungimea unei catete a triunghiului <math>ABC</math> dreptunghic, <math>AC = 5</math>;</li> <li>- aria triunghiului dreptunghic egală cu 50.</li> </ul>	
	Ce se cere?	Se cere să se arate că cealaltă catetă este de lungime 20.	
	Cum rezolv?	$\text{Aria } \Delta ABC \text{ este } \mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Leftrightarrow 50 = \frac{AB \cdot 5}{2} \Leftrightarrow 100 = AB \cdot 5 \Leftrightarrow AB = \frac{100}{5} = 20$	
Noțiuni teoretice necesare	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formula ariei triunghiului dreptunghic.</li> <li>- Rezolvarea unor ecuații.</li> <li>- Deprinderea de a efectua corect calculele cu numere.</li> </ul>		
Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie greșit formula ariei triunghiului dreptunghic.</li> <li>- Elevii pot identifica eronat catetele.</li> <li>- Elevii pot face greșeli de calcul la aflarea catetei necunoscute din ecuația dedusă cu ajutorul ariei.</li> </ul>		
Explicații privind baremul de notare: (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	Punctaj în barem: 5p		3p
	$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow 50 = \frac{AB \cdot 5}{2}$		
De avut în vedere – important	Pentru profesor	<b>Etapă de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească formula ariei triunghiului dreptunghic;</li> <li>- să reamintească elevilor și formulele pentru ariile altor tipuri de triunghiuri și să evidențieze informațiile necesare pentru a putea determina ariile în diverse situații (pentru triunghiul echilateral, pentru triunghiul oarecare), sau cum putem afla elemente ale triunghiului știind aria acestuia;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> </ul>	
		$AB = \frac{2 \cdot 50}{5} = 20$	

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate,</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să avertizeze elevii privind depunctarea la corectare dacă sunt omise etape esențiale sau dacă sunt greșeli în rezolvare.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recunoască tipul de triunghi – dreptunghic, isoscel, etc pe baza datelor problemei pentru a putea stabili strategia de rezolvare;</li> <li>- să recapituleze formule pentru ariile diverselor tipuri de triunghiuri;</li> <li>- să identifice corect elementele triunghiului pe baza enunțului problemei.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este specific domeniului de conținut/conținutului <b>Aplicații ale trigonometriei în geometrie - rezolvarea triunghiurilor</b>, clasa a IX-a (formulele ariilor și alte teoreme specifice triunghiurilor particulare fiind reluate din gimnaziu – clasa a VII-a).                  Asemănător se pot rezolva itemi de următoarele tipuri</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Aflarea lungimii celei de a doua catete în triunghi când știm o catetă și aria.</li> <li>2. Aflarea ariei unui triunghi echilateral când avem informații cu care putem afla latura.</li> </ol>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>AB = 8</math> și aria egală cu 24. Aflați lungimea ipotenuzei triunghiului.</li> <li>2. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>AB = 8</math> și aria egală cu 32. Arătați că triunghiul este isoscel.</li> <li>3. Se consideră triunghiul echilateral <math>ABC</math> cu perimetrul egal cu 12. Să se arate că aria triunghiului este <math>4\sqrt{3}</math>.</li> </ol>	

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 6 - model 2023
<b>Item</b>	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu $BC = 16$ și măsura unghiului $B$ egală cu $30^\circ$ . Arătați că aria triunghiului $ABC$ este $32\sqrt{3}$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului. Determinarea măsurii unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice.	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lungimea unei catete;</li> <li>- Măsura unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere să se arate că aria triunghiului este $32\sqrt{3}$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1 :</b> <b>Rezolvare:</b> În <math>\Delta ABC</math> dreptunghic avem:</p> $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \sin 30^\circ = \frac{AC}{16} \Leftrightarrow AC = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8, \quad \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \text{ de unde } \cos 30^\circ = \frac{AB}{16}, \text{ deci}$ $AC = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$ $\text{Aria } \Delta ABC \text{ va fi } \mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}.$ <p><b>Varianta 2:</b> În <math>\Delta ABC</math> dreptunghic, aplicăm teorema unghiului de <math>30^\circ</math> și obținem <math>AC = \frac{BC}{2} = 8</math>. Din teorema lui Pitagora rezultă: <math>AB^2 + AC^2 = BC^2</math>, deci <math>AB^2 = 16^2 - 8^2 = 192</math>, de unde <math>AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}</math> Calculăm aria <math>\Delta ABC</math> care va fi <math>\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}</math>.</p> <p><b>Varianta 3:</b> În <math>\Delta ABC</math> dreptunghic, avem <math>\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}</math>, de unde <math>\cos 30^\circ = \frac{AB}{16}</math>, deci <math>AC = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}</math>. Apoi calculăm aria <math>\Delta ABC</math> care va fi <math>\mathcal{A} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}}{2} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 16}{2} = 32\sqrt{3}</math>.</p>

<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formula ariei triunghiului dreptunghic/aria triunghiului oarecare (cea cu sinus).</li> <li>- Formulele pentru sinus și cosinus pentru un unghi ascuțit în triunghiul dreptunghic.</li> <li>- Teorema unghiului de <math>30^\circ</math>.</li> <li>- Teorema lui Pitagora.</li> <li>- Aflarea unui termen necunoscut al unui raport dintr-o egalitate.</li> <li>- Deprinderea de a efectua corect calculele cu numere.</li> </ul>
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot greși formulele sinusului și cosinusului unui unghi ascuțit în triunghiul dreptunghic.</li> <li>- Elevii scriu greșit valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiul de <math>30^\circ</math>.</li> <li>- Elevii scriu greșit formula ariei.</li> <li>- Elevii pot face greșeli de calcul la aflarea ariei.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii identifică greșit cateta opusă unghiului de <math>30^\circ</math></li> <li>- Elevii pot scrie greșit formula ariei triunghiului dreptunghic.</li> <li>- Elevii pot identifica eronat catetele și aplică greșit teorema lui <i>Pitagora</i>.</li> <li>- Elevii pot face greșeli de calcul la aflarea ariei.</li> </ul> <p><b>Varianta 3 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii scriu greșit formula cosinusului sau valoarea numerică a acestuia.</li> <li>- Elevii scriu greșit formula ariei unui triunghi oarecare ( cea cu sinus) sau greșesc la calculele numerice după înlocuirea valorilor</li> </ul>
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \sin 30^\circ = \frac{AC}{16} \Leftrightarrow AC = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8, \quad \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \text{ de unde } \cos 30^\circ = \frac{AB}{16}, \text{ deci } AC = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ $A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$ <p><b>Varianta 2:</b></p> <p>Scrie corect teorema unghiului de <math>30^\circ</math> și găsește <math>AC = \frac{BC}{2} = 8</math>.</p> <p>Aplică teorema lui Pitagora și află <math>AB^2 + AC^2 = BC^2</math>, deci <math>AB^2 = 16^2 - 8^2 = 192</math>, de unde <math>AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}</math></p> <div style="float: right; text-align: right;">                 3p 2p 1 p 2p             </div>

	<p>Finalizează cu calculul ariei <math>S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}</math></p> <p><b>Varianta 3:</b></p> <p><math>\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}</math>, de unde <math>\cos 30^\circ = \frac{AB}{16}</math>, deci <math>AC = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}</math></p> <p>Scrie formula ariei și finalizează calculul : <math>S = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}}{2} = \frac{8\sqrt{3} \cdot 16}{2} = 32\sqrt{3}</math></p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip (formulele trigonometrice ale unghiurilor ascuțite ale triunghiului, tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de 45°, 30°, 60° etc);</li> <li>- să reamintească formula ariei triunghiului dreptunghic;</li> <li>- să recapituleze formulele pentru aria triunghiului oarecare;</li> <li>- să reamintească și alte teoreme importante în triunghiul dreptunghic – teorema unghiului de 30°, teorema medianei, teorema lui Pitagora, teorema înălțimii și a catetei, formula înălțimii în triunghiul dreptunghic, localizarea centrului circumscris unui triunghi dreptunghic, formula razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic (<math>\frac{\text{ipotenuza}}{2}</math>);</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea unei variante mai simple de rezolvare, să puncteze greșelile de calcul care pot interveni și modalitățile de abordare alternativă;</li> <li>- să avertizeze elevii privind depunerea la corectare dacă sunt omise etape esențiale sau dacă sunt greșeli în rezolvare.</li> </ul>



	<b>Pentru elev</b>	<i>Este important ca elevul:</i> <ul style="list-style-type: none"><li>- să recunoască tipul de triunghi (dreptunghic, isoscel, etc.) pe baza datelor problemei pentru a putea stabili strategia de rezolvare;</li><li>- să recapituleze teoremele specifice triunghiurilor particulare (dreptunghic, dreptunghic cu unghi de <math>30^\circ</math>, dreptunghic isoscel, echilateral, isoscel etc.),</li><li>- să recapituleze și să scrie corect formule pentru ariile diverselor tipuri de triunghiuri;</li><li>- să știe să identifice corect catetele și ipotenuza unui triunghi dreptunghic pe baza enunțului problemei;</li><li>- să cunoască valoarea sumei măsurilor unghiurilor în triunghi și să efectueze corect calcule cu unghiuri exprimate în grade.</li></ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este specific unității de învățare <i>Aplicații ale trigonometriei în geometrie-rezolvarea triunghiurilor, clasa a IX-a</i> (formulele ariilor și alte teoreme specifice triunghiurilor particulare fiind reluate din gimnaziu – clasa a VII-a). Asemănător se pot rezolva itemi de următoarele tipuri: 1. se cere determinarea celorlalte 2 laturi sau perimetrul într-un triunghi dreptunghic cu unghi de $30^\circ$ , știind doar lungimea uneia dintre laturi; 2. se cere aflarea ariei unui triunghi dreptunghic isoscel, știind ipotenuza; 3. se cere aflarea ariei într-un triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit de $30^\circ$ , știind mediana corespunzătoare ipotenuzei; 4. se cere să se verifice dacă un triunghi dreptunghic este și isoscel, pe baza unor informații suplimentare (lungimi de laturi, unghiuri ascuțite, etc.) 5. se cere aflarea unei laturi a unui triunghi dreptunghic, dacă se cunoaște aria sa și încă un element/relație.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>AB = 4</math> și măsura unghiului <math>C</math> egală cu <math>30^\circ</math>. Aflați aria triunghiului.</li><li>2. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>AB = 6</math> și măsura unghiului <math>B</math> egală cu <math>60^\circ</math>. Aflați perimetrul triunghiului.</li><li>3. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>BC = 8</math> și măsura unghiului <math>C</math> egală cu <math>45^\circ</math>. Aflați aria triunghiului.</li><li>4. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>BC = 4</math> și măsura unghiului <math>B</math> egală cu <math>45^\circ</math>. Aflați perimetrul triunghiului.</li></ol>	



Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 6 - model 2024
<b>Item</b>	Arătați că $\sqrt{2} \cdot (\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) \cdot \sin 30^\circ = 1$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor tabele și formule pentru calcule în trigonometrie și geometrie.	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Avem de efectuat operații cu funcții trigonometrice asociate unor valori principale/măsurii de unghiuri din cadranul I.
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere să se arate că rezultatul calculului din membrul stâng al egalității este 1.</i>
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b> Prima etapă a rezolvării presupune utilizarea valorilor funcțiilor trigonometrice precizate în enunț și nu presupune variante multiple de lucru. Folosind tabelul funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>, scriem că:  <math display="block">\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}</math>                     Etapa efectivă de calcul implică mai multe variante de lucru.</p> <p><b>Varianta 1</b> Înlocuim aceste valori în egalitatea din membrul stâng și obținem:  <math display="block">\sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1</math>, ceea ce trebuia arătat.</p> <p><b>Observație:</b> calculele au fost efectuate succesiv astfel: adunarea fracțiilor cu același numitor din paranteză, simplificarea cu 2 a rezultatului obținut în paranteză, înmulțirea celor 2 radicali și extragerea radicalului obținut iar, în final, simplificarea lui 2 din produsul rămas.</p> <p><b>Varianta 2</b> Înlocuim aceste valori în egalitatea din membrul stâng și obținem:  <math display="block">\sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \left( \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \left( \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = (1+1) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1</math></p>

		<p><b>Observație:</b> calculele au fost efectuate succesiv astfel : distribuirea înmulțirii lui <math>\sqrt{2}</math> față de termenii adunării din paranteză, înmulțirea radicalilor cu fracțiile din paranteză și extragerea <math>\sqrt{4}=2</math>, obținută la numărător, simplificarea cu 2 a rezultatelor obținute în paranteză, simplificarea lui 2 din produsul rămas.</p> <p>Ambele variante de rezolvare pot fi redactate și sub forma unor egalități echivalente și finalizate cu concluzia „egalitate adevărată”.</p> <p><b>Observație:</b> ca alternativă la memorarea imaginilor funcțiilor trigonometrice asociate valorilor principale, se poate face legătura cu triunghiurile dreptunghice particulare: cel isoscel, din care exprimarea ca raport de lungimi de laturi se obțin imaginile pentru <math>45^\circ</math>, respectiv triunghiul dreptunghic cu un unghi de <math>30^\circ</math>, celălalt unghi fiind de <math>60^\circ</math>.</p>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>.</li> <li>- Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale și regulile de calcul cu numere reale (adunarea și înmulțirea fracțiilor, înmulțirea radicalilor).</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie greșit valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>.</li> <li>- Elevii pot face greșeli la efectuarea calculelor: să „adune” greșit radicalii <math>\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4}</math>, să „adune” greșit fracțiile <math>\frac{2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{4}{4}</math> (la prima variantă), să distribuie greșit factorul <math>\sqrt{2}</math> doar primului termen din paranteză etc.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b> Pentru scrierea corectă a valorilor funcțiilor trigonometrice care apar în cerință:</p> $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ <p>Pentru efectuarea corectă a etapelor de calcul succesive, La prima variantă: calculul corect în paranteză și înmulțirea radicalilor, apoi finalizare. La a doua variantă: distribuie corectă și efectuarea corectă a înmulțirii radicalilor, apoi finalizare.</p>	<p>3p</p> <p>(1p,1p,1p)</p> <p>2p</p> <p>(1p,1p)</p>
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapă de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să amintească elevilor formulele trigonometrice ale unghiurilor ascuțite în triunghiul dreptunghic;</li> <li>- să ofere elevilor variante pentru „fixarea” în memorie a acestor valori (legătura cu teorema unghiului de <math>30^\circ</math>, de ce <math>\sin 45^\circ = \cos 45^\circ</math>, simetria rezultatelor <math>\sin 30^\circ = \cos 60^\circ</math> și <math>\sin 60^\circ = \cos 30^\circ</math>;</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să reamintească și modul de identificare a funcțiilor trigonometrice din cadranele II, III și IV – formulele de reducere la primul cadran, reprezentarea pe cercul trigonometric, reamintirea formulei fundamentale a trigonometriei, aflarea funcțiilor <math>tg</math> și <math>ctg</math> folosind <math>sin</math> și <math>cos</math>;</li> <li>- să reamintească elevilor și posibilitatea exprimării măsurilor unghiurilor în radiani și modul de transformare al gradelor în radiani și invers;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de efectuare a calculelor și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în calculul numeric, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să punteze greșelile de calcul care pot interveni și modalitățile de abordare alternativă. Să avertizeze elevii privind depunctarea la corectare dacă sunt omise/neglijate etape esențiale sau dacă sunt greșeli în rezolvare.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze tabelul de valori al funcțiilor trigonometrice din cadranul I și alte formule trigonometrice importante;</li> <li>- să aibă deprinderi de efectuare corectă a operațiilor cu fracții și radicali, să cunoască ordinea corectă de efectuare a operațiilor.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este specific domeniul de conținut/conținutului <i>Elemente de trigonometrie-funcții trigonometrice, clasa a IX-a</i> (valori trigonometrice cunoscute încă din gimnaziu din clasa a VII-a).                  Asemănător se pot rezolva itemi de următoarele tipuri:                  1. în care să se ceară demonstrarea unor identități cu funcții trigonometrice (<math>sin</math>, <math>cos</math>, <math>ctg</math>) pentru unghiuri din cadranele II, III sau IV, sau să fie necesară cunoașterea și folosirea formulei trigonometrice fundamentale: <math>\sin^2 a + \cos^2 a = 1</math>;                  2. în care se cere să se calculeze sume și produse de funcții trigonometrice diverse ( nu doar cele pentru <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>).</p>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Să se demonstreze că <math>\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot \sin 30^\circ - \sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = 1</math>. (simulare BAC 2023)</li> <li>2. Arătați că <math>(1 + 2 \cdot \cos 60^\circ) \cdot \sin 30^\circ = 1</math>. (rezervă BAC august 2023)</li> <li>3. Se consideră <math>x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)</math> astfel încât <math>\cos x = \frac{1}{4}</math>. Arătați că <math>\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}</math>. (BAC rezervă iulie 2021)</li> <li>4. Să se demonstreze că <math>\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ - \sin 150^\circ = 0</math>.</li> <li>5. Să se calculeze <math>\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 90^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ + \cos 170^\circ</math>.</li> </ol>	



	6. Se dă expresia $E(x) = \sin x + \cos \frac{x}{2}$ . Să se calculeze $E(\pi) + E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ . 7. Să se calculeze $\cos 0^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \dots \cdot \cos 180^\circ$ .
--	---

Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 6 – simulare 2023
<b>Item</b>	Arătați că $\sqrt{3} \sin 45^\circ + 2 \sin 30^\circ - \sqrt{2} \cos 30^\circ = 1$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor tabele și formule pentru calcule în trigonometrie și geometrie.	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Avem efectuat operații cu funcții trigonometrice ale unor valori principale/măsurii de unghiuri din cadranul I.
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere să se arate că rezultatul calculului din membrul stâng al egalității este 1.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b>            Prima etapă a rezolvării presupune înlocuirea valorilor funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor precizate în enunț, și nu presupune variante multiple de lucru.            Folosind tabelul funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>, scriem că:</p> $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ <p>Înlocuim aceste valori în egalitatea din membrul stâng și obținem:</p> $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ ceea ce trebuia arătat.}$ <p><i>Observație:</i> calculele au fost efectuate succesiv astfel: înmulțirea celor 2 radicali, adunarea fracțiilor cu același numitor, iar în final, simplificarea cu 2.</p>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>.</li> <li>- Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale și regulile de calcul cu numere reale (adunarea și înmulțirea fracțiilor, înmulțirea radicalilor).</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie greșit valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>.</li> <li>- Elevii pot face greșeli la efectuarea calculelor: să înmulțească greșit radicalii, să înmulțească numărul din fața fracției atât cu numărătorul cât și cu numitorul.</li> </ul>	



<b>Explicații privind baremul de notare:</b> ( <i>cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului</i> )	<b>Punctaj în barem: 5p</b> Pentru scrierea corectă a valorilor funcțiilor trigonometrice care apar în cerință $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Pentru efectuarea corectă a etapelor de calcul succesiv Calculul corect și înmulțirea radicalilor, apoi finalizare.		3p (1p,1p,1p)  2p (1p,1p)
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	Etapa de predare-învățare: Este important ca profesorul: <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze cu elevii formulele trigonometrice ale unghiurilor ascuțite în triunghiul dreptunghic, care reprezintă o parte esențială a înțelegerii geometriei și a relațiilor trigonometrice;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de efectuare a calculelor și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să prezinte elevilor greșelile care pot să apară în calculul numeric, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât aceștia să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> <li>- să punteze greșelile de calcul care pot interveni și modalitățile de abordare alternativă;</li> <li>- să avertizeze elevii privind depunctarea la corectare dacă sunt sărite etape esențiale sau dacă sunt greșeli în rezolvare.</li> </ul>	
	<b>Pentru elev</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Este important ca elevul:</li> <li>- să învețe tabelul de valori al funcțiilor trigonometrice din cadranul I și alte formule trigonometrice importante;</li> <li>- să efectueze corect operațiile cu fracții și radicali;</li> <li>- să utilizeze corect ordinea efectuării operațiilor.</li> </ul>	
<b>Considerente finale</b>	Itemul este specific unității de învățare <i>Elemente de trigonometrie - funcții trigonometrice, clasa a IX-a</i> (valori trigonometrice cunoscute încă din gimnaziu din clasa a VII-a). Asemănător se pot rezolva itemi de următoarele tipuri 1. în care să se ceară demonstrarea unor identități cu funcții trigonometrice ( <i>sin, cos, ctg</i> ) pentru valori din cadranele II, III sau IV, sau să fie necesară cunoașterea și folosirea formulei fundamentale a trigonometriei $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ 2. în care să se calculeze sume și produse de funcții trigonometrice diverse ( nu doar cele pentru $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ )		

**Exemple de itemi de antrenament**

1. Să se calculeze  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 150^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$ .
2. Să se calculeze  $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$ .
3. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{3}{5}$  și  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.
4. Să se calculeze  $\sin 160^\circ - \sin 20^\circ$ .
5. Să se calculeze  $\sin 45^\circ - \sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ .
6. Să se calculeze  $\sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ$ .



Clasa: a IX-a	Subiectul: I	Problema: 6 - sesiunea specială 2023
<b>Item</b>	Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$ , cu $AB = 4$ și măsura unghiului $C$ egală cu $45^\circ$ . Arătați că aria triunghiului $ABC$ este egală cu 8.	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului. Determinarea măsurii unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice.	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- lungimea unei catete;</li> <li>- măsura unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere să se arate că aria triunghiului <math>ABC</math> este egală cu 8.</i>
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1 :</b>  <b>Rezolvare:</b>                      În <math>\Delta ABC</math> avem :  <math>m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + m(\widehat{B}) + 45^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{B}) = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ</math>                      Deci <math>m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) \Leftrightarrow \Delta ABC</math> isoscel <math>\Leftrightarrow AB = AC = 4</math>                      Aria <math>\Delta ABC</math> va fi <math>\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8</math></p> <p><b>Varianta 2:</b>                      În <math>\Delta ABC</math> dreptunghic avem : <math>tgC = \frac{AB}{AC}</math>, de unde  <math>tg45^\circ = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow 1 = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow AB = AC = 4</math>                      Aria <math>\Delta ABC</math> va fi <math>\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8</math></p>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Valoarea sumei măsurilor unghiurilor într-un triunghi.</li> <li>- Proprietățile triunghiului dreptunghic isoscel.</li> <li>- Formula ariei triunghiului dreptunghic.</li> <li>- Formula tangentei unui unghi ascuțit în triunghiul dreptunghic.</li> <li>- Aflarea unui termen necunoscut al unui raport dintr-o egalitate.</li> </ul>	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<b>Varianta 1 de rezolvare:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie greșit formula ariei triunghiului dreptunghic.</li> <li>- Elevii pot identifica eronat catetele.</li> <li>- Elevii pot face greșeli de calcul la aflarea ariei.</li> </ul> <b>Varianta 2 de rezolvare:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot greși formula tangentei unui unghi ascuțit în triunghiul dreptunghic.</li> <li>- Elevii scriu greșit valoarea tangentei unghiului de <math>45^\circ</math>.</li> <li>- Elevii pot face greșeli de calcul la aflarea ariei.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> ( <i>cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului</i> )	<b>Punctaj în barem: 5p</b>  <b>Varianta 1:</b> Explică de ce triunghiul e isoscel, scrie $AB = AC$ , concluzionează că $AC = 4$ Scrierea corectă a formulei ariei și după înlocuirea valorilor catetelor finalizează calculul.  <b>Varianta 2:</b> Scrie corect exprimarea tangentei unghiului $C$ ca raport de lungimi de laturi. Înlocuiește valorile cunoscute în formula tangentei ( $tg45^\circ = 1$ , $AB = 4$ ) Deduce corect $AC = 1$ . Scrierea corectă a formulei ariei și după înlocuirea valorilor catetelor finalizează calculul.	1p,1p,1p 2p   1 p 1p 1p 2p
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să amintească noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip (formulele trigonometrice ale unghiurilor ascuțite ale triunghiului dreptunghic, tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de <math>45^\circ</math>, <math>30^\circ</math>, <math>60^\circ</math>, suma măsurilor unghiurilor unui triunghi;</li> <li>- să reamintească formula ariei triunghiului dreptunghic;</li> <li>- să reamintească și alte teoreme importante în triunghiul dreptunghic – teorema unghiului de <math>30^\circ</math>, teorema medianei, teorema lui Pitagora, teorema înălțimii și a catetei, formula înălțimii în triunghiul dreptunghic, localizarea centrului circumscris unui triunghi dreptunghic, formula razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic (<math>\frac{\text{ipotenuza}}{2}</math>);</li> <li>- să analizeze și situația unui triunghi isoscel sau echilateral în care, prin trasarea înălțimii corespunzătoare bazei să se obțină triunghiuri dreptunghice în care se pot utiliza metode specifice triunghiului dreptunghic;</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să stabilească clar care este ipoteza problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date.</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate/,</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, să puncteze greșelile de calcul care pot interveni și modalitățile de abordare alternativă. Să avertizeze elevii privind depunctarea la corectare dacă sunt omise etape esențiale sau dacă sunt greșeli în rezolvare.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recunoască tipul de triunghi – dreptunghic, isoscel, etc pe baza datelor problemei pentru a putea stabili strategia de rezolvare;</li> <li>- să recapituleze teoremele specifice triunghiurilor particulare (dreptunghic , dreptunghic cu unghi de 30°, dreptunghic isoscel, echilateral, isoscel etc);</li> <li>- să recapituleze formulele ariilor diverselor tipuri de triunghiuri;</li> <li>- să identifice corect catetele și ipotenuza unui triunghi dreptunghic pe baza enunțului problemei;</li> <li>- să cunoască valoarea sumei măsurilor unghiurilor în triunghi;</li> <li>- să efectueze corect calcule cu unghiuri exprimate în grade.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este specific domeniului de conținut/conținutului <i>Aplicații ale trigonometriei în geometrie-rezolvarea triunghiurilor, clasa a IX-a</i> (formulele ariilor și alte teoreme specifice triunghiurilor particulare fiind reluate din gimnaziu – clasa a VII-a). Asemănător se pot rezolva itemi de următoarele tipuri în care se cere:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. determinarea celorlalte două laturi sau perimetrul într-un triunghi dreptunghic cu unghi de 30°, știind doar una dintre laturi;</li> <li>2. aria unui triunghi dreptunghic isoscel știind ipotenuza;</li> <li>3. aria într-un triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit de 30°, știind mediana corespunzătoare ipotenuzei, etc;</li> <li>4. să se verifice dacă un triunghi dreptunghic este și isoscel pe baza unor informații suplimentare (lungimi de laturi, unghiuri ascuțite etc.);</li> <li>5. aflarea unei laturi în triunghiul dreptunghic, dacă se cunoaște aria sa și încă o relație.</li> </ol>	

**Exemple de itemi de  
antrenament**

1. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 4$  și măsura unghiului  $C$  egală cu  $30^\circ$ . Aflați aria triunghiului.
2. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 6$  și măsura unghiului  $B$  egală cu  $60^\circ$ . Aflați perimetrul triunghiului.
3. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 8$  și măsura unghiului  $C$  egală cu  $45^\circ$ . Aflați aria triunghiului.
4. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 4$  și măsura unghiului  $B$  egală cu  $45^\circ$ . Aflați perimetrul triunghiului.
5. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu măsura unghiului  $C$  egală cu  $30^\circ$ . Se știe că  $AM = 6$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $BC$ . Demonstrați că  $AB = 6$ .
6. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu măsura unghiului  $C$  egală cu  $60^\circ$ . Se știe că  $AM = 6$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $BC$ . Aflați aria triunghiului.
7. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $AC = \sqrt{2}$  și  $BC = 2$ . Arătați că triunghiul este isoscel. (BAC iulie 2023)
8. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu aria egală cu 50 și  $AC = 5$ . Arătați că lungimea laturii  $AB$  este egală cu 20. (BAC august 2023)
9. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 16$  și măsura unghiului  $B$  egală cu  $30^\circ$ . Arătați că aria triunghiului  $ABC$  este  $32\sqrt{3}$ . (model BAC 2023)

Clasa: a IX-a		Subiectul: I	Problema: 6 - iulie 2023
Item	Se consideră triunghiul $ABC$ , dreptunghic în $A$ , cu $AC = \sqrt{2}$ și $BC=2$ . Arătați că triunghiul $ABC$ este isoscel.		
Competența	Utilizarea unor elemente de trigonometrie în rezolvarea triunghiului. Determinarea măsurii unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice.		
Rezolvare	Ce știm?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lungimea unei catete</li> <li>- Lungimea ipotenuzei</li> <li>- Măsura subînțeleasă (implicită) a unghiului <math>A</math> al triunghiului <math>ABC</math>, dreptunghic în <math>A</math>.</li> </ul>	
	Ce se cere?	Se cere să se arate că triunghiul $ABC$ este isoscel.	
	Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p>În triunghiul <math>ABC</math>, dreptunghic în <math>A</math>, din teorema lui <i>Pitagora</i> rezultă</p> $AB^2 = BC^2 - AC^2$ $AB^2 = 2^2 - \sqrt{2}^2$ $AB^2 = 4 - 2$ $AB^2 = 2$ $AB = \sqrt{2}$ <p>Cum <math>AB = \sqrt{2}</math> și <math>AC = \sqrt{2}</math>, deci <math>AB = AC</math>, rezultă că triunghiul <math>ABC</math> este (și) isoscel.</p>	
Noțiuni teoretice necesare	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Teorema lui Pitagora.</li> <li>- Proprietățile triunghiului dreptunghic isoscel.</li> <li>- Deprinderea de a efectua corect calculele cu numere.</li> </ul>		
Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare	<p><b>Variantă de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot scrie greșit teorema lui Pitagora.</li> <li>- Elevii pot identifica eronat catetele.</li> <li>- Elevii pot face greșeli de calcul la aflarea catetei.</li> </ul>		
Explicații privind baremul de notare: (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p>Utilizează teorema lui Pitagora, concluzionează că <math>AB = \sqrt{2}</math></p> <p>Scrierea corectă a Teoremei lui Pitagora și după înlocuirea valorilor finalizează calculul <math>AB=AC=\sqrt{2}</math>, deci triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</p>		<p>1p,1p,1p 2p</p>

De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să pună accent pe noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să reamintească elevilor teorema lui Pitagora;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să avertizeze elevii în legătură cu posibilele greșeli de calcul și modalitățile alternative de abordare în rezolvarea problemelor, precum și consecințele depunctării în cazul omisiunii etapelor esențiale sau al greșelilor în rezolvare.</li> </ul>
	Pentru elev	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recunoască tipul de triunghi (dreptunghic, isoscel, etc), pe baza datelor problemei pentru a putea stabili strategia de rezolvare;</li> <li>- să recapituleze teoremele specifice triunghiurilor;</li> <li>- să identifice corect catetele și ipotenuza unui triunghi dreptunghic pe baza enunțului problemei</li> </ul>
Considerente finale	<p>Itemul este specific domeniului de conținut/conținutului <b>Aplicații ale trigonometriei în geometrie-rezolvarea triunghiurilor</b>, clasa a IX-a (formulele ariilor și alte teoreme specifice triunghiurilor particulare fiind reluate din gimnaziu – clasa a VII-a). Asemănător se pot rezolva itemi de următoarele tipuri în care se cere:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. determinarea perimetrului triunghiului.</li> <li>2. aflarea ariei unui triunghi dreptunghic isoscel știind ipotenuza</li> <li>3. aflarea ariei unui triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit de <math>30^\circ</math>, știind mediana corespunzătoare ipotenuzei, etc.</li> <li>4. verificarea proprietății triunghiului dreptunghic care poate fi și isoscel pe baza unor informații suplimentare (lungimi de laturi, unghiuri ascuțite etc.)</li> </ol>	
Exemple de itemi de antrenament	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>AC = 5</math> și <math>BC = 10</math>. Aflați aria triunghiului.</li> <li>2. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>BC = 6</math> și <math>AB = 3</math>. Aflați aria triunghiului.</li> <li>3. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, cu <math>BC = 8</math> și măsura unghiului <math>C</math> egală cu <math>30^\circ</math>. Aflați aria triunghiului.</li> <li>4. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>, măsura unghiului <math>B</math> egală cu <math>60^\circ</math> și <math>BC = 12</math>. Aflați aria triunghiului.</li> <li>5. Se consideră triunghiul <math>ABC</math> dreptunghic în <math>A</math>. Se știe că <math>AB = 6</math>, <math>BC = 3\sqrt{6}</math>. Aflați perimetrul triunghiului.</li> </ol>	





Propuneri de itemi pentru exersare\*, clasa a IX-a (similari subiectului I Bacalaureat sau selectați din variantele publice)

**Nr. crt.    Itemi exersare****A.    ALGEBRĂ**

1. Arătați că  $(1-0,2):2+0,3\cdot 2=1$
2. Arătați că  $2,5+5\cdot(1-0,7)=4$ .
3. Arătați că  $(8+0,1):9+0,7\cdot 3=3$ .
4. Arătați că  $(7,2+0,8):5+0,2\cdot 2=2$ .
5. Arătați că  $0,6\cdot 8+(10-0,4):3=8$ .
6. Arătați că  $(3-0,2):2+0,3\cdot 2=2$ .
7. Arătați că  $3,4+7\cdot(1-0,2)=9$ .
8. Arătați că  $(8+2,8):6+4\cdot 0,8=5$ .
9. Arătați că  $(5,4+0,6):5+0,7\cdot 4=4$ .
10. Arătați că  $(4-0,2):2+0,6\cdot 2=3,1$ .
11. Arătați că  $4\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}=1$ . (rezervă august, 2023)
12. Arătați că  $3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=4$ . (examen iunie, 2023)
13. Arătați că  $6\cdot\left(2+\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}=15$ .
14. Arătați că  $\left(3+\frac{1}{7}\right)\cdot 4+\frac{10}{7}=14$ .
15. Arătați că  $2\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)+\frac{14}{8}=3$ .
16. Arătați că  $\left(5-\frac{1}{3}\right)\cdot 4+\frac{1}{3}=19$ .
17. Arătați că  $4\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=5$ .
18. Arătați că  $\left(6-\frac{3}{5}\right)\cdot 2-\frac{4}{5}=10$ .
19. Arătați că  $2\cdot\left(1-\frac{2}{7}\right)-\frac{3}{7}=1$ .
20. Arătați că  $\left(9+\frac{1}{5}\right)\cdot 2+\frac{8}{5}=20$ .
21. Arătați că  $3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=4$ . (examen iunie, 2023)
22. Arătați că  $6\cdot\left(2+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}=13$ .

23. Arătați că  $\left(2 + \frac{1}{7}\right) \cdot 3 - \frac{10}{7} = 5$ .
24. Arătați că  $4 \cdot \left(4 - \frac{3}{8}\right) + \frac{20}{8} = 17$ .
25. Arătați că  $\left(5 - \frac{2}{3}\right) \cdot 2 + \frac{1}{3} = 9$ .
26. Arătați că  $7 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{10}{3} = 6$ .
27. Arătați că  $\left(5 - \frac{3}{5}\right) \cdot 2 - \frac{4}{5} = 8$ .
28. Arătați că  $3 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) - \frac{4}{7} = 2$ .
29. Arătați că  $\left(6 + \frac{1}{5}\right) \cdot 2 + \frac{3}{5} = 13$ .
30. Arătați că  $\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 4\right) = 9$ .
31. Arătați că  $7 \cdot \left(2 - \frac{2}{7}\right) - 2 = 10$ .
32. Arătați că  $\left(4 + \frac{1}{5}\right) \cdot 3 - \frac{38}{5} = 5$ .
33. Arătați că  $6 \cdot \left(1 + \frac{13}{12}\right) - \frac{1}{2} = 12$ .
34. Arătați că  $\left(1 + \frac{5}{6}\right) \cdot 2 + \frac{7}{3} = 6$ .
35. Arătați că  $(2-0,2):2 + 2,1=3$
36. Arătați că  $(1+0,3) \cdot 2 + 0,4=3$
37. Arătați că  $(6,4+1,6):5 + 0,2 \cdot 2=2$
38. Arătați că  $(11-1,4):3 + 0,8 \cdot 6=8$ .
39. Arătați că  $(5,2-1):3 + 2 \cdot 0,8 = 3$ .
40. Arătați că  $(2+1,8):2 + 2,1 = 4$ .
41. Calculați termenul  $a_4$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 7$  și  $a_6 = 17$ .
42. Calculați termenul  $a_2$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 2$  și  $a_6 = 22$ .
43. Calculați termenul  $a_3$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_5 = 13$  și  $a_7 = 19$ .
44. Calculați termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_4 = 9$  și  $a_8 = 17$ .
45. Calculați termenul  $a_8$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 2$  și  $a_5 = 12$ .
46. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 8$  și  $a_4 = 26$ .
47. Determinați produsul primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 2$  și  $a_4 = 8$ .
48. Determinați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 15$  și  $a_6 = 30$ .

49. Determinați produsul primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 4$  și  $a_5 = 10$ .
50. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 11$  și  $a_4 = 44$ .
51. Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 3$  și  $a_2 = 6$ .
52. Determinați termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 18$  și  $a_4 = 24$ .
53. Determinați termenul  $a_2$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_4 = 10$  și  $a_5 = 13$ .
54. Determinați termenul  $a_3$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_6 = 13$  și  $a_7 = 19$ .
55. Determinați termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_5 = 40$  și  $a_6 = 48$ .
56. Determinați suma primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 6$  și  $a_3 = 10$ .
57. Determinați suma primilor șase termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 3$  și  $a_2 = 5$ .
58. Determinați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 22$  și  $a_3 = 33$ .
59. Determinați produsul primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 5$  și  $a_4 = 7$ .
60. Determinați produsul primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 5$  și  $a_3 = 8$ .
61. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5x + 3$ . Arătați că  $f(-1) - f(1) = -10$ .
62. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4 - x$ . Arătați că  $f(0) - f(1) = 1$ .
63. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2 - x$ . Arătați că  $f(1) - f(-2) = -3$ .
64. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$ . Arătați că  $f(1) - f(-1) = 4$ .
65. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - 7$ . Arătați că  $f(3) - f(2) = 1$ .
66. Se consideră funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 3$  și  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 6 - x$ . Arătați că  $f(1) - g(1) = -1$ .
67. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - 2$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 0$ .
68. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 5$ .
69. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 - x$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(m) = 4$ .

70. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x + 1$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(m) = -3$ .
71. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 4$ . Determinați numărul real  $b$  pentru care  $f(b) = -2$ .
72. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3 - x$ . Determinați numărul real  $c$  pentru care  $f(c) = 9$ .
73. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x - 2$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(a - 1, a + 5)$  aparține graficului funcției  $f$ .
74. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -2x + 11$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(a + 1, -7a)$  aparține graficului funcției  $f$ .
75. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(a + 1, a - 1)$  aparține graficului funcției  $f$ .
76. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4 - x$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(a + 1, a - 4)$  aparține graficului funcției  $f$ .
77. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x + 4$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care punctul  $A(m + 1, 1 - 3m)$  aparține graficului funcției  $f$ .
78. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3 - 2x$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(a, a + 6)$  aparține graficului funcției  $f$ .
79. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 5x + 4$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x + m$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(-1) = g(-1)$ .
80. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 6$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x - m$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(2) = g(2)$ .
81. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 6x + 9$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = m - x$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(3) = g(3)$ .
82. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - x - 2$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 2x + m$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(1) = g(1)$ .
83. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 10x + 9$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 3m + x$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(-1) = g(-1)$ .
84. Se consideră funcțiile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$  și  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = -x - 2m$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(2) = g(2)$ .
85. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 2$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 0$ .
86. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4x + 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 7$ .
87. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 - 2x$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(m) = 3$ .

88. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -2x + 11$ . Determinați numărul real  $m$  pentru care  $f(m) = -3$ .
89. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -5x + 4$ . Determinați numărul real  $b$  pentru care  $f(b) = -21$ .
90. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 3$ . Determinați numărul real  $c$  pentru care  $f(c) = 9$ .

**B. GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE**

91. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 8$  și aria egală cu 16. Arătați că  $AC = 4$ .
92. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 8$  și aria egală cu 32. Arătați că triunghiul este isoscel.
93. Se consideră triunghiul  $ABC$  isoscel, dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 6$ . Arătați că aria triunghiului este 9.
94. Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$  cu perimetrul egal cu 12. Să se arate că aria triunghiului este  $4\sqrt{3}$ .
95. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 8$  și aria egală cu 24. Aflați lungimea ipotenuzei triunghiului.
96. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 4$  și măsura unghiului  $C$  egală cu  $30^\circ$ . Aflați aria triunghiului.
97. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 6$  și măsura unghiului  $B$  egală cu  $60^\circ$ . Aflați perimetrul triunghiului.
98. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 8$  și măsura unghiului  $C$  egală cu  $45^\circ$ . Aflați aria triunghiului.
99. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 4$  și măsura unghiului  $B$  egală cu  $45^\circ$ . Aflați perimetrul triunghiului.
100. Să se demonstreze că  $\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot \sin 30^\circ - \sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = 1$  (simulare BAC 2023)
101. Arătați că  $(1 + 2 \cdot \cos 60^\circ) \cdot \sin 30^\circ = 1$ . (rezervă BAC august 2023)
102. Se consideră  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\cos x = \frac{1}{4}$ . Arătați că  $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ . (BAC rezervă iulie 2021)
103. Să se demonstreze că  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ - \sin 150^\circ = 0$ .
104. Să se calculeze  $\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 90^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ + \cos 170^\circ$ .
105. Se dă expresia  $E(x) = \sin x + \cos \frac{x}{2}$ . Să se calculeze  $E(\pi) + E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .
106. Să se calculeze  $\cos 0^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \dots \cdot \cos 180^\circ$ .
107. Să se calculeze  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 150^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$ .
108. Să se calculeze  $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$ .
109. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{3}{5}$  și  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.
110. Să se calculeze  $\sin 160^\circ - \sin 20^\circ$ .
111. Să se calculeze  $\sin 45^\circ - \sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ .
112. Să se calculeze  $\sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ$ .
113. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu măsura unghiului  $C$  egală cu  $30^\circ$ . Se știe că  $AM = 6$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $BC$ . Demonstrați că  $AB = 6$ .
114. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu măsura unghiului  $C$  egală cu  $60^\circ$ . Se știe că  $AM = 6$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $BC$ . Aflați aria triunghiului.





115. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $AC = \sqrt{2}$  și  $BC = 2$ . Arătați că triunghiul este isoscel. (BAC iulie 2023)
116. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu aria egală cu 50 și  $AC = 5$ . Arătați că lungimea laturii  $AB$  este egală cu 20. (BAC august 2023)
117. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 16$  și măsura unghiului  $B$  egală cu  $30^\circ$ . Arătați că aria triunghiului  $ABC$  este  $32\sqrt{3}$ . (model BAC 2023)
118. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $AC = 5$  și  $BC = 10$ . Aflați aria triunghiului.
119. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 6$  și  $AB = 3$ . Aflați aria triunghiului.
120. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , cu  $BC = 8$  și măsura unghiului  $C$  egală cu  $30^\circ$ . Aflați aria triunghiului.
121. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , măsura unghiului  $C$  egală cu  $30^\circ$  și  $BC = 12$ . Aflați aria triunghiului.
122. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ . Se știe că  $AB = 6$ ,  $BC = 3\sqrt{6}$ . Aflați perimetrul triunghiului.

*\*Lista este constituită prin reunirea tuturor itemilor exemplificați la fiecare dintre problemele comentate, asociate clasei a IX-a, pentru a facilita utilizarea acestora de către cadrele didactice și elevi în pregătirea examenului național de bacalaureat*

*„Evident”  
este cel mai periculos cuvânt  
din matematică.  
Eric Temple Bell*

### III.2. Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a X-a

Utilizarea, în cadrul unor activități de învățare/recapitulare, a unor itemi selectați din subiectul I, în corespondență cu noțiuni/concepte studiate în clasele a X-a, din instrumentele de evaluare la proba de matematică a examenului național de bacalaureat, la simulările acestui examen sau ca modele pentru această probă.





**Itemi selectați pentru clasa a X-a (din cadrul subiectului I, instrumente de evaluare asociate examenului, simulării sau modelelor de bacalaureat), care sunt prezentați în cadrul subsecțiunii dedicate anului de studiu**

Nr. crt.	Item	Selectat din:
1.	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4 x + \log_4(3x) = \log_4 12$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2023)</a>
2.	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x - 4) = \log_2 4$ .	<a href="#">Bacalaureat (sesiunea specială 2023)</a>
3.	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x + 1) = \log_7 9$ .	<a href="#">Bacalaureat (iulie 2023)</a>
4.	Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $7^{x+3} = 49^x$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare martie 2023)</a>
5.	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-3} = 3^x$ .	<a href="#">Bacalaureat (rezervă august 2023)</a>
6.	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x} = 5^{2+x}$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
7.	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x - 8} = 1$ .	<a href="#">Bacalaureat (august 2023)</a>
8.	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2024)</a>
9.	Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.	<a href="#">Bacalaureat (model 2023)</a>
10.	Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să verifice inegalitatea $n^2 \leq 23$ .	<a href="#">Bacalaureat (rezervă august 2023)</a>
11.	Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , acesta să verifice inegalitatea $2n \geq 9$ .	<a href="#">Bacalaureat (august 2023)</a>
12.	Calculați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să verifice inegalitatea $n + 9 \leq 15$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
13.	După o ieftinire cu 30%, un produs costă 210 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.	<a href="#">Bacalaureat (simulare martie 2023)</a>
14.	Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.	<a href="#">Bacalaureat (sesiunea specială 2023)</a>
15.	După o scumpire cu 50%, prețul unui obiect este de 225 lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2024)</a>
16.	În reperul cartezian $xOy$ , se consideră punctele $A(-3, 2)$ , $B(1, 4)$ și $C(6, 0)$ . Să se determine distanța dintre mijloacele segmentelor $AB$ și $OC$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2023)</a>



17.	În reperul cartezian $xOy$ , se consideră punctele $A(0,5)$ și $B(2,-1)$ . Arătați că triunghiul $OMB$ este dreptunghic în $O$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare martie 2023)</a>
18.	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $M(0,2)$ și $N(3,6)$ . Arătați că distanța dintre punctele $M$ și $N$ este egală cu 5.	<a href="#">Bacalaureat (sesiunea specială 2023)</a>
19.	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(1,6)$ . Determinați coordonatele mijlocului segmentului $AB$ .	<a href="#">Bacalaureat (iulie 2023)</a>
20.	În reperul cartezian $xOy$ , se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$ . Arătați că perimetrul triunghiului $OAB$ este egal cu 12.	<a href="#">Bacalaureat (august 2023)</a>
21.	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,0)$ , $B(1,2)$ și $C(4,1)$ . Arătați că triunghiul $ABC$ este isoscel.	<a href="#">Bacalaureat (august 2023)</a>
22.	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(0,5)$ , $B(4,-5)$ și $C(a,b)$ . Determinați numerele reale $a$ și $b$ , știind că punctul $C$ este mijlocul segmentului $AB$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
23.	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,3)$ , $B(5,0)$ și $C(5,5)$ . Arătați că triunghiul $ABC$ este isoscel.	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2024)</a>

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 3 (model 2023)
<b>Item</b>	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4 x + \log_4(3x) = \log_4 12$ .	
<b>Competența</b>	<i>Utilizarea proprietăților logaritmilor în rezolvarea ecuațiilor</i>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Ecuația dată este: $\log_4 x + \log_4(3x) = \log_4 12$
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere să se determine <math>x</math> din ecuația dată, utilizând proprietățile logaritmilor.</i>
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Condiții de existență*: <math>x &gt; 0</math> și <math>3x &gt; 0</math>, de unde avem <math>x \in (0, \infty)</math>.</li> <li>- Din proprietățile logaritmilor avem:  <math display="block">\log_4(x \cdot 3x) = \log_4 12 \Leftrightarrow \log_4(3x^2) = \log_4 12</math> <math display="block">\Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2</math> </li> </ul> <p>Soluția care convine (verifică condiția de existență) este <math>x = 2</math>.</p> <p><i>*În elaborarea raționamentului, condițiile de existență pot fi impuse de la început, însă în cazul în care calculele necesare pentru determinarea domeniului ecuației sunt mari, putem să renunțăm la aflarea acestuia. De asemenea, putem eluda impunerea condițiilor de existență a ecuației. Avem însă obligația de a verifica valorile posibile obținute prin prelucrarea ecuației inițiale în domeniul de existență sau în forma inițială a ecuației. De exemplu, în lipsa impunerii condițiilor de existență a logaritmilor, după obținerea valorilor <math>\pm 2</math>, decidem care dintre acestea sunt soluții ale ecuației inițiale prin verificare directă:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- pentru <math>x = 2</math>, prin verificare în ecuația inițială obținem <math>\log_4 2 + \log_4(3 \cdot 2) = \log_4 12 \Leftrightarrow \log_4(2 \cdot 6) = \log_4 12</math> și cum logaritmi au sens și relația este verificată, rezultă că <math>x = 2</math> este soluție;</li> <li>- pentru <math>x = -2</math>, prin verificare în ecuația inițială obținem <math>\log_4(-2) + \log_4(3 \cdot (-2)) = \log_4 12</math> și cum logaritmi din membrul stâng nu au sens ca urmare a faptului că argumentul este negativ, rezultă că <math>x = -2</math> nu convine, deci nu este soluție.</li> </ul>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<b>Formule</b> (valabile în anumite condiții pentru $a, b, c, m$ și $n$ ): $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$ $\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii omit scrierea condițiilor de existență pentru <math>x</math> sau, în lipsa impunerii condițiilor nu verifică valorile obținute ca posibile soluții.</li> <li>- Elevii nu aplică corect formulele de la logaritmi.</li> <li>- Elevii scriu greșit soluțiile ecuației finale.</li> <li>- Elevii nu aleg la final soluția care verifică condiția de existență/care îndeplinește toate condițiile probei.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 5p</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Condiții de existență: <math>x &gt; 0</math> și <math>3x &gt; 0</math>, de unde avem <math>x \in (0, \infty)</math>.</li> <li>- Din proprietățile logaritmilor avem:  <math display="block">\log_4(x \cdot 3x) = \log_4 12 \Leftrightarrow \log_4(3x^2) = \log_4 12</math> <math display="block">\Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2</math> </li> </ul> Soluția care convine (verifică condiția de existență sau îndeplinește condițiile prin probă) este $x = 2$ .	2 p 1 p 2 p
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea ecuației logaritmice;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să enunțe pașii rezolvării;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru prin care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Să aibă în vedere pașii de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât pașii sunt prezentați mai complicat, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<i>Este important ca elevul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice termenii pentru care trebuie să scrie condițiile de existență;</li> <li>- să aplice formulele de la logaritmi și să obțină ecuația de gradul al doilea;</li> <li>- să rezolve ecuația de gradul al doilea și să exprime soluția finală a ecuației logaritmice;</li> <li>- să interpreteze corect problema (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru rezolvare de ecuații logaritmice, frecvent întâlnite în subiectele de examen. Asemănător se pot rezolva itemi cu ecuații logaritmice în care să fie utilizate și alte formule de la logaritmi.	



**Exemple de itemi de  
antrenament**

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x-4) = \log_2 4$ .
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_7(2x-1) = \log_7 9$ .
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(x^2+9) = 2$ .
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(2x+4) = 4$ .
5. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x-2020) = 2\log_2 3$ .
6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(5x-1) = \lg 2 + \lg 7$ .

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 3 (sesiunea specială 2023)
<b>Item</b>	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-4) = \log_2 4$ .	
<b>Competența</b>	<i>Utilizarea unor proprietăți ale funcțiilor în rezolvarea ecuațiilor</i>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Două valori ale unei funcții logaritmice cu aceeași bază cunoscută trebuie să fie egale.
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere</i> determinarea valorilor reale $x$ pentru care are sens logaritmul și care verifică egalitatea dată
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-formulez condiția de existență a logaritmului dat: <math>x - 4 &gt; 0</math> sau, la final, fac proba</li> <li>-determin valorile reale ale lui <math>x</math> pentru care logaritmul are sens (este corect definit)</li> <li style="text-align: center;"><math>x - 4 &gt; 0 \Leftrightarrow x &gt; 4 \Leftrightarrow x \in (4; +\infty)</math></li> <li>-folosesc injectivitatea funcției logaritmice și obțin ecuația echivalentă</li> <li style="text-align: center;"><math>\log_2(x-4) = \log_2 4 \Leftrightarrow x - 4 = 4</math></li> <li>-rezolv ecuația echivalentă obținută</li> <li style="text-align: center;"><math>x - 4 = 4 \Leftrightarrow x = 8</math></li> <li>-verific dacă soluția obținută îndeplinește condiția de existență a logaritmului:</li> <li style="text-align: center;"><math>8 \in (4; +\infty)</math> sau prin probă, în ecuația inițială; rezultă soluția <math>x = 8</math>.</li> </ul> <p><b>Varianta 2.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-formulez condiția de existență a logaritmului dat: <math>x - 4 &gt; 0</math></li> <li>-folosesc definiția logaritmului și obțin ecuația echivalentă</li> <li style="text-align: center;"><math>\log_2(x-4) = \log_2 4 = a \Leftrightarrow 2^a = x - 4 = 4</math></li> <li>-rezolv ecuația echivalentă obținută, care nu mai conține logaritmi</li> <li style="text-align: center;"><math>x - 4 = 4 \Leftrightarrow x = 8</math></li> <li>-verific dacă soluția îndeplinește condiția de existență a logaritmului sau fac proba valorii în ecuația inițială:</li> <li style="text-align: center;"><math>8 - 4 &gt; 0</math> adevărat, deci <math>x = 4</math> este soluția ecuației.</li> </ul>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Rezolvarea ecuației:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- domeniul și codomeniul funcției logaritmice, <math>f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = \log_a x</math>, pentru <math>a \in \mathbb{R}_+^*</math>, <math>a \neq 1</math>;</li> <li>- definiția logaritmului unui număr strict pozitiv;</li> <li>- proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice;</li> <li>- metode de rezolvare a inecuației de gradul I (pentru condiția de existență), respectiv a ecuației de gradul I;</li> <li>- operații cu logaritmi.</li> </ul>	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Impunerea condițiilor de existență pentru logaritm:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-elevii scriu (eronat) condiția de existență a logaritmului sub forma <math>x - 4 &gt; 4</math>;</li> <li>-elevii confundă condiția de existență a logaritmului, cu cea a radicalului și scriu (eronat) condiția sub forma <math>x - 4 \geq 0</math>;</li> </ul> <p><b>Rezolvarea ecuației:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-elevii omit condiția de existență pentru logaritm și/sau verificarea soluțiilor obținute;</li> <li>-elevii "simplifică" logaritmii prezenți în ambii termeni ai ecuației, în loc să folosească injectivitatea sau definiția logaritmului;</li> <li>-elevii rezolvă greșit ecuația echivalentă obținută din injectivitatea funcției logaritmice (de exemplu, reduc termenii -4 și 4 scriind <math>x - \cancel{4} = \cancel{4} \Leftrightarrow x = 0</math>);</li> <li>-elevii folosesc definiția logaritmului <math>\log_2 4 = 2</math> și obțin ecuația echivalentă <math>\log_2(x - 4) = \log_2 4 \Leftrightarrow \log_2(x - 4) = 2</math>, dar egalează greșit <math>x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 6</math>;</li> <li>-elevii intuiesc/observă soluția/unele soluții și scriu doar etapa de verificare, considerând că au rezolvat ecuația <math>\log_2(8 - 4) = \log_2 4 \Rightarrow x = 8</math>, fără să justifice că valorile observate/intuite sunt singurele care pot genera soluții</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-condiția de existență a logaritmului <math>x - 4 &gt; 0 \Leftrightarrow x &gt; 4 \Leftrightarrow x \in (4; +\infty)</math>;</li> <li>-obținerea ecuației echivalente folosind injectivitatea funcției logaritmice: <math>\log_2(x - 4) = \log_2 4 \Leftrightarrow x - 4 = 4</math>;</li> <li>-rezolvarea ecuației de gradul I obținute: <math>x - 4 = 4 \Leftrightarrow x = 8</math>;</li> <li>-verificarea soluției obținute/proba: <math>8 \in (4; +\infty)</math> deci soluția <math>x = 8</math> convine, deci <math>S = \{8\}</math>.</li> </ul> <p><b>Varianta 2.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-condiția de existență a logaritmului <math>x - 4 &gt; 0</math></li> <li>-obținerea ecuației echivalente din definiția logaritmului: <math>\log_2(x - 4) = \log_2 4 = a \Leftrightarrow 2^a = x - 4 = 4</math></li> <li>-rezolvarea ecuației de gradul I obținute: <math>x - 4 = 4 \Leftrightarrow x = 8</math>;</li> <li>- verificarea soluției în condiția de existență/proba: <math>8 - 4 &gt; 0</math> adevărat, deci <math>x = 4</math> este soluția ecuației.</li> </ul>	<p>2p 1 p 2p 2p 1 p 2p</p>
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să insiste asupra funcțiilor care au domeniul/codomeniul restricționat (ex: funcția radical de ordin par, funcția logaritmă) și asupra diferențelor între aceste domenii (interval închis/deschis);</li> </ul>



		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recomande aplicarea metodei adecvate nivelului de performanță al elevilor;</li> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să se asigure că elevii cunosc definiția și operațiile cu logaritmi.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice funcțiile implicate în rezolvarea ecuației și condițiile/proprietățile specifice;</li> <li>- să respecte etapele de rezolvare a ecuației;</li> <li>- să folosească scrierea unui număr real sub forma unui logaritm sau operațiile cu logaritmi pentru restrângerea unei sume/diferențe de logaritmi;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de detalierea baremului;</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	<p>Itemul este un exemplu pentru capitolul <i>Funcții și ecuații</i>, algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi care să conțină un singur logaritm, logaritmi implicați în adunări/scăderi cu numere reale sau cu alți logaritmi.</p>	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\log_2(4-x) = \log_2(x-2)</math>.</li> <li>2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\log_3(5-x) = 2</math>.</li> <li>3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\log_4 x + \log_4(3x) = \log_4 12</math>.</li> <li>4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\log_2 x + \log_2(x-3) = \log_2 4</math>.</li> <li>5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\log_3(4x+1) = 2</math>.</li> <li>6. Rezolvați în mulțimea <math>(1; +\infty)</math> ecuația <math>\lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 3</math>.</li> </ol>	

<b>Item</b>	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+1) = \log_7 9$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor proprietăți ale funcțiilor în rezolvarea ecuațiilor	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	- Două valori ale unei funcții logaritmice cu aceeași bază cunoscută trebuie să fie egale.
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea valorilor reale $x$ pentru care are sens logaritmul și care verifică egalitatea dată.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <p>-formulez condiția de existență a logaritmului dat: <math>2x+1 &gt; 0</math> sau, la final, probez valorile obținute în ecuația inițială</p> <p>-determin valorile reale ale lui <math>x</math> pentru care logaritmul are sens (este corect definit)</p> $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ <p>-folosesc injectivitatea funcției logaritmice și obțin ecuația echivalentă</p> $\log_7(2x+1) = \log_7 9 \Leftrightarrow 2x+1 = 9$ <p>-rezolv ecuația echivalentă obținută, care nu mai conține logaritmi</p> $2x+1 = 9 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ <p>-verific dacă soluția obținută îndeplinește condiția de existență a logaritmului:</p> $4 \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ sau probez în ecuația inițială; rezultă că soluția ecuației este $x = 4$ . <p><b>Varianta 2.</b></p> <p>-folosesc operații cu logaritmi și obțin ecuația echivalentă</p> $\log_7(2x+1) - \log_7 9 = 0 \Leftrightarrow \log_7 \frac{2x+1}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{9} = 7^0$ <p>-rezolv ecuația echivalentă obținută, care nu mai conține logaritmi</p> $2x+1 = 9 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ <p>Verific valoarea obținută, prin înlocuire în ecuația inițială:</p> <p>Pentru <math>x = 4</math> obțin <math>\log_7(2 \cdot 4 + 1) = \log_7 9 \Leftrightarrow \log_7 9 = \log_7 9</math>, adevărat, deci <math>S = \{4\}</math>.</p>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Rezolvarea ecuației:</b></p> <p>- domeniul și codomeniul funcției logaritmice, <math>f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x</math>, pentru <math>a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1</math>;</p> <p>- proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice;</p>	

	<p>- definiția/operații cu logaritmi <math>\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)</math>, <math>\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)</math> pentru <math>a \in \mathbb{R}_+^*</math>, <math>a \neq 1</math>, <math>x, y &gt; 0</math>;</p> <p>- metode de rezolvare a inecuației de gradul I (pentru condiția de existență), respectiv a ecuației de gradul I.</p>	
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p><b>Impunerea condițiilor de existență pentru logaritm:</b></p> <p>-elevii justifică (eronat) că expresia este pozitivă pentru orice <math>x \in \mathbb{R}</math> deoarece toți termenii expresiei au semn pozitiv;</p> <p>-elevii confundă condiția de existență a logaritmului, cu cea a radicalului și scriu (eronat) condiția sub forma <math>2x + 1 \geq 0</math>.</p> <p><b>Rezolvarea ecuației:</b></p> <p>-elevii <b>omit</b> condiția de existență pentru logaritm și/sau verificarea soluțiilor obținute;</p> <p>-elevii „simplifică” logaritmi prezenți în ambii membri ai ecuației, în loc să folosească injectivitatea (în varianta 1 de rezolvare);</p> <p>-elevii restrâng <b>greșit</b> diferența logaritmilor sub forma <math>\log_a x - \log_a y = \log_a (x - y)</math> (în varianta 2 de rezolvare);</p> <p>-elevii rezolvă <b>greșit</b> ecuația echivalentă obținută (de exemplu, mutând eronat termenul 1 prin adunare <math>2x + 1 = 9 \Leftrightarrow 2x = 10</math>);</p> <p>-elevii intuiesc/observă soluția/soluțiile și <b>scriu doar</b> etapa de verificare, considerând că au rezolvat ecuația <math>\log_7 (2 \cdot 4 + 1) = \log_7 9 \Rightarrow x = 4</math>.</p>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1</b></p> <p>-condiția de existență a logaritmului <math>2x + 1 &gt; 0 \Leftrightarrow x &gt; -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)</math>;</p> <p>-obținerea ecuației echivalente <math>\log_7 (2x + 1) = \log_7 9 \Leftrightarrow 2x + 1 = 9</math>;</p> <p>-rezolvarea ecuației de gradul I obținute: <math>2x + 1 = 9 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4</math>;</p> <p>-verificarea soluției obținute: <math>4 \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)</math> deci soluția <math>x = 4</math> convine, deci <math>S = \{4\}</math>.</p> <p><b>Varianta 2.</b></p> <p>- obținerea ecuației echivalente <math>\log_7 (2x + 1) - \log_7 9 = 0 \Leftrightarrow \log_7 \frac{2x + 1}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{9} = 7^0</math>;</p> <p>- rezolvarea ecuației echivalente obținute <math>2x + 1 = 9 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4</math>;</p> <p>- verificarea soluției obținute prin înlocuire în ecuația inițială:</p> <p>Pentru <math>x = 4</math> obținem <math>\log_7 (2 \cdot 4 + 1) = \log_7 9 \Leftrightarrow \log_7 9 = \log_7 9</math>, adevărat, deci <math>S = \{4\}</math>.</p>	<p>2p 2 p</p> <p>1p</p> <p>2p 2p</p> <p>1 p</p>



<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să insiste asupra funcțiilor care au domeniul/codomeniul restricționat (ex: funcția radical de ordin par, funcția logaritmică) și asupra diferențelor între acestea;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recomande aplicarea metodei adecvate nivelului de performanță al elevilor;</li> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să se asigure că elevii cunosc definiția și operațiile cu logaritmi.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice funcțiile implicate în rezolvarea ecuației și condițiile/proprietățile specifice;</li> <li>- să respecte etapele de rezolvare a ecuației;</li> <li>- să folosească operațiile cu logaritmi pentru restrângerea unei sume/diferențe de logaritmi sau pentru scrierea unui număr real sub forma unui logaritm;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru capitolul <i>Funcții și ecuații</i> , algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi care să conțină un singur logaritm, logaritmi implicați în adunări/scăderi cu numere reale sau cu alți logaritmi.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x + 3) = 2$ . 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x - 1) = \log_4 5$ . 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2 + 13) = 2$ . 4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x + 4) = \log_4 16$ . 5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x + 2029) = 2\log_2 3$ . 6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(3x - 4) = \lg 5 + \lg 7$ .	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 3 (simulare martie 2023)
<b>Item</b>	Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $7^{x+3} = 49^x$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea echivalenței dintre bijectivitate și inversabilitate în rezolvarea unor ecuații algebrice.	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Ecuație exponențială; termenii ecuației sunt puteri cu argument care conține necunoscuta.
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere rezolvarea ecuației exponențiale $7^{x+3} = 49^x$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Rezolvare:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se utilizează proprietățile puterilor: <math>49 = 7^2</math> și <math>49^x = (7^2)^x</math>, de unde <math>49^x = 7^{2x}</math></li> <li>- Se aplică regula de rezolvare a ecuațiilor exponențiale, în care termenii au aceeași bază:  <math display="block">7^{x+3} = 7^{2x} \stackrel{\text{injectivitate}}{\Leftrightarrow} x+3 = 2x \Leftrightarrow x = 3</math> </li> </ul>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<b>Formule:</b> $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ și $a^n = a^m \Rightarrow n = m$ , unde $a, m, n \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ .	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii nu observă că 49 este o putere a lui 7.</li> <li>- Elevii nu aplică corect proprietățile puterilor.</li> <li>- Elevii rezolvă eronat ecuația de gradul I de la final.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 5p</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea <math>49 = 7^2</math> și <math>49^x = (7^2)^x</math>, de unde <math>49^x = 7^{2x}</math></li> <li>- Scrierea ecuației sub forma: <math>7^{x+3} = 7^{2x}</math></li> <li>- Egalarea puterilor pentru aceeași bază: <math>x + 3 = 2x</math></li> <li>- Rezolvarea ecuației de gradul I și scrierea soluției finale: <math>x=3</math></li> </ul>	2p 1 p 1 p 1 p
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea ecuațiilor exponențiale;</li> <li>- să stabilească clar care este ecuația dată și care sunt termenii ecuației, evidențiind faptul că ambii termeni sunt puteri ale aceluiași număr;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii variantele de rezolvare și să aleagă una dintre ele, evidențiind etapele;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât aceștia să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei de rezolvare, cu scopul de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice termenii ecuației și să observe că acești termeni sunt puteri ale aceluiași număr;</li> <li>- să aplice formulele de calcul cu puteri și algoritmi de rezolvare a ecuațiilor exponențiale și a ecuațiilor de gradul I;</li> <li>- să interpreteze corect ecuația (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este un exemplu pentru rezolvarea unor ecuații exponențiale, algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi care conține ecuații exponențiale de alte tipuri.</p>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: <math>5^{2x} = 5^{2+x}</math>.</li> <li>2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: <math>3^{2x-3} = 3^x</math>.</li> <li>3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: <math>4^x = 2^{3x-2}</math>.</li> <li>4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: <math>3^{3x+1} = 81</math>.</li> <li>5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: <math>7^{2x+1} = 7^{4-x}</math>.</li> <li>6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuație: <math>3^{x+2} + 3^x = 30</math>.</li> </ol>	

Clasa a X-a		Subiectul: I	Problema: 3 (rezervă august 2023)
Item	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-3} = 3^x$ .		
Competența	Utilizarea unor proprietăți ale funcțiilor în trasarea graficelor și rezolvarea unor ecuații		
Rezolvare	Ce știm?	- Două valori ale unei funcții exponențiale cu aceeași bază trebuie să fie egale.	
	Ce se cere?	Se cere determinarea valorii reale a lui $x$ pentru care are loc egalitatea $3^{2x-3} = 3^x$ .	
	Cum rezolv?	<b>Rezolvare:</b> Funcția exponențială $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , $f(x) = 3^x$ este injectivă. Deci, $f(2x-3) = f(x) \Leftrightarrow 2x-3 = x$ , de unde obținem $x = 3$ . <b>Varianta de rezolvare:</b> Se egalează exponenții celor două puteri. Se rezolvă ecuația de gradul întâi obținută.	
Noțiuni teoretice necesare	Puteri Egalitatea unor puteri cu aceeași bază Ecuații de gradul I, rezolvarea acestora		
Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare	<b>Varianta de rezolvare:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii nu egalează corect exponenții celor două puteri, obținând o altă ecuație.</li> <li>- Elevii egalează exponenții celor două puteri, dar rezolvă greșit ecuația de gradul întâi.</li> </ul>		
Explicații privind baremul de notare: (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 5p</b> $3^{2x-3} = 3^x \Leftrightarrow 2x-3 = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x-x = 3 \Leftrightarrow x = 3$		3p 2p
De avut în vedere – important	Pentru profesor	<b>Etapa de predare-învățare:</b> Este important ca profesorul: <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul>	

		<p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât probabilitatea ca elevul să greșească este mai mare.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice tipul de ecuații pe care trebuie să o rezolve;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să respecte etapele de rezolvare a ecuației;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este un exemplu pentru Funcții și ecuații, <b>Ecuații exponențiale</b>, algebră clasa a X-a.                  Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară rezolvarea unei exponențiale.</p>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>2^{1-2x} = 32</math>.</li> <li>2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>10^{6-2x} = 100^2</math>.</li> <li>3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>81^x = 3</math>.</li> <li>4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>7^{x+3} = 49^x</math>.</li> <li>5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>3^{x+2} - 3^x = 24</math>.</li> <li>6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>2^{x+4} = 4^{x+3}</math>.</li> </ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I		Problema: 3 (model 2024)
<b>Item</b>	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x} = 5^{2+x}$ .		
<b>Competența</b>	Utilizarea unor proprietăți ale funcțiilor în trasarea graficelor și rezolvarea unor ecuații		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	$5^{2x} = 5^{2+x}$	
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea valorii reale a lui $x$ pentru care are loc egalitatea (aflarea necunoscutei $x$ ).	
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b>  <b>Varianta 1</b>                      Aplicăm proprietatea de injectivitate a funcției exponențiale, adică egalăm exponenții și obținem ecuația <math>2x = 2 + x</math>.                      Rezolvăm ecuația <math>2x - x = 2</math>, soluția <math>x = 2</math> convine.</p> <p><b>Varianta 2 (legături intradisciplinare, consolidarea învățării)</b>                      Logaritmăm ecuația exponențială în bază 5, ținând cont că membrii sunt strict pozitivi: <math>\log_5 5^{2x} = \log_5 5^{2+x}</math>                      Utilizăm proprietatea logaritmului puterii și rezultă: <math>2x \log_5 5 = (2 + x) \log_5 5</math>                      Dar <math>\log_5 5 = 1</math> și obținem ecuația algebrică <math>2x = 2 + x</math>                      Rezolvăm ecuația de gradul întâi obținută: <math>2x - x = 2</math>, de unde rezultă soluția <math>x = 2</math></p>	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b>                      Proprietatea de injectivitate ale funcției exponențiale.                      Rezolvarea ecuației de gradul întâi obținută prin egalarea exponenților ecuației.</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b>                      Logaritmarea ecuației exponențiale.                      Proprietățile logaritmilor.                      Rezolvarea ecuației de gradul întâi obținută din egalarea argumentelor logaritmilor.</p>		
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b>                      Copierea greșită a exponenților ecuației atunci când se utilizează proprietatea de injectivitate. De exemplu se scrie <math>x^2</math> în loc de <math>2x</math> sau în loc de semnul plus se pune semnul minus.                      Rezolvarea incorectă a ecuației de gradul întâi, prin trecerea unui termen dintr-un membru în altul fără schimbarea semnului.</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b>                      Aplicarea incorectă a proprietăților logaritmilor.                      Rezolvarea incorectă a ecuației de gradul întâi, prin trecerea unui termen dintr-un membru în altul fără schimbarea semnului.</p>		





<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b> Utilizarea proprietății de injectivitate a funcției exponențiale și obținerea ecuației <math>2x = x + 2</math>. Rezolvarea ecuației de gradul întâi <math>2x - x = 2</math>, rezultă <math>x = 2</math></p> <p><b>Varianta 2:</b> <math>\log_5 5^{2x} = \log_5 5^{2+x}</math> <math>2x \log_5 5 = (2 + x) \log_5 5</math>, rezultă ecuația algebrică <math>2x = x + 2</math> Din rezolvarea ecuației <math>2x - x = 2</math>, rezultă <math>x = 2</math></p>		<p>3p 2p</p> <p>1p 2p 2p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapă de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să asigure o înțelegere solidă noțiunilor legate de funcții exponențiale, bază, exponent, operațiile cu exponenți, proprietățile funcțiilor exponențiale;</li> <li>- să explice pașii necesari pentru rezolvarea ecuațiilor exponențiale în mod clar și concis (cum ar fi cele cu aceeași bază, cu baze diferite, etc) și aplicarea metodelor specifice pentru rezolvarea fiecărui tip de ecuație;</li> <li>- să justifice și să demonstreze metodele și regulile utilizate în rezolvarea ecuațiilor exponențiale pentru a ajuta elevii să înțeleagă mai bine procesul și să vadă de ce anumite tehnici sunt valide;</li> <li>- să ofere feedback constructiv asupra soluțiilor găsite, venind în ajutorul corectării erorilor și îmbunătățirii performanței elevilor;</li> <li>- să utilizeze metode și strategii diferite de predare, inclusiv utilizarea tehnologiei, pentru a ajuta la captarea atenției elevilor și facilitarea înțelegerii materiei;</li> <li>- să evidențieze conexiunile și relațiile dintre ecuațiile exponențiale și alte concepte, cum ar fi logaritmi, funcțiile exponențiale sau aplicațiile în probleme practice de creștere exponențială, care pot ajuta la înțelegerea mai profundă a noțiunilor .</li> </ul> <p><b>Etapă de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze cunoștințele legate de ecuațiile exponențiale (proprietățile funcțiilor exponențiale, baza, exponentul și modul de interpretare a ecuațiilor exponențiale);</li> <li>- să prezinte diverse tipuri de ecuații exponențiale cu grade de dificultate diferite, să pună în aplicare diferite strategii de rezolvare a ecuațiilor exponențiale și să le adapteze nivelului clasei;</li> <li>- să încurajeze elevii să colaboreze și să schimbe idei între ei referitoare la ecuațiile exponențiale;</li> </ul>	



		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să sublinieze importanța ecuațiilor exponențiale în contexte diverse din viața de zi cu zi (creșterea exponențială);</li> <li>- să utilizeze diferite forme de evaluare, pentru a măsura nivelul de înțelegere și progresul elevilor.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să fie capabili să analizeze și să aleagă metodele de rezolvare a ecuațiilor exponențiale (izolarea variabilei, folosirea proprietăților logaritmilor sau funcțiilor exponențiale).</li> <li>- să justifice pașii efectuați în procesul de rezolvare a ecuațiilor exponențiale;</li> <li>- să înțeleagă importanța și aplicabilitatea ecuațiilor exponențiale (creșterea exponențială) în domeniul științific, tehnic, economic și alte domenii ale matematicii aplicate;</li> <li>- să persevereze, prin practică și determinare, ca să depășească dificultățile care apar în rezolvarea unor ecuații exponențiale.</li> </ul>
Considerente finale	Itemul este un exemplu pentru Funcții și ecuații, <b>Rezolvări de ecuații exponențiale</b> , algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi care conțin ecuații exponențiale de diverse tipuri.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>2^{3x+1} = 16</math>.</li> <li>2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>2^{3x+2} = 4^{x+1}</math>.</li> <li>3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>5^{x^2-7x+6} = 1</math>.</li> <li>4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>5^x + 5^{x-1} = 30</math>.</li> <li>5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>49^x - 10 \cdot 7^x + 21 = 0</math>.</li> <li>6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0</math>.</li> </ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 3 (august 2023)
<b>Item</b>	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x - 8} = 1$ .	
<b>Competența</b>	<i>Utilizarea unor proprietăți ale funcțiilor în trasarea graficelor și rezolvarea unor ecuații</i>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	- $\sqrt{3x - 8} = 1$ , ecuație irațională în necunoscuta $x$
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere determinarea valorii reale a lui <math>x</math> pentru care are loc egalitatea (aflarea necunoscutei <math>x</math>).</i>
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p><b>Varianta 1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- punem condiția de existență a radicalului <math>3x - 8 \geq 0</math></li> <li>- se obține <math>x \in \left[\frac{8}{3}, \infty\right)</math></li> <li>- ridicăm ambii membri pozitivi ai ecuației la pătrat și obținem ecuația algebrică <math>3x - 8 = 1</math></li> <li>- soluția ecuației este <math>x = 3 \in \left[\frac{8}{3}, \infty\right)</math></li> </ul> <p><b>Varianta 2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ridicăm la pătrat membrii pozitivi ai ecuației iraționale: <math>(\sqrt{3x - 8})^2 = 1^2</math></li> <li>- rezolvăm ecuația de gradul întâi obținută: <math>3x - 8 = 1</math>, deci <math>x = 3</math></li> <li>- pentru <math>x = 3</math> verificăm ecuația <math>\sqrt{3 \cdot 3 - 8} = 1</math>.</li> </ul>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <p>Condiții de existență/sens pentru radicalii de ordin par                      Condiții de echivalență pentru ridicarea la putere pară a unei relații de egalitate (membrii relației de același semn)                      Rezolvarea inecuației de gradul întâi din condiția de existență a radicalului de ordin 2.                      Ridicarea la pătrat a ambilor membri pozitivi ai ecuației iraționale.                      Aplicarea proprietății radicalului de ordin 2: <math>(\sqrt{3x - 8})^2 =  3x - 8  = 3x - 8</math>, în condițiile de bună definire a radicalului                      Rezolvarea ecuației de gradul întâi.                      Verificarea apartenenței unui număr la o mulțime/un interval de numere reale.</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <p>Ridicarea la pătrat a ambilor membri ai ecuației iraționale.                      Aplicarea proprietății radicalului de ordin 2: <math>\sqrt{3x - 8}^2 = 3x - 8</math>, în condițiile de bună definire a radicalului                      Rezolvarea ecuației de gradul întâi.                      Îndeplinirea condiției/condițiilor ca un număr real să fie soluția unei ecuații iraționale .</p>	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b>                      Omiterea condiției de existență a unui radical de ordin 2 (par)                      Ridicarea la putere a unui singur membru al ecuației iraționale                      Rezolvarea incorectă a ecuației de gradul întâi , prin trecerea unui termen dintr-un membru în altul fără schimbarea semnului.                      Omiterea verificării soluției găsite în intervalului condițiilor de existență</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b>                      Ridicarea la putere a unui singur membru al ecuației iraționale.                      Rezolvarea incorectă a ecuației de gradul întâi , prin trecerea unui termen dintr-o parte în alta fără schimbarea semnului .                      Omiterea efectuării probei în ecuația inițială.</p>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> ( <i>cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului</i> )	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b>                      Condiția de existență: <math>3x - 8 \geq 0</math>, rezultă <math>x \geq \frac{8}{3}</math>, <math>x \in [\frac{8}{3}, \infty)</math>                      Obținerea ecuației algebrice <math>3x - 8 = 1</math>  <math>x = 3</math> și verificarea <math>3 \in [\frac{8}{3}, \infty)</math>, care convine</p> <p><b>Varianta 2:</b>  <math>(\sqrt{3x - 8})^2 = 1^2</math>  <math>3x - 8 = 1</math>, rezultă <math>3x = 9</math>  <math>x = 3</math>                      Proba în ecuația inițială: <math>\sqrt{3 \cdot 3 - 8} = 1</math>, care convine</p>	<p>2p 1p 2p</p> <p>3p 1p 1p</p>
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapă de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice legate de noțiunea de număr nenegativ, proprietățile radicalilor de ordin 2, 3, rezolvarea inecuațiilor de gradul întâi și de gradul al doilea;</li> <li>- să stabilească etapele de rezolvare a ecuațiilor iraționale;</li> <li>- să prezinte diferite metode de rezolvare a ecuațiilor iraționale;</li> <li>- să exprime în limbaj matematic unele situații concrete care descriu ecuațiile iraționale în situații practice;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapă de recapitulare:</b></p>

		<p><i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să asigure o înțelegere solidă a conceptelor de bază legate de ecuațiile iraționale (identificarea radicalului, determinarea domeniului de valori, metode de rezolvare, ridicarea la pătrat, descompunerea în factori, izolarea radicalului);</li> <li>- să prezinte diverse tipuri de ecuații iraționale cu grade de dificultate diferite, să pună în aplicare diferite strategii de rezolvare a ecuațiilor iraționale și să le adapteze nivelului clasei;</li> <li>- să încurajeze elevii să colaboreze între ei și să schimbe idei referitoare la conceptele de ecuații iraționale;</li> <li>- să sublinieze importanța ecuațiilor iraționale în contexte diferite din viața de zi cu zi (de exemplu, domeniul științific, economic, ingineresc).</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să fie capabil să analizeze și să aleagă metodele de rezolvare a ecuațiilor iraționale;</li> <li>- să justifice pașii efectuați în procesul de rezolvare a ecuațiilor iraționale;</li> <li>- să înțeleagă importanța și aplicabilitatea ecuațiilor iraționale în domeniul științific, tehnic, economic precum și alte domenii ale matematicii aplicate;</li> <li>- să persevereze, prin practică și determinare, ca să depășească dificultățile care apar în rezolvarea unor ecuații exponențiale.</li> </ul>
<p>Considerente finale</p>	<p>Itemul este un exemplu pentru Funcții și ecuații, <b>Rezolvări de ecuații iraționale ce conțin radical de ordin 2 sau 3</b>, algebră clasa a X-a.                  Asemănător se pot rezolva itemi care să conțină doi radicali, radicali în operații de adunări/scăderi cu numere reale, ecuații care conțin necunoscuta atât sub radical, cât și în afara acestuia.</p>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{2x - 5} = 1</math>.</li> <li>2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{6 - 2x} = 2</math>.</li> <li>3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{x + 2} = x</math>.</li> <li>4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x - 1</math>.</li> <li>5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{5 - 2x} - 4 = 1</math>.</li> <li>6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>1 - \sqrt{4 - x} = x - 1</math>.</li> </ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 3 (simulare 2024)
<b>Item</b>	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor proprietăți ale funcțiilor în trasarea graficelor și rezolvarea unor ecuații	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2$
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea valorii reale a lui $x$ pentru care are loc egalitatea (aflarea necunoscutei $x$ ).
<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p><b>Varianta 1</b></p> <p>Ridicăm la puterea a doua membrii ecuației: <math>x^2 + 2x + 4 = 2^2</math>.</p> <p>Problema implică rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea:</p> $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = -2$ <p>Mulțimea soluțiilor ecuației obținute prin ridicarea la putere conține mulțimea soluțiilor ecuației date.</p> <p>Verificăm soluția obținută, înlocuind efectiv necunoscuta cu valorile obținute în ecuația inițială:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dacă <math>x = 0</math> avem <math>\sqrt{0^2 + 2 \cdot 0 + 4} = \sqrt{4} = 2</math></li> <li>- dacă <math>x = -2</math> avem <math>\sqrt{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4} = \sqrt{4 - 4 + 4} = \sqrt{4} = 2</math></li> </ul> <p>Deci, ambele soluții obținute convin.</p> <p><b>Varianta 2</b></p> <p>Deoarece în ecuație apare un radical de ordin 2 care conține necunoscute, impunem condiția ca expresia de sub radical să fie pozitivă.</p> <p>Se observă că expresia aflată sub radical este strict pozitivă pentru orice număr real <math>x</math>.</p> <p>Într-adevăr, <math>x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 1) + 3 = (x + 1)^2 + 3 &gt; 0</math>, pentru orice număr real <math>x</math>.</p> <p>Prin ridicarea la pătrat a membrilor ecuației obținem <math>x^2 + 2x + 4 = 4</math>, adică <math>x^2 + 2x = 0</math>.</p> <p>Avem <math>x(x + 2) = 0</math>.</p> <p>Obținem <math>x = 0</math> sau <math>x = -2</math>, care convin.</p>	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <p>Se ridică la puterea a doua membrii ecuației.</p> <p>Se rezolvă ecuația de gradul al doilea obținută.</p> <p>Verificăm soluțiile obținute în ecuația inițială.</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <p>Impunem condiția ca expresia aflată sub radical să fie pozitivă.</p> <p>Se ridică la pătrat ambii membri ai ecuației.</p> <p>Se determină soluțiile ecuației de gradul al doilea și se verifică dacă acestea verifică condiția impusă.</p>	



<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- elevii uită să ridice la pătrat membrul al doilea al ecuației <math>x^2 + 2x + 4 = 2</math> și obțin ecuația de gradul al doilea <math>x^2 + 2x + 2 = 0</math>;</li> <li>- elevii pot rezolva ecuația de gradul al doilea: <math>x^2 + 2x + 4 = 0</math> sau ecuația <math>x^2 + 2x + 8 = 0</math>. Rezolvarea oricăreia dintre aceste ecuații conduce la un rezultat eronat.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- rezolvarea incorectă a condiției de existență, ca expresia de sub radical să fie pozitivă;</li> <li>- prin ridicarea la pătrat a membrilor ecuației s-ar obține o ecuație de gradul al doilea diferită de <math>x^2 + 2x = 0</math>;</li> <li>- eliminarea uneia dintre soluțiile obținute din rezolvarea ecuației de gradul al doilea, dintr-o eroare apărută ca urmare a rezolvării greșite a condiției de existență.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> $(\sqrt{x^2 + 2x + 4})^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0,$ <p>adică <math>x(x + 2) = 0</math> de unde obținem <math>x = 0</math> sau <math>x = -2</math></p> <p><u>Verificare (probă), necesară pentru validarea valorilor ca soluții ale ecuației inițiale:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dacă <math>x = 0</math> avem <math>\sqrt{0^2 + 2 \cdot 0 + 4} = \sqrt{4} = 2</math></li> <li>- dacă <math>x = -2</math> avem <math>\sqrt{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4} = \sqrt{4 - 4 + 4} = \sqrt{4} = 2</math></li> </ul> <p>Deci, ambele soluții obținute convin.</p> <p><b>Varianta 2:</b></p> <p>Impunem condiția <math>x^2 + 2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 3 \geq 0</math>, pentru orice număr real <math>x</math> <math>x^2 + 2x + 4 = 4 \Rightarrow x(x + 2) = 0</math> de unde obținem <math>x = 0</math> sau <math>x = -2</math>, care convin.</p>	<p>2p 1p 1p</p> <p>1p</p> <p>1p 3p 1p</p>
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> </ul>



		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât probabilitatea ca elevul să greșească este mai mare.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice tipul de ecuației pe care trebuie să o rezolve;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să respecte etapele de rezolvare a ecuației;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	<p>Itemul este un exemplu pentru Funcții și ecuații, <b>Rezolvări de ecuații iraționale ce conțin radical de ordin 2 sau 3</b>, algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară rezolvarea unei ecuații iraționale ce conține radicali de ordin 2 sau 3.</p>	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{3x - 8} = 1</math>.</li> <li>2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{4 + 2x} = 2</math>.</li> <li>3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{x - 1} = 3</math>.</li> <li>4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{3 - x} = 2x</math>.</li> <li>5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{x^2 - 2x + 16} = 4</math>.</li> <li>6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>2 + \sqrt[3]{27x + 8} = 1</math>.</li> <li>7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația <math>\sqrt{9 - x} = x - 3</math>.</li> </ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 4 (model 2023)
<b>Item</b>	Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.	
<b>Competența</b>	<i>Utilizarea algoritmilor de calculul probabilităților în analiză de caz</i>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Din mulțimea numerelor naturale cu 2 cifre, trebuie alese acele numere care au radicalul număr natural par.
	<b>Ce se cere?</b>	Determinarea numerelor de două cifre care au radicalul număr natural par.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se stabilește numărul cazurilor posibile, adică câte numere naturale cu 2 cifre sunt în total: există 90 de numere naturale cu 2 cifre.</li> <li>- Se stabilește câte dintre acestea au radicalul număr natural:  <math>\sqrt{16} = 4, \sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7, \sqrt{64} = 8, \sqrt{81} = 9</math></li> <li>- Stabilim numărul cazurilor posibile, respectiv câte dintre acestea sunt numere pare:  <math>\sqrt{16} = 4, \sqrt{36} = 6, \sqrt{64} = 8</math></li> <li>- Calculăm probabilitatea:  <math display="block">P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}</math></li> </ul>
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<b>Formule:</b> $P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}$	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii greșesc la stabilirea numărului total de numere naturale cu 2 cifre, scriind frecvent că sunt 89.</li> <li>- Elevii nu consideră toate numerele care au radicalul un număr natural.</li> <li>- Elevii scriu greșit formula de la probabilități, inversând termenii.</li> <li>- Elevii scriu greșit soluția finală, scriind <math>P=30</math>.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se stabilește câte numere naturale cu 2 cifre sunt în total: există 90 de numere naturale cu 2 cifre.</li> <li>- Se stabilește câte dintre acestea au radicalul număr natural:  <math>\sqrt{16} = 4, \sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7, \sqrt{64} = 8, \sqrt{81} = 9</math></li> <li>- Stabilim câte dintre acestea sunt numere pare:  <math>\sqrt{16} = 4, \sqrt{36} = 6, \sqrt{64} = 8</math></li> <li>- Calculăm probabilitatea: <math>P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}</math></li> </ul>	<p>1p</p> <p>1 p</p> <p>1 p</p> <p>2 p</p>

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare (formula) în calculul de probabilități;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să enunțe pașii rezolvării;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere pașii de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât pașii sunt prezentați mai complicat, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice corect numărul total de numere naturale cu 2 cifre;</li> <li>- să ia în considerare cazurile exprimate în enunțul problemei;</li> <li>- să aplice formula de calculul probabilităților;</li> <li>- să interpreteze corect problema (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru calculul probabilităților, frecvent întâlnite în subiectele de examen. Asemănător se pot rezolva itemi cu calcul de probabilități și cu alte situații: condiții exprimate cu inecuații, diverse mulțimi finite de numere care să verifice anumite condiții etc.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n + 9 \leq 15</math>.</li> <li>2. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 3, 5, 7, 9\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>2n \geq 9</math>.</li> <li>3. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n^2 \leq 23</math>.</li> <li>4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 23\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n \geq 10</math>.</li> <li>5. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea numerelor naturale pare, <math>\log_5 n</math> să fie număr natural.</li> </ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 4 (iulie 2023)
Item	Calculați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$ , acesta să verifice inegalitatea $n \geq 10$ .	
Competența	Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităților pentru analiza de caz	
Rezolvare	Ce știm?	<ul style="list-style-type: none"> <li>- mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}</math>, din care putem alege numărul <math>n</math>;</li> <li>- condiția pe care trebuie să o îndeplinească numărul <math>n</math>, anume <math>n \geq 10</math>.</li> </ul>
	Ce se cere?	Se cere determinarea probabilității de a alege un număr cu o condiție impusă.
	Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>identific</i> numărul de alegeri pe care le am la dispoziție (numărul cazurilor posibile): pot alege orice element din mulțimea <math>A</math> care are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile;</li> <li>- <i>identific</i> numerele care îndeplinesc condiția <math>n \geq 10</math> (numărul cazurilor favorabile):</li> </ul> <p><b>Varianta 1.</b> Primul număr care îndeplinește condiția dată este <math>n = 10</math> și toate numerele cuprinse între 10 și 23 îndeplinesc această condiție, deci sunt <math>23 - 10 + 1 = 14</math> cazuri favorabile.</p> <p><b>Varianta 2.</b> Înlocuiesc, pe rând, numărul <math>n</math> cu toate valorile date și decid care dintre inegalitățile obținute este adevărată                      pentru <math>n = 1 \Rightarrow 1 \geq 10</math>, fals                      pentru <math>n = 2 \Rightarrow 2 \geq 10</math>, fals ... <math>n = 10 \Rightarrow 10 \geq 10</math>, adevărat, ..... pentru <math>n = 23 \Rightarrow 23 \geq 10</math>, adevărat                      Am obținut inegalitate adevărată pentru 14 numere, deci sunt 14 cazuri favorabile.</p> <p><b>Varianta 3.</b> Sunt 9 numere (de la 1 la 9) care NU îndeplinesc condiția dată. În mulțimea <math>A</math> sunt scrise consecutiv toate numerele de la 1 la 23, deci restul de <math>23 - 9 = 14</math> numere îndeplinesc condiția dată, deci sunt 14 cazuri favorabile.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scriu formula probabilității și înlocuiesc <math>P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{14}{23}</math>.</li> </ul>
Noțiuni teoretice necesare	<p><b>Rezolvarea ecuației:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- formula de calcul pentru determinarea probabilității <math>P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}</math>;</li> <li>- metode de numărare (câte numere naturale sunt cuprinse între valorile naturale <math>k</math> și <math>p</math>).</li> </ul>	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p>- elevii identifică eronat numărul cazurilor posibile și/sau favorabile (de exemplu, consideră că sunt <math>23 - 10 = 13</math> numere în mulțimea <math>B = \{10, 11, 12, \dots, 23\}</math>);</p> <p>- elevii scriu greșit formula de calcul pentru probabilitate sub forma <math>P = \frac{\text{număr cazuri posibile}}{\text{număr cazuri favorabile}}</math>;</p> <p>- elevii scriu corect formula de calcul pentru probabilitate, dar înlocuiesc greșit (invers) valorile obținute;</p> <p>- elevii analizează doar câteva cazuri favorabile și nu justifică generalizarea.</p>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p>Mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}</math> are 23 elemente.</p> <p>Rezultă că sunt 23 de cazuri posibile.</p> <p><b>Varianta 1.</b> Primul număr care îndeplinește condiția dată este <math>n = 10</math> și toate numerele cuprinse între 10 și 23 îndeplinesc această condiție,</p> <p>deci sunt <math>23 - 10 + 1 = 14</math> cazuri favorabile.</p> <p>Obținem <math>P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{14}{23}</math></p> <p><b>Varianta 2.</b> Înlocuiesc, pe rând, numărul <math>n</math> cu toate valorile date și decid care dintre inegalitățile obținute este adevărată: pentru <math>n = 1 \Rightarrow 1 \geq 10</math>, fals, pentru <math>n = 2 \Rightarrow 2 \geq 10</math>, fals ..... pentru <math>n = 23 \Rightarrow 23 \geq 10</math>, adevărat.</p> <p>Am obținut inegalitate adevărată pentru 14 numere, deci sunt 14 cazuri favorabile</p> <p>Obținem <math>P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{14}{23}</math></p> <p><b>Varianta 3.</b> Sunt 9 numere (de la 1 la 9) care NU îndeplinesc condiția dată.</p> <p>În mulțimea <math>A</math> sunt scrise consecutiv toate numerele de la 1 la 23, deci restul de <math>23 - 9 = 14</math> numere îndeplinesc condiția dată, deci sunt 14 cazuri favorabile.</p> <p>Obținem <math>P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{14}{23}</math></p>	<p>1p 1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapă de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să insiste asupra semnificației cuvintelor „posibil”, respectiv „favorabil” și asupra asocierilor cu valori numerice („posibile” vor fi întotdeauna mai multe decât „favorabile”);</li> <li>- să insiste asupra expresiilor-cheie „alegând din mulțimea...”, respectiv „să îndeplinească/să verifice/să aibă...” în corelație cu „nr. cazuri favorabile/posibile”;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de numărare a elementelor pentru o situație dată;</li> </ul>



		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recomande aplicarea metodei adecvate nivelului de performanță al elevilor (de exemplu, înlocuirea tuturor valorilor posibile pentru selectarea cazurilor favorabile) ;</li> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să ofere variante alternative de numărare, ca modalitate de verificare pentru rezultatul obținut;</li> <li>- să insiste asupra veridicității rezultatului obținut (probabilitatea este cel mult egală cu 1) ;</li> <li>- să se asigure că elevii cunosc formula de calcul a probabilității.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să identifice și să diferențieze corect numărul de cazuri posibile și numărul de cazuri favorabile;</li> <li>- să respecte etapele de identificare a elementelor necesare pentru aplicarea formulei;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru capitolul <i>Matematici financiare/Elemente de probabilități</i> , algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi care să ceară determinarea probabilității de a construi structuri de numere cu condiții impuse.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculați probabilitatea ca, alegând un element <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}</math> acesta să verifice inegalitatea <math>n! &lt; 50</math>.</li> <li>2. Calculați probabilitatea ca, alegând un element <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{3, 4, 5, \dots, 10\}</math> acesta să verifice inegalitatea <math>n(n - 1) \geq 35</math>.</li> <li>3. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar.</li> <li>4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea <math>M = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}</math>, acesta să fie multiplu de 6.</li> <li>5. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}</math>, acesta să <b>nu</b> fie multiplu de 3.</li> <li>6. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}</math>, numărul <math>3n</math> să fie par.</li> <li>7. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr <math>x</math> din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>, acesta să fie soluție a ecuației <math>x^2 - 7x + 12 = 0</math>.</li> </ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 4 (rezervă august 2023)
<b>Item</b>	Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să verifice inegalitatea $n^2 \leq 23$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea algoritmilor specifici de calculului financiar, statistici sau probabilităților pentru analiza unui caz	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- mulțimea <math>A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>, de unde alegem numărul <math>n</math></li> <li>- numărul <math>n \in A</math> și inegalitatea <math>n^2 \leq 23</math></li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere determinarea probabilității ca alegând numărul $n$ din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ acesta să verifice inegalitatea $n^2 \leq 23$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b>                      Mulțimea <math>A</math> are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile.                      Numerele <math>n</math> din mulțimea <math>A</math> pentru care <math>n^2 \leq 23</math> sunt numerele <math>n \in A</math> pentru care <math>n &lt; 5</math>, adică, 0, 1, 2, 3 și 4. Deci, sunt 5 cazuri favorabile.                      Probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n^2 \leq 23</math> este:</p> $p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta de rezolvare:</b>                      Determinarea numărului de cazuri posibile și a numărului de cazuri favorabile în analiza unui eveniment (situații date).                      Formula de calcul pentru determinarea probabilității <math>p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}</math>.</p>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot determina numărul de cazuri posibile eronat.</li> <li>- Elevii pot determina numărul de cazuri favorabile eronat.</li> <li>- Elevii pot greși calcularea probabilității inversând numărătorul cu numitorul fracției.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în	<b>Punctaj în barem: 5p</b> Mulțimea $A$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile. Numerele $n$ mulțimea $A$ pentru care $n^2 \leq 23$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4,	1p 1p

fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	deci sunt 5 cazuri favorabile de unde obținem $p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ * *În acest caz, elevii pot exprima probabilitatea și ca fracție zecimală, $p = 0,5$ , răspuns corect, de asemenea, dar pot avea tendința de a formula rezultatul și sub formă procentuală, în acest caz un răspuns de tipul 50% nefiind cel așteptat.		1p  2p
De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> Este important ca profesorul:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> Este important ca profesorul:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>	
	Pentru elev	<p>Este important ca elevul:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice corect și să diferențieze numărul de cazuri posibile și numărul de cazuri favorabile;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>	
Considerente finale	Itemul este un exemplu pentru matematici financiare, algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară determinarea probabilității unui eveniment aleator		
Exemple de itemi de antrenament	1. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , acesta să verifice inegalitatea $2n \geq 9$ . 2. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ , acesta să fie multiplu de 6.		



- |  |  |
|--|--|
|  | <p>3. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea <math>A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}</math>, acesta să fie număr par.</p> <p>4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>(n-2)(n-6) \geq 0</math>.</p> <p>5. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 5.</p> |
|--|--|

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 4 (august 2023)
<b>Item</b>	Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , acesta să verifice inegalitatea $2n \geq 9$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor algoritmi specifici calculului probabilităților pentru analiza de caz	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mulțimea <math>A = \{1, 3, 5, 7, 9\}</math>, definită explicit, prin enumerarea elementelor ce o compun;</li> <li>- Condiția <math>2n \geq 9</math> care trebuie verificată pentru <math>n</math> din <math>A = \{1, 3, 5, 7, 9\}</math>.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A$ , aceasta să verifice inegalitatea $2n \geq 9$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b> <b>Varianta 1</b></p> <p>Identificăm evenimentul dat <math>E</math> și spațiul de probabilitate. În acest caz, evenimentul reprezintă selectarea unui număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 3, 5, 7, 9\}</math>, astfel încât să se verifice inegalitatea dată, <math>2n \geq 9</math>. Determinăm numărul total de elemente din mulțimea <math>A</math>, apoi identificăm numărul de elemente din mulțimea <math>A</math> care satisfac condiția dată de inegalitatea <math>2n \geq 9</math>. Probabilitatea este dată de raportul acestor două valori.</p> $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$ <p><b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii <math>A</math>, deci <math>\text{card } A = 5</math>, deci sunt 5 cazuri posibile. <b>Numărul cazurilor favorabile</b> se obțin prin înlocuirea numărului <math>n</math> din mulțimea <math>A</math> în inecuația „<math>2n \geq 9</math>”</p> <p>Dacă <math>n = 1, 2 \cdot 1 \geq 9, 2 \geq 9</math> fals Dacă <math>n = 3, 2 \cdot 3 \geq 9, 6 \geq 9</math> fals Dacă <math>n = 5, 2 \cdot 5 \geq 9, 10 \geq 9</math> adevărat Dacă <math>n = 7, 2 \cdot 7 \geq 9, 14 \geq 9</math>, adevărat Dacă <math>n = 9, 2 \cdot 9 \geq 9, 18 \geq 9</math>, adevărat</p> <p>Numerele <math>n</math> din mulțimea <math>A</math> pentru care <math>2n \geq 9</math> sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile. Astfel obținem: <math>P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{3}{5}</math></p> <p><b>Varianta 2</b></p> $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$ <p><b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii <math>A</math>, deci sunt 5 cazuri posibile. <b>Numărul cazurilor favorabile:</b> Din rezolvarea inecuației <math>2n \geq 9</math>, rezultă <math>n \geq \frac{9}{2} = 4,5</math>. Numerele din mulțimea <math>A</math> care satisfac această condiție sunt 5, 7 și 9.</p>
	<b>Cum rezolv?</b>	



	Prin urmare, probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A$ , acesta să verifice inegalitatea $2n \geq 9$ este raportul dintre numărul de rezultate favorabile și numărul total de rezultate posibile, adică $\frac{3}{5}$ . Aceasta înseamnă că există o șansă de $\frac{3}{5}$ (3 din 5 rezultate) ca un număr ales aleatoriu din mulțimea $A$ să satisfacă inegalitatea dată.	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	Definirea conceptelor de bază: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Eveniment: un rezultat sau o colecție de rezultate a căror apariție este supusă incertitudinii; în acest caz un eveniment este „numărul <math>n</math> selectat din mulțimea dată <math>A</math>”</li> <li>- Noțiunea de probabilitate care are la bază ideea asocierii a câte unui număr real fiecărui eveniment aleator, pentru a le compara și măsura șansele.</li> <li>- Formula probabilității evenimentelor echiprobabile: probabilitatea unui eveniment este dată de raportul dintre numărul de rezultate favorabile și numărul total de rezultate posibile. În cazul acestei probleme, numărul de rezultate favorabile este numărul de elemente din mulțimea <math>A</math> care satisfac inegalitatea dată, iar numărul total de rezultate posibile este numărul total de elemente din mulțimea <math>A</math>.</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<b>Varianta 1 de rezolvare:</b> Elevii confundă numărul cazurilor favorabile cu numărul cazurilor posibile. Calculul probabilităților este scris direct, fără explicațiile găsirii numărului cazurilor favorabile și posibile. Greșeli de calcul la aflarea numărului cazurilor favorabile; în acest caz, calculele înlocuirii numărului $n$ în inecuația $2n \geq 9$ și confundarea semnelui $\geq$ cu $\leq$ . Formula probabilităților este scrisă greșit.  <b>Varianta 2 de rezolvare:</b> Elevii confundă numărul cazurilor favorabile cu numărul cazurilor posibile. Formula probabilităților este scrisă greșit. Calculul probabilităților este scris direct, fără explicațiile găsirii numărului cazurilor favorabile și a cazurilor posibile.	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 5p</b>  <b>Varianta 1:</b> <b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii $A$ , deci sunt 5 cazuri posibile. <b>Numărul cazurilor favorabile:</b> numerele $n$ din mulțimea $A$ care verifică inegalitatea $2n \geq 9$ sunt 5, 7, și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile  $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{3}{5}$	2p 2p 1p



	<p><b>Varianta 2:</b>  <b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii <math>A</math>, deci sunt 5 cazuri posibile  <b>Numărul cazurilor favorabile:</b> din rezolvarea inecuației <math>2n \geq 9</math> rezultă <math>n \geq 4,5</math>, deci numărul <math>n</math> din <math>A</math> poate fi 5, 7 sau 9, deci sunt 3 cazuri favorabile</p> $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{3}{5}$		2 p 2 p 1p
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să definească clar termenii cheie, cum ar fi spațiul de eșantionare, evenimente, probabilitate;</li> <li>- să furnizeze exemple practice și relevante pentru înțelegerea conceptului de probabilitate a evenimentelor egal probabile;</li> <li>- să realizeze activități interactive în cadrul lecțiilor, cum ar fi jocul de rol, jocuri de cărți sau activități de grup care să stimuleze gândirea critică și colaborarea;</li> <li>- să organizeze experimente sau să utilizeze materiale vizuale, cum ar fi diagrame sau grafice pentru a ilustra conceptele;</li> <li>- să creeze un mediu deschis în clasă în care elevii să fie încurajați să formuleze întrebări și să participe la discuții;</li> <li>- să ofere feedback regulat elevilor și să evalueze în mod continuu nivelul elevilor de înțelegere;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea problemelor.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să ofere explicații clare, exemple și exerciții practice relevante (aruncarea zarurilor, extragerea unei cărți dintr-un pachet de cărți de joc, extragerea unei bile dintr-o urnă), aplicații în viața reală (analiza riscurilor în asigurări, evaluarea șanselor în jocuri de noroc, în modelarea fenomenelor naturale), să încurajeze participarea elevilor și să ofere suport pentru consolidarea înțelegerii conceptului de probabilitate.</li> </ul>	

	<b>Pentru elev</b>	<i>Este important ca elevul:</i> <ul style="list-style-type: none"><li>- să înțeleagă conceptele de bază cum ar fi spațiul de eșantionare, evenimentele, probabilitatea;</li><li>- să devină confortabili cu terminologia specifică asociată probabilității;</li><li>- să aplice conceptul de probabilitate în contexte practice și să înțeleagă cum să rezolve problemele folosind acest concept;</li><li>- să fie încurajați să dezvolte gândirea critică și raționamentul logic când lucrează cu probabilitatea evenimentelor egal probabile (să formuleze întrebări, să analizeze și să evalueze informațiile, respectiv să găsească soluții pentru problemele date);</li><li>- să fie încurajați să solicite feedback de la profesori și să pună întrebări atunci când au nevoie de clarificări sau asistență suplimentară</li></ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile, algebră clasa a X-a. Elevii vor fi în măsură să înțeleagă și să aplice corect conceptele și formulele asociate probabilității evenimentelor compuse din evenimente egal probabile, pregătindu-se astfel în rezolvarea problemelor similare și aplicarea acestor concepte în contexte matematice mai complexe.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Determinați probabilitatea ca, alegând un element <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{0, 1, 2, 3, 4\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n^2 \leq 2n</math>.</li><li>2. Determinați probabilitatea ca, alegând un element <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{0, 1, 2, 3, 4\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n! \geq n^2</math>.</li><li>3. Determinați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii <math>\{21, 22, 23, \dots, 37\}</math>, acesta să nu fie prim.</li><li>4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale mai mici ca 100, acesta să fie cubul unui număr natural.</li><li>5. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr natural de trei cifre acesta să fie pătrat perfect.</li><li>6. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elementele mulțimii <math>\{1, 2\}</math>. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.</li></ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 4 (model 2024)
<b>Item</b>	Calculați probabilitatea ca, alegând un număr $n$ din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , acesta să verifice inegalitatea $n + 9 \leq 15$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea unor algoritmi specifici calculului probabilităților pentru analiza de caz	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>;</li> <li>- Condiția de tip inegalitate, <math>n + 9 \leq 15</math>, care trebuie verificată pentru <math>n</math> din <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math></li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A$ , aceasta să verifice inegalitatea $n + 9 \leq 15$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p><b>Varianta 1</b></p> $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$ <p><b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii <math>A</math>, deci sunt 9 cazuri posibile.  <b>Numărul cazurilor favorabile:</b> Din rezolvarea inecuației <math>n + 9 \leq 15</math>, rezultă <math>n \leq 6</math>. Numerele din mulțimea <math>A</math> care satisfac această condiție sunt 1, 2, 3, 4, 5 și 6.                      Prin urmare, probabilitatea ca, alegând un număr <math>n</math> din mulțimea <math>A</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n + 9 \leq 15</math>, este raportul dintre numărul de rezultate (cazuri) favorabile și numărul total de rezultate (cazuri) posibile, adică <math>\frac{6}{9} = \frac{2}{3}</math>.                      Aceasta înseamnă că există o șansă de <math>\frac{2}{3}</math> ca un număr ales aleatoriu din mulțimea <math>A</math> să satisfacă inegalitatea dată.</p> <p><b>Varianta 2</b></p> <p>Identificăm evenimentul dat <math>E</math> și spațiul de probabilitate. În acest caz, evenimentul este selectarea unui număr <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}</math>, astfel încât să satisfacă inegalitatea dată, <math>n + 9 \leq 15</math>. Determinăm numărul total de elemente din mulțimea <math>A</math>, apoi numărul de elemente din mulțimea <math>A</math> care satisfac condiția dată de inegalitatea <math>n \leq 6</math>.                      Probabilitatea este dată de raportul acestor două valori:</p> $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$ <p><b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii <math>A</math>, deci <math>\text{card } A = 9</math>; în concluzie, sunt 9 cazuri posibile.  <b>Numărul cazurilor favorabile</b> se obțin prin înlocuirea numărului <math>n</math> din mulțimea <math>A</math> în inecuația „<math>n + 9 \leq 15</math>”, adică 6 cazuri adevărate pentru <math>n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}</math>.                      Astfel obținem: <math>P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}</math>.</p>

<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	Definierea conceptelor de bază: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Eveniment: un rezultat sau o colecție de rezultate a căror apariție este supusă incertitudinii; în acest caz un eveniment este „numărul <math>n</math> selectat din mulțimea dată <math>A</math>”</li> <li>- Noțiunea de probabilitate care pleacă de la ideea asocierii a câte unui număr real fiecărui eveniment aleator, pentru a le compara și măsura șansele.</li> <li>- Formula probabilității evenimentelor egal probabile: probabilitatea unui eveniment este dată de raportul dintre numărul de rezultate favorabile și numărul total de rezultate posibile. În cazul acestei probleme, numărul de rezultate favorabile este numărul de elemente din mulțimea <math>A</math> care satisfac inegalitatea dată, iar numărul total de rezultate posibile este numărul total de elemente din mulțimea <math>A</math>.</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<b>Varianta 1 de rezolvare:</b> Elevii confundă numărul cazurilor favorabile cu numărul cazurilor posibile. Formula probabilităților este scrisă greșit (invers). Calculul probabilităților este scris direct, fără explicațiile găsirii numărului cazurilor favorabile și posibile. <b>Varianta 2 de rezolvare:</b> Elevii confundă numărul cazurilor favorabile cu numărul cazurilor posibile. Calculul probabilităților este scris direct, fără explicațiile găsirii numărului cazurilor favorabile și posibile. Greșeli de calcul la aflarea numărului cazurilor favorabile; în acest caz, calculele înlocuirii numărului $n$ în inecuația $n + 9 \leq 15$ și confundarea semnului $\geq$ cu $\leq$ . Formula probabilităților este scrisă greșit (invers).	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> <i>(cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</i>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b>  <b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii <math>A</math>, deci sunt 9 cazuri posibile  <b>Numărul cazurilor favorabile:</b> din rezolvarea inecuației <math>n + 9 \leq 15</math> rezultă <math>n \leq 6</math>, deci numărul <math>n</math> din <math>A</math> poate fi 1, 2, 3, 4, 5 și 6, deci sunt 6 cazuri favorabile</p> $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ <p><b>Varianta 2:</b>  <b>Numărul cazurilor posibile</b> reprezintă numărul de elemente ale mulțimii <math>A</math>, deci sunt 9 cazuri posibile  <b>Numărul cazurilor favorabile:</b> numerele <math>n</math> din mulțimea <math>A</math> care verifică inegalitatea <math>n + 9 \leq 15</math> sunt 1, 2, 3, 4, 5 și 6, deci sunt 6 cazuri favorabile</p> $P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	2p 2p 1p 2 p 2 p 1p

De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să definească clar termenii cheie, cum ar fi spațiul de eșantionare, evenimente, probabilitate;</li><li>- să furnizeze exemple practice și relevante pentru înțelegerea conceptului de probabilitate a evenimentelor egal probabile;</li><li>- să realizeze activități interactive în cadrul lecțiilor ,cum ar fi jocul de rol, jocuri de cărți sau activități de grup care să stimuleze gândirea critică și colaborarea;</li><li>- să organizeze experimente sau să utilizeze materiale vizuale, cum ar fi diagrame sau grafice pentru a ilustra conceptele;</li><li>- să creeze un mediu deschis în clasă în care elevii să fie încurajați să formuleze întrebări și să participe la discuții;</li><li>- să ofere feedback regulat elevilor și să evalueze în mod continuu nivelul elevilor de înțelegere;</li><li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea problemelor.</li></ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să ofere explicații clare, exemple și exerciții practice relevante (aruncarea zarurilor, extragerea unei cărți dintr-un pachet de cărți de joc, extragerea unei bile dintr-o urnă ), aplicații în viața reală (analiza riscurilor în asigurări, evaluarea șanselor în jocuri de noroc, în modelarea fenomenelor naturale ), să încurajeze participarea elevilor și să ofere suport pentru consolidarea înțelegerii conceptului de probabilitate.</li></ul>
	Pentru elev	<p><i>Este important ca elevii:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să înțeleagă conceptele de bază, cum ar fi spațiul de eșantionare, evenimentele, probabilitatea;</li><li>- să devină familiarizați cu terminologia specifică asociată probabilității;</li><li>- să aplice conceptul de probabilitate în contexte practice și să înțeleagă cum să rezolve problemele folosind acest concept;</li><li>- să fie încurajați să își dezvolte gândirea critică și raționamentul logic pentru rezolvarea problemelor ce necesită calculul probabilității evenimentelor egal probabile (să formuleze întrebări, să analizeze și să evalueze informațiile și să găsească soluții pentru problemele date);</li><li>- să fie încurajați să solicite feedback de la profesori și să pună întrebări atunci când au nevoie de clarificări sau asistență suplimentară.</li></ul>



<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile, algebră clasa a X-a. Elevii vor fi în măsură să înțeleagă și să aplice corect conceptele și formulele asociate probabilității evenimentelor compuse din evenimente egal probabile, pregătindu-se astfel pentru rezolvarea problemelor similare și aplicarea acestor concepte în contexte matematice mai complexe.
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Determinați probabilitatea ca, alegând un element <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>n(n - 1) \geq 20</math>.</li><li>2. Determinați probabilitatea ca, alegând un element <math>n</math> din mulțimea <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5\}</math>, acesta să verifice inegalitatea <math>3^n &gt; n^3</math>.</li><li>3. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr de două cifre format cu elementele mulțimii <math>A = \{1, 2, 3, 4, 5\}</math>, acesta să aibă cifrele egale.</li><li>4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea <math>\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{70}\}</math>, acesta să fie rațional.</li><li>5. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea <math>\{2, 3, 4, 5, 6\}</math>, numărul <math>C_n^2</math> să fie impar.</li><li>6. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea <math>\{3, 6, 9, 12, \dots, 51\}</math>, acesta să fie număr divizibil cu 6.</li></ol>



Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 4 (simulare martie 2023)
<b>Item</b>	După o ieftinire cu 30%, un produs costă 210 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.	
<b>Competența</b>	Utilizarea algoritmilor specifici de calcul financiar, într-un caz particular	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	- procentul pentru ieftinire: 30% - prețul după ieftinire: 210 lei
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere prețul inițial al obiectului (înainte de ieftinire).
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p><b>Varianta 1</b>                      preț inițial – ieftinirea = preț după ieftinire                      Exprimare procentuală: 100% (preț inițial) - 30% (din preț inițial) = 70%                      Notăm cu <math>x</math> (lei) prețul inițial și scriem regula de trei simplă:                      70%.....210 lei  <u>100%..... <math>x</math> lei</u>                      de unde  <math display="block">x = \frac{210 \cdot 100}{70} = 300 \text{ lei}</math>                     Prețul inițial al obiectului este de 300 de lei.</p> <p><b>Varianta 2</b>                      preț inițial – ieftinirea = preț după ieftinire                      Notez cu <math>x</math> – preț inițial (lei)                      Relația (exprimare în valoare numerică):  <math display="block">x - 30\%x = 210 \Rightarrow x - \frac{30}{100}x = 210 \Rightarrow x - \frac{3}{10}x = 210</math> <math display="block">\frac{7x}{10} = 210 \Rightarrow x = \frac{210 \cdot 10}{7} \Rightarrow x = 300</math>                     Prețul inițial al obiectului este de 300 de lei.</p>

<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b> Determinarea unui termen folosind regula de trei simplă (în cazul în care contextul implică proporționalitate directă):</p> $\frac{a \dots \dots \dots b}{c \dots \dots \dots x}$ <p>de unde <math>x = \frac{c \cdot b}{a}</math></p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul de procente: <math>p\%</math> din <math>a</math> este <math>\frac{p}{100} \cdot a</math></li> <li>- operații cu fracții: <math>x - \frac{3x}{10} = 210</math></li> <li>- rezolvare de ecuații de gradul I: <math>7x = 2100</math>, de unde <math>x = 300</math> de lei.</li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot considera la regula de trei simplă următoarea situație (consideră prețul dat ca fiind inițial):</li> </ul> $\frac{100\% \dots \dots \dots 210 \text{ lei}}{70\% \dots \dots \dots x \text{ lei}}$ <p>Evident că, în acest caz, se va obține un rezultat eronat.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii ar putea calcula <math>30\%</math> din <math>210</math> și apoi să scadă numărul obținut din <math>210</math>. Evident, rezultatul este eronat.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scrierea greșită, atunci când aplică procentul;</li> <li>- scrierea greșită a ecuației, scriind sumă în loc de diferență;</li> <li>- exprimarea soluției ecuației</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b> prețul inițial – ieftinirea = prețul după ieftinire Avem: <math>100\% - 30\% = 70\%</math> Notăm cu <math>x</math> prețul inițial și scriem regula de trei simplă:</p> $\frac{70\% \dots \dots \dots 210 \text{ lei}}{100\% \dots \dots \dots x \text{ lei}}$ <p>de unde: <math>x = \frac{210 \cdot 100}{70} = 300</math> de lei</p>	<p>2p</p> <p>1 p</p> <p>2 p</p>

	<p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se notează cu <math>x</math> prețul inițial</li> <li>- Se determină valoarea (lei) pe care o reprezintă ieftinirea: 30% din <math>x</math> reprezintă <math>30\% \cdot x = \frac{30}{100} \cdot x = \frac{3x}{10}</math></li> <li>- prețul inițial – ieftinirea = prețul după ieftinire se obține ecuația:  <math display="block">x - \frac{3x}{10} = 210 \Rightarrow \frac{7x}{10} = 210 \Rightarrow 7x = 2100, \text{ de unde}</math>                 se obține <math>x = \frac{2100}{7} = 300</math></li> </ul>		<p>2 p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
De avut în vedere – important	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor cu procente;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru pentru ca aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>	
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice și să diferențieze prețul inițial și prețul după ieftinire;</li> <li>- să transpună în limbaj matematic datele problemei;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>	



<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru matematici financiare, algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care cerința este determinarea prețului inițial după scumpirea unui obiect sau determinarea unui preț după scumpire/ieftinire cu un anumit procent, atunci când se cunoaște prețul inițial.
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Să se determine prețul inițial al unui obiect, care după o scumpire cu 25% costă 320 de lei.</li><li>2. Să se determine prețul unui obiect după o scumpire cu 40%, dacă prețul inițial al obiectului este 600 de lei.</li><li>3. Să se determine prețul unui obiect după o ieftinire cu 15%, dacă prețul inițial al obiectului este 200 de lei.</li><li>4. Să se determine prețul final al unui obiect care costă 480 de lei, dacă se scumpește cu 25% și apoi se ieftinește cu 40%.</li><li>5. Să se determine prețul cu TVA (19%) al unui obiect care fără TVA costă 1200 de lei.</li><li>6. Să se determine prețul fără TVA (19%) al unui obiect care cu TVA costă 1785 de lei.</li></ol>

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 4 (sesiunea specială 2023)				
<b>Item</b>	Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.					
<b>Competența</b>	Utilizarea algoritmilor specifici de calculului financiar.					
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- prețul inițial al produsului: 80 de lei (valoare absolută)</li> <li>- procentul pentru ieftinire: 20% (valoarea relativă)</li> </ul>				
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere prețul final al obiectului (după ieftinire)				
<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p><b>Varianta 1</b> prețul inițial - ieftinirea = prețul final (după ieftinire) Exprimare procentuală: 100% (preț inițial) - 20% (din prețul inițial) = 80% (din prețul inițial)</p> <p>Notăm cu <math>x</math> (lei) prețul final și scriem relația matematică: <math>\frac{80}{100} \cdot 80 = x</math> sau scriem regula de trei simplă:</p> <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">100% .....</td> <td>80 lei</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;"><u>80% .....</u></td> <td><u><math>x</math> lei</u></td> </tr> </table> <p>de unde:</p> $x = \frac{80 \cdot 80}{100} = 64 \text{ de lei}$ <p>Prețul final este de 64 de lei.</p> <p><b>Varianta 2</b> prețul inițial - ieftinirea = prețul final (după ieftinire)</p> <p>Calculez valoarea (în lei) cu care s-a ieftinit produsul: <math>\frac{20}{100} \cdot 80 = 16</math> lei (ieftinirea)</p> <p>Calculez prețul după ieftinire: <math>80 - 16 = 64</math> de lei, preț final.</p>		100% .....	80 lei	<u>80% .....</u>	<u><math>x</math> lei</u>
100% .....	80 lei					
<u>80% .....</u>	<u><math>x</math> lei</u>					
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Calculul unui procent dintr-un număr dat: „<math>p\%</math> din <math>a</math>” se calculează ca <math>\frac{p}{100} \cdot a</math>;</li> <li>- Determinarea unui termen folosind regula de trei simplă (când contextul implică proporționalitate directă):</li> </ul> <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;"><math>a</math> .....</td> <td><math>b</math></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;"><u><math>c</math> .....</u></td> <td><u><math>x</math></u></td> </tr> </table>		$a$ .....	$b$	<u><math>c</math> .....</u>	<u><math>x</math></u>
$a$ .....	$b$					
<u><math>c</math> .....</u>	<u><math>x</math></u>					

	<p>atunci <math>x = \frac{c \cdot b}{a}</math></p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul de procente: <math>p\%</math> din <math>a</math> este <math>\frac{p}{100} \cdot a</math></li> </ul>	
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot aplica <b>greșit</b> regula de trei simplă</li> </ul> <p>100% ..... 80 lei  <u>80% ..... x lei</u></p> <p>sub forma: <math>100 \cdot 80 = 80 \cdot x \Rightarrow x = 100</math> (lei) (rezultat greșit);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii ar putea calcula 20% din 80 și apoi să considere <b>eronat</b> această valoare ca fiind o scumpire.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scrierea greșită când aplică procentul;</li> <li>- scrierea greșită a ecuației, scriind sumă în loc de diferență;</li> <li>- scrierea eronată a relației dintre datele problemei, considerând 80 lei preț final;</li> <li>- scrierea eronată a procentului sub forma <math>80 - \frac{20}{100} = x</math> și calcul greșit în continuare;</li> <li>- erori de calcul numeric.</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <p>prețul inițial - ieftinirea = prețul după ieftinire (<math>pi - \frac{p}{100} \cdot pi = pf</math>, unde <math>pi</math> = preț inițial, <math>pf</math> = preț final)</p> <p>Avem exprimarea procentuală: <math>100\% - 20\% = 80\%</math></p> <p>Notăm cu <math>x</math> prețul inițial și scriem regula de trei simplă:</p> <p>100% ..... 80 lei  <u>80% ..... x lei</u></p> <p>de unde: <math>x = \frac{80 \cdot 80}{100} = 64</math> de lei</p> <p><b>Varianta 2:</b></p>	<p>1p</p> <p>2 p</p> <p>2 p</p> <p>2 p</p>

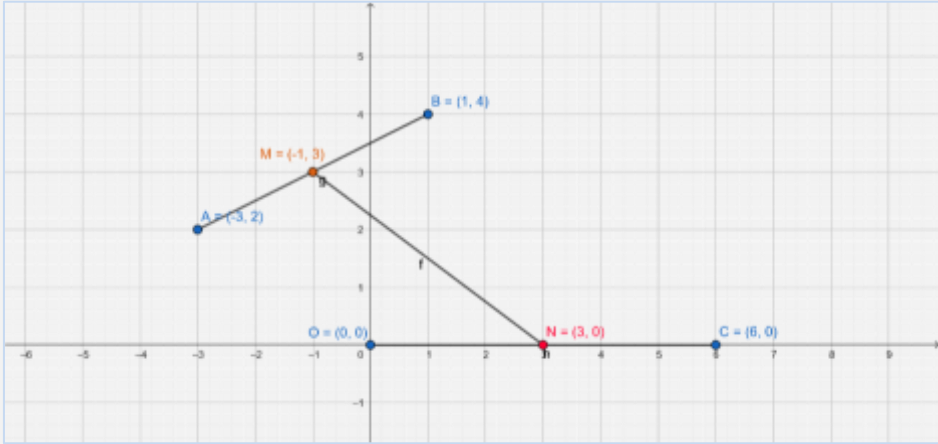
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se calculează ieftinirea: 20% din 80 lei reprezintă: <math>\frac{20}{100} \cdot 80 = 16</math> lei</li> <li>- prețul inițial - ieftinirea = prețul după ieftinire</li> <li>- Se obține: <math>80 - 16 = 64</math> lei, care reprezintă prețul după ieftinire.</li> </ul>	1 p  2p
De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>
	Pentru elev	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice și să diferențieze prețul inițial și prețul după ieftinire;</li> <li>- să transpună în limbaj matematic situația problemei;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
Considerente finale	Itemul este un exemplu pentru capitolul <i>Matematici financiare</i> , algebră clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară determinarea prețului inițial cunoscând prețul după scumpirea/ieftinirea unui obiect sau determinarea unui preț după scumpire/ieftinire cu un anumit procent, atunci când se cunoaște prețul inițial.	
Exemple de itemi de antrenament	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Un produs costă 900 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.</li> <li>2. Un produs costă 150 de lei. Determinați prețul după o scumpire cu 10%.</li> <li>3. După o ieftinire cu 20%, un produs costă 240 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.</li> <li>4. După o scumpire cu 10%, un obiect costă 1650 lei. Determinați prețul inițial al obiectului.</li> <li>5. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după ce se scumpește de două ori, succesiv, cu 10%.</li> <li>6. Prețul unui obiect s-a redus cu 90 de lei, ceea ce reprezintă 15% din prețul său inițial. Determinați prețul inițial al produsului.</li> </ol>	



Clasa a X-a	Subiectul: I		Problema: 4 (simulare 2024)
<b>Item</b>	După o scumpire cu 50%, prețul unui obiect este de 225 lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.		
<b>Competența</b>	Utilizarea algoritmilor specifici de calculului financiar, statistici sau probabilităților pentru analiza unui caz		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	- procentul pentru scumpire: 50%; - prețul după scumpire: 225 de lei.	
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere prețul inițial al obiectului (înainte de scumpire).	
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p><b>Varianta 1</b>                      prețului inițial + scumpirea = prețului după scumpire                      Exprimare procentuală: 100% (preț inițial) + 50% (din prețului inițial) = 150%                      Notăm cu <math>x</math> (lei) prețului inițial și scriem regula de trei simplă:                      150% ..... 225 lei                      100% ..... <math>x</math> lei                      de unde: <math>x = \frac{225 \cdot 100}{150} = 150</math> lei                      Prețului inițial este de 150 de lei.</p> <p><b>Varianta 2</b>                      prețului inițial + scumpirea = prețului după scumpire                      Notez cu <math>x</math> – prețului inițial (lei)                      Relația (exprimare în valoare numerică):  <math>x + 50\%x = 225</math> (lei)  <math>x + \frac{50}{100}x = 225 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2}x = 225 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 225 \Leftrightarrow 3x = 450</math>,                      de unde obținem <math>x = \frac{450}{3} = 150</math> (lei).</p>	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b>                      Determinarea unui termen folosind regula de trei simplă (când contextul implică proporționalitate directă):  <math>a \dots \dots \dots b</math>  <math>c \dots \dots \dots x</math>                      atunci <math>x = \frac{c \cdot b}{a}</math></p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul de procente: <math>p\%</math> din <math>a</math> este <math>\frac{p}{100} \cdot a</math></li> <li>- operații cu fracții: <math>x + \frac{50}{100}x = 225 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2}x = 225</math></li> <li>- rezolvare de ecuații de gradul I: <math>3x = 450</math></li> </ul>		

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot considera la regula de trei simplă următoarea situație (consideră prețul dat ca fiind inițial):                      100%..... 225 lei                      150%..... <math>x</math> lei</li> </ul> <p>Evident că, în acest caz, se va obține un rezultat eronat: <math>x = \frac{225 \cdot 150}{100} = 337,50</math> (lei);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii ar putea calcula 50% din 225 și apoi să considere această valoare ca fiind prețul inițial.</li> <li>- Elevii ar putea calcula 50% din 225 și apoi să adune sau să scadă această valoare din 225.</li> </ul> <p>În toate aceste situații rezultatul ar fi eronat.</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scrierea greșită când aplică procentul;</li> <li>- scrierea greșită a ecuației, scriind diferență în loc de sumă;</li> <li>- exprimarea soluției ecuației.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> ( <i>cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului</i> )	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b> prețul inițial + scumpirea = prețul după scumpire          Avem: <math>100\% + 50\% = 150\%</math>          Notăm cu <math>x</math> prețul inițial și scriem regula de trei simplă:          150%..... 225 lei          100%..... <math>x</math> lei          de unde: <math>x = \frac{100 \cdot 225}{150} = 150</math> lei</p> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se notează cu <math>x</math> prețul inițial</li> <li>- Se scrie scumpirea: 50% din <math>x</math> reprezintă: <math>50\% \cdot x = \frac{50}{100} \cdot x = \frac{1}{2}x</math></li> <li>- prețul inițial + scumpirea = prețul după scumpire</li> </ul> <p>Se obține ecuația: <math>x + \frac{1}{2}x = 225</math>, adică <math>\frac{3}{2}x = 225</math> sau <math>3x = 450</math>          de unde obținem <math>x = \frac{450}{3} = 150</math> lei</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2 p</p> <p>1 p</p> <p>1p</p>
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapă de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> </ul>

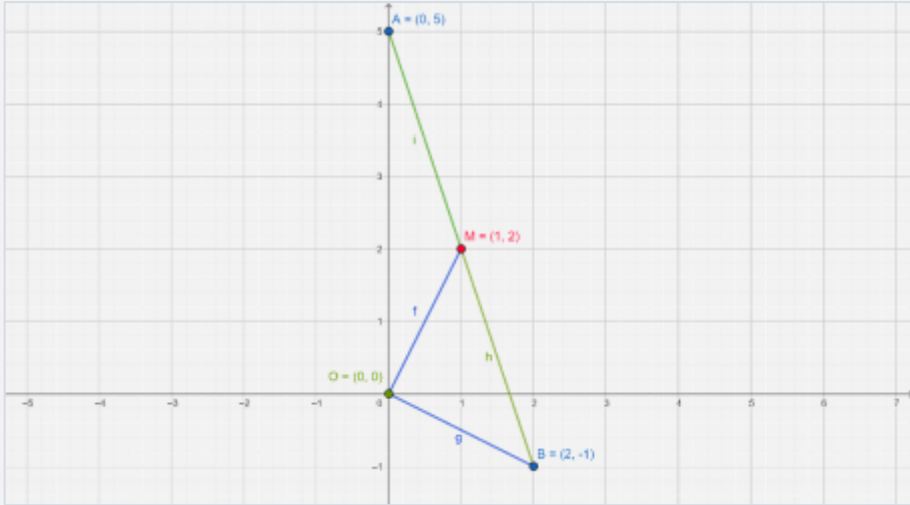
		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice și să diferențieze prețul inițial și prețul după scumpire;</li> <li>- să transpună în limbaj matematic situația problemei;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<p><b>Considerente finale</b></p>	<p>Itemul este un exemplu pentru matematici financiare, algebră clasa a X-a.                  Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară determinarea prețului inițial după ieftinirea unui obiect sau determinarea unui preț după scumpire/ieftinire cu un anumit procent, atunci când se cunoaște prețul inițial.</p>	
<p><b>Exemple de itemi de antrenament</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul după o ieftinire cu 30%.</li> <li>2. Un produs costă 90 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 10%.</li> <li>3. După o ieftinire cu 30%, un produs costă 210. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.</li> <li>4. După o scumpire cu 10%, un obiect costă 220 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.</li> <li>5. În urma unei ieftiniri cu 20%, prețul unui produs a scăzut cu 27 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.</li> <li>6. În urma unei scumpiri cu 15% prețul unui produs a crescut cu 6 lei. Determinați prețul inițial al produsului.</li> </ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 5 (model 2023)
Item	În reperul cartezian $xOy$ , se consideră punctele $A(-3,2)$ , $B(1,4)$ și $C(6,0)$ . Să se determine distanța dintre mijloacele segmentelor $AB$ și $OC$ .	
Competența	<i>Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcul de distanțe.</i>	
Rezolvare	Ce știm?	Coordonatele punctelor $A$ , $B$ și $C$ .
	Ce se cere?	Se cere distanța dintre $M$ și $N$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$ , iar $N$ este mijlocul lui $OC$ .
	Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se reprezintă* punctele <math>A</math>, <math>B</math> și <math>C</math>;</li> <li>- Se calculează coordonatele mijloacelor <math>M</math> al segmentului <math>AB</math> și <math>N</math> al segmentului <math>OC</math>:</li> </ul> $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M(-1, 3) \text{ și } N\left(\frac{x_C + x_O}{2}, \frac{y_C + y_O}{2}\right) \Rightarrow N(3, 0)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se calculează folosind formula distanței dintre 2 puncte, lungimile laturilor triunghiului <math>OMB</math>.</li> </ul> $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ <div style="text-align: center;">  </div> <p>*Nu este obligatorie reprezentarea geometrică a punctelor, dar folosind desenul putem identifica anumite particularități ale configurației date de puncte. Astfel, se pot intui coordonatele mijloacelor cerute de problemă, precum și încadrarea segmentului <math>MN</math> într-un triunghi, ca ipotenuză, în care al treilea vârf al este, de exemplu, proiecția punctului <math>M</math> pe axa <math>Ox</math>, cu identificarea facilă a lungimilor catetelor, deci și a lungimii ipotenuzei. De asemenea, realizarea corectă a desenului este utilă și ca o cheie de verificare a rezultatului obținut.</p>

<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<b>Formule:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Formula pentru determinarea coordonatelor mijloacelor segmentelor <math>AB</math> și <math>OC</math>:  <math display="block">M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)</math> și <math>N\left(\frac{x_C + x_O}{2}, \frac{y_C + y_O}{2}\right)</math></li> <li>- Formula pentru calculul distanței, pentru două puncte oarecare <math>P</math> și <math>Q</math>:  <math display="block">d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}</math>, aplicată punctelor <math>M</math> și <math>N</math>, formula devine: <math>MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}</math></li> </ul>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- În reprezentarea punctelor în reperul cartezian, elevii fixează invers coordonatele, abscisa pe <math>Oy</math> și ordonata pe <math>Ox</math>.</li> <li>- Elevii pot greși calculul coordonatelor mijloacelor <math>M</math> și <math>N</math>.</li> <li>- La efectuarea calculului distanțelor elevii pot extrage greșit radicalii.</li> <li>- În calcul elevii greșesc la semne și la exprimarea rezultatului.</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 5p</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se calculează coordonatele mijloacelor <math>M</math> al segmentului <math>AB</math> și <math>N</math> al segmentului <math>OC</math>:  <math display="block">M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M(-1, 3)</math> și <math>N\left(\frac{x_C + x_O}{2}, \frac{y_C + y_O}{2}\right) \Rightarrow N(3, 0)</math></li> <li>- Se calculează folosind formula distanței dintre 2 puncte, lungimile laturilor triunghiului <math>OMB</math>.  <math display="block">MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5</math></li> </ul>	2 p  3 p
<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b> <p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în calculul coordonatelor mijlocului unui segment, și formula distanței;</li> <li>- în funcție de rezolvarea aleasă să stabilească clar care este finalitatea urmărită: calculul distanței dintre două puncte;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și enunțe pașii rezolvării;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p>	



		<ul style="list-style-type: none"><li>- să aibă în vedere etapele de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni; cu cât etapele sunt prezentate mai complicat, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li></ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să identifice punctele în reperul cartezian și să le reprezinte corect în reperul <math>xOy</math>;</li><li>- să aplice formulele de calcul pentru mijlocul unui segment și distanța dintre două puncte;</li><li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li><li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li></ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru determinarea coordonatelor mijloacelor unor segmente și calcul de distanțe. Asemănător se pot rezolva itemi care conțin determinarea lungimii medianei într-un triunghi, determinarea simetricului unui punct față de alt punct, demonstrarea că un triunghi este dreptunghic sau isoscel etc.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(1,3)</math>, <math>B(5,0)</math> și <math>C(5,5)</math>. Să se arate că triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</li><li>2. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,5)</math>, <math>B(4,-5)</math> și <math>C(a,b)</math>. Să se determine <math>a</math> și <math>b</math> știind că punctul <math>C</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>.</li><li>3. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(1,0)</math>, <math>B(1,2)</math> și <math>C(4,1)</math>. Să se arate că triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</li><li>4. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,3)</math> și <math>B(4,0)</math>. Să se arate că triunghiul <math>OAB</math> are perimetrul egal cu 12.</li><li>5. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>M(0,2)</math> și <math>N(3,6)</math>. Să se arate că distanța <math>MN</math> este egală cu 5.</li><li>6. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,5)</math> și <math>B(2,-1)</math>. Arătați că triunghiul <math>OMB</math> este dreptunghic în <math>O</math>, unde <math>M</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>.</li></ol>	

<b>Item</b>	În reperul cartezian $xOy$ , se consideră punctele $A(0,5)$ și $B(2,-1)$ . Arătați că triunghiul $OMB$ este dreptunghic în $O$ , unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$ .	
<b>Competența</b>	<i>Descrierea analitică, sintetică a relațiilor de perpendicularitate.</i> <i>Interpretarea perpendicularității într-un triunghi dreptunghic.</i>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	- Coordonatele punctelor $A$ , $B$ și $O$ .
	<b>Ce se cere?</b>	<i>Se cere să se arate că triunghiul <math>OMB</math> este dreptunghic, unde <math>M</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>.</i>
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b>  <b>Varianta 1:</b> Calculul de distanțe și utilizarea reciprocei teoremei lui Pitagora</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se reprezintă punctele <math>A</math> și <math>B</math>;</li> <li>- Se calculează coordonatele mijlocului <math>M</math> al segmentului <math>AB</math>:  <math display="block">M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M(1, 2)</math></li> <li>- În triunghiul <math>OMB</math> se calculează folosind formula distanței dintre 2 puncte, lungimile laturilor triunghiului <math>OMB</math>.</li> </ul>



$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

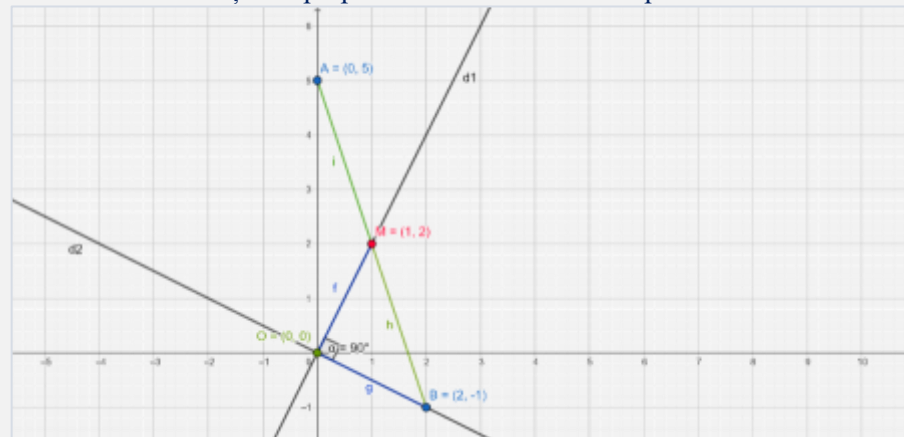
$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

- Se verifică reciproca teoremei lui Pitagora în triunghiul  $OMB$ :

$$BM^2 = OM^2 + OB^2 \Rightarrow 10 = 5 + 5 (*)$$

- Se extrage concluzia referitoare la faptul că triunghiul  $OMB$  este dreptunghic (și isoscel): deoarece relația (\*) este adevărată, avem că triunghiul  $OMB$  este triunghi dreptunghic în  $O$ .

**Varianta 2:** Condiția de perpendicularitate a două drepte:



- Se reprezintă punctele  $A$  și  $B$ ;
- Se reprezintă dreptele  $OM$  și  $OB$ ;
- Se exprimă pantele dreptelor  $OM$  și  $OB$ :

$$m_{OM} = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{2-0}{1-0} = 2 \text{ și } m_{OB} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

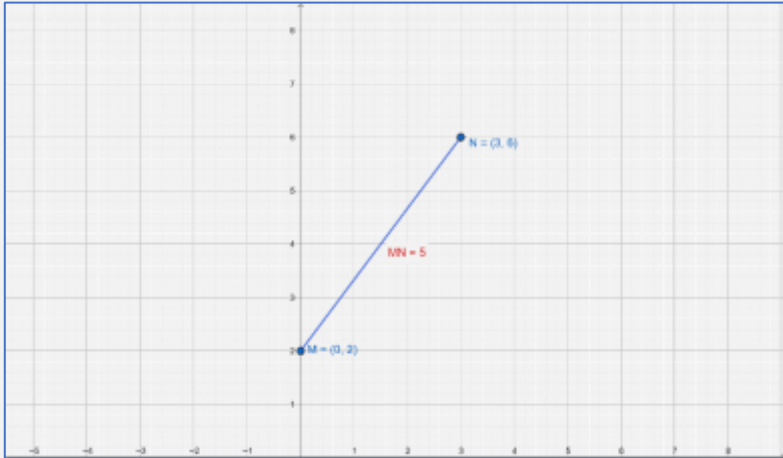
	<p>- Se verifică condiția de perpendicularitate a dreptelor <math>OM</math> și <math>OB</math>. Fie arată că <math>m_{OM} = -\frac{1}{m_{OB}}</math>, fie arată că <math>m_{OM} \cdot m_{OB} = -1</math>. În mod evident se observă că oricare dintre cele două relații este adevărată.</p>
<p><b>Noțiuni teoretice necesare</b></p>	<p><b>Formule:</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Formula pentru determinarea coordonatelor mijlocului segmentului <math>AB</math>:  <math display="block">M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)</math> </li> <li>- Formula pentru calculul distanței, pentru două puncte oarecare <math>P</math> și <math>Q</math>:  <math display="block">d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}</math> </li> <li>- Reciproca teoremei lui Pitagora:                      Dacă în triunghiul <math>ABC</math> are loc relația <math>BC^2 = AB^2 + AC^2</math>, atunci triunghiul <math>ABC</math> este dreptunghic în <math>A</math>.                 </li> <li>- Formulele anterioare date în forma generală, se aplică la situația problemei.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Formula pentru panta unei drepte oblice/orizontale:  <math display="block">m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}</math> </li> <li>- Condiția de perpendicularitate a două drepte oblice:                      Două drepte <math>d_1</math> și <math>d_2</math> cu panta <math>m_1</math> și <math>m_2</math> sunt perpendiculare dacă: <math>m_1 \cdot m_2 = -1</math> sau <math>m_1 = -\frac{1}{m_2}</math>.                 </li> </ul>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p>În reprezentarea punctelor în reperul cartezian, elevii inversează coordonatele, abscisa pe <math>Oy</math> și ordonata pe <math>Ox</math>.</p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii pot greși calculul coordonatelor mijlocului <math>M</math>.</li> <li>- La calculul distanțelor elevii pot „inversa” abscisa cu ordonata unui punct.</li> <li>- La calculul distanțelor elevii pot extrage greșit radicalul.</li> <li>- Elevii nu scriu corect relația ce corespunde reciprocei teoremei lui Pitagora și nu scriu concluzia finală referitoare la triunghiul dreptunghic.</li> </ul>

	<p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Elevii scriu greșit formula pantei.</li> <li>- Elevii calculează greșit pantele dreptelor.</li> <li>- Elevii scriu greșit condiția de perpendicularitate.</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b> Reprezentarea grafică corectă a punctelor <math>A</math>, <math>B</math> și <math>M</math> și desenarea triunghiului <math>OMB</math>.</p> <p><b>Varianta 1:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se calculează coordonatele mijlocului <math>M</math> al segmentului <math>AB</math>:</li> </ul> $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M(1, 2)$	2 p
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- În triunghiul <math>OMB</math> se calculează folosind formula distanței dintre 2 puncte, lungimile laturilor triunghiului <math>OMB</math>.</li> </ul> $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$	2 p
	$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ $BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se verifică reciproca teoremei lui Pitagora în triunghiul <math>OMB</math>:</li> </ul> $BM^2 = OM^2 + OB^2 \Rightarrow 10 = 5 + 5 (*)$	1 p
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se extrage concluzia referitoare la faptul că triunghiul <math>OMB</math> este dreptunghic (și isoscel): deoarece relația (*) este adevărată, avem că triunghiul <math>OMB</math> este triunghi dreptunghic.</li> </ul> <p><b>Varianta 2:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se calculează coordonatele mijlocului <math>M</math> al segmentului <math>AB</math>:</li> </ul> $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M(1, 2)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se exprimă panta dreptelor <math>OM</math> și <math>OB</math>:</li> </ul> $m_{OM} = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{2-0}{1-0} = 2 \text{ și } m_{OB} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$	1 p 2p

	<p>- Se verifică condiția de perpendicularitate a dreptelor <math>OM</math> și <math>OB</math>. Fie arată că <math>m_{OM} = -\frac{1}{m_{OB}}</math>, fie arată că <math>m_{OM} \cdot m_{OB} = -1</math>. În mod evident se observă că oricare dintre cele două relații este adevărată.</p>	2 p
De avut în vedere – important	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în calculul coordonatelor mijlocului unui segment, formula distanței, reciproca teoremei lui Pitagora sau formula pentru panta unei drepte și condiția de perpendicularitate;</li> <li>- în funcție de varianta de rezolvare aleasă să stabilească clar care este finalitatea urmărită: fie să utilizeze reciproca teoremei lui Pitagora, fie să arate că două drepte sunt perpendiculare;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe care sunt variantele de rezolvare ale problemei;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect și complet rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice punctele în reperul cartezian și să le reprezinte corect în reperul <math>xOy</math>;</li> <li>- să aplice corect formulele de calcul pentru determinarea coordonatelor mijlocului unui segment, distanța dintre două puncte și reciproca teoremei lui Pitagora sau să aplice corect formulele pentru calculul pantei dreptelor și condiția de perpendicularitate a două drepte;</li> <li>- să interpreteze corect problema (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>



<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru calcul de distanțe, verificarea reciprocei teoremei lui Pitagora sau pentru scrierea pantei unei drepte și condiția de perpendicularitate a două drepte. Asemănător se pot rezolva itemi care conțin determinarea mijlocului unui segment, determinarea simetricului unui punct față de alt punct, demonstrarea că un triunghi este dreptunghic sau isoscel etc.
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(1,3)</math>, <math>B(5,0)</math> și <math>C(5,5)</math>. Să se arate că triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</li><li>2. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,5)</math>, <math>B(4,-5)</math> și <math>C(a,b)</math>. Să se determine <math>a</math> și <math>b</math> știind că punctul <math>C</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>.</li><li>3. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(1,0)</math>, <math>B(1,2)</math> și <math>C(4,1)</math>. Să se arate că triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</li><li>4. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,3)</math> și <math>B(4,0)</math>. Să se arate că triunghiul <math>OAB</math> are perimetrul egal cu 12.</li><li>5. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>M(0,2)</math> și <math>N(3,6)</math>. Să se arate că distanța <math>MN</math> este egală cu 5.</li><li>6. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(-3,2)</math>, <math>B(1,4)</math> și <math>C(6,0)</math>. Să se determine distanța dintre mijloacele segmentelor <math>AB</math> și <math>OC</math>.</li></ol>

Clasa a X-a	Subiectul: I		Problema: 5 (sesiunea specială 2023)
Item	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $M(0,2)$ și $N(3,6)$ . Arătați că distanța dintre punctele $M$ și $N$ este egală cu 5.		
Competența	Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcule de distanțe și arii		
Rezolvare	Ce știm?	- coordonatele punctelor $M$ și $N$ în reperul cartezian $xOy$	
	Ce se cere?	Se cere să demonstrăm că distanța dintre cele două puncte are o valoare dată	
	Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b> <b>Varianta 1</b></p>  <p>Aplic formula distanței dintre două puncte date în plan:</p> $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ <p>Deci distanța dintre punctele <math>M</math> și <math>N</math> este egală cu 5.</p> <p><b>Varianta 2</b></p> <p>Construiesc <math>NA \perp Ox</math>, <math>A \in Ox</math> Rezultă coordonatele punctului <math>A</math>: <math>A(3,0)</math></p> <p>Construiesc <math>MP \perp NA</math>, <math>P \in NA</math>.</p> <p>Se obțin astfel coordonatele punctului <math>P</math>: <math>x_P = x_N = x_A \Rightarrow x_P = 3</math>, respectiv <math>y_P = y_M \Rightarrow y_P = 2</math>, deci <math>P(3,2)</math>.</p>	



$$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

$\triangle MNP$  este dreptunghic, deci aplic teorema lui Pitagora:  $\Rightarrow MN^2 = MP^2 + PN^2 \Rightarrow MN^2 = 3^2 + 4^2 = 25$   
 $\Rightarrow MN = 5$ .

**Noțiuni teoretice  
necesare**
**Varianta 1**

- Formula de calcul pentru distanța dintre două puncte date:  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

**Varianta 2**

- Reprezentarea punctelor pe baza coordonatelor:  $x_A \in Ox$ ,  $y_A \in Oy$ ;
- Identificarea coordonatelor punctelor în reperul cartezian în corelație cu noțiunea de paralelism/perpendicularitate (punctele situate pe o dreaptă perpendiculară pe axa  $Ox$ /paralelă cu axa  $Oy$  au aceeași abscisă, punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa  $Ox$ /perpendiculară pe axa  $Oy$  au aceeași ordonată);
- Formula de calcul pentru distanța dintre două puncte date;
- Teorema lui Pitagora: În orice triunghi dreptunghic suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

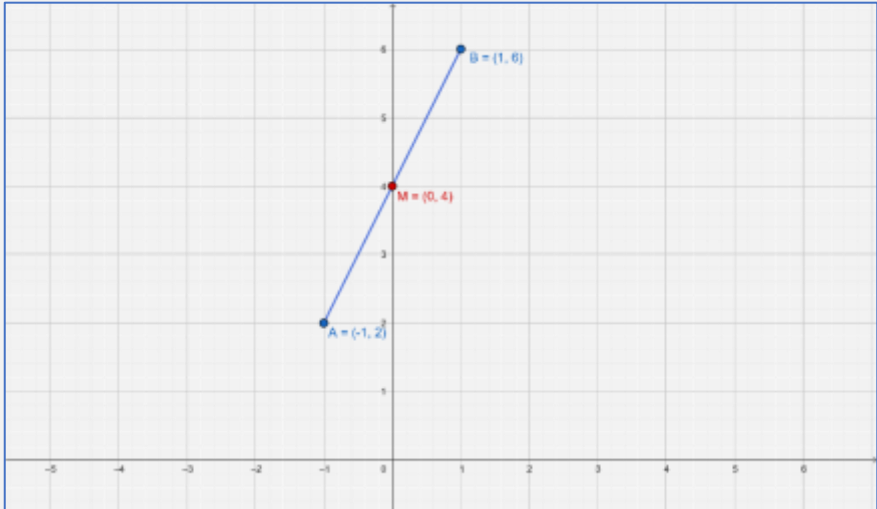


<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea <b>greșită</b> a formulei distanței sub forma <math>AB = \sqrt{(x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2}</math> sau <math>AB = \sqrt{(x_B + x_A)^2 - (y_B + y_A)^2}</math> sau <math>AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 \cdot (y_B - y_A)^2}</math> ;</li> <li>- <b>Confuzie</b> între formula distanței și ecuația dreptei determinate de punctele <math>A</math> și <math>B</math>;</li> <li>- Înlocuirea <b>greșită</b> a coordonatelor, de exemplu elevul folosește valoarea ordonatei <math>y_A</math> în locul valorii abscisei <math>x_B</math> ;</li> <li>- <b>Greșeli</b> de calcul numeric (de exemplu, elevul consideră că pătratul unui număr negativ este negativ sau extrage greșit valoarea de sub radical sau distribuie radicalul către fiecare termen al sumei sau omite parțial/total radicalul);</li> <li>- Identificarea <b>eronată</b> a capetelor segmentului căruia se cere să i se calculeze lungimea;</li> <li>- Reprezentarea axelor de coordonate și a punctelor date și observarea pe desen a coordonatelor cerute, <b>fără justificări</b> bazate pe raționamente matematice/formule;</li> <li>- Identificarea <b>eronată</b> a elementelor necesare pentru aplicarea teoremei lui Pitagora.</li> </ul>
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1</b></p> <p>Aplic formula distanței dintre două puncte date în plan: <math>MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} =</math></p> <p><math>= \sqrt{(3-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} =</math></p> <p><math>= \sqrt{25} = 5</math></p> <p><b>Varianta 2</b></p> <p>Construiesc <math>NA \perp Ox</math>, <math>A \in Ox</math> Rezultă coordonatele punctului <math>A</math>: <math>A(3,0)</math>,</p> <p>Construiesc <math>MP \perp NA</math>, <math>P \in NA</math>. Se obțin astfel coordonatele punctului <math>P</math>: <math>x_P = x_N = x_A \Rightarrow x_P = 3</math>, respectiv</p> <p><math>y_P = y_M \Rightarrow y_P = 2</math>, deci <math>P(3,2)</math>.</p> <p><math>MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3</math></p> <p><math>PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4</math></p> <p><math>\triangle MNP</math> este dreptunghic, deci aplic teorema lui Pitagora: <math>\Rightarrow MN^2 = MP^2 + PN^2</math></p> <p><math>= 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow MN = 5</math>.</p>

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip: coordonatele carteziene ale unui punct, formula distanței;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă;</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să înțeleagă cerința problemei;</li> <li>- să transpună în limbaj matematic datele problemei;</li> <li>- să identifice corect abscisele și ordonatele punctelor;</li> <li>- să reprezinte corect punctele pe baza coordonatelor lor;</li> <li>- să scrie corect formula/formulele utilizate;</li> <li>- să deducă din poziționarea unui punct pe axe faptul că una din coordonate devine 0;</li> <li>- să stăpânească regulile de calcul cu numere întregi;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru capitolul <i>Reper cartezian în plan</i> , geometrie clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară determinarea lungimilor unor segmente/distanțelor dintre puncte poziționate variabil (mijloace ale unor segmente date, puncte de intersecție dintre drepte date), perimetre ale unor figuri geometrice etc.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	1. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-3, 2)$ , $B(1, 4)$ și $C(6, 0)$ . Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor $AB$ și $OC$ . 2. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1, 7)$ și $B(5, -1)$ . Determinați distanța de la punctul $O$ la punctul $C$ , unde $C$ este mijlocul segmentului $AB$ .	



3. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,5)$  și  $B(5,1)$ . Determinați distanța de la punctul  $O$  la punctul  $M$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
4. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,4)$ ,  $B(-3,2)$  și  $C(5,2)$ . Determinați lungimea medianei din vârful  $A$  al triunghiului  $ABC$ .
5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1,3)$  și  $B(-5,5)$ . Determinați lungimea medianei din vârful  $O$  al triunghiului  $OAB$ .
6. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1,3)$  și  $B(3,-1)$ . Se notează cu  $M$  mijlocul segmentului  $AB$  și cu  $C$  simetricul punctului  $M$  față de punctul  $A$ . Determinați lungimea segmentului  $BC$ .


<b>Clasa a X-a</b>	<b>Subiectul: I</b>	<b>Problema: 5 (iulie 2023)</b>
<b>Item</b>	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, 6)$ . Determinați coordonatele mijlocului segmentului $AB$ .	
<b>Competența</b>	Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcule de distanțe și arii	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- coordonatele punctelor <math>A</math> și <math>B</math> în reperul cartezian <math>xOy</math>;</li> <li>- punctul care trebuie determinat este situat la mijlocul segmentului <math>AB</math>.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere să determinăm coordonatele mijlocului segmentului $AB$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p>  <p><b>Varianta 1.</b>                      Notez cu <math>M</math> - mijlocul segmentului <math>AB</math>, <math>M(x_M, y_M)</math>.                      Coordonatele punctului <math>M</math> se determină din relațiile:  <math display="block">x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4</math> <math display="block">\Rightarrow \text{Mijlocul segmentului } AB \text{ este punctul } M(0, 4).</math></p>

	<p><b>Varianta 2 (consolidare, legături intradisciplinare).</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>M</math> este mijlocul segmentului <math>AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})</math>;</li> <li>- determin vectorii de poziție <math>\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} = -1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}</math>, <math>\overrightarrow{OB} = x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j} = \vec{i} + 6 \cdot \vec{j}</math>;</li> <li>- exprim vectorul <math>\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(0 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}) = 0\vec{i} + 4\vec{j}</math>;</li> <li>- am obținut <math>\overrightarrow{OM} = 0\vec{i} + 4\vec{j}</math>, de unde rezultă coordonatele punctului <math>M(0,4)</math>.</li> </ul>
<p><b>Noțiuni teoretice necesare</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formula de calcul pentru coordonatele mijlocului unui segment <math>AB</math>: <math>x_M = \frac{x_A + x_B}{2}</math>, <math>y_M = \frac{y_A + y_B}{2}</math>;</li> <li>- vectorul de poziție al unui punct dat: pentru <math>A(x_A, y_A)</math> vectorul de poziție se scrie <math>\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}</math>;</li> <li>- vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat: <math>M</math> este mijlocul segmentului <math>AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})</math>;</li> <li>- operații cu vectori.</li> </ul>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p><b>Varianta 1.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea greșită a formulei sub forma <math>x_M = \frac{x_A - x_B}{2}</math>, <math>y_M = \frac{y_A - y_B}{2}</math>.</li> <li>- Înlocuirea greșită a coordonatelor, de exemplu elevul folosește valoarea ordonatei <math>y_A</math> în locul abscisei <math>x_B</math>.</li> <li>- Greșeli de calcul numeric.</li> <li>- Identificarea eronată a capetelor segmentului căruia se cere să i se determine coordonatele mijlocului.</li> <li>- Reprezentarea axelor de coordonate și a punctelor date și observarea pe desen a coordonatelor cerute, fără justificări bazate pe raționamente matematice/formule.</li> </ul> <p><b>Varianta 2.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea greșită a vectorului de poziție (folosirea vectorului <math>\overrightarrow{AB}</math> ca vector de poziție);</li> <li>- Scrierea greșită a relației vectoriale pentru vectorul <math>\overrightarrow{OM}</math> sub forma <math>\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO})</math>;</li> <li>- Erori de calcul la operațiile cu vectori.</li> </ul>

<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b> <b>Varianta 1.</b> Fie <math>M</math> - mijlocul segmentului <math>AB</math>, <math>M(x_M, y_M)</math>.</p> $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$ $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4.$ <p><b>În concluzie, <math>M(0,4)</math>.</b></p> <p><b>Varianta 2.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>M</math> este mijlocul segmentului <math>AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})</math>;</li> <li>- determin vectorii de poziție <math>\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} = -1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}</math>, <math>\overrightarrow{OB} = x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j} = \vec{i} + 6 \cdot \vec{j}</math>;</li> <li>- exprim vectorul <math>\overrightarrow{OM}</math>: <math>\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(0 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}) = 0\vec{i} + 4\vec{j}</math>;</li> <li>- am obținut <math>\overrightarrow{OM} = 0\vec{i} + 4\vec{j}</math>, de unde rezultă coordonatele punctului <math>M(0,4)</math>.</li> </ul>	<p>2p</p> <p>3p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1 p</p> <p>1p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip: coordonatele carteziene ale unui punct, coordonatele mijlocului unui segment, formula distanței, exprimarea vectorului de poziție, a operațiilor cu vectori;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni;</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să înțeleagă cerința problemei;</li> <li>- să transpună în limbaj matematic datele problemei;</li> <li>- să identifice corect abscisele și ordonatele punctelor;</li> <li>- să reprezinte corect punctele pe baza coordonatelor lor;</li> <li>- să scrie corect formula pentru coordonatele mijlocului unui segment;</li> <li>- să asocieze noțiunea de mijloc al segmentului cu noțiunea de coliniaritate/ distanță;</li> <li>- să deducă din poziționarea unui punct pe axe faptul că una din coordonate devine 0;</li> <li>- să stăpânească regulile de calcul cu numere întregi;</li> <li>- să acorde atenție modului de scriere a vectorilor/operațiilor cu vectori;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu pentru capitolul <i>Reper cartezian în plan</i> , geometrie clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi cu cerința de determinare a coordonatelor unuia dintre capetele segmentului, fiind dat mijlocul și una dintre extremități, calcul de distanțe între puncte care implică și mijlocul unui segment, probleme de determinare a coordonatelor în situații de simetrie.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(-1, 2)</math>, <math>B(5, -2)</math> și <math>C(0, 4)</math>. Determinați, în triunghiul <math>ABC</math>, lungimea medianei din vârful <math>C</math>.</li> <li>2. Determinați coordonatele punctului <math>B</math>, cunoscând <math>A(2, 4)</math> și faptul că punctul <math>C(3, 5)</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>.</li> <li>3. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>M(2, -6)</math> și <math>N(0, 4)</math>. Calculați distanța de la punctul <math>O(0, 0)</math> la mijlocul segmentului <math>MN</math>.</li> <li>4. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(5, -1)</math> și <math>B(3, 1)</math>. Determinați coordonatele simetricului punctului <math>A</math> față de punctul <math>B</math>.</li> <li>5. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(3, 1)</math> și <math>B(3, 7)</math>. Determinați coordonatele simetricului punctului <math>B</math> față de punctul <math>A</math>.</li> <li>6. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(-2, 4)</math> și <math>B(8, 4)</math>. Determinați lungimea medianei din vârful <math>O</math> al triunghiului <math>AOB</math>.</li> </ol>	



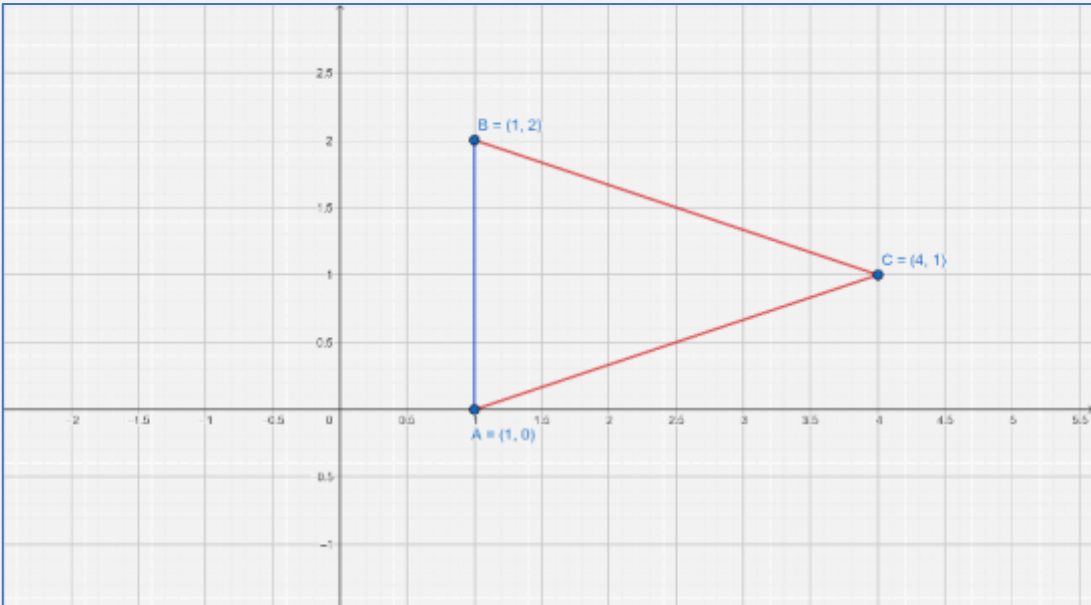
Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 5 (august 2023)
<b>Item</b>	În reperul cartezian $xOy$ , se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$ . Arătați că perimetrul triunghiului $OAB$ este egal cu 12.	
<b>Competența</b>	Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcule de distanțe și arii	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- coordonatele punctelor <math>A</math> și <math>B</math> în reperul cartezian <math>xOy</math>;</li> <li>- punctele <math>O</math>, <math>A</math> și <math>B</math> sunt vârfurile unui triunghi.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere să arătăm că perimetrul triunghiului $OAB$ este egal cu 12.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p>  <p><b>Varianta 1</b></p> <p>Punctele <math>O</math> și <math>A</math> se află pe axa <math>Oy</math>, deci <math>OA = y_A - y_O = 3 - 0 = 3</math></p> <p>Punctele <math>O</math> și <math>B</math> se află pe axa <math>Ox</math>, deci <math>OB = x_B - x_O = 4 - 0 = 4</math></p> $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ <p>Perimetrul triunghiului <math>ABC</math> este: <math>P_{\Delta OAB} = OA + OB + AB = 3 + 4 + 5 = 12</math>.</p>

	<p><b>Varianta 2</b>  <math>OA = 3, OB = 4</math>                  Din <math>AO \perp OB</math> rezultă că <math>\Delta OAB</math> este dreptunghic în <math>O</math>. Aplicând teorema lui Pitagora în <math>\Delta OAB</math> obținem <math>AB^2 = AO^2 + OB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25</math>, de unde rezultă <math>AB = 5</math>.                  Așadar, <math>P_{\Delta OAB} = AO + OB + AB = 3 + 4 + 5 = 12</math>.</p>
<p><b>Noțiuni teoretice necesare</b></p>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b>                  Formula distanței dintre două puncte de pe o axă, în particular pe axa <math>Ox</math>: dacă <math>A(x_A)</math> și <math>B(x_B)</math> atunci <math>AB =  x_B - x_A </math>.                  Formula distanței între două puncte din planul în care am fixat reper cartezian: dacă <math>A(x_A, y_A)</math> și <math>B(x_B, y_B)</math> atunci  <math display="block">AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}</math>.                  Formula pentru perimetrul unui poligon: Perimetrul unui poligon este egal cu suma lungimilor laturilor poligonului.  <b>Varianta 2 de rezolvare:</b>                  Formula distanței dintre două puncte de pe o axă, în particular pe axa <math>Ox</math>: dacă <math>A(x_A)</math> și <math>B(x_B)</math> atunci <math>AB =  x_B - x_A </math>.                  Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi <math>ABC</math>, dreptunghic în <math>A</math>: <math>BC^2 = AB^2 + AC^2</math>.                  Formula pentru perimetrul unui poligon: Perimetrul unui poligon este egal cu suma lungimilor laturilor poligonului.</p>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte din plan, scriind suma în loc de diferență în paranteze.</li> <li>- Scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte din plan, scriind diferență în loc de suma de pătrate.</li> <li>- Erori de calcul, de exemplu elevul să considere că pătratul unui număr negativ este negativ sau să scoată greșit valoarea de sub radical.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte de pe o axă, scriind formula fără modul;</li> <li>- scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte de pe o axă, scriind sumă în loc de diferență dintre coordonate.</li> </ul>

<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b>  <math>OA =  y_A - y_O  =  3 - 0  = 3</math>, <math>OB =  x_B - x_O  =  4 - 0  = 4</math>  <math>AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5</math>                      Perimetrul triunghiului <math>OAB</math> este: <math>P_{\Delta OAB} = OA + OB + AB = 3 + 4 + 5 = 12</math></p> <p><b>Varianta 2:</b>  <math>OA =  y_A - y_O  =  3 - 0  = 3</math>, <math>OB =  x_B - x_O  =  4 - 0  = 4</math>  <math>AO \perp OB \Rightarrow \Delta OAB</math> dreptunghic în <math>O</math>, deci <math>AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5</math>                      Perimetrul triunghiului <math>OAB</math> este: <math>P_{\Delta OAB} = OA + OB + AB = 3 + 4 + 5 = 12</math></p>		<p>2p 1p 2p  2p 1p 2p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să reactualizeze noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>	
	<p><b>Pentru elev</b></p>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să înțeleagă cerința problemei;</li> <li>- să transpună în limbaj matematic datele problemei;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>	



<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu, geometrie clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară determinarea lungimii unor segmente din plan și exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice.
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>M(4,1)</math>, <math>N(1,5)</math> și <math>P(4,5)</math>. Calculați aria triunghiului <math>MNP</math>.</li><li>2. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(3,2)</math>, <math>B(-3,2)</math> și <math>C(0,6)</math>. Determinați în triunghiul <math>ABC</math>, lungimea medianei din vârful <math>C</math>.</li><li>3. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,3)</math> și <math>B(8,3)</math>. Punctul <math>M</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>. Calculați distanța de la punctul <math>M</math> la punctul <math>O(0,0)</math>.</li><li>4. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(2,4)</math> și <math>B(4,4)</math>. Calculați distanța de la punctul <math>O(0,0)</math> la mijlocul segmentului <math>AB</math>.</li><li>5. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,4)</math>, <math>B(6,4)</math> și <math>C(0,-4)</math>. Știind că punctul <math>D</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>, arătați că <math>BC = 2 \cdot OD</math>.</li></ol>

Clasa a X-a	Subiectul: I	Problema: 5 (august 2023)
Item	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,0)$ , $B(1,2)$ și $C(4,1)$ . Arătați că triunghiul $ABC$ este isoscel.	
Competența	Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcule de distanțe și arii	
Rezolvare	Ce știm?	- coordonatele punctelor $A$ , $B$ și $C$ în reperul cartezian $xOy$ ; - punctele $A$ , $B$ și $C$ sunt vârfurile unui triunghi.
	Ce se cere?	Se cere să arătăm că triunghiul $ABC$ este isoscel.
Rezolvare	Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b></p>  <p><b>Varianta 1</b>                      Calculăm distanța dintre punctele <math>A</math> și <math>C</math> (lungimea segmentului <math>AC</math>):  <math display="block">AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + (1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}.</math>                     Analog, determinăm distanța dintre din punctele <math>B</math> și <math>C</math> :  <math display="block">BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}.</math>                     Rezultă <math>AC = BC \Rightarrow</math> triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</p>

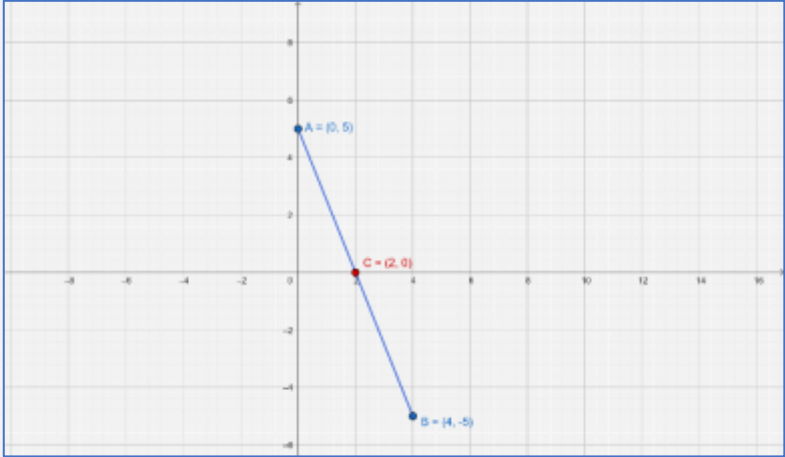
	<p><b>Varianta 2</b> În reperul cartezian <math>xOy</math>, utilizăm proprietatea mediatoarei unui segment și anume: orice punct de pe mediatoarea unui segment are distanțe egale față de extremitățile segmentului. Deoarece punctele <math>A</math> și <math>B</math> au abscisele egale (<math>x_A = x_B = 1</math>), segmentul <math>AB</math> este paralel cu axa <math>Oy</math>. Calculăm coordonatele mijlocului <math>M</math> al segmentului <math>AB</math>. <math>M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)</math>, <math>M\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right)</math>, <math>M(1,1)</math> Rezultă <math>CM</math> este mediana din vârful <math>C</math> al triunghiului <math>ABC</math>. <math>AB \parallel Oy</math>, <math>CM \parallel Ox</math>, <math>Oy \perp Ox</math> rezultă <math>CM \perp AB</math>. Am obținut <math>CM</math> înălțime și mediană în triunghiul <math>ABC</math>, deci <math>CM</math> este mediatoarea segmentului <math>AB</math>. Cum orice punct de pe mediatoarea segmentului este egal depărtat de extreme, rezultă <math>AC = BC</math>, deci triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</p>
<p><b>Noțiuni teoretice necesare</b></p>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b> Formula distanței dintre două puncte din plan Dacă <math>A(x_A, y_A)</math> și <math>B(x_B, y_B)</math> atunci <math>AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}</math>. Definiția și proprietățile triunghiului isoscel.</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b> Coordonatele mijlocului <math>M</math> al unui segment <math>AB</math>: <math>M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)</math>. Proprietatea mediatoarei unui segment și anume: orice punct de pe mediatoarea unui segment determină distanțe egale cu extremitățile segmentului.</p>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte din plan, scriind suma în loc de diferență în paranteze.</li> <li>- Scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte din plan, scriind diferență în loc de sumă între paranteze.</li> <li>- Erori de calcul, de exemplu elevul să considere că pătratul unui număr negativ este negativ sau să extragă greșit valoarea de sub radical.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea greșită a coordonatelor mijlocului unui segment, scriind diferență în loc de sumă între paranteze.</li> <li>- Confundarea medianei unui triunghi cu mediatoarea unui segment.</li> </ul>

<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b>  <math>AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + (1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}</math>  <math>BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}</math>  <math>AC = BC \Rightarrow \Delta ABC</math> este isoscel</p> <p><b>Varianta 2:</b>                  Coordonatele mijlocului <math>M</math> al unui segment : <math>M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)</math> rezultă <math>M(1, 1)</math>  <math>CM</math> este mediatoarea segmentului <math>AB</math>                  Din proprietatea mediatoarei <math>AC = BC \Rightarrow \Delta ABC</math> este isoscel</p>		<p>2p 2p 1p  2p 1p 2p</p>
<p><b>De avut în vedere – important</b></p>	<p><b>Pentru profesor</b></p>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să definească clar noțiunea de triunghi isoscel;</li> <li>- să le arate elevilor cum să identifice laturile triunghiului dat în sistemul cartezian <math>xOy</math>;</li> <li>- să le amintească formula distanței dintre două puncte, a mijlocului unui segment;</li> <li>- să le explice elevilor argumentul geometric pentru care triunghiul dat este isoscel (două laturi sunt egale, mediatoarea bazei triunghiului isoscel este și axă de simetrie a triunghiului);</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să le prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să încurajeze elevii să discute diferite metode de rezolvare și să exploreze diferite abordări pentru rezolvarea problemei;</li> <li>- să acorde feedback constant pe măsură ce lucrează la probleme și să ofere clarificări atunci când este nevoie;</li> <li>- să corecteze greșelile și să se asigure că elevii înțeleg unde au făcut erori și cum pot corecta aceste greșeli.</li> </ul>	






	<b>Pentru elev</b>	<i>Este important ca elevul:</i> <ul style="list-style-type: none"><li>- să înțeleagă proprietățile triunghiului isoscel și cum să le aplice în rezolvarea problemelor;</li><li>- să identifice punctele în sistemul de coordonate <math>xOy</math>, să aplice formula distanței dintre două puncte pentru aflarea lungimilor laturilor, să determine coordonatele mijlocului unui segment, eventual să aplice teorema lui Pitagora;</li><li>- să abordeze problema din mai multe unghiuri și să exploreze diferite metode creative de rezolvare;</li><li>- să analizeze informațiile și să folosească raționamentul logic pentru a ajunge la concluzii;</li><li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li></ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu, geometrie clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară determinarea lungimii unor segmente din plan și exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(5, -2)</math>, <math>B(-1, 0)</math> și <math>C(1, 6)</math>. Arătați că triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</li><li>2. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(2, 3)</math>, <math>B(4, 7)</math> și <math>C(-6, 7)</math>. Arătați că triunghiul <math>ABC</math> este dreptunghic în vârful <math>A</math>.</li><li>3. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(6, 3)</math> și <math>B(2, 6)</math>. Arătați că distanța dintre punctele <math>A</math> și <math>B</math> este egală cu 5.</li><li>4. Determinați distanța de la punctul <math>A(-5, 12)</math> la originea reperului cartezian <math>xOy</math>.</li><li>5. Determinați numărul real <math>a</math> știind că lungimea segmentului determinat de punctele <math>A(-5, -2)</math> și <math>B(-a, a)</math> este egală cu 5.</li><li>6. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(4, 3)</math>, <math>B(6, 7)</math> și <math>C(7, 4)</math>. Calculați distanța de la punctul <math>C</math> la mijlocul segmentului <math>AB</math>.</li></ol>	

Clasa a X-a	Subiectul: I		Problema: 5 (model 2024)
Item	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(0,5)$ , $B(4,-5)$ și $C(a,b)$ . Determinați numerele reale $a$ și $b$ , știind că punctul $C$ este mijlocul segmentului $AB$ .		
Competența	Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcule de distanțe și arii		
Rezolvare	Ce știm?	- coordonatele punctelor $A$ și $B$ în reperul cartezian $xOy$ ; - punctul $C$ este mijlocul segmentului $AB$ .	
	Ce se cere?	Se cere să aflăm coordonatele punctului $C$ , mijlocul segmentului $AB$ .	
	Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b></p>  <p><b>Varianta 1</b></p> <p>Mijlocul segmentului <math>AB</math> este punctul <math>C: C\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)</math> și, din ipoteză, știm că <math>C(a,b)</math>. Atunci:</p> $a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$ $b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + (-5)}{2} = 0$	

	<p><b>Varianta 2</b> Geometric, în reperul cartezian <math>xOy</math>, paralela dusă din punctul <math>B</math> la axa <math>Oy</math> intersectează axa <math>Ox</math> în punctul <math>D</math> de coordonate <math>D(4, 0)</math>, pentru că <math>x_B = x_D = 4</math>. Patrulaterul <math>AOBD</math> este paralelogram, deoarece segmentul <math>AO</math> este congruent și paralel cu <math>BD</math>; rezultă că diagonalele se înjumătățesc. Deci punctul <math>C</math>, mijlocul segmentului <math>AB</math>, este și mijlocul segmentului <math>OD</math>. <math>OD = 4</math>, rezultă că <math>OC = 2</math>, deci <math>C(2, 0)</math> se află pe axa <math>Ox</math>.</p>	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b> Coordonatele mijlocului unui segment, respectiv <math>C\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)</math></p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b> Într-un paralelogram diagonalele se înjumătățesc.</p>	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Scrierea greșită a coordonatelor mijlocului unui segment, scriind diferență în loc de suma absciselor, respectiv a ordonatelor punctelor <math>A</math> și <math>B</math>.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Demonstrarea incompletă a faptului că <math>AOBD</math> este paralelogram (două laturi opuse doar congruente, nu și paralele)</li> <li>- Lungimea segmentului <math>BD</math> poate fi considerată negativă (<math>y_B = -5</math>)</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare: (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</b>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b> Coordonatele mijlocului segmentului <math>AB</math>: <math>C\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)</math></p> $a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$ $b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + (-5)}{2} = 0$ <p><b>Varianta 2:</b> <math>AOBD</math> paralelogram, unde <math>D</math> este punctul de intersecție al axei <math>Ox</math> cu paralela dusă prin punctul <math>B</math> la axa <math>Oy</math>. Într-un paralelogram diagonalele se înjumătățesc (<math>AB</math> și <math>OD</math> au același mijloc și anume punctul <math>C</math>). Din <math>OD = 4</math> rezultă <math>OC = 2</math> deci <math>C(2, 0)</math>.</p>	<p>1p 2p 2p</p> <p>2p 1p 2p</p>

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i> să asigure o înțelegere clară a conceptelor de bază legate de sistemul de coordonate cartezian și de notarea punctelor în planul cartezian;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să utilizeze proprietatea mijlocului unui segment: coordonatele mijlocului unui segment sunt media aritmetică a coordonatelor extremităților segmentului;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să încurajeze elevii să propună diferite metode de rezolvare și să exploreze diferite abordări pentru rezolvarea problemei;</li> <li>- să acorde feedback pe măsură ce lucrează la probleme și să ofere clarificări atunci când este nevoie;</li> <li>- să corecteze greșelile și să se asigure că elevii înțeleg unde au făcut erori și cum pot corecta aceste greșeli.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice punctele în sistemul de coordonate <math>xOy</math>;</li> <li>- să aplice formula mijlocului unui segment pentru coordonatele punctului <math>C</math>, aflând parametrii <math>a</math> și <math>b</math>;</li> <li>- să abordeze problema din mai multe unghiuri și să exploreze diferite metode creative de rezolvare;</li> <li>- să analizeze informațiile și să folosească raționamentul logic pentru a ajunge la concluzii;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu, geometrie clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi care conțin determinarea lungimii medianei într-un triunghi, determinarea simetricului unui punct față de alt punct, demonstrarea faptului că un triunghi este dreptunghic sau isoscel etc.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(3, -1), B(-1, 2)</math>. Calculați coordonatele simetricului punctului <math>B</math> față de punctul <math>A</math>.</li> <li>2. Determinați numerele reale <math>a</math>, știind că lungimea segmentului determinat de punctele <math>A(-1, 2)</math> și <math>B(4 - a, 4 + a)</math> este egală cu 5.</li> <li>3. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(3, 0), B(a, b)</math> și <math>C(5, -2)</math>. Determinați numerele reale <math>a</math> și <math>b</math> astfel încât punctul <math>B</math> să fie mijlocul segmentului <math>AC</math>.</li> <li>4. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0, 4), B(-2, 0)</math> și <math>C(8, 0)</math>. Determinați lungimea medianei din <math>A</math> a triunghiului <math>ABC</math>.</li> <li>5. Determinați distanța de la punctul <math>A(-6, 8)</math> la originea reperului cartezian <math>xOy</math>.</li> </ol>	

	6. În reperul cartezian $xOy$ , se consideră punctul $A(2, 3)$ . Calculați lungimea segmentului $BC$ , unde punctele $B$ și $C$ sunt simetricile punctului $A$ față de axele $Ox$ , respectiv $Oy$ .	
<b>Clasa a X-a</b>	<b>Subiectul: I</b>	<b>Problema: 5 (simulare 2024)</b>
<b>Item</b>	În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,3)$ , $B(5,0)$ și $C(5,5)$ . Arătați că triunghiul $ABC$ este isoscel.	
<b>Competența</b>	Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale acesteia și calcule de distanțe și arii	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- coordonatele punctelor <math>A</math>, <math>B</math> și <math>C</math> în reperul cartezian <math>xOy</math></li> <li>- punctele <math>A</math>, <math>B</math> și <math>C</math> sunt vârfurile unui triunghi</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	Se cere să arătăm că triunghiul $ABC$ este isoscel.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p>  <p><b>Varianta 1</b> Calculăm distanța dintre punctele <math>A</math> și <math>B</math> (lungimea segmentului <math>AB</math>):</p> $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ <p>Analog, determinăm distanța dintre din punctele <math>B</math> și <math>C</math>:</p> $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5 - 5)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25} = 5$ <p>Deci <math>AB = BC \Rightarrow</math> triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</p>

	<p><b>Varianta 2</b>                  Deoarece punctele <math>B</math> și <math>C</math> au abscisele egale (<math>x_B = x_C = 5</math>) pentru determinarea lungimii segmentului <math>BC</math> se poate utiliza formula <math>BC =  y_C - y_B  =  5 - 0  =  5  = 5</math>.</p>	
<p><b>Noțiuni teoretice necesare</b></p>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b>                  Formula distanței dintre două puncte din plan                  Dacă <math>A(x_A, y_A)</math> și <math>B(x_B, y_B)</math> atunci <math>AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}</math>.</p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b>                  Formula distanței dintre două puncte de pe o axă, în particular pe axa <math>Ox</math>:                  Dacă <math>A(x_A)</math> și <math>B(x_B)</math> atunci <math>AB =  x_B - x_A </math>.</p>	
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte din plan, scriind suma în loc de diferență în paranteze;</li> <li>- scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte din plan, scriind diferență în loc de sumă între paranteze;</li> <li>- erori de calcul, de exemplu elevul să considere că pătratul unui număr negativ este negativ sau să scoată greșit valoarea de sub radical.</li> </ul> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte de pe o axă, scriind formula fără modul;</li> <li>- scrierea greșită a formulei pentru distanța dintre două puncte de pe o axă, scriind sumă în loc de diferență dintre coordonate.</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b>  <math>AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5</math>  <math>BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5 - 5)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25} = 5</math>  <math>AB = BC \Rightarrow \Delta ABC</math> este isoscel.</p> <p><b>Varianta 2:</b>  <math>AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5</math>  <math>BC =  y_C - y_B  =  5 - 0  =  5  = 5</math>  <math>AB = BC \Rightarrow \Delta ABC</math> este isoscel.</p>	<p>2p                  2p                  1p</p> <p>2p                  2p                  1p</p>

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să amintească noțiunile teoretice necesare în rezolvarea problemelor de acest tip;</li> <li>- să stabilească clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința, transpunând în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal cu elevii modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să aibă în vedere alegerea variantei mai simple de rezolvare, în încercarea de a se evita greșelile de calcul care pot interveni. Cu cât varianta aleasă este mai complicată, cu atât mai mult este posibil ca elevul să aibă greșeli de calcul.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să înțeleagă cerința problemei;</li> <li>- să transpună în limbaj matematic situația problemei;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	Itemul este un exemplu, geometrie, clasa a X-a. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară determinarea lungimii unor segmente din plan și exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(0,3)</math> și <math>B(4,0)</math>. Arătați că perimetrul triunghiului <math>OAB</math> este egal cu 12.</li> <li>2. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(1,0)</math>, <math>B(1,2)</math> și <math>C(4,1)</math>. Arătați că triunghiul <math>ABC</math> este isoscel.</li> <li>3. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>M(0,2)</math> și <math>N(3,6)</math>. Arătați că distanța dintre punctele <math>M</math> și <math>N</math> este egală cu 5.</li> <li>4. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(2,1)</math> și <math>B(2,7)</math>. Punctul <math>M</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math>. Calculați lungimea segmentului <math>AM</math>.</li> <li>5. În reperul cartezian <math>xOy</math>, se consideră punctele <math>A(3,4)</math>, <math>B(6,0)</math> și <math>C(6,0)</math>. Calculați distanța de la punctul <math>A</math> la mijlocul segmentului <math>BC</math>.</li> </ol>	





MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI  
ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

Propuneri de itemi pentru exersare\*, clasa a X-a (similari subiectului I Bacalaureat sau selectați din variantele publice)

**Nr. crt.    Itemi exersare****A.    ALGEBRĂ**

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x-4) = \log_2 4$ .
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_7(2x-1) = \log_7 9$ .
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(x^2+9) = 2$ .
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(2x+4) = 4$ .
5. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x-2020) = 2\log_2 3$ .
6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(5x-1) = \lg 2 + \lg 7$ .
7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(4-x) = \log_2(x-2)$ .
8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(5-x) = 2$ .
9. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_4 x + \log_4(3x) = \log_4 12$ .
10. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 x + \log_2(x-3) = \log_2 4$ .
11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(4x+1) = 2$ .
12. Rezolvați în mulțimea  $(1; +\infty)$  ecuația  $\lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 3$ .
13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(x+3) = 2$ .
14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_4(3x-1) = \log_4 5$ .
15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_7(x^2+13) = 2$ .
16. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_4(3x+4) = \log_4 16$ .
17. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x+2029) = 2\log_2 3$ .
18. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\lg(3x-4) = \lg 5 + \lg 7$ .
19. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $5^{2x} = 5^{2+x}$ .
20. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $3^{2x-3} = 3^x$ .
21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $4^x = 2^{3x-2}$ .
22. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $3^{3x+1} = 81$ .
23. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $7^{2x+1} = 7^{4-x}$ .
24. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuație:  $3^{x+2} + 3^x = 30$ .
25. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{1-2x} = 32$ .
26. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $10^{6-2x} = 100^2$ .
27. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $81^x = 3$ .
28. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $7^{x+3} = 49^x$ .
29. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{x+2} - 3^x = 24$ .
30. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x+4} = 4^{x+3}$ .
31. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{3x+1} = 16$ .
32. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{3x+2} = 4^{x+1}$ .
33. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x^2-7x+6} = 1$ .
34. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^x + 5^{x-1} = 30$ .
35. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $49^x - 10 \cdot 7^x + 21 = 0$ .

36. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$ .
37. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{2x-5} = 1$ .
38. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{6-2x} = 2$ .
39. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+2} = x$ .
40. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2-3x+2} = x-1$ .
41. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{5-2x}-4 = 1$ .
42. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $1-\sqrt{4-x} = x-1$ .
43. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3x-8} = 1$ .
44. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{4+2x} = 2$ .
45. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x-1} = 3$ .
46. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{3-x} = 2x$ .
47. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2-2x+16} = 4$ .
48. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2 + \sqrt[3]{27x+8} = 1$ .
49. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{9-x} = x-3$ .
50. Calculați probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A = \{0,1,2,3,4,5\}$  acesta să verifice inegalitatea  $n! < 50$ .
51. Calculați probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A = \{3,4,5,\dots,10\}$  acesta să verifice inegalitatea  $n(n-1) \geq 35$ .
52. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar.
53. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $M = \{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ , acesta să fie multiplu de 6.
54. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{1,2,3,\dots,30\}$ , acesta să **nu** fie multiplu de 3.
55. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{1,2,3,\dots,15\}$ , numărul  $3n$  să fie par.
56. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $x$  din mulțimea  $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ , acesta să fie soluție a ecuației  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .
57. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr  $n$  din mulțimea  $A = \{1,3,5,7,9\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $2n \geq 9$ .
58. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ , acesta să fie multiplu de 6.
59. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A = \{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$ , acesta să fie număr par.
60. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $n$  din mulțimea  $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $(n-2)(n-6) \geq 0$ .
61. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 5.
62. Determinați probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A = \{0,1,2,3,4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n^2 \leq 2n$ .
63. Determinați probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A = \{0,1,2,3,4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n! \geq n^2$ .
64. Determinați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii  $\{21,22,23,\dots,37\}$ , acesta să nu fie prim.
65. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale mai mici ca 100, acesta să fie cubul unui număr natural.

66. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr natural de trei cifre acesta să fie pătrat perfect.
67. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elementele mulțimii  $\{1, 2\}$ . Calculați probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.
68. Determinați probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n(n - 1) \geq 20$ .
69. Determinați probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $3^n > n^3$ .
70. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr de două cifre format cu elementele mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , acesta să aibă cifrele egale.
71. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{70}\}$ , acesta să fie rațional.
72. Să se determine prețul inițial al unui obiect, care după o scumpire cu 25% costă 320 de lei.
73. Să se determine prețul unui obiect după o scumpire cu 40%, dacă prețul inițial al obiectului este 600 de lei.
74. Să se determine prețul unui obiect după o ieftinire cu 15%, dacă prețul inițial al obiectului este 200 de lei.
75. Să se determine prețul final al unui obiect care costă 480 de lei, dacă se scumpește cu 25% și apoi se ieftinește cu 40%.
76. Să se determine prețul cu TVA (19%) al unui obiect care fără TVA costă 1200 de lei.
77. Să se determine prețul fără TVA (19%) al unui obiect care cu TVA costă 1785 de lei.
78. Un produs costă 900 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.
79. Un produs costă 150 de lei. Determinați prețul după o scumpire cu 10%.
80. După o ieftinire cu 20%, un produs costă 240 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
81. După o scumpire cu 10%, un obiect costă 1650 lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
82. Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după ce se scumpește de două ori, succesiv, cu 10%.
83. Prețul unui obiect s-a redus cu 90 de lei, ceea ce reprezintă 15% din prețul său inițial. Determinați prețul inițial al produsului.
84. Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul după o ieftinire cu 30%.
85. Un produs costă 90 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 10%.
86. După o ieftinire cu 30%, un produs costă 210. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
87. După o scumpire cu 10%, un obiect costă 220 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
88. În urma unei ieftiniri cu 20%, prețul unui produs a scăzut cu 27 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
89. În urma unei scumpiri cu 15% prețul unui produs a crescut cu 6 lei. Determinați prețul inițial al produsului.

## B. GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

90. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(1,3)$ ,  $B(5,0)$  și  $C(5,5)$ . Să se arate că triunghiul  $ABC$  este isoscel.
91. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(0,5)$ ,  $B(4,-5)$  și  $C(a,b)$ . Să se determine  $a$  și  $b$  știind că punctul  $C$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
92. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(1,0)$ ,  $B(1,2)$  și  $C(4,1)$ . Să se arate că triunghiul  $ABC$  este isoscel.
93. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(0,3)$  și  $B(4,0)$ . Să se arate că triunghiul  $OAB$  are perimetrul egal cu 12.
94. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $M(0,2)$  și  $N(3,6)$ . Să se arate că distanța  $MN$  este egală cu 5.

95. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(0,5)$  și  $B(2,-1)$ . Arătați că triunghiul  $OMB$  este dreptunghic în  $O$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
96. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(1,3)$ ,  $B(5,0)$  și  $C(5,5)$ . Să se arate că triunghiul  $ABC$  este isoscel.
97. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(-3,2)$ ,  $B(1,4)$  și  $C(6,0)$ . Să se determine distanța dintre mijloacele segmentelor  $AB$  și  $OC$ .
98. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-3,2)$ ,  $B(1,4)$  și  $C(6,0)$ . Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor  $AB$  și  $OC$ .
99. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,7)$  și  $B(5,-1)$ . Determinați distanța de la punctul  $O$  la punctul  $C$ , unde  $C$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
100. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,5)$  și  $B(5,1)$ . Determinați distanța de la punctul  $O$  la punctul  $M$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
101. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,4)$ ,  $B(-3,2)$  și  $C(5,2)$ . Determinați lungimea medianei din vârful  $A$  al triunghiului  $ABC$ .
102. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1,3)$  și  $B(-5,5)$ . Determinați lungimea medianei din vârful  $O$  al triunghiului  $OAB$ .
103. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1,3)$  și  $B(3,-1)$ . Se notează cu  $M$  mijlocul segmentului  $AB$  și cu  $C$  simetricul punctului  $M$  față de punctul  $A$ . Determinați lungimea segmentului  $BC$ .
104. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(-1,2)$ ,  $B(5,-2)$  și  $C(0,4)$ . Determinați, în triunghiul  $ABC$ , lungimea medianei din vârful  $C$ .
105. Determinați coordonatele punctului  $B$ , cunoscând  $A(2,4)$  și faptul că punctul  $C(3,5)$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
106. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $M(2,-6)$  și  $N(0,4)$ . Calculați distanța de la punctul  $O(0,0)$  la mijlocul segmentului  $MN$ .
107. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(5,-1)$  și  $B(3,1)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $A$  față de punctul  $B$ .
108. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(3,1)$  și  $B(3,7)$ . Determinați coordonatele simetricului punctului  $B$  față de punctul  $A$ .
109. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(-2,4)$  și  $B(8,4)$ . Determinați lungimea medianei din vârful  $O$  al triunghiului  $AOB$ .
110. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $M(4,1)$ ,  $N(1,5)$  și  $P(4,5)$ . Calculați aria triunghiului  $MNP$ .
111. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(3,2)$ ,  $B(-3,2)$  și  $C(0,6)$ . Determinați în triunghiul  $ABC$ , lungimea medianei din vârful  $C$ .
112. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(0,3)$  și  $B(8,3)$ . Punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ . Calculați distanța de la punctul  $M$  la punctul  $O(0,0)$ .
113. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(2,4)$  și  $B(4,4)$ . Calculați distanța de la punctul  $O(0,0)$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
114. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(0,4)$ ,  $B(6,4)$  și  $C(0,-4)$ . Știind că punctul  $D$  este mijlocul segmentului  $AB$ , arătați că  $BC = 2 \cdot OD$ .
115. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(5,-2)$ ,  $B(-1,0)$  și  $C(1,6)$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este isoscel.



116. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(2, 3)$ ,  $B(4, 7)$  și  $C(-6, 7)$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în vârful  $A$ .
117. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(6, 3)$  și  $B(2, 6)$ . Arătați că distanța dintre punctele  $A$  și  $B$  este egală cu 5.
118. Determinați distanța de la punctul  $A(-5, 12)$  la originea reperului cartezian  $xOy$ .
119. Determinați numărul real  $a$  știind că lungimea segmentului determinat de punctele  $A(-5, -2)$  și  $B(-a, a)$  este egală cu 5.
120. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(4, 3)$ ,  $B(6, 7)$  și  $C(7, 4)$ . Calculați distanța de la punctul  $C$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
121. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(3, -1)$ ,  $B(-1, 2)$ . Calculați coordonatele simetricului punctului  $B$  față de punctul  $A$ .
122. Determinați numerele reale  $a$ , știind că lungimea segmentului determinat de punctele  $A(-1, 2)$  și  $B(4 - a, 4 + a)$  este egală cu 5.
123. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(3, 0)$ ,  $B(a, b)$  și  $C(5, -2)$ . Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât punctul  $B$  să fie mijlocul segmentului  $AC$ .
124. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(0, 4)$ ,  $B(-2, 0)$  și  $C(8, 0)$ . Determinați lungimea medianei din  $A$  a triunghiului  $ABC$ .
125. Determinați distanța de la punctul  $A(-6, 8)$  la originea reperului cartezian  $xOy$ .
126. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctul  $A(2, 3)$ . Calculați lungimea segmentului  $BC$ , unde punctele  $B$  și  $C$  sunt simetricele punctului  $A$  față de axele  $Ox$ , respectiv  $Oy$ .
127. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(0, 3)$  și  $B(4, 0)$ . Arătați că perimetrul triunghiului  $OAB$  este egal cu 12.
128. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 2)$  și  $C(4, 1)$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este isoscel.
129. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $M(0, 2)$  și  $N(3, 6)$ . Arătați că distanța dintre punctele  $M$  și  $N$  este egală cu 5.
130. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(2, 1)$  și  $B(2, 7)$ . Punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ . Calculați lungimea segmentului  $AM$ .
131. În reperul cartezian  $xOy$ , se consideră punctele  $A(3, 4)$ ,  $B(6, 0)$  și  $C(6, 0)$ . Calculați distanța de la punctul  $A$  la mijlocul segmentului  $BC$ .

*\*Lista este constituită prin reunirea tuturor itemilor exemplificați la fiecare dintre problemele comentate, asociate clasei a X-a, pentru a facilita utilizarea acestora de către cadrele didactice și elevii în pregătirea examenului național de bacalaureat*



*Matematica  
nu este despre numere, ecuații, calcule sau algoritmi:  
este despre înțelegere.*

**William Paul Thurston**

### III.3. Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a XI-a

Utilizarea, în cadrul unor activități de învățare/recapitulare, a unor itemi selectați din subiectele II și III, în corespondență cu noțiuni/concepte studiate în clasa a XI-a, din instrumentele de evaluare la proba de matematică a examenului național de bacalaureat, la simulările acestui examen sau ca modele pentru această probă.

În organizarea materialului, am abordat dezvoltat primul item, ca un exemplu pentru profesori, lansând invitația ca pentru ceilalți itemi, profesorii să reflecteze la acele aspecte care pot fi dezvoltate în vederea remedierii/consolidării/aprofundării învățării.





Probleme selectate pentru clasa a XI-a (din cadrul subiectelor II și III, instrumente de evaluare asociate examenului, simulării sau modelelor de bacalaureat), care sunt prezentate în cadrul subsecțiunii dedicate anului de studiu

Nr. crt.	Problemă și itemi	Selectată din:
1.	Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . a) Arătați că $\det A = -1$ . b) Arătați că $2B - A = 3C$ . c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X \cdot A = B + 2C$ .	<a href="#">Bacalaureat (varianta 1, 2023)</a>
2.	Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$ , unde $x$ este număr real. a) Arătați că $\det A = 3$ . b) Arătați că $B(8) - 3B(2) = 2A$ . c) Determinați numărul real $x$ pentru care $A \cdot B(x) = B(x)$ .	<a href="#">Bacalaureat (varianta 5, 2023)</a>
3.	Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . a) Arătați că $\det A = 2$ . b) Arătați că $B + 3I_2 = 2A$ . c) Determinați numărul real $x$ pentru care $A \cdot (xA + B) = 2xI_2$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
4.	Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{pmatrix}$ , unde $x$ este număr real. a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$ . b) Arătați că $A(3) + 2A(1) = 3A(2)$ . c) Determinați numerele reale $x$ pentru care $A(x) \cdot A(x^2) = I_2$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2024)</a>
5.	Se consideră funcția $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2024)</a>

	<p>a) Arătați că <math>f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}, x \in (2, \infty)</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{e^x} = 0</math>.</p> <p>c) Demonstrați că <math>\frac{e^{x-3}}{x^2 - 3} \geq \frac{1}{6}</math>, pentru orice <math>x \in (2, \infty)</math>.</p>	
6.	<p>Se consideră funcția <math>f : (4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x - 4}{x - 4}</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>f'(x) = -\frac{8}{(x - 4)^2}, x \in (4, \infty)</math>.</p> <p>b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math>.</p> <p>c) Demonstrați că funcția <math>g : (4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f'(x)</math> este crescătoare.</p>	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
7.	<p>Se consideră funcția <math>f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x}</math></p> <p>a) Arătați că <math>f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2}, x \in (0, \infty)</math>.</p> <p>b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției <math>f</math> în punctul de abscisă <math>x=2</math>, situat pe graficul funcției <math>f</math>.</p> <p>c) Demonstrați că <math>f(1-x) \geq f(1+x)</math> pentru orice <math>x \in (0, 1)</math>.</p>	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2023)</a>
8.	<p>Se consideră funcția <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>f'(x) = x(e^x - 1), x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = 0</math>.</p> <p>c) Demonstrați că <math>f(x) \leq f(x^2)</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 0]</math>.</p>	<a href="#">Bacalaureat (model 2022)</a>

Clasa: a XI-a		Subiectul: II	Problema: 1 (BAC 2023, varianta 1)
<b>Competența</b>		Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice	
<b>Noțiuni teoretice/ concepte necesare</b>		<p>Calculul determinantului unei matrice de ordinul al doilea: <math>\begin{vmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c</math></p> <p>Operații cu matrice de ordinul al doilea                      Proprietățile operațiilor cu matrice                      Noțiunea de egalitate a două matrice și deducerea unor ecuații sau a unor sisteme de ecuații prin egalarea elementelor matricelor                      Rezolvarea unor ecuații de gradul I, II, exponențiale etc.                      Condiția ca o matrice să fie inversabilă                      Calculul inversei unei matrice pătratice de ordinul al doilea cu determinantul nenul (inversabilă).                      Rezolvarea unor ecuații matriceale  <b>Eventual, rezolvarea sistemelor de două ecuații cu două necunoscute (legături intradisciplinare)</b></p>	
<b>Item</b>		<p>Se consideră matricele <math>A = \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 \\ 2 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, <math>B = \begin{pmatrix} 0 &amp; 4 \\ 4 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> și <math>C = \begin{pmatrix} -1 &amp; 2 \\ 2 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\det A = -1</math>.                      b) Arătați că <math>2B - A = 3C</math>.                      c) Determinați matricea <math>X \in M_2(\mathbb{R})</math> pentru care <math>2X \cdot A = B + 2C</math>.</p>	
<b>Reflecție Rezolvare și comentarii</b>		<b>Ce știm (ce se dă)?</b>	Matricele pătratice de ordinul 2: $A$ , $B$ și $C$ – cunoscute.
		<b>Ce se cere?</b>	a) Să arătăm că determinantul matricei $A$ este egal cu $-1$ . b) Să verificăm, prin calcul, relația $2B - A = 3C$ . c) Să rezolvăm o ecuație matriceală.
		<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p>a) Dezvoltăm (calculăm) determinantul de ordinul 2, astfel:</p> $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \underset{\text{produsul elementelor diagonalei principale}}{3 \cdot 1} - \underset{\text{produsul elementelor diagonalei secundare}}{2 \cdot 2} = 3 - 4 = -1.$ <p>În concluzie, <math>\det A = -1</math>.</p>

- b) Pentru a arăta relația cerută, efectuăm calculele cu matrice în fiecare dintre membrii egalității:
- în membrul stâng al egalității, efectuăm întâi înmulțirea scalarului (numărului) cu matricea, apoi efectuăm scăderea matricelor:

$$2B - A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

produsul dintre un scalar (număr) și matrice

$$= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 & 8-2 \\ 8-2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

scăderea dintre două matrice de același tip (ordin)

- în membrul drept al egalității, efectuăm, din nou, produsul dintre un scalar și o matrice:

$$3C = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cum ambele matrice rezultat sunt egale, am arătat că  $2B - A = 3C$ .

- c) Avem de rezolvat o ecuație matriceală (necunoscuta fiind matrice)/de determinat elementele matricei necunoscute.

### Varianta 1

Efectuăm calculele în membrul drept al ecuației:  $B + 2C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$

Conform cerinței a)\*,  $\det A = -1 \neq 0$ , deci matricea  $A$  este inversabilă.

Calculăm inversa matricei  $A$ .

Transpusa matricei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  se obține rescriind elementele de pe linii pe coloane, deci obținem  ${}^t A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

În cazul matricelor de ordinul 2, *adjuncta matricei A* se obține prin:

- schimbarea elementelor de pe diagonala principală din transpusa matricei A, între ele;
- schimbarea atât a semnelui elementelor situate pe diagonala secundară a matricei transpuse, cât și a elementelor între ele.

$$\text{Cum } {}^t A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ obținem } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Inversa matricei } A \text{ este } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ținând cont de proprietatea  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ , a matricelor inversabile, înmulțim relația dată, la dreapta\*\*, cu  $A^{-1}$ :

$$2X \cdot A = B + 2C \quad | \cdot A^{-1}$$

Obținem  $2X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=I_2} = (B + 2C) \cdot A^{-1}$ , de unde, folosind proprietatea de element neutru la înmulțire a matricei  $I_2$ ,

$M \cdot I_2 = I_2 \cdot M = M$ , pentru oricare  $M$  matrice pătratică de ordinul 2, rezultă:

$$2X = (B + 2C) \cdot A^{-1}$$

Împărțim relația prin numărul 2 (nenul) și obținem:

$$X = \frac{1}{2} (B + 2C) \cdot A^{-1}$$

Efectuăm calculele, fie începând cu înmulțirea matricelor, fie cu înmulțirea scalarului cu una dintre matrice:

$$X = \frac{1}{2} (B + 2C) \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{efectuăm produsul}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{finalizăm cu produsul de matrice}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & -2-12 \\ -4+4 & 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

În concluzie\*\*\*\*, am determinat matricea, rezultatul fiind  $X = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ \*\*\*\*\*.

**Comentarii:**

Este important de punctat pentru elevi că:

\*Relația  $\det A = -1$ , precizată în cadrul cerinței a) se poate utiliza la punctul c), indiferent dacă elevul reușește să rezolve cerința sau nu

\*\*Operația de înmulțire a matricelor este necomutativă, deci contează în ce „parte” înmulțim, în cazul de față, la dreapta

$$\begin{array}{c}
 \text{***} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{linia 1 din prima matrice} \\ \times \\ \text{coloana 1 din a doua matrice}}} = (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{linia 1 din prima matrice} \\ \times \\ \text{coloana 2 din a doua matrice}}} = (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\
 \\
 \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{linia 2 din prima matrice} \\ \times \\ \text{coloana 1 din a doua matrice}}} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{linia 2 din prima matrice} \\ \times \\ \text{coloana 2 din a doua matrice}}} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)
 \end{array}$$

\*\*\*\*Se poate remarca volumul de concepte utilizate în rezolvare, în acest sens propunem și varianta 2 de rezolvare

\*\*\*\***Probarea rezultatului**, deși nu este parte a rezolvării, reprezintă o etapă peste care elevul este recomandat să nu sară, reprezentând o validare alternativă (față de raționamentul care a condus la rezultat) a răspunsului obținut.

**Varianta 2**

$$\text{Calculăm } B + 2C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Cum  $X \in M_2(\mathbb{R})$ , considerăm matricea  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , cu  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Pentru a afla matricea  $X$ , trebuie să determinăm/calculăm valorile reale pentru  $a, b, c$  și  $d$ .

În notațiile introduse, efectuarea calculului în membrul stâng parcurge următoarele etape:

$$2X \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a + 4b & 4a + 2b \\ 6c + 4d & 4c + 2d \end{pmatrix}. \quad (2)*$$

Din (1), (2), și  $2X \cdot A = B + 2C$  (relația din cerință), obținem

$$\begin{pmatrix} 6a+4b & 4a+2b \\ 6c+4d & 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Egalitatea celor două matrice pătratice de ordinul 2 implică egalitatea elementelor care ocupă aceleași poziții în cele două matrice, rezultând patru ecuații cu patru necunoscute\*\*:

$$\begin{cases} 6a+4b = -2 \\ 4a+2b = 8 \\ 6c+4d = 8 \\ 4c+2d = 4 \end{cases}$$

Este util să remarcăm faptul că primele două ecuații ale sistemului anterior conțin doar necunoscutele  $a$  și  $b$ , iar următoarele două ecuații conțin celelalte două necunoscute,  $c$  și  $d$ . Această observație permite „spargerea” sistemului de patru ecuații cu patru necunoscute în două sisteme a câte două ecuații și două necunoscute:

$$(S1) \begin{cases} 6a+4b = -2 \\ 4a+2b = 8 \end{cases} \quad \text{și} \quad (S2) \begin{cases} 6c+4d = 8 \\ 4c+2d = 4 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul (S1) prin metoda reducerii, aplicată pentru necunoscuta  $b$ :

$$\begin{cases} 6a+4b = -2 \\ 4a+2b = 8 \end{cases} \quad | :(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3a-2b = 1 \\ 4a+2b = 8 \end{cases}$$

Adunăm cele două ecuații, membru cu membru, și obținem:

$$\begin{cases} a = 9 \\ 4a+2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ 2b = 8 - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -14 \end{cases} \quad (3)$$



	<p>Rezolvăm sistemul (S2) prin metoda substituției, după ce „simplificăm” ecuațiile, observând că atât coeficienții, cât și termenii liberi sunt numere naturale pare:</p> $\begin{cases} 6c + 4d = 8 \\ 4c + 2d = 4 \end{cases} \begin{matrix}   :2 \\   :2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c + 2d = 4 \\ 2c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c + 2d = 4 \\ d = 2 - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3c + 2 \cdot (2 - 2c) = 4 \\ d = 2 - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c + 4 - 4c = 4 \\ d = 2 - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c = 0 \\ d = 2 - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$ <p>Din (3) și (4), obținem <math>X = \begin{pmatrix} 9 &amp; -14 \\ 0 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>.</p> <p><b>Comentarii:</b></p> <p>Este important de punctat pentru elevi că:</p> <p><i>*La înmulțirea matricelor, trebuie avut în vedere că nu între orice două matrice se poate efectua operația și, de asemenea, că atunci când este posibilă, înmulțirea nu are proprietatea de comutativitate, deși există cazuri particulare de matrice al căror produs este comutativ. În acest sens, este important ca înlocuirea notațiilor X și A cu matricele pe care le reprezintă să respecte ordinea factorilor.</i></p> <p><i>**În această abordare, s-a redus aparatul matematic utilizat, cel puțin din perspectiva celui introdus în clasa a XI-a, rezolvarea bazându-se pe concepte și metode învățate în clasele anterioare, deci mai exersate. Am preferat să realizăm cât mai multe legături intradisciplinare. În acest sens, cu rol didactic, am rezolvat sistemele liniare de două ecuații și două necunoscute atât prin metoda reducerii unei necunoscute, cât și prin metoda substituției.</i></p>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p>a) <i>Aplicarea greșită a definiției/dezvoltării determinantului unei matrice de ordinul al doilea sau greșeli de calcul cu numere întregi.</i></p> <p>b) <i>Greșeli de calcul la aplicarea operațiilor cu matrice de ordinul al doilea.</i></p> <p><b>Varianta 1 de rezolvare:</b></p> <p><i>Greșeli de calcul la operațiile cu matrice de ordinul al doilea (înmulțirea cu scalari și adunarea).</i></p> <p><i>Necunoașterea condiției ca o matrice să fie inversabilă.</i></p> <p><i>Calculul greșit al inversei unei matrice pătratică de ordinul al doilea.</i></p> <p><i>Rezolvarea greșită a ecuației matriceale (necunoașterea proprietăților înmulțirii de matrice - înmulțirea la stânga cu inversa matricei A).</i></p> <p><b>Varianta 2 de rezolvare:</b></p> <p><i>Greșeli de calcul la operațiile cu matrice de ordinul al doilea.</i></p> <p><i>Rezolvarea greșită a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute.</i></p>

<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 15p</b> ATENȚIE! Profesorul trebuie să atragă atenția elevilor asupra faptului că, pe foaia de examen, pentru a primi punctaj maxim, trebuie trecute toate calculele (ca în barem sau similar)/parcuse coerent și cât mai complet etapele de raționament, așadar nu se vor consemna doar rezultatele.	
	a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 =$	3p
	$= 3 - 4 = -1.$	2p
	b) $2B - A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	3p
	$3C = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$	1 p
	Obținem $2B - A = 3C.$	1 p
	c) <b>Varianta 1</b>	
	Calculăm $B + 2C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$	1 p
	Cum $\det A = -1 \neq 0$ , matricea $A$ este inversabilă. Calculăm inversa matricei $A$ .	2 p
	Transpusa matricei $A$ este ${}^t A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , iar adjuncta matricei $A$ este $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$	
Inversa matricei $A$ este $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$	1p	
$2X \cdot A = B + 2C \Leftrightarrow 2X = (B + 2C) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} (B + 2C) \cdot A^{-1}$	1p	
Obținem $X = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$		
<b>Varianta 2</b>		

	Calculăm $B + 2C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ .	1p
	Considerăm matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Pentru a afla matricea $X$ , trebuie să calculăm valorile numerelor $a, b, c$ și $d$ .	1p
	$2X \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+4b & 4a+2b \\ 6c+4d & 4c+2d \end{pmatrix}$	1p
	$2X \cdot A = B + 2C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6a+4b & 4a+2b \\ 6c+4d & 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+4b = -2 \\ 4a+2b = 8 \end{cases}$ și $\begin{cases} 6c+4d = 8 \\ 4c+2d = 4 \end{cases}$	1p
	Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 6a+4b = -2 / :(-2) \\ 4a+2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a-2b = 1 \\ 4a+2b = 8 \end{cases}$ Adunăm cele două ecuații membru cu membru și	1p
	obținem $\begin{cases} a = 9 \\ 4a+2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ 2b = 8 - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -14 \end{cases}$	
	Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 6c+4d = 8 / :(-2) \\ 4c+2d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3c-2d = -4 \\ 4c+2d = 4 \end{cases}$ Adunăm cele două ecuații membru cu membru și	
	obținem $\begin{cases} c = 0 \\ 4c+2d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ 2d = 4 - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases}$	
	Obținem $X = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .	1p

Clasa: a XI-a	Subiectul: II	Problema: 1 (BAC 2023, varianta 5)
<b>Competența</b>	Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice	
<b>Item</b>	Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$ , unde $x$ este număr real.  d) Arătați că $\det A = 3$ . e) Arătați că $B(8) - 3B(2) = 2A$ . f) Determinați numărul real $x$ pentru care $A \cdot B(x) = B(x)$ .	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Matricele pătratiche de ordinul 2: $A$ și $B(x)$ , explicit. Subînțelegem că prin notația $B(x)$ avem o infinitate de matrice generate de forma dată, cazuri particulare putând fi obținute prin particularizarea lui $x$ .
	<b>Ce se cere?</b>	a) Să arătăm că determinantul matricei $A$ este egal cu 3. b) Să verificăm prin calcul relația $B(8) - 3B(2) = 2A$ . c) Să calculăm numărul real $x$ care verifică relația $A \cdot B(x) = B(x)$ .
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 3 - 0 = 3$ . b) Calculăm $B(8)$ și $B(2)$ , înlocuind în $B(x)$ pe $x$ cu 8, respectiv cu 2. Pentru $x = 8$ , obținem $B(8) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ , pentru $x = 2$ , obținem $B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . $B(8) - 3B(2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \cdot 2 & 0-3 \cdot 0 \\ -1-3 \cdot (-1) & 6-3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \quad (1)$ $2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \quad (2)$ Din (1) și (2), obținem că $B(8) - 3B(2) = 2A$ .

c)

**Varianta 1**

$$\text{Calculăm } A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (x-2) \\ 1 \cdot x + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (x-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x-3 & 3x-6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dacă } A \cdot B(x) = B(x) \text{ atunci } \begin{pmatrix} x & 0 \\ x-3 & 3x-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}.$$

Două matrice sunt egale dacă au elementele egale, adică

$$x = x, 0 = 0, x-3 = -1 \text{ și } 3x-6 = x-2.$$

Obținem  $x = 2$ .

**Varianta 2 (consolidare)**

$$\text{Calculăm } \det B(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x \cdot (x-2) - 0 = x \cdot (x-2).$$

Continuăm cu studiul pe următoarele cazuri:

**Cazul 1:**  $\det B(x) = 0$ , deci  $x \cdot (x-2) = 0$ , produsul nul realizându-se fie pentru  $x = 0$ , fie în cazul  $x-2 = 0$ , pentru  $x = 2$ .

În ambele subcazuri, cum determinantul este nul, matricea  $B(x)$  nu este inversabilă, deci nu putem înmulți cu inversa acesteia (care nu există).

$$\text{Subcazul 1.1. Pentru } x = 0, B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = B(0), \text{ deci } x = 0 \text{ nu îndeplinește condiția cerinței (nu convine).}$$

$$\text{Subcazul 1.2. Pentru } x = 2, B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

		<p> <math>A \cdot B(2) = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 &amp; 0 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 &amp; 0 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix} = B(2)</math>, deci <math>x = 2</math> îndeplinește condiția cerinței (convine)*.         </p> <p> <b>Cazul 2:</b> Pentru <math>\det B(x) \neq 0</math>, adică pentru oricare <math>x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}</math>, rezultă că matricea <math>B(x)</math> este inversabilă, deci putem înmulți relația din cerință cu inversa matricei <math>B(x)</math> (care există):         </p> $A \cdot B(x) = B(x) \cdot B^{-1}(x)$ <p>             Obținem <math>A = I_2</math>, adică <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, relație care nu este adevărată, deci niciun <math>x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}</math> nu convine.         </p> <p>             În concluzie, <math>x = 2</math> este singura valoare care convine cerinței.         </p> <p> <b>Comentariu:</b>  <i>*Cerința preciza determinarea „numărului real <math>x</math>”, la singular. În aceste condiții, obținerea lui <math>x = 2</math>, ca valoare care îndeplinește condițiile din cerință, nu mai necesită studiul altor cazuri.</i> </p> <p> <b>Varianta 3 (aprofundare)</b> </p> <p>             Utilizăm proprietatea determinantului produsului a două matrice pătratice (de același ordin): <math>\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B</math>.         </p> <p>             Astfel, valorile reale ale lui <math>x</math> care convin relației <math>A \cdot B(x) = B(x)</math> se află printre valorile care convin relației <math>\det(A \cdot B(x)) = \det B(x)</math>.         </p> <p>             Conform proprietății enunțate, cum cele două matrice sunt de același ordin, <math>\det(A \cdot B(x)) = \det A \cdot \det B(x)</math>.         </p> <p>             Conform cerinței a), <math>\det A = 3</math>, iar prin calcul <math>\det B(x) = \begin{vmatrix} x &amp; 0 \\ -1 &amp; x-2 \end{vmatrix} = x \cdot (x-2) - 0 = x \cdot (x-2)</math>.         </p> <p>             Obținem <math>\det(A \cdot B(x)) = \det A \cdot \det B(x) = 3x(x-2)</math> și cum <math>\det B(x) = x \cdot (x-2)</math>, rezultă condiția <math>3x(x-2) = x(x-2)</math>, echivalentă cu <math>2x(x-2) = 0</math>, ecuație care admite ca soluții <math>x = 0</math> și <math>x = 2</math>.         </p> <p>             Pentru <math>x = 0</math>, regăsim subcazul 1.1 de la varianta 2 de rezolvare, deci această valoare nu convine.         </p> <p>             Pentru <math>x = 2</math>, regăsim subcazul 1.2 de la varianta 2 de rezolvare, valoare care convine.         </p> <p>             În concluzie, <math>x = 2</math> este singura valoare care convine cerinței.         </p>
<b>Erori/greșeli care pot</b>	Varianta 1	a) <i>Greșeli la aplicarea definiției/dezvoltarea determinantului unei matrice de ordinul al doilea sau greșeli de calcul cu numere întregi.</i> b) <i>Erori la calculul matricelor <math>B(8)</math> și <math>B(2)</math>.</i>

<b>intervenii în rezolvare</b>	<i>Greșeli de calcul la aplicarea operațiilor cu matrice de ordinul al doilea.</i> c) <i>Greșeli la înmulțirea a două matrice.</i> <i>Erori la egalarea elementelor celor două matrice sau la rezolvarea ecuațiilor obținute din egalare.</i>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 15p</b></p> <p>a) <math>\det A = \begin{vmatrix} 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1</math>  <math>= 3 - 0 = 3</math> <span style="float: right;">3p</span></p> <p>b) Calculăm <math>B(8)</math> și <math>B(2)</math> înlocuind în <math>B(x)</math> pe <math>x</math> cu 8 respectiv cu 2. <span style="float: right;">2p</span></p> $B(8) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$ $B(8) - 3B(2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \cdot 2 & 0-3 \cdot 0 \\ -1-3 \cdot (-1) & 6-3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$ $2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$ <p>Obținem că <math>B(8) - 3B(2) = 2A</math>. <span style="float: right;">1p</span></p> <p>c) Calculăm <math>A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x &amp; 0 \\ -1 &amp; x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x - 0 \cdot (-1) &amp; 1 \cdot 0 + 0 \cdot (x-2) \\ 1 \cdot x + 3 \cdot (-1) &amp; 1 \cdot 0 + 3 \cdot (x-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x &amp; 0 \\ x-3 &amp; 3x-6 \end{pmatrix}.</math> <span style="float: right;">3p</span></p> <p>Dacă <math>A \cdot B(x) = B(x)</math> atunci <math>\begin{pmatrix} x &amp; 0 \\ x-3 &amp; 3x-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x &amp; 0 \\ -1 &amp; x-2 \end{pmatrix}.</math> <span style="float: right;">1p</span></p> <p>Două matrice sunt egale dacă au elementele egale, adică <math>x = x, 0 = 0, x - 3 = -1</math> și <math>3x - 6 = x - 2</math>. <span style="float: right;">1p</span></p> <p>Obținem <math>x = 2</math>.</p>	



<b>Clasa:</b> a XI-a	<b>Subiectul: II</b>	<b>Problema: 1 (BAC 2024, model)</b>
<b>Competența</b>	Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice	
<b>Item</b>	Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . a) Arătați că $\det A = 2$ . b) Arătați că $B + 3I_2 = 2A$ . c) Determinați numărul real $x$ pentru care $A \cdot (xA + B) = 2xI_2$ .	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Sunt date 2 matrice pătratice de ordin 2 și matricea unitate de ordin 2, explicit prezentate.
	<b>Ce se cere?</b>	Se cer: La itemul 1.a) ni se cere să arătăm că valoarea determinantului uneia dintre matricele date este 2. La itemul 1.b) trebuie să arătăm egalitatea dintre 2 matrice obținute în urma unor operații cu matricele date. La itemul 1.c) trebuie să determinăm un număr real dintr-o egalitate matriceală care conține în ambii membri operații cu matricele date.
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Rezolvare:</b> a) Avem că $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 0 + 2 = 2$ (ceea ce trebuia arătat). b) $B + 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2A$ (cctd) c) Calculăm cei doi membri ai ecuației $A(xA + B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left( x \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x+3 & 2x+4 \\ -x-2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x+5 & 6x+6 \\ -3x-3 & -2x-4 \end{pmatrix}$ $2xI_2 = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ Egalitatea matricelor obținute în cei 2 membri ai egalității, $\begin{pmatrix} 7x+5 & 6x+6 \\ -3x-3 & -2x-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ , ne conduce, prin egalarea celor 2 matrice, element cu element de pe poziții similare în cele două matrice, la următorul sistem :

$$\begin{cases} 7x + 5 = 2x \\ 6x + 6 = 0 \\ -3x - 3 = 0 \\ -2x - 4 = 2x \end{cases}$$

Rezolvând toate cele 4 ecuații ale sistemului\* găsim aceeași soluție  $x = -1$ .

În concluzie,  $x = -1 \in \mathbb{R}$  este numărul real care convine cerinței.

(dacă nu am obține aceeași soluție pentru toate cele 4 ecuații, nu ar exista numărul real care să verifice cerința problemei)

**Ca variante alternative de lucru putem avea:**

**La itemul b)**

Se pot calcula separat cei doi membri ai egalității:

$$B + 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

de unde se observă că  $B + 3I_2 = 2A$  este adevărată.

**La itemul c)**

Se poate prelucra egalitatea din enunț :

$$A(xA + B) = 2xI_2 \Leftrightarrow Ax A + AB = 2xI_2 \Leftrightarrow xA^2 + AB = 2xI_2 \Leftrightarrow xA^2 - 2xI_2 = -AB \Leftrightarrow x(A^2 - 2I_2) = -AB$$

Apoi se calculează

$$A^2 - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{și } -AB = - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

	Înlocuind aceste 2 rezultate în ultima formă a egalității prelucrate găsim $x(A^2 - 2I_2) = -AB \Leftrightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ de unde deducem $x = -1$ .
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	a) <i>Greșeli la aplicarea definiției/dezvoltării determinantului unei matrice de ordinul al doilea sau greșeli de calcul cu numere întregi.</i> b) <i>Greșeli de calcul la aplicarea operațiilor cu matrice de ordinul al doilea.</i> c) <i>Greșeli la efectuarea operațiilor cu matrice – mai ales la înmulțirea a două matrice.</i> <i>Erori de calcul algebric și/ sau utilizarea eronată a proprietăților operațiilor cu matrice (de exemplu, utilizarea eronată a proprietății de distributivitate).</i>
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem:</b></p> <p><b>Itemul a) 5p</b>                  Scrierea corectă a formulei de calcul pentru determinantul de ordin 2</p> $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) =$ <p>finalizarea calculului <math>= 0 + 2 = 2</math> <span style="float: right;">3p</span></p> <p><b>Itemul b) 5p</b>  <b>pentru prima variantă de lucru:</b>                  Pentru efectuarea calculelor din membrul drept al egalității :</p> $B + 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$ <p>Apoi finalizarea: <math>= 2 \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix} = 2A</math> . <span style="float: right;">2p</span></p>

	<p><i>Pentru a doua variantă de lucru</i></p> $B + 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $2A = 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Concluzie: <math>B + 3I_2 = 2A</math> este verificată/adevărată .</p> <p><b>Itemul c) 5p</b></p> <p><i>pentru prima variantă de lucru:</i></p> $xA + B = \begin{pmatrix} 3x+3 & 2x+4 \\ -x-2 & -3 \end{pmatrix}$ $A(xA + B) = \begin{pmatrix} 7x+5 & 6x+6 \\ -3x-3 & -2x-4 \end{pmatrix}$ <p>Apoi pentru identificarea elementelor celor 2 matrice egale: <math>\begin{pmatrix} 7x+5 &amp; 6x+6 \\ -3x-3 &amp; -2x-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x &amp; 0 \\ 0 &amp; 2x \end{pmatrix}</math> (scrie cele 4 egalități)</p> <p>Obține <math>x = -1</math> din toate cele 4 egalități.</p> <p><i>Pentru a doua variantă de lucru:</i></p> $A(xA + B) = 2xI_2 \Leftrightarrow AxA + AB = 2xI_2 \Leftrightarrow xA^2 + AB = 2xI_2 \Leftrightarrow xA^2 - 2xI_2 = -AB \Leftrightarrow x(A^2 - 2I_2) = -AB$ <p>Calculează <math>A^2 - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 &amp; 6 \\ -3 &amp; -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ -3 &amp; -4 \end{pmatrix}</math></p> <p>și <math>-AB = - \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 &amp; 4 \\ -2 &amp; -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ -3 &amp; -4 \end{pmatrix}</math></p> <p>Finalizează <math>x \cdot \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ -3 &amp; -4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ -3 &amp; -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -1</math> .</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
--	---	---

<b>Clasa: a XI-a</b>	<b>Subiectul: II</b>	<b>Problema: 1 (BAC 2024, simulare)</b>
<b>Competența</b>	Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice	
<b>Item</b>	Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{pmatrix}$ , unde $x$ este număr real. a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$ . b) Arătați că $A(3) + 2A(1) = 3A(2)$ . c) Determinați numerele reale $x$ pentru care $A(x) \cdot A(x^2) = I_2$ .	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Sunt date, explicit, matricea unitate de ordin 2 și o „familie” de matrice $A(x)$ , unde $x$ este un număr real.
	<b>Ce se cere?</b>	Se cer: La itemul 1.a) ni se cere să arătăm faptul că valoarea determinantului matricei $A(2)$ este 4. La itemul 1.b) trebuie să arătăm egalitatea a 2 matrice obținute prin operații cu matricele $A(1)$ , $A(2)$ și $A(3)$ . La itemul 1.c) trebuie să determinăm un număr real dintr-o egalitate matriceală care conține în membrul stâng un produs de matrice.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> a) Avem că $\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 4 - 0 = 4$ . (ceea ce trebuia arătat)                 Scriem $A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ , $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ . b) Atunci avem: $A(3) + 2A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 3A(2)$ . <p><b>Observații</b> referitoare la punctele a) și b):</p> 1) Pentru a obține toate cele 5p din barem este necesar să fie scrise toate calculele intermediare. 2) Apare ideea „familiei” de matrice, adică o mulțime de matrice ale căror elementele sunt expresii care depind de una/unul sau mai multe/mulți <i>necunoscute/variabile/parametri</i> . În cazul de față, matricea depinde de parametrul real $x$ , iar matricele familiei se determină înlocuind parametrul real cu valori particulare; de exemplu, $A(2)$ a fost determinat înlocuind parametrul $x$ cu valoarea 2, $A(3)$ și $A(1)$ au fost determinate înlocuind parametrul $x$ cu valorile numerice 3, respectiv 1. La punctul c), pentru a determina $A(x^2)$ se va înlocui $x$ cu $x^2$ (substituție).

c) Calculăm membrul stâng al ecuației:

$$A(x) \cdot A(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x+x^2 \end{pmatrix}.$$

Egalitatea din enunț devine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+x^2=1 \Leftrightarrow x+x^2=0 \Leftrightarrow x(1+x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ sau } x=-1.$$

*Ca variante alternative de lucru putem avea :*

**La itemul b)**

Se pot calcula separat cei doi membri ai egalității:

$$A(3) + 2A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$3A(2) = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

de unde se concluzionează că relația  $A(3) + 2A(1) = 3A(2)$  este adevărată.

**La itemul c)**

După egalarea matricelor  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+x^2=1 \Leftrightarrow x+x^2=0$ , se rezolvă ecuația de gradul II și se determină soluțiile  $x=0$ ,  $x=-1$ .

**Erori/greșeli  
care pot  
interveni în  
rezolvare**

- Greșeli la aplicarea definiției determinantului unei matrice de ordinul al doilea sau greșeli de calcul cu numere întregi.
- Greșeli de calcul la aplicarea operațiilor cu matrice de ordinul al doilea sau greșeli de calcul numeric.
- Greșeli la efectuarea operațiilor cu matrice sau la efectuarea operațiilor algebrice pentru calculul elementelor produsului de matrice.

<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem:</b> <b>Itemul a) 5p</b> Identificarea corectă a lui $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	1p
	Scrierea corectă a formulei determinantului $\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 0 \cdot 1$	2p
	finalizarea calculului $= 4 - 0 = 4$	2p
	<b>Itemul b) 5p</b> <b>pentru prima variantă de lucru:</b> Pentru efectuarea calculelor din membrul drept al egalității :	3p
	$A(3) + 2A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ . (1p pentru scrierea corectă a lui $A(3)$ , $A(2)$ și 2p pentru efectuarea corectă a operațiilor de înmulțire cu scalar și de adunare)	2p
	Apoi finalizarea: $= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 3A(2)$ .	2p
	<b>Pentru a doua variantă de lucru</b> $A(3) + 2A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ $3A(2) = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ Finalizare : $A(3) + 2A(1) = 3A(2)$ este verificată/adevărată .	1p
<b>Itemul c) 5p</b> $A(x) \cdot A(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x+x^2 \end{pmatrix}$ . (1p – scrierea corectă a celor 2 matrice, 1p - calculul corect al produsului)	2p	



	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{x+x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2^{x+x^2} = 1 \Leftrightarrow x + x^2 = 0$ <p>se determină soluțiile <math>x=0, x=-1</math></p>	<p>1p</p> <p>2p</p>
De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze operațiile cu matrice de ordinul al doilea (adunarea, scăderea, înmulțirea cu scalari, înmulțirea matricelor);</li> <li>- să reamintească definiția determinantului unei matrice de ordinul al doilea;</li> <li>- să explice cum obținem matrice particulare prin înlocuirea variabilei <math>x</math> cu diverse numere reale în matrice de tip <math>B(x)</math>;</li> <li>- să repete metoda de rezolvare a ecuațiilor de gradul I, II, exponențiale (cu o necunoscută);</li> <li>- să recapituleze etapele calculului inversei unei matrice;</li> <li>- să analizeze cu elevii metode alternative de rezolvare a cerințelor;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i>                  să analizeze cu fiecare elev, în funcție de cunoștințele acestuia, alegerea variantei de rezolvare care să ducă la finalizarea rezolvării.</p>
	Pentru elev	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze noțiunile teoretice care pot ajuta la rezolvarea itemului;</li> <li>- să identifice metoda pe care o poate folosi pentru rezolvarea itemului;</li> <li>- să fie atent la calcule;</li> </ul> <p>să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare.</p>
Considerente finale	Itemul face referire la conținuturile învățate în clasa a XI-a la Algebră. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară efectuarea unui calcule cu matrice, calcule cu determinanți, rezolvarea unor ecuații matriceale.	

Exemple de  
itemi de  
antrenament

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a. Arătați că  $\det A = -1$ .
  - b. Arătați că  $A \cdot A = I_2$ .
  - c. Determinați matricea  $X \in M_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A \cdot X - I_2 = 24 \cdot A$ .
2. Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a. Arătați că  $\det A(-1) = 1$ .
  - b. Aflați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $A(x) = I_2$ .
  - c. Calculați  $A(2) \cdot A(3) \cdot A(4)$ .
3. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 \\ 6 & x-2 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
  - a. Calculați  $A(1) \cdot A(2)$ .
  - b. Arătați că  $\det A(3) = -19$ .
  - c. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $\det A(x) = 0$ .
4. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
  - a. Arătați că  $\det A = -2$ .
  - b. Arătați că  $B(1) - A = -I_2$ .
  - c. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = 2B(x)$ .

Clasa: a XI-a	Subiectul: III	Problema: 1 (simulare BAC 2024)
<b>Competența</b>	Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme Exprimarea cu ajutorul noțiunii de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	Formule de derivare a funcțiilor elementare și operații /operațiile cu funcții derivabile Noțiunea de asimptotă orizontală și modul în care se determină asimptota orizontală Metode de calcul a limitei unei funcții; tehnica de lucru pentru eliminarea cazurilor de nedeterminare Proprietățile unei funcții continue pe un interval Operații cu numere reale  Rezolvare a unor ecuații (de gradul al doilea, exponențiale și de forma $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ )  Procedee de stabilire a semnului unei funcții Definiția funcției crescătoare/ descrescătoare pe un interval Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor (monotonie, puncte de extrem).	
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$ . a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}, x \in (2, \infty)$ . b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{e^x} = 0$ . c) Demonstrați că $\frac{e^{x-3}}{x^2 - 3} \geq \frac{1}{6}$ , pentru orice $x \in (2, \infty)$ .	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	- Este dată funcția $f$ având drept lege de corespondență raportul dintre o funcție exponențială și o funcție de gradul al doilea, definită pe intervalul $x \in (2, \infty)$ .

	<p><b>Ce se cere?</b></p>	<p>La itemul a), ni se cere să arătăm că derivata funcției <math>f</math> este <math>f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}, x \in (2, \infty)</math>.</p> <p>La itemul b), trebuie să arătăm că valoarea limitei funcției <math>\frac{xf(x)}{e^x}</math> pentru <math>x</math> tinzând la <math>\infty</math> este 0.</p> <p>La itemul c), trebuie să demonstrăm o inegalitate care conține în membrul stâng o funcție (care poate fi exprimată cu ajutorul funcției <math>f</math>, iar în membrul drept un număr real.</p>
	<p><b>Cum rezolv?</b></p>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p>a) <math>f'(x) = \left( \frac{e^x}{x^2 - 3} \right)' = \frac{(e^x)'(x^2 - 3) - e^x(x^2 - 3)'}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}, x \in (2, \infty)</math></p> <p>b) Calculăm <math>\frac{xf(x)}{e^x} = \frac{xe^x}{x^2 - 3} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{x}{x^2 - 3}</math> (am simplificat prin <math>e^x</math>).</p> <p>Obținem <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = 0</math></p> <p>c) Inegalitatea se va demonstra studiind monotonia și determinând punctele de extrem ale funcției <math>f</math>.</p> <p>Rezolvăm ecuația <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - 2x - 3) = 0</math> de unde obținem <math>e^x = 0</math>, care nu admite soluții, sau <math>x^2 - 2x - 3 = 0</math>, cu soluțiile <math>x_1 = -1, x_2 = 3</math>.</p> <p>Deoarece <math>x \in (2, \infty)</math>, convine doar <math>x = 3</math>.</p>

Întocmim tabelul de monotonie a funcției:

x	2	3	$\infty$
$f'(x)$	/-----0+++++		
$f(x)$	↘ $\frac{e^3}{6}$		↗

Semnul derivatei se stabilește folosind regula de semn pentru funcția de gradul al doilea.

Avem:  $f'(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in (2, 3] \Rightarrow f$  descrescătoare pe  $(2, 3]$

$f'(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in [3, \infty) \Rightarrow f$  crescătoare pe  $[3, \infty)$ .

Deducem că  $x=3$  este punct de minim al funcției, iar valoarea sa minimă este  $f(3) = \frac{e^3}{6} \Rightarrow f(x) \geq \frac{e^3}{6}$

Pentru orice  $x \in (2, \infty) \Rightarrow \frac{e^x}{x^2-3} \geq \frac{e^3}{6}$  de unde, împărțind ambii membri prin  $e^3$  obținem inegalitatea  $\frac{e^{x-3}}{x^2-3} \geq \frac{1}{6}$ , pentru orice  $x \in (2, \infty)$ .

*Ca variante alternative de lucru putem avea:*

**La itemul b)**

Calculăm  $\frac{xf(x)}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot f(x) = \frac{x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x^2-3} = \frac{x}{x^2-3}$  (pentru evitarea fracțiilor suprapuse).

Pentru calculul limitei (în cazul de nedeterminare  $\frac{\infty}{\infty}$ ) putem folosi regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(x^2-3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

**La itemul c)**

- Se poate porni de la inegalitatea  $\frac{e^{x-3}}{x^2-3} \geq \frac{1}{6}$  care, prin înmulțirea ambilor membri cu numărul pozitiv  $e^3$ , devine

$f(x) \geq \frac{e^3}{6}$ , ceea ce conduce la ideea că  $\frac{e^3}{6}$  ar putea fi o valoare minimă a (un minim al) funcției.

	<p>În continuare, rezolvarea este cea descrisă anterior.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Semnul derivatei se poate stabili cu ajutorul proprietății unei funcții continue: o funcție continuă pe un interval pe care nu se anulează are același semn pe tot intervalul.</li> </ul> <p>Cum <math>f</math> este continuă pe domeniul său de definiție (operații cu funcții elementare continue), calculăm și obținem <math>f'\left(\frac{5}{2}\right) &lt; 0 \Rightarrow f'(x) &lt; 0</math>, pentru orice <math>x \in (2, 3)</math> și <math>f'(4) &gt; 0 \Rightarrow f'(x) &gt; 0</math> pentru orice <math>x \in (3, \infty)</math>.</p>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<p><b>La itemul a) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la aplicarea formulei de derivare a câtului (derivatează numărătorul și numitorul, greșesc semnul dintre termenii numărătorului);</li> <li>- greșeli la aplicarea formulelor de derivare a funcțiilor elementare.</li> </ul> <p><b>La itemul b) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la efectuarea operațiilor cu fracții: <math>\frac{xf'(x)}{e^x} = \frac{x \cdot \frac{e^x}{x^2-3}}{e^x} = \frac{xe^x}{x^2-3} \cdot e^{-x}</math> sau <math>\frac{x \cdot \frac{e^x}{x^2-3}}{e^x} = \frac{xe^x}{e^x(x^2-3)}</math>;</li> <li>- greșeli la calculul algebric (simplificarea unei fracții, semne).</li> </ul> <p><b>La itemul c) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la rezolvarea ecuațiilor (calcul aritmetic, greșeli în scrierea formulei pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea, în rezolvarea ecuației <math>e^x = 0</math> (obțin, în mod eronat, „soluția” <math>x=0</math>);</li> <li>- greșeli la stabilirea semnului unei funcții (calcul aritmetic, ordinea efectuării operațiilor).</li> </ul>
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem: 15p</b></p> <p><b>Itemul a) 5p</b></p> <p>Aplicarea corectă a regulii de derivare a raportului:</p> $f'(x) = \left( \frac{e^x}{x^2-3} \right)' = \frac{(e^x)'(x^2-3) - e^x(x^2-3)'}{(x^2-3)^2}$ <p>Aplicarea corectă a formulelor de derivare a funcțiilor elementare <math>f'(x) = \frac{e^x(x^2-3) - e^x \cdot 2x}{(x^2-3)^2}</math>.</p>

	<p>Finalizare <math>f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}, x \in (2, \infty).</math></p> <p><b>Itemul b) 5p</b> <i>pentru prima variantă de lucru:</i></p> <p>Calculează <math>\frac{xf(x)}{e^x} = \frac{xe^x}{x^2 - 3} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{x}{x^2 - 3}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} =</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = 0</math></p> <p><i>Pentru a doua variantă de lucru</i></p> <p>Calculează <math>\frac{xf(x)}{e^x} = \frac{xe^x}{x^2 - 3} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{x}{x^2 - 3}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(x^2 - 3)'} =</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0</math></p> <p><b>Itemul c) 5p</b> <i>pentru prima variantă de lucru:</i></p> <p><math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2} = 0</math>, de unde convine domeniului de definiție doar <math>x=3</math>.</p> <p><math>f'(x) \leq 0</math> pentru orice <math>x \in (2, 3] \Rightarrow f</math> descrescătoare pe <math>(2, 3]</math></p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
--	---	---



$f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [3, \infty) \Rightarrow f$ crescătoare pe $[3, \infty)$ .	
$f(3) = \frac{e^3}{6} \Rightarrow f(x) \geq \frac{e^3}{6}$ pentru orice $x \in (2, \infty) \Rightarrow \frac{e^x}{x^2-3} \geq \frac{e^3}{6} \Rightarrow \frac{e^{x-3}}{x^2-3} \geq \frac{1}{6}$ , pentru orice $x \in (2, \infty)$ .	2p
<b>pentru a doua variantă de lucru :</b>	
$\frac{e^{x-3}}{x^2-3} \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2-3} \geq \frac{e^3}{6} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{e^3}{6}$	1p
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2} = 0$ , și convine $x=3$ .	1p
$f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (2, 3] \Rightarrow f$ descrescătoare pe $(2, 3]$	
$f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [3, \infty) \Rightarrow f$ crescătoare pe $[3, \infty)$ .	2p
$f(3) = \frac{e^3}{6} \Rightarrow f(x) \geq \frac{e^3}{6}$	1p

Clasa: a XI-a	Subiectul: III	Problema: 1 (model BAC 2024)
<b>Competența</b>	Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme Exprimarea cu ajutorul noțiunii de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții	
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f : (4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-4}{x-4}$ . a) Arătați că $f'(x) = -\frac{8}{(x-4)^2}, x \in (4, \infty)$ . b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ . c) Demonstrați că funcția $g : (4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f'(x)$ este crescătoare.	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Este dată funcția $f$ având legea de corespondență un raport dintre două funcții de gradul întâi, definită pe intervalul $(4, \infty)$ .
	<b>Ce se cere?</b>	La itemul a), se cere să arătăm că derivata funcției $f$ este $f'(x) = -\frac{8}{(x-4)^2}, x \in (4, \infty)$ . La itemul b), trebuie să determinăm ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției. La itemul c), trebuie să stabilim monotonia unei funcții.
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> a) $f'(x) = \left(\frac{3x-4}{x-4}\right)' = \frac{(3x-4)'(x-4) - (3x-4)(x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{3(x-4) - (3x-4)}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}, x \in (4, \infty)$ . b) Calculăm $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{x-4} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}} = 3$ . Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ . c) Calculăm $g'(x) = f''(x) = \left(-\frac{8}{(x-4)^2}\right)' = -\frac{8'(x-4)^2 - 8((x-4)^2)'}{(x-4)^4} = -\frac{-16(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{16}{(x-4)^3}$ . Din $x \in (4, \infty) \Rightarrow x-4 > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$ pentru orice $x \in (4, \infty) \Rightarrow$ funcția $g$ este crescătoare (stirct).

	<p><i>Ca variante alternative de lucru putem avea:</i></p> <p><b>La itemul b)</b></p> <p>Pentru calculul limitei (în cazul de nedeterminare <math>\frac{\infty}{\infty}</math>), putem folosi regula lui <i>l'Hospital</i>:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-4)'}{(x-4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1} = 3.$ <p><b>La itemul c)</b></p> <p>- Calculul derivatei a doua a funcției <math>f</math> se poate face și astfel:</p> $g'(x) = f''(x) = \left( -\frac{8}{(x-4)^2} \right)' = -8 \cdot \left( \frac{1}{(x-4)^2} \right)' = -8 \cdot \left( (x-4)^{-2} \right)' = -8 \cdot (-2)(x-4)^{-3} \cdot (x-4)'$ $= 16(x-4)^{-3}.$ <p>sau</p> $g'(x) = f''(x) = \left( -\frac{8}{(x-4)^2} \right)' = -8 \cdot \left( \frac{1}{(x-4)^2} \right)' = -8 \cdot \left( -\frac{1}{(x-4)^4} \right) \cdot \left( (x-4)^2 \right)' =$ $= -8 \left( -\frac{1}{(x-4)^4} \right) \cdot 2(x-4) = \frac{16}{(x-4)^3}.$ <p>- Stabilirea monotoniei se poate face și astfel:</p> <p>Rezolvarea ecuației <math>g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{(x-4)^3} = 0 \Leftrightarrow 16 = 0</math>, care nu are soluții.</p> <p>Determinarea semnelui lui <math>g'</math> (calculând valoarea funcției într-un punct al domeniului de definiție), de unde se obține că</p> $g'(x) > 0 \text{ pentru orice } x \in (4, \infty).$
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p>La itemul a) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la formula de derivare a câtului (derivează numărătorul și numitorul, greșesc semnul dintre termenii numărătorului),</li> <li>- greșeli la aplicarea formulelor de derivare a funcțiilor elementare;</li> <li>- greșeli la efectuarea calculului algebric de la numărător.</li> </ul>

	La itemul b) : - greșeli la calculul algebric ( factor comun). La itemul c) : - greșeli la aplicarea regulilor de derivare, în mod special la derivarea funcțiilor compuse; - greșeli la stabilirea semnelui unei funcții.	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>Punctaj în barem: 15p</b></p> <p><b>Itemul a) 5p</b></p> <p>Aplicarea corectă a regulii de derivare a câtului: <math>f'(x) = \left(\frac{3x-4}{x-4}\right)' = \frac{(3x-4)'(x-4) - (3x-4)(x-4)'}{(x-4)^2}</math></p> <p>Aplicarea corectă a formulelor de derivare : <math>f'(x) = \frac{3(x-4) - (3x-4)}{(x-4)^2}</math></p> <p>Finalizare: <math>f'(x) = \frac{3x-12-3x+4}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}, x \in (4, \infty)</math>.</p> <p><b>Itemul b) 5p</b>  <i>pentru prima variantă de lucru:</i></p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{x-4} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}} = 3$ <p>Dreapta de ecuație <math>y=3</math> este asimptotă orizontală spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math>.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

<p><i>Pentru a doua variantă de lucru</i></p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-4)'}{(x-4)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1} = 3$ <p>Dreapta de ecuație <math>y=3</math> este asimptotă orizontală spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math>.</p> <p><b>Itemul c) 5p</b></p> <p><i>pentru prima variantă de lucru:</i></p> <p>Calculează <math>g'(x) = \frac{16}{(x-4)^3}</math> (prin orice metodă)</p> <p>Arată <math>g'(x) &gt; 0</math> pentru orice <math>x \in (4, \infty) \Rightarrow g</math> crescătoare (strict).</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>
--	---

Clasa: a XI-a	Subiectul: III	Problema: 1 (simulare BAC 2023)
<b>Competența</b>	Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme Exprimarea cu ajutorul noțiunii de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții	
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x}$ a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2}, x \in (0, \infty)$ . b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=2$ , situat pe graficul funcției $f$ . c) Demonstrați că $f(1-x) \geq f(1+x)$ pentru orice $x \in (0, 1)$ .	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Este dată funcția $f$ având legea de corespondență o sumă dintre o funcție de gradul întâi și o funcție rațională, definită pe intervalul $(0, \infty)$ .
	<b>Ce se cere?</b>	Se cer: La itemul a), se cere să arătăm că derivata funcției $f$ este $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2}, x \in (0, \infty)$ . La itemul b), trebuie să scriem ecuația tangentei la graficul funcției într-un punct al graficului, de abscisă dată. La itemul c), trebuie să demonstrăm o inegalitate.
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Rezolvare:</b> a) $f'(x) = \left(2x - 1 + \frac{8}{x}\right)' = (2x)' - 1' + \left(\frac{8}{x}\right)' = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2}, x \in (0, \infty)$ . b) Ecuația tangentei este $y - y_0 = m(x - x_0)$ unde $y_0 = f(x_0), m = f'(x_0)$ iar $x_0 = 2$ . Obținem $y_0 = f(2) = 7$ și $m = f'(2) = 0$ . Scriem ecuația tangentei: $y - 7 = 0 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 7$ . c) Inegalitatea se va demonstra folosind proprietatea de monotonie a funcției $f$ . Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 4)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ sau $x = -2$ ; cum $x \in (0, \infty) \Rightarrow x = 2$ . Întocmim tabelul de monotonie a funcției:

x	0	2	$\infty$
$f'(x)$	/	----- 0	+ + + + +
$f(x)$		7	

Semnul derivatei se stabilește folosind regula de semn pentru funcția de gradul al doilea, ținând cont de faptul că numitorul este strict pozitiv pe  $(0, \infty)$ .

Avem:  $f'(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in (0, 2] \Rightarrow f$  descrescătoare pe  $(0, 2]$ .

Din  $x \in (0, 1) \Rightarrow 0 < 1 - x < 1 < 1 + x < 2$ , de unde obținem că  $f(1 - x) \geq f(1 + x)$  pentru orice  $x \in (0, 1)$ .

**Ca variante alternative de lucru putem avea :**

**La itemul a)**

Aducem la același numitor:  $f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - x + 8}{x}$

$$f'(x) = \left( \frac{2x^2 - x + 8}{x} \right)' = \frac{(4x - 1)x - (2x^2 - x + 8)}{x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2}.$$

**La itemul c)**

Semnul derivatei se poate stabili cu ajutorul proprietății unei funcții continue: o funcție continuă pe un interval pe care nu se anulează are același semn pe tot intervalul:

$f'$  continuă pe  $x \in (0, \infty)$ , calculăm  $f'(1) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$  pentru orice  $x \in (0, 2)$ .

Inegalitatea se poate demonstra și astfel:

$$f(1 - x) \geq f(1 + x) \Leftrightarrow 2(1 - x) - 1 + \frac{8}{1 - x} \geq 2(1 + x) - 1 + \frac{8}{1 + x} \Leftrightarrow \frac{4x^3 + 12x}{1 - x^2} \geq 0$$

care este adevărată pentru orice  $x \in (0, 1)$ , deoarece numărătorul și numitorul sunt pozitivi, pentru orice  $x \in (0, 1)$ .

**Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare**

**La itemul a) :**




- greșeli la aplicarea formulei de derivare a câtului (derivează numărătorul și numitorul, greșesc semnul dintre termenii numărătorului) - la varianta a doua de rezolvare;
- greșeli la aplicarea formulelor de derivare a funcțiilor elementare.



	<p><b>La itemul b) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la efectuarea calculelor.</li> </ul> <p><b>La itemul c) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la rezolvarea ecuațiilor;</li> <li>- greșeli la stabilirea semnului unei funcții (calcul aritmetic);</li> <li>- greșeli la calculul algebric-pentru varianta a doua de rezolvare.</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>Punctaj în barem:</b></p> <p><b>Itemul a) 5p</b></p> <p><b>Pentru prima variantă de rezolvare:</b></p> $f'(x) = \left(2x - 1 + \frac{8}{x}\right)' = (2x)' - 1' + \left(\frac{8}{x}\right)' =$ $= 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2} =$ $= \frac{2(x^2 - 4)}{x^2}, x \in (0, \infty).$ <p><b>Pentru varianta a doua:</b></p> <p>Aplicarea corectă a regulii de derivare a raportului:</p> $f'(x) = \left(\frac{2x^2 - x + 8}{x}\right)' = \frac{(4x - 1)x - (2x^2 - x + 8)}{x^2} =$ $= \frac{2(x^2 - 4)}{x^2}.$ <p><b>Itemul b) 5p</b></p> <p>Ecuația tangentei este <math>y - y_0 = m(x - x_0)</math></p> <p><math>y_0 = f(2) = 7</math> și <math>m = f'(2) = 0</math>.</p> <p>Scris ecuația tangentei: <math>y - 7 = 0 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 7</math>.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>

<p><b>Itemul c) 5p</b> <i>pentru prima variantă de lucru:</i></p> $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 4)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \text{ și convine } x=2.$ <p><math>f'(x) \leq 0</math> pentru orice <math>x \in (0, 2] \Rightarrow f</math> descrescătoare pe <math>(0, 2]</math>.</p> <p><math>x \in (0, 1) \Rightarrow 0 &lt; 1 - x &lt; 1 &lt; 1 + x &lt; 2</math>,</p> <p>Deduce <math>f(1 - x) \geq f(1 + x)</math>, pentru orice <math>x \in (0, 1)</math>.</p> <p><i>pentru a doua variantă de lucru :</i></p> $f(1 - x) \geq f(1 + x) \Leftrightarrow 2(1 - x) - 1 + \frac{8}{1 - x} \geq 2(1 + x) - 1 + \frac{8}{1 + x}$ <p>Obține <math>\frac{4x^3 + 12x}{1 - x^2} \geq 0</math></p> <p>Demonstrează că pentru <math>x \in (0, 1) \Rightarrow 4x^3 + 12x \geq 0</math> și <math>1 - x^2 &gt; 0</math> și finalizează.</p>	1p 1p 2p 1p 2p 2p 1p
--	--

Clasa: a XI-a	Subiectul: III	Problema: 1 (model 2022)
<b>Competența</b>	Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme Exprimarea cu ajutorul noțiunii de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții	
<b>Item</b>	Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$ . a) Arătați că $f'(x) = x(e^x - 1), x \in \mathbb{R}$ . b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = 0$ . c) Demonstrați că $f(x) \leq f(x^2)$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ .	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Este dată funcția $f$ având legea de corespondență o diferență dintre produsul unei funcții de gradul întâi cu o funcție exponențială și o funcție de gradul al doilea.
	<b>Ce se cere?</b>	La itemul 1.a), se cere să arătăm că derivata funcției $f$ este $f'(x) = x(e^x - 1), x \in \mathbb{R}$ . La itemul 1.b), trebuie să calculăm limita unei funcții și să arătăm că este egală cu 0. La itemul 1.c), trebuie să demonstrăm o inegalitate.
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Rezolvare:</b> a) $f'(x) = ((x-1)e^x - \frac{x^2}{2})' = ((x-1)e^x)' - (\frac{x^2}{2})' = ((x-1))'e^x + (x-1)(e^x)' - \frac{2x}{2} = e^x + (x-1)e^x - x = x(e^x - 1), x \in \mathbb{R}$ . b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - [f(0)]'}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0$ . c) Inegalitatea se va demonstra folosind proprietatea de monotonie a funcției $f$ . Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $e^x - 1 \Leftrightarrow x = 0$ .

	<p>Întocmim tabelul de monotonie a funcției:</p> <table border="1" data-bbox="936 225 1727 368"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>0</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td colspan="3">+++++ 0 ++++++</td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">  </td> </tr> </table> <p>Semnul derivatei: <math>f'</math> continuă pe <math>\mathbb{R}</math>, <math>f'(-1) &gt; 0</math>, <math>f'(1) &gt; 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0</math>, pentru orice <math>x \in \mathbb{R} \Rightarrow f</math> este crescătoare pe <math>\mathbb{R}</math></p> <p>Cum <math>x \leq 0 \leq x^2</math> pentru orice <math>x \in (-\infty, 0]</math>, obținem <math>f(x) \leq f(x^2)</math>, pentru orice <math>x \in (-\infty, 0]</math>.</p> <p><b>Ca variante alternative de lucru putem avea :</b></p> <p><b>La itemul c)</b>                  -Semnul derivatei se poate stabili și astfel:</p> <p>Pentru <math>x &lt; 0 \Rightarrow e^x &lt; 1 \Rightarrow e^x - 1 &lt; 0 \Rightarrow x(e^x - 1) &gt; 0</math> pentru orice <math>x \in (-\infty, 0)</math></p> <p>Pentru <math>x &gt; 0 \Rightarrow e^x &gt; 1 \Rightarrow e^x - 1 &gt; 0 \Rightarrow x(e^x - 1) &gt; 0</math> pentru orice <math>x \in (0, +\infty)</math>.</p>	x	$-\infty$	0	$\infty$	$f'(x)$	+++++ 0 ++++++			$f(x)$			
x	$-\infty$	0	$\infty$										
$f'(x)$	+++++ 0 ++++++												
$f(x)$													
Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare	<p><b>La itemul a) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la aplicarea formulei de derivare a produsului (derivează simultan factorii produsului, greșesc semnul dintre termeni);</li> <li>- greșeli la aplicarea formulelor de derivare a funcțiilor elementare.</li> </ul> <p><b>La itemul b) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la efectuarea calculelor;</li> <li>- greșeala : <math>(f(0))' = f'(0)</math>.</li> </ul> <p><b>La itemul c) :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- greșeli la rezolvarea ecuațiilor;</li> <li>-greșeli la stabilirea semnului unei funcții (calcul aritmetic).</li> </ul>												

<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>Punctaj în barem: 15p</b>	
	<b>Itemul a) 5p</b>	
	$f'(x) = ((x-1)e^x - \frac{x^2}{2})' = ((x-1)e^x)' - (\frac{x^2}{2})' = ((x-1))'e^x + (x-1)(e^x)' - \frac{2x}{2} =$	2p
	$= e^x + (x-1)e^x - x =$ $= x(e^x - 1), x \in \mathbb{R}.$	2p 1p
	<b>Itemul b) 5p</b>	
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{2x} =$	1p
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0.$	1p
	<b>Itemul c) 5p</b>	
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } e^x - 1 \Leftrightarrow x = 0$	3p
	$f'(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } \mathbb{R}.$	1p
	$\text{Cum } x \leq 0 \leq x^2 \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0], \text{ obținem } f(x) \leq f(x^2), \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0].$	1p

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze regulile și formulele de derivare a funcțiilor;</li> <li>- să recapituleze cazurile de nedeterminare și modul de soluționare a acestora;</li> <li>- să repete rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor;</li> <li>- să explice cum se stabilește semnul unei funcții;</li> <li>- să recapituleze modul de determinare a asimptotelor la graficul unei funcții;</li> <li>- să reamintească formula ecuației tangentei la graficul unei funcții într-un punct al graficului;</li> <li>- să repete metoda de rezolvare a unei ecuații de gradul al doilea;</li> <li>- să sprijine elevii în a stabili clar care sunt datele inițiale ale problemei și care este cerința și să transpună în limbaj matematic aceste date;</li> <li>- să analizeze frontal, cu elevii, modul de rezolvare și să observe dacă există mai multe variante de rezolvare, care ar putea fi metoda cea mai potrivită;</li> <li>- să enumere greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li> <li>- să prezinte elevilor modul de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevii să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să identifice și să recapituleze noțiunile teoretice care pot ajuta la rezolvarea itemului;</li> <li>- să identifice metoda pe care o poate folosi pentru rezolvarea itemului;</li> <li>- să fie atent la calcule;</li> <li>- să interpreteze corect datele problemei (ce se dă – ce se cere);</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemilor ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare.</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	<p>Itemii corespund conținuturilor studiate în clasa a XI-a la Analiză matematică, unitățile de învățare: Limite de funcții, Asimptotele graficului funcțiilor studiate, Funcții derivabile, Regulile lui l'Hospital și Rolul derivatei de ordin I în studiul funcțiilor.</p> <p>Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- scrierea ecuației tangentei la graficul unei funcții într-un punct al graficului;</li> <li>- determinarea asimptotelor la graficul unei funcții;</li> <li>- determinarea punctelor de extrem ale unei funcții;</li> <li>- compararea a două numere reale folosind monotonia unei funcții;</li> <li>- determinarea punctelor de inflexiune ale graficului;</li> <li>- demonstrarea faptului că o funcție este convexă/concavă pe un interval.</li> </ul>	

**Exemple de  
itemi de  
antrenament**

1. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x + e^x$ 
  - a) Arătați că  $xf'(x) = 1 + xe^x$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
  - b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1, e)$ .
  - c) Să se arate că  $\ln \frac{2}{3} < e^3 - e^2$ .
  
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
  - a) Să se arate că  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ .
  - c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției  $f$ .
  
3. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 2) \ln x$ .
  - a) Să se calculeze  $f'(x)$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
  - b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ .
  - c) Să se arate că  $f$  este convexă pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
  
4. Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x + \ln x}$ .
  - a) Să se arate că  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2}$ , pentru orice  $x \in [1, \infty)$ .
  - b) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$ .
  - c) Să se determine punctele de extrem ale funcției  $f$ .



5. Se consideră funcția  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x}{e^x}$ .
- Arătați că  $f(x) + f'(x) = e^{-x}$ , pentru orice  $x \in [0,1]$ .
  - Să se demonstreze că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $[0,1]$ .
  - Să se arate că  $1 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{e}{2}$ , pentru orice  $x \in [0,1]$ .
6. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .
- Să se calculeze  $f'(1) + f'(-1)$ .
  - Să se determine punctele de extrem ale graficului funcției  $f$ .
  - Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  care are panta egală cu  $-1$ .
7. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 10 - \frac{11}{x}$ .
- Arătați că  $f'(x) = \frac{x^2 + 11}{x^2}$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
  - Să se demonstreze că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $(0, \infty)$ .
  - Determinați asimptota spre  $+\infty$  la graficul funcției.
8. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$ .
- Arătați că  $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$ .
  - Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcției  $f$ .
  - Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{e^x \cdot f''(x)} = 0$ .

Propuneri de probleme pentru exersare\*, clasa a XI-a (similare subiectelor II și III Bacalaureat sau selectate din variantele publice)

**Nr. crt. Probleme exersare****A. ALGEBRĂ**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a. Arătați că  $\det A = -1$ .
  - b. Arătați că  $A \cdot A = I_2$ .
  - c. Determinați matricea  $X \in M_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A \cdot X - I_2 = 24 \cdot A$ .
2. Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a. Arătați că  $\det A(-1) = 1$ .
  - b. Aflați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $A(x) = I_2$ .
  - c. Calculați  $A(2) \cdot A(3) \cdot A(4)$ .
3. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 \\ 6 & x-2 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
  - a. Calculați  $A(1) \cdot A(2)$ .
  - b. Arătați că  $\det A(3) = -19$ .
  - c. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $\det A(x) = 0$ .
4. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
  - a. Arătați că  $\det A = -2$ .
  - b. Arătați că  $B(1) - A = -I_2$ .
  - c. Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = 2B(x)$ .

**B. ANALIZĂ MATEMATICĂ**

5. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x + e^x$ 
  - a) Arătați că  $xf'(x) = 1 + xe^x$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
  - b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1, e)$ .
  - c) Să se arate că  $\ln \frac{2}{3} < e^3 - e^2$ .
6. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
  - a) Să se arate că  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ .
  - c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției  $f$ .

7. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-2)\ln x$ .
- Să se calculeze  $f'(x)$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
  - Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x_0 = 1$ .
  - Să se arate că  $f$  este convexă pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
8. Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x + \ln x}$ .
- Să se arate că  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2}$ , pentru orice  $x \in [1, \infty)$ .
  - Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$ .
  - Să se determine punctele de extrem ale funcției  $f$ .
9. Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x}{e^x}$ .
- Arătați că  $f(x) + f'(x) = e^{-x}$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ .
  - Să se demonstreze că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $[0, 1]$ .
  - Să se arate că  $1 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{e}{2}$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ .
10. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .
- Să se calculeze  $f'(1) + f'(-1)$ .
  - Să se determine punctele de extrem ale graficului funcției  $f$ .
  - Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  care are panta egală cu  $-1$ .
11. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 10 - \frac{11}{x}$ .
- Arătați că  $f'(x) = \frac{x^2 + 11}{x^2}$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .
  - Să se demonstreze că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $(0, \infty)$ .
  - Determinați asimptota spre  $+\infty$  la graficul funcției.
12. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$ .
- Arătați că  $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$ .
  - Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcției  $f$ .
  - Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{e^x \cdot f''(x)} = 0$ .

*\*Lista este constituită prin reunirea tuturor problemelor exemplificate la fiecare dintre problemele comentate, asociate clasei a XI-a, atât la algebră cât și la analiză matematică, pentru a facilita utilizarea acestora de către cadrele didactice și elevi în pregătirea examenului național de bacalaureat*

*Coboară suficient de adânc în orice  
și vei găsi  
matematică.*

**Dean Schlicter**

#### III.4. Exemple de utilizare a unor itemi selectați din subiectele examenului național de bacalaureat, ca suport în activități de învățare în context de recapitulare – clasa a XII-a

Utilizarea, în cadrul unor activități de învățare/recapitulare, a unor itemi selectați din subiectele II și III, în corespondență cu noțiuni/concepte studiate în clasa a XII-a, din instrumentele de evaluare la proba de matematică a examenului național de bacalaureat, la simulările acestui examen sau ca modele pentru această probă.



Probleme selectate pentru clasa a XII-a (din cadrul subiectelor II și III, instrumente de evaluare asociate examenului, simulării sau modelelor de bacalaureat), care sunt prezentate în cadrul subsecțiunii dedicate anului de studiu

Nr. crt.	Problemă și itemi	Selectată din:
1.	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 3(x + y) + 1$ . a) Arătați că $1 \circ 0 = -2$ . b) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă. c) Determinați mulțimea numerelor reale $x$ pentru care $x \circ (-2x) \geq 0$ .	<a href="#">Bacalaureat (model 2024)</a>
2.	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție. $x * y = 4xy - 3x + 2y - 1$ . a) Arătați că $1 * 2 = 8$ b) Determinați numărul real $x$ pentru care $x * (-1) = 4$ . c) Determinați numărul real $a$ pentru care că $x * a = -x$ , pentru orice număr real $x$ .	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2023)</a>
3.	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$ . a) Arătați că $5 * 4 = 4$ . b) Determinați numărul real $x$ pentru care $x * 6 = 6x$ . c) Determinați numerele naturale $n$ pentru care $\frac{4}{n} * n > 4$ .	<a href="#">Bacalaureat (iunie 2023, varianta 1)</a>
4.	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + 2x - y - 1$ . a) Arătați că $1 * 1 = 1$ . b) Determinați numărul real $x$ pentru care $x * 2 = x$ . c) Arătați că $(1 - x) * x \leq 2$ , pentru orice număr real $x$ .	<a href="#">Bacalaureat (august 2023, varianta 7)</a>
5.	Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2x + m$ , unde $m$ este un număr real. a) Pentru $m = 3$ , arătați că $f(1) = 0$ . b) Determinați numărul real $m$ pentru care $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 1$ , unde $x_1, x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$ . c) Determinați numărul real $m$ pentru care polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $X + 2$ .	<a href="#">Bacalaureat (august 2023, varianta 5)</a>

6.	<p>Se consideră polinomul <math>f = X^3 + 3X^2 + mX - 4</math>, unde <math>m</math> este un număr real.</p> <p>a) Arătați că <math>f(0) = -4</math>, pentru orice număr <math>m</math> real.</p> <p>b) Determinați numărul real <math>m</math>, știind că <math>-1</math> este rădăcină a polinomului <math>f</math>.</p> <p>c) Determinați numerele naturale <math>m</math> pentru care <math>x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &gt; 5</math>, unde <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> sunt rădăcinile polinomului <math>f</math>.</p>	<p><u>Bacalaureat (sesiunea specială, varianta 6)</u></p>
7.	<p>Se consideră funcția <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + (x + 3)^2</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_0^2 (f(x) - (x + 3)^2) dx = 2</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_{-2}^0 \frac{1}{f(x) - x} dx = \frac{2}{3}</math>.</p> <p>c) Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>\int_0^6 \frac{f(x)}{x + 3} dx = 3(a - \ln 3)</math>.</p>	<p><u>Bacalaureat (model 2024)</u></p>
8.	<p>Se consideră funcția <math>f : \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + \frac{6}{2x + 3}</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_1^3 \left(f(x) - \frac{6}{2x + 3}\right) dx = e(e^2 - 1)</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_{-1}^0 (f(x) - e^x) dx = 3 \ln 3</math>.</p> <p>c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției <math>g : \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (2x^2 + 3x)f(x)</math>, axa <math>Ox</math> și dreptele de ecuații <math>x = 0</math> și <math>x = 1</math> are aria egală cu <math>2(e + 1)</math>.</p>	<p><u>Bacalaureat (sesiunea specială 2023, varianta 6)</u></p>

9.	<p>Se consideră funcția <math>f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \ln x</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_2^4 (f(x) - \ln x) dx = 6</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_1^e \frac{f(x) - x}{x} dx = \frac{1}{2}</math>.</p> <p>c) Determinați numărul natural nenul <math>n</math> pentru care <math>\int_1^n f(x) dx = 2 + 3 \ln n</math>.</p>	<a href="#">Bacalaureat (simulare 2024)</a>
10.	<p>Se consideră funcția <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + 3x</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_1^2 (f(x) - 3x) dx = 15</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \frac{1}{3} \ln 2</math>.</p> <p>c) Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei <math>Ox</math> a graficului funcției <math>g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + f(x)}{x}</math> este egal cu <math>2\pi f(3)</math>.</p>	<a href="#">Bacalaureat (august 2023, varianta 7)</a>
11.	<p>Se consideră funcția <math>f : (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{8x}{x+9}</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_0^1 (x+9) f(x) dx = 4</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_1^6 \frac{1}{8x} f(x) dx = \ln \frac{3}{2}</math>.</p> <p>c) Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)</math>.</p>	<a href="#">Bacalaureat (iulie 2023, varianta 1)</a>





12	<p>Se consideră funcția <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \frac{2}{3}</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = 2 \ln 3</math>.</p> <p>c) Determinați numărul natural <math>n</math>, știind că <math>\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e}</math>.</p>	<p><u>Bacalaureat (rezervă august 2023, varianta 5)</u></p>
----	--	---

Clasa: a XII-a	Subiectul: II		Problema: 2 (model 2024)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice</li> <li>Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri</li> <li>Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice</li> </ul>		
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ordinea operațiilor într-o expresie: se efectuează prima dată operațiile din paranteză, apoi operațiile de înmulțire, urmând ca mai apoi să se efectueze operațiile de adunare și scădere.</li> <li>Definiția comutativității unei legi de compoziție „<math>\circ</math>”, definită pe <math>\mathbb{R} \times \mathbb{R}</math>: „<math>\circ</math>” este comutativă <math>\Leftrightarrow x \circ y = y \circ x</math>, oricare <math>x, y \in \mathbb{R}</math>.</li> <li>Determinarea semnului funcțiilor de gradul al doilea cu ajutorul tabelului de semn.</li> <li>Forma canonică a funcțiilor de gradul al doilea sau scrierea expresiei obținute ca o diferență (sau sumă, după caz) dintre doi termeni dintre care unul este pozitiv pentru orice număr real <math>x</math>.</li> <li>Rezolvarea ecuației de gradul întâi prin metoda clasică de separare a necunoscutelor de cunoscute.</li> <li>Rezolvarea inecuațiilor de gradul al doilea folosind semnul funcției de gradul al doilea sau alte metode cunoscute.</li> <li>Dacă <math>m \cdot x + n = 0</math> pentru orice număr real <math>x</math> atunci <math>m = n = 0</math>.</li> </ul>		
<b>Item</b>	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 3(x + y) + 1$ . d) Arătați că $1 \circ 0 = -2$ . e) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă. f) Determinați mulțimea numerelor reale $x$ pentru care $x \circ (-2x) \geq 0$ .		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Expresia legii de compoziție a) Valorile numerice ale celor două variabile $x$ și $y$ Răspunsul așteptat (rezultatul ce trebuie obținut) b) Trebuie să verificăm o proprietate a legii de compoziție c) Compunerea se realizează pentru $x$ și $-2x$ , în această ordine	
	<b>Ce se cere?</b>	a) Demonstrarea unei egalități sau, altfel spus, obținerea rezultatului numeric $-2$ în urma calculelor din membrul stâng al egalității. b) Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri algebrice. c) Rezolvarea unei inecuații obținute în baza legii de compoziție.	
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Etape de parcurs în rezolvare:</b> a) În expresia legii de compoziție, îi atribui lui $x$ valoarea 1 și lui $y$ valoarea 0, apoi efectuez calculele, respectând ordinea operațiilor. b) Îl compun pe $x$ cu $y$ , folosind legea de compoziție din enunț.	

		<p>Îl compun pe <math>y</math> cu <math>x</math>, folosind legea de compoziție din enunț.                  Din comutativitatea operațiilor de adunare și înmulțire pe <math>\mathbb{R}</math>, rezultă comutativitatea legii de compoziție „<math>\circ</math>”.</p> <p>c) Compun numerele <math>x</math> și <math>-2x</math>, în această ordine ( pentru orice număr real <math>x</math>), în baza legii de compoziție din enunț.                  Pentru rezolvarea inecuației de gradul al doilea obținute folosesc tabelul de semn și determin mulțimea soluțiilor.</p>											
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p>a) Greșeli de calcul ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție.</p> <p>b) Elevii confundă proprietatea de comutativitate cu cea de asociativitate.                  Elevii scriu incorect sau incomplet proprietatea de comutativitate.</p> <p>c)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Greșeli de calcul în compunerea dintre <math>x</math> și <math>(-2x)</math>.</li> <li>• Neînțelegerea cerinței și tendința elevilor de a determina doar soluțiile ecuației <math>-4x^2 + 3x + 1 = 0</math>, fără a determina semnul funcției și mulțimea soluțiilor.</li> <li>• Stabilirea greșită a semnelor în tabel (fără a ține cont de semnul coeficientului <math>a</math>).</li> <li>• Determinarea greșită a mulțimii soluțiilor (din cauza interpretării greșite a semnelor din tabel).</li> </ul>												
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b>  <math>1 \circ 0 = 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3(1 + 0) + 1 =</math>                  (înlocuim <math>x</math> cu 1 și <math>y</math> cu 0 în expresia legii de compoziție)  <math>= 0 - 3 + 1 = -2</math>                  (efectuarea calculelor, respectând ordinea operațiilor într-o expresie și scrierea corectă a rezultatului)</p> <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b>  <math>y \circ x = 2yx - 3(y + x) + 1</math>  <math>x \circ y = 2xy - 3(x + y) + 1 = 2yx - 3(y + x) + 1</math> (adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt comutative)  <math>x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}</math>, deci legea este comutativă.</p> <p><b>c) Punctaj în barem: 5p</b>                  Pentru <math>y = -2x \in \mathbb{R}</math>, obținem <math>x \circ (-2x) = 2x \cdot (-2x) - 3(x - 2x) + 1 = -4x^2 - 3(-x) + 1 = -4x^2 + 3x + 1</math>,                  pentru orice număr real <math>x</math> (compunerea dintre <math>x</math> și <math>-2x</math>)  <math>-4x^2 + 3x + 1 \geq 0</math> *, <math>\Delta = 25; x_1 = -1/4, x_2 = 1</math></p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>											
	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-\frac{1}{4}</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>semn <math>(-4x^2 + 3x + 1)</math></td> <td>--</td> <td>----- 0</td> <td>+++++++ 0</td> <td>----- --</td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$1$	$+\infty$	semn $(-4x^2 + 3x + 1)$	--	----- 0	+++++++ 0	----- --		
$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$1$	$+\infty$									
semn $(-4x^2 + 3x + 1)$	--	----- 0	+++++++ 0	----- --									

$$x \in \left[ -\frac{1}{4}; 1 \right] \quad (\text{rezolvarea inecuației obținute}).$$

\*Raționamentul implică legături intradisciplinare, după utilizarea legii de compoziție (noțiune de clasa a XII-a), cerința continuând cu rezolvarea unei inecuații algebrice (de ordinul II). Pentru o serie de elevi, este mai simplu să rezolve pe modelul dat o inecuație ce implică expresii algebrice de ordinul II care au coeficientul dominant (al lui  $x^2$ ) pozitiv; în acest sens, atragem atenția elevilor că putem reduce rezolvarea la un astfel de caz prin înmulțirea cu  $-1$  a relației obținute din legea de compoziție, prin prelucrare algebrică:

$$-4x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad | \cdot (-1) \text{ este echivalent cu } 4x^2 - 3x - 1 \leq 0 \text{ (schimbarea semnelor coeficienților și schimbarea sensului inegalității)}.$$

Ca alternativă la utilizarea tabelului de semn și pentru a consolida învățarea, se pot reaminti tehnici de descompunere în factori:

$$4x^2 - 3x - 1 = 4x^2 - 4x + x - 1 = 4x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(4x + 1) \leq 0.$$

Un produs de doi factori este mai mic sau egal cu 0 dacă și numai dacă factorii sunt de semne diferite sau cel puțin unul dintre aceștia este nul. Elevul poate reduce problema la studiul a două sisteme de inecuații de gradul I, simple (împărțire pe cazuri):

$$(S_1) \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ sau } (S_2) \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 4x + 1 \leq 0 \end{cases}.$$

$$(S_1) \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases}, \text{ cu soluția } \left[ -\frac{1}{4}; 1 \right] \text{ (obținută ca intersecția mulțimilor soluțiilor celor două inecuații ale sistemului)}$$

$$\text{sau } (S_2) \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{1}{4} \end{cases}, \text{ cu soluția } \emptyset \text{ (similar)}.$$

$$\text{Soluția inecuației } 4x^2 - 3x - 1 \leq 0 \text{ se obține ca } \text{reuniunea} \text{ soluțiilor celor două sisteme, deci } S = \left[ -\frac{1}{4}; 1 \right] \cup \emptyset = \left[ -\frac{1}{4}; 1 \right]$$

3p

Clasa: a XII-a	Subiectul: II		Problema: 2 (simulare 2023)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice</li> <li>• Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri</li> <li>• Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice</li> </ul>		
<b>Item</b>	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție. $x * y = 4xy - 3x + 2y - 1$ . <ol style="list-style-type: none"> <li>Arătați că <math>1 * 2 = 8</math></li> <li>Determinați numărul real <math>x</math> pentru care <math>x * (-1) = 4</math>.</li> <li>Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>x * a = -x</math>, pentru orice număr real <math>x</math>.</li> </ol>		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Expresia legii de compoziție <ol style="list-style-type: none"> <li>Valorile numerice ale celor două variabile <math>x</math> și <math>y</math> Rezultatul final al calculelor</li> <li>Valoarea numerică a variabilei <math>y</math> din expresia legii de compoziție În baza cerinței, urmează să rezolvăm o ecuație. Egalăm cu 4 rezultatul compunerii.</li> <li>Compunerea se realizează pentru <math>x</math> și <math>a</math>, în această ordine Rezultatul compunerii trebuie să fie egal cu <math>-x</math>, pentru orice număr real <math>x</math>.</li> </ol>	
	<b>Ce se cere?</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Demonstrarea unei egalități sau, altfel spus, obținerea rezultatului 8 în urma compunerii din membrul stâng al egalității</li> <li>Determinarea numărul real <math>x</math> dintr-o ecuație</li> <li>Determinarea lui <math>a \in \mathbb{R}</math> pentru care propoziția universală „<math>x * a = -x</math>, pentru orice număr real <math>x</math>” să fie adevărată.</li> </ol>	
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Etape de parcurs în rezolvare:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>Îi atribui lui <math>x</math> valoarea 1 și lui <math>y</math> valoarea 2 în expresia legii de compoziție, apoi efectuez calculele respectând ordinea operațiilor într-o expresie.</li> <li>Îl compun pe <math>x</math> cu <math>-1</math>, folosind legea de compoziție din enunț, egalez cu 4 rezultatul compunerii și rezolv ecuația obținută.</li> <li>Îl compun pe <math>x</math> cu <math>a</math>, în această ordine, în baza legii de compoziție din enunț. Ținem cont de faptul că numărul <math>x</math> ia toate valorile reale.</li> </ol>	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	a) Greșeli de calcul ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție. b) Greșeli de calcul ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție în compunerea lui $x$ cu numărul $-1$ . Tendința elevilor de a egala cu zero expresia obținută și de a rezolva o altă ecuație decât ecuația cerută. Separarea greșită a necunoscutelor de cunoscute. c) Greșeli de calcul în compunerea dintre $x$ și $a$ . Neînțelegerea cerinței și tendința elevilor de a egala cu zero rezultatul compunerii.
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b>                  Pentru <math>x=1</math> și <math>y=2</math>, obținem <math>1*2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 =</math>                  (atribuirea, pentru <math>x</math> și <math>y</math> a valorilor 1, respectiv 2) <span style="float: right;">3p</span>  <math>= 8 - 3 + 4 - 1 = 8</math> <span style="float: right;">2p</span>                  (efectuarea calculelor respectând ordinea operațiilor într-o expresie și scrierea corectă a rezultatului)</p> <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b> <span style="float: right;">2p</span>                  Pentru <math>y = -1</math>, obținem <math>x * (-1) = 4 \cdot x \cdot (-1) - 3 \cdot x + 2 \cdot (-1) - 1 = -4x - 3x - 2 - 1 = -7x - 3</math>, pentru orice număr real <math>x</math> <span style="float: right;">3p</span>                  (atribuirea valorii <math>-1</math> lui <math>y</math> în expresia legii de compoziție și efectuarea calculelor)  <math>-7x - 3 = 4 \Rightarrow -7x = 4 + 3 \Rightarrow -7x = 7 \Rightarrow x = -1</math> (formarea ecuației, rezolvarea acesteia și scrierea rezultatului corect)</p> <p><b>c) Punctaj în barem: 5p</b>  <b>Varianta 1:</b> <span style="float: right;">3p</span>  <math>x * a = -x \Leftrightarrow 4ax - 3x + 2a - 1 = -x \Leftrightarrow 4ax - 2x + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x(2a - 1) + (2a - 1) = 0 \Leftrightarrow (2a - 1)(2x + 1) = 0</math>,                  pentru orice număr real <math>x</math> (compunere dintre <math>x</math> și <math>a</math> și regrupare/ordonare după <math>x</math>).                  Cum produsul obținut trebuie să fie 0, independent de valorile lui <math>x</math>, condiția necesară și suficientă este <math>2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}</math> <span style="float: right;">2p</span>                  (determinarea lui <math>a</math>).</p> <p><b>Varianta 2*:</b> <span style="float: right;">3p</span>  <math>x * a = -x \Leftrightarrow 4ax - 3x + 2a - 1 = -x</math> pentru orice număr real <math>x</math>.                  Pentru <math>x = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}</math>. <b>(1)**</b></p> <p>Verificare: <math>x * \frac{1}{2} = 4 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - 3x + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 2x - 3x + 1 - 1 = -x</math>, adevărat pentru orice număr real <math>x</math>, deci valoarea obținută <span style="float: right;">2p</span>                  convine.***</p>



**\*Limite:** nu orice alegere a unei valori particulare pentru  $x$  conduce la rezultat, astfel dacă alegerea ar fi fost  $\frac{1}{2}$ , valoarea lui  $a$  nu se putea obține prin această particularizare, dar se putea testa cu o nouă valoare.

**\*\***Deși a fost obținută o valoare pentru  $a$ , raționamentul nu este complet pentru că această valoare verifică egalitatea, cu certitudine, doar pentru  $x = 0$ , în acest sens este obligatorie și verificarea generală care completează raționamentul.

**\*\*\***Cerința inducea ideea că o singură valoare va fi obținută pentru  $a$ , dar și în cazul în care cerința era formulată ca determinarea numerelor reale  $a$ , valoarea obținută în varianta 2 prin raționamentul făcut nu necesită căutarea altei valori sau justificarea că aceasta este unica valoare ce convine (dacă am presupune că există o altă valoare pentru  $a$ , diferită de  $\frac{1}{2}$ , aceasta nu ar fi verificat etapa (1)!



Clasa: a XII-a	Subiectul: II		Problema: 2 (iunie 2023, varianta 1)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice</li> <li>• Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri</li> <li>• Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice</li> </ul>		
<b>Item</b>	<p>Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție <math>x * y = (x - 4)(y - 4) + 4</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>5 * 4 = 4</math>.</p> <p>b) Determinați numărul real <math>x</math> pentru care <math>x * 6 = 6x</math>.</p> <p>c) Determinați numerele naturale <math>n</math> pentru care <math>\frac{4}{n} * n &gt; 4</math>.</p>		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<p>Expresia legii de compoziție</p> <p>a) Valorile numerice ale celor două variabile <math>x</math> și <math>y</math> și rezultatul final al calculelor</p> <p>b) În baza cerinței, urmează să rezolvăm o ecuație (folosirea substantivului „număr” la singular sugerează faptul că ecuația va avea o singură soluție); Valoarea numerică a variabilei <math>y</math> din expresia legii de compoziției este 6; Știm că trebuie să egalăm cu <math>6x</math> rezultatul compunerii.</p> <p>c) Compunem elementele <math>\frac{4}{n}</math> și <math>n</math>, în această ordine, și înlocuim expresia obținută în inecuația din enunț.</p>	
	<b>Ce se cere?</b>	<p>a) Demonstrarea unei egalități sau, altfel spus, obținerea rezultatului numeric 4, în urma calculelor din membrul stâng al egalității.</p> <p>b) Determinarea numărul real <math>x</math> din ecuația dată.</p> <p>c) Determinarea numerelor naturale care sunt soluțiile inecuației date.</p>	
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Etape de parcurs în rezolvare:</b></p> <p>a) Atribui pentru <math>x</math> valoarea 5, iar pentru <math>y</math> valoarea 4, în expresia legii de compoziție, apoi efectuez calculele respectând ordinea operațiilor într-o expresie.</p> <p>b) Compun elementele <math>x</math> și 6, folosind legea de compoziție din enunț, egalez cu <math>6x</math> rezultatul compunerii, apoi rezolv ecuația de gradul întâi obținută.</p> <p>c) Compun elementele <math>\frac{4}{n}</math> și <math>n</math>, în această ordine, folosind legea de compoziție din enunț și înlocuiesc rezultatul compunerii în inecuația din enunț. Rezolv în mulțimea numerelor naturale inecuația de gradul al doilea obținută.</p>	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p>a) Greșeli de calcul ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau o greșeală frecventă pe care o fac elevii <math>1 \cdot 0 = 1</math> (greșeală care nu i-ar conduce la obținerea rezultatului din enunțul itemului, motiv care impune revizuirea calculului).</p> <p>b) Greșeli de calcul ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție în compunerea lui <math>x</math> cu numărul 6. Tendința elevilor de a egala cu zero rezultatul compunerii și de a rezolva o altă ecuație decât ecuația cerută de item. Separarea greșită a necunoscutelor de cunoscute.</p> <p>c) Greșeli de calcul în compunerea dintre <math>\frac{4}{n}</math> și <math>n</math>. Neînțelegerea cerinței și tendința elevilor de a egala cu zero rezultatul compunerii. Rezolvarea incorectă a inecuației. Rezolvarea corectă a inecuației în mulțimea numerelor reale fără selectarea numerelor naturale din interval găsit.</p>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b> Pentru <math>x = 5</math> și <math>y = 4</math>, obținem <math>5 * 4 = (5 - 4)(4 - 4) + 4</math> (atribuirea, pentru <math>x</math> a valorii 5, iar pentru <math>y</math> a valorii 4, în expresia legii de compoziție) <math>= 1 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4</math> (efectuarea calculului respectând ordinea operațiilor într-o expresie: calculele din fiecare paranteză, operația de înmulțire, apoi operația de adunare și scrierea corectă a rezultatului)</p> <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b> Pentru <math>y = 6</math>, obținem <math>x * 6 = (x - 4)(6 - 4) + 4 = (x - 4) \cdot 2 + 4 = 2x - 8 + 4 = 2x - 4</math>, pentru orice număr real <math>x</math>. (atribuirea valorii 6 lui <math>y</math> în expresia legii de compoziție și efectuarea calculului) <math>2x - 4 = 6x \Leftrightarrow 2x - 6x = 4 \Leftrightarrow -4x = 4 \Leftrightarrow x = -1</math> * (formarea ecuației, rezolvarea acesteia și scrierea rezultatului corect) *Pentru a evita coeficientul negativ, se poate atrage atenția elevilor că, folosind reflexivitatea relației de egalitate (<math>a = b \Leftrightarrow b = a</math>), ecuația poate fi rescrisă sub forma <math>6x = 2x - 4</math>.</p> <p><b>c) Punctaj în barem: 5p</b> <b>Varianta 1:</b> <math>\frac{4}{n} * n &gt; 4 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{n} - 4\right) \cdot (n - 4) + 4 &gt; 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - 4) &gt; 0</math>, unde <math>n</math> este număr natural nenul, pentru a asigura existența</p> <p>numitorului fracției <math>\frac{4}{n}</math> (compunerea dintre <math>\frac{4}{n}</math> și <math>n</math> cu scopul obținerii unui produs de factori care să fie strict pozitiv)</p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>

	<p>Cum <math>n</math> este un număr natural nenul și pentru <math>n \geq 4</math> al doilea factor este mai mare sau egal cu 0, iar primul factor este negativ, rezultând un produs mai mic sau egal cu 0 (care nu convine), obținem <math>n = 2</math> și <math>n = 3</math>, pentru care condiția este îndeplinită:</p> $\left(\frac{1}{2} - 1\right)(2 - 4) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 1 > 0, \text{ respectiv } \left(\frac{1}{3} - 1\right)(3 - 4) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-1) = \frac{2}{3} > 0.$ <p>(produsul de mai sus este un număr pozitiv dacă <math>n &lt; 4</math> și <math>n &gt; 1</math>, unde <math>n</math> este număr natural nenul; atunci <math>n = 2</math> și <math>n = 3</math>).</p> <p><b>Varianta 2:</b></p> $\frac{4}{n} * n = \left(\frac{4}{n} - 4\right) \cdot (n - 4) + 4 = \frac{4}{n} \cdot n - \frac{4}{n} \cdot 4 - 4n + 16 + 4 = -\frac{16}{n} - 4n + 24 > 4$ $\Rightarrow n^2 - 5n + 4 < 0$ <p>(se compune <math>\frac{4}{n}</math> cu <math>n</math> și rezultatul compunerii se introduce în inecuația din enunț; se formează inecuația de gradul al doilea)</p> $n \in (1; 4) \cap \mathbb{N} = \{2; 3\}$ <p>(se rezolvă ecuația atașată; soluțiile obținute <math>n = 1</math> și <math>n = 4</math> se introduc în tabelul de semn, se citește intervalul corespunzător din care se aleg numerele naturale)</p> <p><b>sau</b></p> $n^2 - 5n + 4 < 0 \Leftrightarrow (n - 1) \cdot (n - 4) < 0, \text{ unde } n \text{ este număr natural nenul; așadar soluțiile sunt } n = 2 \text{ și } n = 3.$ <p>(descompunem în factori expresia din inecuație; produsul de mai sus este un număr pozitiv dacă <math>n &lt; 4</math> și <math>n &gt; 1</math>, unde <math>n</math> este număr natural nenul; așadar soluțiile sunt <math>n = 2</math> și <math>n = 3</math>).</p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>
--	---	-------------------------------

Clasa: a XII-a	Subiectul: II		Problema: 2 (august 2023, varianta 7)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietățile operațiilor unei structuri algebrice</li> <li>• Determinarea și verificarea proprietăților unei structuri</li> <li>• Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice</li> </ul>		
<b>Item</b>	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + 2x - y - 1$ . <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Arătați că <math>1 * 1 = 1</math>.</li> <li>b) Determinați numărul real <math>x</math> pentru care <math>x * 2 = x</math>.</li> <li>c) Arătați că <math>(1 - x) * x \leq 2</math>, pentru orice număr real <math>x</math>.</li> </ol>		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Expresia legii de compoziție <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Valorile numerice ale celor două variabile <math>x</math> și <math>y</math> Rezultatul final al calculelor</li> <li>b) În baza cerinței, știm că urmează să rezolvăm o ecuație (folosirea substantivului „număr” la singular sugerează faptul că ecuația va avea o singură soluție); Valoarea numerică a variabilei <math>y</math> din expresia legii de compoziției este 2; Rezultatul compunerii trebuie să-l egalăm cu <math>x</math>.</li> <li>c) Compunerea se realizează pentru <math>(1 - x)</math> și <math>x</math>, în această ordine Rezultatul compunerii trebuie să fie mai mic sau egal cu 2, pentru orice număr real <math>x</math>.</li> </ol>	
	<b>Ce se cere?</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>a) Demonstrarea unei egalități sau, altfel spus, obținerea rezultatului 1 în urma calculelor din membrul stâng al egalității</li> <li>b) Determinarea numărului real <math>x</math> din ecuația cerută.</li> <li>c) Demonstrarea unei inegalități obținute, folosind legea de compoziție.</li> </ol>	
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Rezolvare:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Atribui, atât lui <math>x</math> cât și lui <math>y</math> valoarea 1, în expresia legii de compoziție, apoi efectuez calculele, respectând ordinea operațiilor într-o expresie.</li> <li>b) Compun elementele <math>x</math> și 2, folosind legea de compoziție din enunț, și egalez cu <math>x</math> rezultatul compunerii. Rezolv ecuația de gradul întâi obținută.</li> <li>c) Compun elementele <math>(1 - x)</math> și <math>x</math>, în această ordine, folosind legea de compoziție din enunț.  Pentru expresia de gradul al doilea obținută, folosesc forma canonică și arăt că rezultatul este mai mic sau egal cu 2, pentru orice număr real <math>x</math>.</li> </ol>	

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p>a) Greșeli de calcul, ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție</p> <p>b) Greșeli de calcul, ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție în compunerea lui <math>x</math> cu numărul 2 Tendința elevilor de a egala cu zero expresia obținută și de a rezolva o altă ecuație decât ecuația cerută de item Separarea greșită a necunoscutelor de cunoscute</p> <p>c) Greșeli de calcul în compunerea dintre <math>(1-x)</math> și <math>x</math> Neînțelegerea cerinței și tendința elevilor de a egala cu zero expresia obținută Scrierea greșită a formei canonice (sau formarea incorectă a diferenței sau sumei, după caz) dintre doi termeni, dintre care unul este pozitiv pentru orice număr real <math>x</math>)</p>
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b> Pentru <math>x = y = 1</math>, obținem <math>1 * 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 - 1 =</math> (atribuirea, atât pentru <math>x</math> cât și pentru <math>y</math> a valorii 1 în expresia legii de compoziție) <math>= 1 + 2 - 1 - 1 = 1</math> (efectuarea calculelor respectând ordinea operațiilor într-o expresie și scrierea corectă a rezultatului) <span style="float: right;">3p</span></p> <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b> Pentru <math>x = 2</math>, obținem <math>x * 2 = x \cdot 2 + 2 \cdot x - 2 - 1 = 2x + 2x - 3 = 4x - 3</math>, pentru orice număr real <math>x</math> (atribuirea valorii 2 lui <math>y</math> a în expresia legii de compoziție și efectuarea calculelor) <span style="float: right;">2p</span> <math>4x - 3 = x \Leftrightarrow 4x - x = 3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1</math> (formarea ecuației, rezolvarea acesteia și scrierea rezultatului corect) <span style="float: right;">3p</span></p> <p><b>c) Punctaj în barem: 5p</b> <b>Varianta 1:</b> Substituind <math>x \rightarrow 1-x</math> și <math>y \rightarrow x</math>, obținem <math>(1-x) * x = (1-x) \cdot x + 2 \cdot (1-x) - x - 1 = -x^2 - 2x - 1 + 2</math> (compunerea dintre <math>(1-x)</math> și <math>x</math>, fără o finalizare a calculelor în scopul observării faptului că <math>-x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2</math>) <span style="float: right;">2p</span> <math>(1-x) * x = -(x+1)^2 + 2 = 2 - (x+1)^2 \leq 2</math>, pentru orice număr real <math>x</math> (deoarece <math>(x+1)^2 \geq 0</math> pentru orice număr real <math>x</math>)</p> <p><b>Varianta 2:</b> <math>(1-x) * x \leq 2 \Leftrightarrow (1-x) \cdot x + 2 \cdot (1-x) - x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 + 2 \leq 2</math> <span style="float: right;">3p</span> <math>\Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 \leq 0</math>, adevărat pentru orice număr real <math>x</math>. <span style="float: right;">2p</span></p>

<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b> <i>Este important ca profesorul să insiste pe:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- înlocuirea corectă a variabilelor <math>x</math> și <math>y</math> cu valorile numerice care apar în cerința itemului și efectuarea calculelor, respectând ordinea operațiilor într-o expresie</li><li>- știind că nu toate legile de compoziție sunt comutative, valorile numerice trebuie să fie introduse în expresie corespunzător.</li><li>- formarea corectă a ecuațiilor algebrice și rezolvarea acestora prin metodele clasice cunoscute.</li><li>- înțelegerea corectă a cerinței de rezolvare</li><li>- compunerea corectă a expresiilor, în baza legii de compoziție</li><li>- enunțarea corectă și completă a proprietăților unei legi de compoziție</li><li>- prezentarea metodelor de demonstrare a unor inegalități</li><li>- prezentarea metodelor de rezolvare a inecuațiilor de gradul al doilea, utilizarea tabelor de semn în rezolvarea inecuațiilor</li><li>- reluarea noțiunilor teoretice, acolo unde este cazul</li><li>- prezentarea unor metode alternative de rezolvare;</li><li>- enumerarea greșelilor care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitatea de lucru în care aceste greșeli să fie eliminate;</li><li>- prezentarea modului de acordare a punctelor din barem, astfel încât elevul să redacteze corect rezolvarea, indiferent de varianta aleasă.</li></ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b> <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- să propună spre rezolvare alte calcule în care variabilelor <math>x</math> și <math>y</math> li se atribuie și alte valori numerice;</li><li>- să propună spre rezolvare alte ecuații, obținute pornind de la aceeași lege de compoziție;</li><li>- să propună spre rezolvare alte inecuații, obținute pornind de la aceeași lege de compoziție;</li><li>- să propună spre rezolvare alte inegalități, obținute pornind de la aceeași lege de compoziție;</li><li>- să propună spre rezolvare alte identități, obținute pornind de la aceeași lege de compoziție sau de la o lege de compoziție de aceeași formă.</li></ul>
--------------------------------------	------------------------	---

	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze noțiunile teoretice care pot ajuta la rezolvarea itemului;</li> <li>- să înlocuiască corect valorile numerice/expresiile în legea de compoziție, să efectueze calculele respectând ordinea operațiilor, să formeze și să rezolve corect ecuația obținută.</li> <li>- să scrie rezolvarea complet;</li> <li>- să verifice soluțiile obținute;</li> <li>- să facă diferența dintre o ecuație și o identitate, dintre o ecuație și o inecuație și să-și însușească utilizarea tabelor de semn ale funcțiilor pentru rezolvarea inecuațiilor; mai mult, elevii trebuie să fie atenți la natura soluțiilor în funcție de cerința itemului;</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare.</li> </ul>
<b>Considerent e finale</b>	<p>Itemul face referire la conținuturile învățate în clasa a XII-a la Algebră, capitolul Grupuri.</p> <p>Itemul este un exemplu pentru aprofundarea proprietăților legii de compoziție, pentru consolidarea calculelor algebrice cu numere reale, pentru rezolvarea unor ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi sau în mulțimea numerelor reale, pentru demonstrarea unor identități obținute în baza expresiilor legii de compoziție, implicând legături intradisciplinare cu concepte și metode studiate în clasele anterioare la algebră.</p> <p>Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară efectuarea unui calcule, rezolvarea unor ecuații sau inecuații, verificarea unor proprietăți ale legilor de compoziție.</p>	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	<p>1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție <math>x \circ y = 2xy - 3(x + y) + 1</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\frac{1}{\sqrt{2}} \circ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0</math>.</p> <p>b) Demonstrați că dacă <math>x, y, z \in \mathbb{R}</math> și <math>(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)</math> atunci <math>x = z</math>.</p> <p>c) Determinați mulțimea numerelor reale <math>x</math> pentru care <math>x \circ x \leq 9</math>.</p> <p>2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție <math>x * y = 4xy - 3x + 2y - 1</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>(-1) * 1 = 0</math>.</p> <p>b) Determinați numărul real <math>x</math> pentru care <math>x * 1 = 1 * x</math>.</p> <p>c) Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>a * x = -a</math>, pentru orice număr real <math>x</math>.</p>	





3. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție.  $x * y = 4xy - 3x + 2y - 1$ .

a) Arătați că  $E(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) * x$  nu depinde de valorile reale ale lui  $x$ .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația  $x * x = 4$ .

c) Determinați o pereche  $(m, n)$  de numere naturale nenule pentru care  $(-n) * m + m * n = 0$ .

4. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$ .

a) Arătați că  $\sqrt{2} * (-\sqrt{2})$  este un număr întreg.

b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $(x + 4) * 5 = 5$ .

c) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care  $(n - 1) * (n + 1) \leq 4$ .

5. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + 2x - y - 1$ .

a) Calculați  $\frac{1}{2} * 1$ .

b) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $n * n = 1$ .

c) Arătați că  $x * (1 - x) \leq 2$ , pentru orice număr real  $x$ .

Clasa: a XII-a	Subiectul: II		Problema: 2 (august 2023, varianta 5)
<b>Competența</b>	Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor		
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	Valoarea polinomului pentru nedeterminata dată (ca valoare particulară) Ordinea operațiilor într-o expresie: se efectuează prima dată operațiile de înmulțire, urmând ca mai apoi să se efectueze operațiile de adunare și scădere. Relațiile lui <i>Viète</i> , între rădăcinile și coeficienții unui polinom. Definiția rădăcinii unui polinom. Rezolvarea ecuației de gradul I prin metoda clasică de separare a necunoscutelor de cunoscute. Definiția divizibilității pentru polinoame. Teorema lui <i>Bézout</i> /Teorema restului/ Schema lui <i>Horner</i> . Rezolvarea inecuațiilor de gradul I folosind semnul funcției sau alte metode cunoscute.		
<b>Item</b>	Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2x + m$ , unde $m$ este un număr real. a) Pentru $m = 3$ , arătați că $f(1) = 0$ . b) Determinați numărul real $m$ pentru care $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 1$ , unde $x_1, x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$ . c) Determinați numărul real $m$ pentru care polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $X + 2$ .		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Forma algebrică a polinomului $f$ . a) Valoarea numerică a parametrului real $m$ . b) Rădăcinile polinomului sunt notate cu $x_1, x_2$ și $x_3$ . O condiție îndeplinită de rădăcinile polinomului $f$ : $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 1$ . c) $f$ este divizibil cu polinomul $X + 2$ .	
	<b>Ce se cere?</b>	a) Să se arate că valoarea polinomului în 1 este 0. b) Determinarea numărul real $m$ . c) Determinarea numărul real $m$ care îndeplinește condiția dată.	
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Etape de parcurs în rezolvare:</b> a) Atribui lui $m$ valoarea 3 în expresia polinomului $f$ și determin $f(1)$ înlocuind $x$ cu 1. Efectuez calculele, respectând ordinea operațiilor într-o expresie, pentru a verifica faptul că $f(1) = 0$ .	

		<p>b) Scriu relațiile lui Viète, relații între rădăcinile <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> ale polinomului <math>f</math> și coeficienții acestuia.                  Înlocuind în condiția suplimentară din enunț, obțin o ecuație cu necunoscuta <math>m</math>.                  Rezolv ecuația și determin numărul real <math>m</math>.</p> <p>c) <b>Varianta 1</b>                  Conform teoremei lui Bézout: <math>f</math> este divizibil cu <math>X + 2 \Leftrightarrow -2</math> este rădăcină a polinomului <math>f \Leftrightarrow f(-2) = 0</math>, de unde obținem <math>m</math>.</p> <p><b>Varianta 2</b>  <math>f</math> este divizibil cu polinomul <math>g = X + 2 \Leftrightarrow</math> restul împărțirii lui <math>f</math> la <math>g</math> este 0.                  Restul se obține prin schema lui Horner (sau teorema restului).                  Din egalitatea restului cu 0, determinăm <math>m</math>.</p>
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	Greșeli de calcul ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție. Greșeli în scrierea relațiilor dintre rădăcini și coeficienți ( greșeli de semn ). Rezolvarea greșită a ecuației formate în necunoscuta $m$ . Greșeli de calcul în efectuarea împărțirilor între polinoame.	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b>                  Pentru <math>m = 3</math>, obținem <math>f = X^3 - 2X^2 - 2x + 3</math> (atribuirea pentru <math>m</math> a valorii 3, conform enunț)                  Pentru <math>X = 1</math>, obținem <math>f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3</math> (atribuirea pentru <math>x</math> a valorii 1)  <math>= 1 - 2 - 2 + 3 = -3 + 3 = 0</math>                  (efectuarea calculelor, respectând ordinea operațiilor într-o expresie, precum și scrierea corectă a rezultatului).</p> <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b>  <math>x_1 + x_2 + x_3 = +2</math>  <math>x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -2</math> (scrierea relațiilor lui Viète)  <math>x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -m</math>  <math>x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 = -2 - m</math> (înlocuire în condiția suplimentară din enunț)  <math>-2 - m = 1 \Rightarrow -m = 1 + 2 \Rightarrow -m = 3 \Rightarrow m = -3</math> (rezolvarea ecuației cu necunoscuta <math>m</math>)</p> <p><b>c) Punctaj în barem: 5p</b>  <b>Varianta 1</b>                  Pentru <math>X = -2</math>, obținem <math>f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 2(-2) + m = -8 - 8 + 4 + m = -12 + m</math>                  Conform teoremei lui Bézout: <math>f</math> este divizibil cu <math>X + 2 \Leftrightarrow -2</math> este rădăcină a polinomului <math>f</math></p>	3p  2p  3p  2p  2p

$$\Leftrightarrow f(-2) = 0 \Leftrightarrow -12 + m = 0 \Leftrightarrow m = 12$$

**Varianta 2**

$f$  este divizibil cu polinomul  $g = X + 2 \Leftrightarrow$  Restul împărțirii lui  $f$  la  $g$  trebuie să fie 0.

	$X^3$	$X^2$	$X^1$	$X^0$
	1	-2	-2	$m$
-2	1	-4	6	$-12 + m$

$r = -12 + m$  (determinarea corectă a restului la împărțirea lui  $f$  cu  $X + 2$ ).

$$r = 0 \Rightarrow -12 + m = 0 \Rightarrow m = 12$$

(Aplicarea teoremei lui *Bézout*/teorema restului, formarea ecuației și determinarea corectă a lui  $m$ ).

3p

2p

3p

Clasa: a XII-a	Subiectul: II	Problema: 2 (sesiunea specială 2023, varianta 6)
<b>Competența</b>	Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date Aplicarea, prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor	
<b>Item</b>	Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 + mX - 4$ , unde $m$ este un număr real. <ol style="list-style-type: none"> <li>Arătați că <math>f(0) = -4</math>, pentru orice număr <math>m</math> real.</li> <li>Determinați numărul real <math>m</math>, știind că <math>-1</math> este rădăcină a polinomului <math>f</math>.</li> <li>Determinați numerele naturale <math>m</math> pentru care <math>x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &gt; 5</math>, unde <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> sunt rădăcinile polinomului <math>f</math>.</li> </ol>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	Forma algebrică a polinomului $f$ . <ol style="list-style-type: none"> <li>Valoarea pe care o ia polinomul pentru <math>x = 0</math> nu trebuie să depindă de <math>m</math>.</li> <li>În baza cerinței, știm că urmează să rezolvăm o ecuație în necunoscuta <math>m</math> (folosirea substantivului „număr” la singular sugerează faptul că ecuația va avea o singură soluție); <math>-1</math> este rădăcină a polinomului <math>f</math>.</li> <li>Rădăcinile polinomului sunt notate cu <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math>.</li> </ol> Folosirea relațiilor lui Viète. Construirea unei inecuații în baza calculelor efectuate. Rezolvarea inecuației se face în mulțimea numerelor naturale.
	<b>Ce se cere?</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Se cere demonstrarea unei egalități care nu depinde de <math>m</math> sau, altfel spus, obținerea rezultatului numeric <math>-4</math> în urma calculelor efectuate în expresia algebrică a polinomului pentru <math>x = 0</math></li> <li>Determinarea numărului real <math>m</math> dintr-o ecuație.</li> <li>Determinarea numerelor naturale <math>m</math>, rezolvând o inecuație.</li> </ol>
	<b>Cum rezolv?</b>	<b>Etape de parcurs în rezolvare:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>Atribuirem lui <math>X</math> valoarea <math>0</math> în forma algebrică a polinomului <math>f</math>; efectuăm calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor într-o expresie.</li> <li>Folosim faptul că <math>-1</math> este rădăcină a polinomului și formăm ecuația <math>f(-1) = 0</math> (același lucru îl obținem folosind și teorema restului pentru <math>-1</math>, care este rădăcină a polinomului <math>f</math>) sau aplicăm schema lui <i>Horner</i> (sau împărțirea clasică) și impunem ca restul împărțirii polinomului <math>f</math> la <math>X + 1</math> să fie egal cu <math>0</math>.</li> <li>Formăm relațiile lui <i>Viète</i> și calculăm expresia <math>x_1^2 + x_2^2 + x_3^2</math>. Formăm inecuația de gradul întâi și o rezolvăm în mulțimea numerelor naturale.</li> </ol>

<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	Greșeli de calcul (puterile lui zero sau -1), greșeli ca urmare a nerespectării ordinii operațiilor într-o expresie și/sau greșeli din neatenție. Formarea incorectă a ecuației cunoscând valoarea unei rădăcini a polinomului $f$ Separarea greșită a necunoscutelor de cunoscute Greșeli în scrierea relațiilor dintre rădăcini și coeficienți Calcularea greșită a expresiei $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ Formarea și/sau rezolvarea incorectă a inecuației; Rezolvarea corectă a inecuației în mulțimea numerelor reale fără selectarea numerelor naturale din interval găsit.															
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b>                  Pentru <math>x = 0</math>, obținem <math>f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + m \cdot 0 - 4 =</math>                  (Scrierea valorii polinomului <math>f</math> <math>x=0</math>)  <math>= 0 + 0 + 0 - 4 = -4</math>, pentru orice număr <math>m</math> real                  (efectuarea calculelor, respectând ordinea operațiilor într-o expresie) <span style="float: right;">3p</span></p> <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b>  <b>Varianta 1</b>                  Pentru <math>x = -1</math>, obținem <math>f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - 4 = -1 + 3 - m - 4 = -m - 2</math>, pentru orice număr real <math>m</math>                  (atribuirea valorii <math>-1</math> în forma algebrică a polinomului și efectuarea calculelor) <span style="float: right;">2p</span>  <math>f(-1) = 0 \Leftrightarrow -m - 2 = 0 \Leftrightarrow -m = 2</math>, de unde obținem <math>m = -2</math> <span style="float: right;">3p</span>                  (formarea ecuației știind că <math>-1</math> este rădăcina polinomului <math>f</math>, rezolvarea acesteia și scrierea rezultatului corect).</p> <p><b>Varianta 2</b>                  Schema <i>Horner</i></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td><math>X^3</math></td> <td><math>X^2</math></td> <td><math>X^1</math></td> <td><math>X^0</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>3</td> <td><math>m</math></td> <td>-4</td> </tr> <tr> <td>-1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td><math>-2 + m</math></td> <td><math>-2 - m = r</math></td> </tr> </table> <p><math>\alpha = -1</math> este rădăcină a polinomului <math>f \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow -m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2</math> <span style="float: right;">2p</span></p> <p><b>c) Punctaj în barem: 5p</b>  <math>x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3}{1} = -3</math> <span style="float: right;">3p</span></p> <p><math>x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{m}{1} = m \Rightarrow</math> <span style="float: right;">3p</span></p>		$X^3$	$X^2$	$X^1$	$X^0$		1	3	$m$	-4	-1	1	2	$-2 + m$	$-2 - m = r$
	$X^3$	$X^2$	$X^1$	$X^0$												
	1	3	$m$	-4												
-1	1	2	$-2 + m$	$-2 - m = r$												

	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = 9 - 2m$ , pentru orice număr real (scrierea primelor două relații ale lui Viète și calcularea expresiei $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ) $9 - 2m > 5$ și, cum $m$ este număr natural, obținem $m = 0$ și $m = 1$ (rezolvarea inecuației obținute; cum $m$ este număr natural, obținem rezultatele de mai sus) <b>Sau</b> rezolvăm inecuația de gradul I în mulțimea numerelor reale și alegem numerele naturale din intervalul găsit.	2p
De avut în vedere – important	Pentru profesor	<p><b>Etapa de predare-învățare:</b>  <i>Este important ca profesorul să insiste pe:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ înțelegerea corectă a cerinței de rezolvare</li> <li>▪ înlocuirea corectă a parametrului și a variabilei <math>x</math> cu valorile numerice care apar în cerința itemului și efectuarea calculului respectând ordinea operațiilor într-o expresie</li> <li>▪ scriere corectă și completă a relațiilor lui Viète</li> <li>▪ formarea corectă a ecuațiilor algebrice și rezolvarea acestora prin metodele clasice cunoscute.</li> <li>▪ înțelegerea corectă a definițiilor divizibilității polinoamelor, a rădăcinii unui polinom.</li> <li>▪ utilizarea împărțirilor cu rest 0 pentru exemplificarea divizibilității între polinoame nenule.</li> <li>▪ calcularea altor expresii în care apar rădăcinile unui polinom folosind relațiile lui Viète, formule de calcul prescurtat sau alte metode</li> <li>▪ reluarea noțiunilor teoretice, acolo unde este cazul</li> </ul> <p><b>Etapa de recapitulare:</b>  <i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ să propună spre rezolvare alte exerciții care să utilizeze relații simetrice îndeplinite de rădăcinile <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> ale polinomului <math>f</math></li> <li>▪ să propună spre rezolvare itemi asemănători încât elevii să efectueze calcule cât mai variate</li> </ul>
	Pentru elev	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze noțiunile teoretice care pot ajuta la rezolvarea itemului;</li> <li>- să înlocuiască corect valorile numerice în expresia polinomului, să efectueze calculele respectând ordinea operațiilor și să obțină rezultatul cerut de item</li> <li>- să aplice corect algoritmul de împărțire pentru polinoame</li> <li>- să scrie corect și complet relațiile lui Viète</li> <li>- să facă diferența dintre o inecuație și o inegalitate (aici se cere rezolvarea unei inecuații) și să-și însușească diverse metode de rezolvare a inecuațiilor. Mai mult de atât, elevul trebuie să fie atent la natura soluțiilor inecuației în funcție de cerința itemului</li> <li>- să identifice metoda pe care o poate folosi pentru rezolvarea itemului</li> </ul>



		- să redacteze rezolvarea completă a itemului ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare
<b>Considerente finale</b>	Itemul face referire la conținuturile învățate în clasa a XII-a la Algebră, capitolul Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ.. Itemul este un exemplu pentru consolidarea calculelor algebrice cu numere întregi în baza operațiilor prezente în expresia polinomului, pentru aplicarea relațiilor lui Viète, pentru împărțirea polinoamelor și respectiv pentru consolidarea rezolvării unor ecuații algebrice. Asemănător se pot rezolva itemi în care să se ceară efectuarea unui calcule cu polinoame.	
<b>Exemple de itemi de antrenament</b>	1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2x + m$ , unde $m$ este un număr real. <ol style="list-style-type: none"> <li>Determinați <math>m</math> număr real pentru care <math>f(-1) = 1</math>.</li> <li>Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 3x_1x_2x_3 = 2</math>, unde <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> sunt rădăcinile polinomului <math>f</math>.</li> <li>Determinați numărul real <math>m</math> pentru care polinomul <math>f</math> este divizibil cu polinomul <math>X - 2</math>.</li> </ol> 2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2x + m$ , unde $m$ este un număr real. <ol style="list-style-type: none"> <li>Determinați <math>m</math> număr real pentru care <math>f(2) + f(-2) = 0</math>.</li> <li>Determinați numărul real <math>m</math> pentru care <math>(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot (1 - x_3) = 1</math>, unde <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> sunt rădăcinile polinomului <math>f</math>.</li> <li>Determinați numărul real <math>m</math> pentru care polinomul <math>f</math> este divizibil cu polinomul <math>X^2 - 2</math>.</li> </ol> 3. Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 + mX - 4$ , unde $m$ este un număr real. <ol style="list-style-type: none"> <li>Arătați că <math>f(1) = m</math> pentru orice număr <math>m</math> real.</li> <li>Determinați numărul real <math>m</math>, știind că 2 este rădăcină a polinomului <math>f</math>.</li> <li>Determinați numerele naturale <math>m</math> pentru care <math>(1 + x_1)^2 + (1 + x_2)^2 + (1 + x_3)^2 &gt; 1</math>, unde <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> sunt rădăcinile polinomului <math>f</math>.</li> </ol> 4. Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 + mX - 4$ , unde $m$ este un număr real. <ol style="list-style-type: none"> <li>Arătați că <math>f(1) + f(-1) = -2</math>, pentru orice număr <math>m</math> real.</li> <li>Determinați numărul real <math>m</math>, știind că 0,5 este rădăcină a polinomului <math>f</math>.</li> <li>Determinați numerele natural nenule <math>m</math> pentru care <math>x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &gt; (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_1x_2x_3</math>, unde <math>x_1, x_2</math> și <math>x_3</math> sunt rădăcinile polinomului <math>f</math>.</li> </ol>	

Clasa: a XII-a	Subiectul: III	Problema: 2 (model 2024)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial</li> <li>• Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite</li> <li>• Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor</li> <li>• Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calcul integral, și compararea rezultatelor obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie</li> </ul>	
<b>Noțiuni teoretice necesare</b>	<p><b>Integrale uzuale:</b></p> $\int f(x)dx = F(x) + C$ $\int 1dx = x + C$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C \quad (\text{unde } x \text{ aparține unui interval de numere reale care nu-l conține pe } 0)$ $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$ <p><b>Teorema Leibniz- Newton:</b> Fie funcția <math>f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> care admite primitive și <math>F</math> o primitivă a lui <math>f</math>.</p> <p>Atunci: <math>\int_a^b f(x)dx = F(x) _a^b = F(b) - F(a)</math>.</p> <p><b>Proprietatea de liniaritate a integralei definite</b> (pentru funcțiile integrabile <math>f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math>):</p> $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \alpha \in \mathbb{R}^*$	

	<p><b>Metoda de integrare prin părți:</b> Fie funcțiile <math>f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math> funcții derivabile, cu derivatele continue. Atunci:</p> $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big _a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx .$ <p><b>Metoda de integrare prin schimbare de variabilă:</b> Fie <math>J \subset \mathbb{R}</math> un interval și funcțiile <math>u : [a, b] \rightarrow J</math> și <math>f : J \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>u</math> derivabilă, cu derivata continuă și <math>f</math> continuă. Atunci: <math>\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt .</math></p> <p><b>Consecințe (în anumite condiții ale funcțiilor implicate):</b></p> $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C ; \quad \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x)  + C$ <p><b>Aplicații ale integralei definite:</b> aria unei suprafețe plane, volumul corpului de rotație.</p>	
<b>Item</b>	<p>Se consideră funcția <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + (x+3)^2 .</math></p> <p>a) Arătați că <math>\int_0^2 (f(x) - (x+3)^2) dx = 2 .</math></p> <p>b) Arătați că <math>\int_{-2}^0 \frac{1}{f(x) - x} dx = \frac{2}{3} .</math></p> <p>c) Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>\int_0^6 \frac{f(x)}{x+3} dx = 3(a - \ln 3) .</math></p>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<p>Legea de definiție a funcției <math>f</math>, ca funcție de gradul al doilea</p> <p>a) avem de calculat o integrală definită și de arătat o egalitate (știm rezultatul calculului pe care trebuie să îl efectuăm) știm valoarea numerică pe care trebuie să o obținem pentru a arăta egalitatea din enunț</p> <p>b) avem de calculat o integrală definită și de arătat o egalitate (știm rezultatul calculului pe care trebuie să îl efectuăm) știm valoarea numerică pe care trebuie să o obținem pentru a arăta egalitatea din enunț</p> <p>c) avem de calculat o integrală definită și de rezolvat o ecuație în mulțimea numerelor reale (trebuie să determinăm numărul real <math>a</math>) știm membrul stâng al ecuației (integrala pe care trebuie să o calculăm) și forma rezultatului (membrul drept)</p>

	<b>Ce se cere?</b>	a) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral și să obținem rezultatul dat b) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral, metode de integrare și să obținem rezultatul dat. c) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral și să determinăm numărul real $a$ din ecuația obținută egalând rezultatul calculului integral cu expresia dată
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p>a) Înlocuiesc <math>f(x)</math> cu forma din enunț, reduc termenii asemenea</p> $\int_0^2 (f(x) - (x+3)^2) dx = \int_0^2 (x + (x+3)^2 - (x+3)^2) dx = \int_0^2 x dx =$ <p>folosesc formula de integrare <math>\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C</math> și calculez membrul stâng (integrala definită pe intervalul <math>[0, 2]</math>) pentru a obține valoarea numerică dată</p> $\int_0^2 x dx = \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2 - 0 = 2$ <p>b) Înlocuiesc <math>f(x)</math> cu forma din enunț, reduc termenii asemenea</p> $\int_{-2}^0 \frac{1}{f(x) - x} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x + (x+3)^2 - x} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{(x+3)^2} dx =$ <p>observ că <math>(x+3)' = 1</math> și folosesc schimbarea de variabilă</p> $= \int_{-2}^0 \frac{(x+3)'}{(x+3)^2} dx = \frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1} \Big _{-2}^0 = \frac{(x+3)^{-1}}{-1} \Big _{-2}^0 = \frac{-1}{x+3} \Big _{-2}^0 = \frac{-1}{3} - \frac{-1}{1} = \frac{-1+3}{3} = \frac{2}{3}$ <p>c) Înlocuiesc <math>f(x)</math> cu forma din enunț, adun și scad 3 pentru a avea factor comun <math>x+3</math>, separ în două integrale, aplic formulele de integrare <math>\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C</math> ; <math>\int 1 dx = x + C</math> și notez a doua integrală pentru a o calcula separat:</p>

	$\int_0^6 \frac{f(x)}{x+3} dx = \int_0^6 \frac{x+(x+3)^2}{x+3} dx = \int_0^6 \frac{x+3-3+(x+3)^2}{x+3} dx = \int_0^6 \frac{(x+3)(1+x+3)-3}{x+3} dx =$ $\int_0^6 (x+4) dx - \int_0^6 \frac{3}{x+3} dx = \left( \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big _0^6 - 3I_1 = \frac{36}{2} + 24 - 3I_1 = 42 - 3I_1$ $I_1 = \int_0^6 \frac{1}{x+3} dx = \int_0^6 \frac{(x+3)'}{x+3} dx = (\ln(x+3)) \Big _0^6 = \ln 9 - \ln 3 = \ln \left( \frac{9}{3} \right) = \ln 3$ <p>Înlocuind, obținem <math>\int_0^6 \frac{f(x)}{x+3} dx = 42 - 3 \ln 3</math>. Egalez rezultatul calculului integral cu expresia dată și rezolv ecuația obținută: <math>42 - 3 \ln 3 = 3(a - \ln 3) \Leftrightarrow 42 = 3a \Leftrightarrow a = 14</math></p>
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• aplicarea proprietății de aditivitate a integralei definite <math>\int_0^2 (f(x) - (x+3)^2) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 (x+3)^2 dx</math> înaintea înlocuirii lui <math>f(x)</math> cu forma din enunț, ceea ce ar complica rezolvarea.</li> <li>• utilizarea dezvoltării binomiale anterior sau după înlocuirea lui <math>f(x)</math>, ceea ce ar complica rezolvarea</li> <li>• aplicarea greșită a formulei de integrare sau lipsa aplicării acesteia</li> <li>• folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>• erori de calcul (ridicare la putere, împărțire, ordinea operațiilor)</li> </ul> <p>b)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• utilizarea dezvoltării binomiale</li> <li>• scrierea eronată a puterii cu exponent negativ</li> <li>• aplicarea greșită a metodei de integrare, a formulei de integrare sau lipsa aplicării acestora</li> <li>• folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>• erori de calcul (ridicare la putere, împărțire, ordinea efectuării operațiilor)</li> </ul> <p>c)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• aplicarea greșită a formulei de integrare prin părți sau lipsa aplicării acesteia</li> <li>• folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>• erori de calcul (ordinea efectuării operațiilor, reguli de semn, factor comun, rezolvarea ecuațiilor)</li> </ul>

<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)	<b>a) Punctaj în barem: 5p</b> $\int_0^2 (f(x) - (x+3)^2) dx = \int_0^2 x dx = \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^2 =$ $= \frac{4}{2} - 0 = 2$	3p
	<b>b) Punctaj în barem: 5p</b> $\int_{-2}^0 \frac{1}{f(x) - x} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{(x+3)^2} dx = \int_{-2}^0 \frac{(x+3)'}{(x+3)^2} dx = \frac{-1}{x+3} \Big _{-2}^0 =$ $= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$	2p
	<b>c) Punctaj în barem: 5p</b> $\int_0^6 \frac{f(x)}{x+3} dx = \int_0^6 \frac{x + (x+3)^2}{x+3} dx = \int_0^6 \left( x + 4 - \frac{3}{x+3} \right) dx =$ $= \left( \frac{x^2}{2} + 4x - 3 \ln(x+3) \right) \Big _0^6 = 42 - 3 \ln 3$	3p
	$42 - 3 \ln 3 = 3(a - \ln 3)$ de unde se obține $a = 14$ .	2p

Clasa: a XII-a	Subiectul: III		Problema: 2 (sesiunea specială 2023, varianta 6)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial</li> <li>Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite</li> <li>Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor</li> <li>Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calcul integral, și compararea rezultatelor obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie</li> </ul>		
<b>Item</b>	<p>Se consideră funcția <math>f : \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + \frac{6}{2x+3}</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_1^3 \left(f(x) - \frac{6}{2x+3}\right) dx = e(e^2 - 1)</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_{-1}^0 (f(x) - e^x) dx = 3 \ln 3</math>.</p> <p>c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției <math>g : \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (2x^2 + 3x)f(x)</math>, axa <math>Ox</math> și dreptele de ecuații <math>x = 0</math> și <math>x = 1</math> are aria egală cu <math>2(e+1)</math>.</p>		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<p>Legea de definiție a funcției <math>f</math>, ca suma dintre o funcție exponențială și o funcție rațională simplă</p> <p>a) avem de calculat o integrală definită și de arătat o egalitate (știm rezultatul calculului pe care trebuie să îl efectuăm) știm valoarea numerică pe care trebuie să o obținem pentru a arăta egalitatea din enunț</p> <p>b) avem de calculat o integrală definită și de arătat o egalitate (știm rezultatul calculului pe care trebuie să îl efectuăm) știm valoarea numerică pe care trebuie să o obținem pentru a arăta egalitatea din enunț</p> <p>c) avem de determinat aria unei suprafețe plane delimitate de <i>graficul unei funcții</i>, axa <math>Ox</math>, respectiv de <i>dreptele de ecuații</i> <math>x = 0</math> și <math>x = 1</math>, deci de calculat o integrală definită utilizând metode de integrare și de arătat o egalitate (rezultatul este cunoscut).</p>	
	<b>Ce se cere?</b>	<p>a) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral și să obținem rezultatul dat</p> <p>b) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral, metode de integrare și să obținem rezultatul dat.</p> <p>c) să determinăm aria suprafeței plane, să calculăm integrala definită corespunzătoare utilizând formule de calcul integral și să arătăm că aria suprafeței plane este egală cu rezultatul dat în enunț.</p>	



Cum  
rezolv?**Rezolvare:**a) Înlocuiesc  $f(x)$  cu forma din enunț, reduc termenii asemenea

$$\int_1^3 \left( f(x) - \frac{6}{2x+3} \right) dx = \int_1^3 \left( e^x + \frac{6}{2x+3} - \frac{6}{2x+3} \right) dx = \int_1^3 e^x dx =$$

folosesc formula de integrare  $\int e^x dx = e^x + C$  și calculez membrul stâng (ca integrală definită pe intervalul  $[1, 3]$ ), pentru a obține valoarea numerică data

$$\int_1^3 e^x dx = e^x \Big|_1^3 = e^3 - e = e(e^2 - 1)$$

b) Înlocuiesc  $f(x)$  cu forma din enunț, reduc termenii asemenea

$$\int_{-1}^0 (f(x) - e^x) dx = \int_{-1}^0 \left( e^x + \frac{6}{2x+3} - e^x \right) dx = \int_{-1}^0 \left( \frac{6}{2x+3} \right) dx =$$

observ că  $(2x+3)' = 2$  și folosesc schimbarea de variabilă

$$= 3 \int_{-1}^0 \frac{2}{2x+3} dx = 3 \int_{-1}^0 \frac{(2x+3)'}{2x+3} dx = 3 \ln(2x+3) \Big|_{-1}^0 = 3(\ln 3 - \ln 1) = 3 \ln 3$$

c) înlocuiesc  $f(x)$  cu forma din enunț și determin forma funcției  $g$ .

$$g(x) = (2x^2 + 3x) \left( e^x + \frac{6}{2x+3} \right) = (2x^2 + 3x)e^x + \frac{6(2x^2 + 3x)}{2x+3} = (2x^2 + 3x)e^x + \frac{6x(2x+3)}{2x+3} =$$
$$= (2x^2 + 3x)e^x + 6x$$

Folosesc exprimarea ariei cerute cu ajutorul integralei definite, în care țin cont că funcția  $g$  este pozitivă pe intervalul de integrare:

$$A = \int_0^1 |g(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \left( (2x^2 + 3x)e^x + 6x \right) dx =$$

	<p>separ în două integrale și aplic metoda de integrare prin părți pentru prima integrală:</p> $A = \int_0^1 (2x^2 + 3x)(e^x)' dx + \int_0^1 6x dx = (2x^2 + 3x)e^x \Big _0^1 - \int_0^1 (4x + 3)e^x dx + \frac{6x^2}{2} \Big _0^1 =$ $= (2x^2 + 3x)e^x \Big _0^1 - (4x + 3)e^x \Big _0^1 + \int_0^1 4e^x dx + 3x^2 \Big _0^1 = (2x^2 - x + 1)e^x \Big _0^1 + 3x^2 \Big _0^1 =$ $= 2e - 1 + 3 = 2e + 2 = 2(e + 1)$	
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>	<p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>aplicarea proprietății de aditivitate a integralei definite <math>\int_1^3 \left( f(x) - \frac{6}{2x+3} \right) dx = \int_1^3 e^x dx - \int_1^3 \frac{6}{2x+3} dx</math>, înaintea înlocuirii lui <math>f(x)</math> cu forma din enunț</li> <li>aplicarea greșită a formulei de integrare sau lipsa aplicării acesteia</li> <li>utilizarea formulei de derivare în locul formulei de integrare</li> <li>folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>erori de calcul</li> </ul> <p>b)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>aplicarea proprietății de aditivitate a integralei definite înaintea înlocuirii lui <math>f(x)</math> cu forma din enunț</li> <li>aplicarea greșită a metodei de integrare, a formulei de integrare sau lipsa aplicării acestora</li> <li>folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>erori de calcul (valorile funcției logaritmice, ordinea efectuării operațiilor)</li> </ul> <p>c)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>aplicarea greșită a formulei de integrare prin părți sau lipsa aplicării acesteia</li> <li>folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>erori de calcul (ordinea efectuării operațiilor, reguli de semn, factor comun, rezolvarea ecuațiilor)</li> </ul>	
<b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie	<p>a) <b>Punctaj în barem: 5p</b></p> $\int_1^3 \left( f(x) - \frac{6}{2x+3} \right) dx = \int_1^3 e^x dx = e^x \Big _1^3$ $= e^3 - e = e(e^2 - 1)$	<p>3p</p> <p>2p</p>

<i>punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</i>	<b>b) Punctaj în barem: 5p</b>	
	$\int_{-1}^0 (f(x) - e^x) dx = \int_{-1}^0 \left( e^x + \frac{6}{2x+3} - e^x \right) dx = \int_{-1}^0 \left( \frac{6}{2x+3} \right) dx = 3 \int_{-1}^0 \frac{(2x+3)'}{2x+3} dx = 3 \ln(2x+3) \Big _{-1}^0 =$	3p
	$= 3(\ln 3 - \ln 1) = 3 \ln 3$	2p
	<b>c) Punctaj în barem: 5p</b>	
	$g(x) = (2x^2 + 3x)e^x + 6x, x \in \left( -\frac{3}{2}, +\infty \right), \text{ care este pozitivă pe intervalul de integrare, deci}$	3p
	$A = \int_0^1  g(x)  dx = \int_0^1 \left( (2x^2 + 3x)e^x + 6x \right) dx = (2x^2 + 3x)e^x \Big _0^1 - (4x+3)e^x \Big _0^1 + 4e^x \Big _0^1 + 3x^2 \Big _0^1 =$	2p
	$= 5e - 7e + 3 + 4e - 4 + 3 = 2e + 2 = 2(e+1)$	

Clasa: a XII-a	Subiectul: III		Problema: 2 (simulare 2024)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial</li> <li>Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite</li> <li>Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor</li> <li>Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calcul integral, și compararea rezultatelor obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie</li> </ul>		
<b>Item</b>	<p>Se consideră funcția <math>f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \ln x</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_2^4 (f(x) - \ln x) dx = 6</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_1^e \frac{f(x) - x}{x} dx = \frac{1}{2}</math>.</p> <p>c) Determinați numărul natural nenul <math>n</math> pentru care <math>\int_1^n f(x) dx = 2 + 3 \ln n</math>.</p>		
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<p>Legea de definiție a funcției <math>f</math>, ca sumă de funcții elementare (de gradul I și logaritmică)</p> <p>a) avem de calculat o integrală definită și de arătat o egalitate (știm rezultatul calculului pe care trebuie să îl efectuăm) știm valoarea numerică pe care trebuie să o obținem pentru a arăta egalitatea din enunț</p> <p>b) avem de calculat o integrală definită și de arătat o egalitate (știm rezultatul calculului pe care trebuie să îl efectuăm) știm valoarea numerică pe care trebuie să o obținem pentru a arăta egalitatea din enunț</p> <p>c) avem de calculat o integrală definită și de rezolvat o ecuație în mulțimea numerelor natural nenule (trebuie să determinăm numărul natural nenul <math>n</math>) știm membrul stâng al ecuației (integrala pe care trebuie să o calculăm) și forma rezultatului (membrul drept)</p>	
	<b>Ce se cere?</b>	<p>a) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral și să obținem rezultatul dat</p> <p>b) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral, metode de integrare și să obținem rezultatul dat.</p> <p>c) să calculăm integrala definită utilizând formule de calcul integral și să determinăm numărul natural nenul <math>n</math> din ecuația obținută egalând rezultatul calculului integral cu expresia dată</p>	

	Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p>a) Înlocuiesc <math>f(x)</math> cu forma din enunț, reduc termenii asemenea</p> $\int_2^4 (f(x) - \ln x) dx = \int_2^4 (x + \ln x - \ln x) dx = \int_2^4 x dx$ <p>folosesc formula de integrare <math>\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C</math> și calculez membrul stâng (ca integrală definită pe intervalul <math>[2, 4]</math>), pentru a obține valoarea numerică dată</p> $\int_2^4 x dx = \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big _2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 8 - 2 = 6$ <p><b>b) Varianta 1:</b></p> <p>Înlocuiesc <math>f(x)</math> cu forma din enunț, reduc termenii asemenea</p> $\int_1^e \frac{f(x) - x}{x} dx = \int_1^e \frac{x + \ln x - x}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx =$ <p>observ că <math>(\ln x)' = \frac{1}{x}</math> și folosesc schimbarea de variabilă</p> $= \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx = \frac{(\ln x)^{1+1}}{1+1} \Big _1^e = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big _1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$ <p><b>Varianta 2:</b></p> <p>înlocuiesc <math>f(x)</math> cu forma din enunț, reduc termenii asemenea</p> $\int_1^e \frac{f(x) - x}{x} dx = \int_1^e \frac{x + \ln x - x}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx =$ <p>observ că <math>(\ln x)' = \frac{1}{x}</math> și folosesc formula de integrare prin părți</p>
--	----------------	---

$$= \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx = (\ln x \cdot \ln x)|_1^e - \int_1^e \ln x \cdot (\ln x)' dx \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x \cdot \ln x)|_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

c) Înlocuiesc  $f(x)$  cu forma din enunț, separ în două integrale, aplic formula de integrare  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  și notez a doua integrală pentru a o calcula separat:

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n (x + \ln x) dx = \int_1^n x dx + \int_1^n \ln x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^n + I_1$$

$$I_1 = \int_1^n \ln x dx = \int_1^n (x)' \cdot \ln x dx = (x \cdot \ln x)|_1^n - \int_1^n x \cdot (\ln x)' dx = (x \cdot \ln x)|_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} dx = (x \cdot \ln x)|_1^n - x \Big|_1^n =$$

$$= n \ln n - n + 1$$

$$\int_1^n f(x) dx = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} + n \ln n - n + 1 = \frac{n^2 - 2n + 1}{2} + n \ln n, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$

Egalez rezultatul calculului integral cu expresia dată și rezolv ecuația obținută:

$$\frac{n^2 - 2n + 1}{2} + n \ln n = 2 + 3 \ln n \Leftrightarrow 2(n - 3) \ln n + (n - 3)(n + 1) = 0 \Leftrightarrow (n - 3)(2 \ln n + n + 1) = 0$$

Deoarece  $n$  este număr natural nenul  $(2 \ln n + n + 1) \neq 0$ , deci soluția este  $n = 3$ .

**Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare**

- aplicarea proprietății de aditivitate a integralei definite  $\int_2^4 (f(x) - \ln x) dx = \int_2^4 f(x) dx - \int_2^4 \ln x dx$  înaintea înlocuirii lui  $f(x)$  cu forma din enunț.
- aplicarea greșită a formulei de integrare sau lipsa aplicării acesteia
- utilizarea formulei de derivare în locul formulei de integrare
- folosirea incorectă a formulei *Leibniz-Newton*

	<ul style="list-style-type: none"> <li>erori de calcul (ridicare la putere, împărțire, ordinea operațiilor)</li> <li>aplicarea proprietății de aditivitate a integralei definite înaintea înlocuirii lui <math>f(x)</math> cu forma din enunț</li> <li>aplicarea greșită a metodei de integrare, a formulei de integrare sau lipsa aplicării acestora</li> <li>aparitia unui blocaj la obținerea în membrul stâng a integralei din enunț în cazul aplicării metodei de integrare prin părți</li> <li>folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>erori de calcul (valorile funcției logaritmice, ridicare la putere, împărțire, ordinea operațiilor)</li> <li>aplicarea greșită a formulei de integrare prin părți sau lipsa aplicării acesteia</li> <li>folosirea incorectă a formulei <i>Leibniz-Newton</i></li> <li>erori de calcul (ordinea efectuării operațiilor, reguli de semn, factor comun, rezolvarea ecuațiilor)</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p>a) <b>Punctaj în barem: 5p</b></p> $\int_2^4 (f(x) - \ln x) dx = \int_2^4 (x + \ln x - \ln x) dx = \int_2^4 x dx = \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big _2^4 =$ $= \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 6$ <p>b) <b>Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> $\int_1^e \frac{f(x) - x}{x} dx = \int_1^e \frac{x + \ln x - x}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big _1^e =$ $= \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$ <p><b>Varianta 2:</b></p> $\int_1^e \frac{f(x) - x}{x} dx = \int_1^e \frac{x + \ln x - x}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx = (\ln x \cdot \ln x) \Big _1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big _1^e =$ $= \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>





	<p>c) <b>Punctaj în barem: 5p</b></p> $\int_1^n f(x)dx = \int_1^n (x + \ln x) dx = \int_1^n (x + x' \cdot \ln x) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \cdot \ln x - x \right) \Big _1^n = \frac{n^2 - 2n + 1}{2} + n \ln n, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$ $\frac{(n-1)^2}{2} + n \ln n = 2 + 3 \ln n \Leftrightarrow (n-3)(2 \ln n + n + 1) = 0 \text{ și, cum } n \text{ este număr natural nenul, obținem } n = 3.$	3p  2p
--	---	--------------

Clasa: a XII-a	Subiectul: III	Problema: 2 (august 2023, varianta 7)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial</li> <li>Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite</li> <li>Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor</li> <li>Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calcul integral, și compararea rezultatelor obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie</li> </ul>	
<b>Item</b>	<p>Se consideră funcția <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + 3x</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_1^2 (f(x) - 3x) dx = 15</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \frac{1}{3} \ln 2</math>.</p> <p>c) Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei <math>Ox</math> a graficului funcției <math>g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + f(x)}{x}</math> este egal cu <math>2\pi f(3)</math>.</p>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Definițiile funcțiilor <math>f</math> și <math>g</math>:                             <ul style="list-style-type: none"> <li><math>f</math> este o funcție polinomială de grad 3</li> <li><math>g</math> este o funcție rațională, definită prin intermediul funcției <math>f</math>, având ca domeniu de definiție intervalul <math>[1, 2]</math></li> </ul> </li> <li>Rezultatul calculului unor integrale definite: <math>15, \frac{1}{3} \ln 2, 2\pi f(3)</math>.</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<p>a) să calculăm integrala definită a funcției <math>f(x) - 3x</math>, pe intervalul <math>[1, 2]</math> și să arătăm că aceasta este egală cu 15</p> <p>b) să calculăm integrala definită a funcției <math>\frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3}</math>, pe intervalul <math>[2, 5]</math> și să arătăm că aceasta este egală cu <math>\frac{1}{3} \ln 2</math></p> <p>c) să determinăm volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei <math>Ox</math> a graficului funcției <math>g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + f(x)}{x}</math> și să arătăm că acesta este egal cu <math>2\pi f(3)</math>.</p>

Cum rezolv?	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p>a) Înlocuim, în integrala dată, <math>f(x)</math> cu expresia prin care este definită, efectuăm calculul algebric (reducem termenii <math>3x</math> și <math>-3x</math>) și aplicăm <b>formula Leibniz-Newton</b>:</p> $\int_1^2 (f(x) - 3x) dx = \int_1^2 (4x^3 + 3x - 3x) dx = \int_1^2 4x^3 dx = 4 \int_1^2 x^3 dx = 4 \left. \frac{x^4}{4} \right _1^2 = x^4 \Big _1^2 = 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15$ <p>b) <b>Varianta 1:</b></p> <p>Înlocuim, în integrala dată, <math>f(x)</math>, efectuăm calculul algebric (reducem termenii <math>4x^3</math> și <math>-4x^3</math>) și aplicăm <b>formula Leibniz-Newton</b>.</p> $\int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{4x^3 + 3x - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{3x + 3} dx = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{(x+1)'}{x+1} dx = \frac{1}{3} \ln(x+1) \Big _2^5 = \frac{1}{3} (\ln 6 - \ln 3) = \frac{1}{3} \ln \frac{6}{3} = \frac{1}{3} \ln 2$ <p><b>Varianta 2:</b></p> $I = \int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{4x^3 + 3x - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{3x + 3} dx$ <p>Aplicăm metoda de integrare prin schimbare de variabilă. Fie funcția <math>t = u(x) = 3x + 3</math>, atunci <math>dt = u'(x) dx = 3dx</math>.</p> $\text{Obținem } I = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{1}{3} \int_{u(2)}^{u(5)} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \int_9^{18} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln(t) \Big _9^{18} = \frac{1}{3} (\ln 18 - \ln 9) = \frac{1}{3} \ln \frac{18}{9} = \frac{1}{3} \ln 2$ <p>c) Aflăm funcția <math>g</math>, înlocuind <math>f(x)</math> și simplificând fracția obținută cu <math>x</math>:</p> $g(x) = \frac{x^3 + f(x)}{x} = \frac{x^3 + 4x^3 + 3x}{x} = \frac{5x^3 + 3x}{x} = \frac{x(5x^2 + 3)}{x} = 5x^2 + 3$
----------------	---

	<p>Volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei <math>Ox</math> a graficului funcției <math>g</math> este</p> $V = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 (25x^4 + 30x^2 + 9) dx = \pi \left( 25 \frac{x^5}{5} + 30 \frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big _1^2 = \pi (5x^5 + 10x^3 + 9x) \Big _1^2$ $= \pi ((5 \cdot 2^5 + 10 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2) - (5 \cdot 1^5 + 10 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1)) = 234\pi$ <p>Dar <math>f(3) = 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 = 117 \Rightarrow V = 2\pi f(3)</math>, ceea ce trebuia demonstrat.</p>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erori de aplicare a <b>formulei Leibniz – Newton</b>: elevul substituie primitiva cu funcția de integrat sau cu derivata acesteia: De exemplu:             <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ La punctul a):                     <math display="block">\int_1^2 x^3 dx = x^3 \Big _1^2 = 2^3 - 1^3 \text{ sau } \int_1^2 x^3 dx = 3x^2 \Big _1^2</math> </li> <li>▪ La punctul b):                     <math display="block">\int_2^5 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{x+1} \Big _2^5</math> </li> </ul> </li> <li>• La punctul b), elevul poate preciza în mod eronat că o primitivă a funcției de lege <math>\frac{1}{3x+3}</math> este <math>\ln(3x+3)</math>:             <math display="block">\int_2^5 \frac{1}{3x+3} dx = \ln(3x+3) \Big _2^5 = \ln 18 - \ln 9 = \ln \frac{18}{9} = \ln 2, \text{ rezultat evident neconform}</math> </li> <li>• Elevul nu schimbă limitele (capetele) de integrare la utilizarea metodei schimbării de variabilă:             <math display="block">I = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{u'(x)}{u(x)} dx, t = u(x) = 3x+3 \Rightarrow dt = u'(x) dx \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln(t) \Big _2^5</math> </li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elevul exprimă greșit volumul corpului de rotație De exemplu:  <math display="block">V = \pi \int_a^b g(x) dx \text{ sau } V = \int_a^b g^2(x) dx \text{ sau } V = \int_a^b g(x) dx,</math>                     confundând eventuale formula cu cele pentru alte aplicații ale integrale</li> <li>Greșeli de calcul algebric sau numeric</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b></p> $\int_1^2 (f(x) - 3x) dx = \int_1^2 (4x^3 + 3x - 3x) dx = 4 \int_1^2 x^3 dx = x^4 \Big _1^2$ $= 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15$ <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b></p> <p><b>Varianta 1:</b></p> $\int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{4x^3 + 3x - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{3x + 3} dx = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{1}{x + 1} dx = \frac{1}{3} \ln(x + 1) \Big _2^5 =$ $= \frac{1}{3} (\ln 6 - \ln 3) = \frac{1}{3} \ln \frac{6}{3} = \frac{1}{3} \ln 2$ <p><b>Varianta 2:</b></p> $I = \int_2^5 \frac{1}{f(x) - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{4x^3 + 3x - 4x^3 + 3} dx = \int_2^5 \frac{1}{3x + 3} dx$ <p><math>t = u(x) = 3x + 3</math>, atunci <math>dt = u'(x) dx = 3dx</math>.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>

$$I = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{1}{3} \int_{u(2)}^{u(5)} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \int_9^{18} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln(t) \Big|_9^{18}$$

$$= \frac{1}{3} (\ln 18 - \ln 9) = \frac{1}{3} \ln \frac{18}{9} = \frac{1}{3} \ln 2$$

c) **Punctaj în barem: 5p**

$$g(x) = \frac{x^3 + f(x)}{x} = 5x^2 + 3 \Rightarrow V = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 (25x^4 + 30x^2 + 9) dx = \pi (5x^5 + 10x^3 + 9x) = 234\pi$$

$$f(3) = 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 = 117 \Rightarrow V = 2\pi f(3)$$

2p

3p

2p

Clasa: a XII-a	Subiectul: III	Problema: 2 (iulie 2023, varianta 1)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial</li> <li>Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite</li> <li>Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor</li> <li>Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calcul integral, și compararea rezultatelor obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie</li> </ul>	
<b>Item</b>	<p>Se consideră funcția <math>f : (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{8x}{x+9}</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_0^1 (x+9) f(x) dx = 4</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_1^6 \frac{1}{8x} f(x) dx = \ln \frac{3}{2}</math>.</p> <p>c) Determinați numărul real <math>a</math> pentru care <math>\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)</math>.</p>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Definiția funcției <math>f</math> – funcție rațională, definită pe intervalul <math>(-9, +\infty)</math></li> <li>Valorile numerice reprezentând rezultatul calculului unor integrale definite</li> </ul>
	<b>Ce se cere?</b>	<p><b>La itemii a) și b)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Să calculăm o integrală definită și să verificăm obținerea rezultatului precizat în enunț.</li> </ul> <p><b>La itemul c)</b></p> <p>Să determinăm soluția unei ecuații, a cărei rezolvare implică determinarea valorii unei integrale definite.</p>
	<b>Cum rezolv?</b>	<p><b>Rezolvare:</b></p> <p>a) Înlocuim, în integrala dată, <math>f(x)</math> cu expresia prin care este definită și efectuăm calculul algebric, folosind și proprietăți ale integralelor definite (liniaritate):</p> $I = \int_0^1 (x+9) f(x) dx = \int_0^1 (x+9) \frac{8x}{x+9} dx = 8 \int_0^1 x dx$

		<p>Integrala obținută se calculează folosind <b>formula Leibniz-Newton</b>:</p> $I = 8 \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = 8 \left( \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 4$ <p>b) Înlocuim, în integrala dată, <math>f(x)</math> cu expresia prin care este definită și efectuăm simplificarea cu <math>8x</math>:</p> $I = \int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot \frac{8x}{x+9} dx = \int_1^6 \frac{1}{x+9} dx = \int_1^6 \frac{(x+9)'}{x+9} dx$ <p>Cum o primitivă a funcției <math>\frac{u'(x)}{u(x)}</math> este <math>\ln u(x)  \Rightarrow I = \ln(x+9) \Big _1^6 = \ln 15 - \ln 10 = \ln \frac{15}{10} = \ln \frac{3}{2}</math></p> <p>c) <math>\int_0^3 f(x^2) dx = 8 \int_0^3 \frac{x^2}{x^2+9} dx = 8 \int_0^3 \frac{(x^2+9)-9}{x^2+9} dx = 8 \left[ \int_0^3 1 dx - 9 \int_0^3 \frac{1}{x^2+9} dx \right]</math></p> $= 8 \left[ x \Big _0^3 - 9 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} \Big _0^3 \right] = 8 \left( 3 - \frac{3\pi}{4} \right) = 6(4 - \pi)$ $6(4 - \pi) = 6(4 + a\pi) \Leftrightarrow -\pi = a\pi \Leftrightarrow a = -1$
<b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Exprimarea greșită a integralei produsului a două funcții ca produs al integralelor: <math>\int_0^1 (x+9) f(x) dx = \int_0^1 (x+9) dx \cdot \int_0^1 f(x) dx</math>.</li> <li>• Erori de aplicare a <b>formulei Leibniz – Newton</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Elevul substituie primitiva cu funcția de integrat sau cu derivata acesteia:</li> </ul> </li> </ul> $\int_0^1 x dx = x \Big _0^1 \quad \text{sau} \quad \int_0^1 x dx = 1 \Big _0^1$



	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Exprimă diferența <math>F(x) \Big _a^b</math> ca fiind <math>F(a) - F(b)</math>.</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Greșeli de calcul algebric sau numeric.</li> </ul> <p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b></p> $I = \int_0^1 (x+9) f(x) dx = \int_0^1 (x+9) \frac{8x}{x+9} dx = 8 \int_0^1 x dx = 8 \frac{x^2}{2} \Big _0^1$ $= 8 \left( \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 4$ <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b></p> $I = \int_1^6 \frac{1}{8x} f(x) dx = \int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot \frac{8x}{x+9} dx = \int_1^6 \frac{1}{x+9} dx = \int_1^6 \frac{(x+9)'}{x+9} dx = \ln(x+9) \Big _1^6$ $= \ln 15 - \ln 10 = \ln \frac{15}{10} = \ln \frac{3}{2}$ <p><b>c) Punctaj în barem: 5p</b></p> $\int_0^3 f(x^2) dx = 8 \int_0^3 \frac{x^2}{x^2+9} dx = 8 \int_0^3 \frac{(x^2+9)-9}{x^2+9} dx = 8 \left[ \int_0^3 1 dx - 9 \int_0^3 \frac{1}{x^2+9} dx \right]$ $= 8 \left[ x \Big _0^3 - 9 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \Big _0^3 \right] = 8 \left( 3 - \frac{3\pi}{4} \right) = 6(4 - \pi)$ $6(4 - \pi) = 6(4 + a\pi) \Leftrightarrow -\pi = a\pi \Leftrightarrow a = -1$	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>

Clasa: a XII-a	Subiectul: III	Problema: 2 (rezervă august 2023, varianta 5)
<b>Competența</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Stabilirea unor proprietăți ale calculului integral, prin analogie cu proprietăți ale calculului diferențial</li> <li>Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite</li> <li>Explicarea opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor</li> <li>Determinarea ariei unei suprafețe plane și a volumului unui corp, folosind calcul integral, și compararea rezultatelor obținute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie</li> </ul>	
<b>Item Bacalaureat (august 2023, rezervă, varianta 5)</b>	<p>Se consideră funcția <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1</math>.</p> <p>a) Arătați că <math>\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \frac{2}{3}</math>.</p> <p>b) Arătați că <math>\int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = 2\ln 3</math>.</p> <p>c) Determinați numărul natural <math>n</math>, știind că <math>\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e}</math>.</p>	
<b>Rezolvare</b>	<b>Ce știm?</b>	<p><b>La itemii a) și b)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Definiția funcției <math>f</math> – funcție polinomială de grad 2, definită pe mulțimea numerelor reale</li> <li>Rezultatul calculului unor integrale definite</li> </ul> <p><b>La itemul c)</b></p> <p>O ecuație cu necunoscuta <math>n</math>, <math>n</math> număr natural, în care intervine o integrală definită</p>
	<b>Ce cere?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La itemul a), se cere să calculăm integrala definită a funcției <math>f(x) - 1</math>, pe intervalul <math>[0,1]</math> și să arătăm că aceasta este egală cu <math>\frac{2}{3}</math></li> <li>La itemul b), se cere să calculăm integrala definită a funcției <math>\frac{4x}{f(x)}</math> pe intervalul <math>[0,2]</math> și să arătăm că aceasta este egală cu <math>2\ln 3</math></li> <li>La itemul c), se cere rezolvarea ecuației date, ceea ce implică determinarea valorii integralei definite care apare în ecuație</li> </ul>

<b>Cum rezolv?</b>	<p>a) Înlocuim, în integrala dată, <math>f(x)</math> cu expresia prin care este definită și efectuăm calculul algebric (reducem termenii 1 și -1). Integrala obținută se calculează folosind <b>formula Leibniz-Newton</b>:</p> $\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \int_0^1 (2x^2 + 1 - 1) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{2}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{2}{3}$ <p>b) <b>Varianta 1:</b>                  Înlocuim, în integrala dată, <math>f(x)</math> cu expresia prin care este definită și observăm că <math>4x</math> este derivata funcției <math>f</math>:</p> $I = \int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{4x}{2x^2 + 1} dx = \int_0^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2x^2 + 1} dx$ <p>Deoarece o primitivă a funcției <math>\frac{u'(x)}{u(x)}</math> este <math>\ln u(x) </math>, avem:</p> $I = \ln(2x^2 + 1) \Big _0^2 = \ln 9 - \ln 1 = \ln(3^2) = 2 \ln 3$ <p><b>Varianta 2:</b></p> $I = \int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{4x}{2x^2 + 1} dx$ <p>Aplicăm metoda de integrare prin schimbare de variabilă:                  Fie funcția <math>t = u(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow dt = u'(x) dx = 4x dx</math>.</p> $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = u(0) = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = u(2) = 9 \end{cases}$ <p>Obținem <math>I = \int_0^2 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int_{u(0)}^{u(2)} \frac{1}{t} dt = \int_1^9 \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big _1^9 = \ln 9 - \ln 1 = \ln(3^2) = 2 \ln 3</math></p>
------------------------	---

**c) Varianta 1:**

Determinăm legea funcției  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  și aplicăm **formula de integrare prin părți**:

$$\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) \ln x dx = \int_1^e \left(-\frac{2}{x} + x\right)' \ln x dx =$$

$$\left(-\frac{2}{x} + x\right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(-\frac{2}{x} + x\right) \frac{1}{x} dx =$$

$$\left(-\frac{2}{e} + e\right) \ln e - \left(-\frac{2}{1} + 1\right) \ln 1 - \int_1^e \left(-\frac{2}{x^2} + 1\right) dx =$$

$$-\frac{2}{e} + e - \left(\frac{2}{x} + x\right) \Big|_1^e = -\frac{2}{e} + e - \left(\left(\frac{2}{e} + e\right) - \left(\frac{2}{1} + 1\right)\right) =$$

$$-\frac{2}{e} + e - \frac{2}{e} - e + 3 = 3 - \frac{4}{e}$$

$$\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e} \Leftrightarrow 2n^2 + 1 - \frac{4}{e} = 3 - \frac{4}{e} \Leftrightarrow n^2 = 1$$

Cum  $n$  este număr natural  $\Rightarrow n = 1$ .

	<p><b>Varianta 2:</b></p> $I = \int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) \ln x dx = 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = 2A + B$ <p>Pentru calculul integralelor <math>A</math> și <math>B</math>, aplicăm <b>metoda de integrare prin părți</b>:</p> $A = \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big _1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big _1^e = 1 - \frac{2}{e}$ $B = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \ln x dx = x \ln x \Big _1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - x \Big _1^e = 1.$ $I = 2A + B = 2 - \frac{4}{e} + 1 = 3 - \frac{4}{e}$ $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e} \Leftrightarrow 2n^2 + 1 - \frac{4}{e} = 3 - \frac{4}{e} \Leftrightarrow n^2 = 1.$ <p>Cum <math>n</math> este număr natural <math>\Rightarrow n = 1</math></p>
<p><b>Erori/greșeli care pot interveni în rezolvare</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicarea incorectă a <b>Teoremei Leibniz-Newton</b>:             <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ în locul primitivei elevul scrie funcția a cărei integrală trebuie calculată sau derivata acesteia De exemplu: la punctul a)</li> </ul> </li> </ul> $\int_0^1 x^2 dx = x^2 \Big _0^1 = 1^2 - 0^2 \text{ sau } \int_0^1 x^2 dx = 2x \Big _0^1$

	<ul style="list-style-type: none"> <li>Exprimă eronat diferența <math>F(x) \Big _a^b</math> ca fiind <math>F(a) - F(b)</math>:                       Ex. : <math>\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{0^3}{3} - \frac{1^3}{3}</math></li> <li>Aplicarea incorectă a <b>formulei de integrare prin părți</b></li> <li>La integrarea prin schimbare de variabilă nu se schimbă limitele (capetele) de integrare:                       Ex. : <math>I = \int_0^2 \frac{u'(x)}{u(x)} dx; t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx \Rightarrow I = \int_0^2 \frac{1}{t} dt</math>, ceea ce conduce la un răspuns greșit</li> <li>Greșeli de calcul algebric sau numeric</li> </ul>	
<p><b>Explicații privind baremul de notare:</b> (cum se distribuie punctele din barem în fiecare etapă din rezolvarea exercițiului)</p>	<p><b>a) Punctaj în barem: 5p</b></p> $\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \int_0^1 (2x^2 + 1 - 1) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big _0^1 =$ $= \frac{2}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{2}{3}$ <p><b>b) Punctaj în barem: 5p</b> <b>Varianta 1:</b></p> $\int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{4x}{2x^2 + 1} dx = \int_0^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2x^2 + 1} dx = \ln(2x^2 + 1) \Big _0^2 =$ $= \ln 9 - \ln 1 = \ln(3^2) = 2 \ln 3$	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>

**Varianta 2:**

$$I = \int_0^2 \frac{4x}{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{4x}{2x^2 + 1} dx$$

$$t = u(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow dt = u'(x) dx = 4x dx.$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = u(0) = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = u(2) = 9 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^2 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int_{u(0)}^{u(2)} \frac{1}{t} dt = \int_1^9 \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_1^9 =$$

$$= \ln 9 - \ln 1 = \ln(3^2) = 2 \ln 3$$

**c) Punctaj în barem: 5p****Varianta 1:**

$$\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) \ln x dx = \int_1^e \left(-\frac{2}{x} + x\right)' \ln x dx =$$

$$\left(-\frac{2}{x} + x\right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(-\frac{2}{x} + x\right) \frac{1}{x} dx = -\frac{2}{e} + e - \left(\frac{2}{x} + x\right) \Big|_1^e = 3 - \frac{4}{e}$$

$$\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e} \Leftrightarrow 2n^2 + 1 - \frac{4}{e} = 3 - \frac{4}{e} \Leftrightarrow n^2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$$

3p

2p

3p

2p

**Varianta 2:**

$$I = \int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) \ln x dx = 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = 2A + B$$

$$A = \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = 1 - \frac{2}{e}$$

$$B = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - x \Big|_1^e = 1$$

$$I = 2A + B = 2 - \frac{4}{e} + 1 = 3 - \frac{4}{e}$$

$$\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) \ln x dx = f(n) - \frac{4}{e} \Leftrightarrow 2n^2 + 1 - \frac{4}{e} = 3 - \frac{4}{e} \Leftrightarrow n^2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$$

3p

2p



<b>De avut în vedere – important</b>	<b>Pentru profesor</b>	<p><i>Este important ca profesorul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– să reactualizeze noțiunile teoretice necesare rezolvării itemului.</li> <li>– să stabilească, împreună cu elevii, datele și cerința problemei</li> <li>– să analizeze cu elevii modalitățile de rezolvare și redactare.</li> <li>– să discute greșelile care pot să apară în rezolvare, punând accent pe modalitățile de lucru care minimizează erorile de calcul și raționament.</li> <li>– să prezinte elevilor modalități de acordare a punctelor din barem, evidențiind faptul că orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se punctează maxim și că se pot obține punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale.</li> <li>– să aibă în vedere alegerea variantei de rezolvare corespunzătoare abilităților de calcul și nivelului de pregătire al elevilor</li> <li>– să formuleze sarcini de lucru asemănătoare pentru aprofundarea și consolidarea formulelor și metodelor de integrare.</li> </ul>
	<b>Pentru elev</b>	<p><i>Este important ca elevul:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- să recapituleze noțiunile teoretice care pot ajuta la rezolvarea itemului;</li> <li>- să identifice contextul în care se încadrează itemul (<i>Elemente de analiză matematică, clasa a XII-a, Integrala definită</i>)</li> <li>- să analizeze și să interpreteze corect enunțul problemei (ce se dă – ce se cere).</li> <li>- să redacteze rezolvarea completă a itemului, ținând seama de observațiile profesorului privind greșelile care pot să apară în rezolvare și detalierea baremului.</li> <li>- să utilizeze în mod adecvat limbajul matematic pentru redactarea soluției</li> <li>- să verifice corectitudinea rezultatului obținut, prin compararea acestuia cu valoarea precizată în enunțul itemului</li> <li>- să rezolve sarcini de lucru asemănătoare</li> </ul>
<b>Considerente finale</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Itemul prezentat verifică formarea competențelor de utilizare a algoritmilor pentru calculul integralelor, în urma parcurgerii conținuturilor obligatorii prevăzute de programa de clasa a XII-a, la domeniul <i>Elemente de analiză matematică</i>.</li> <li>• Profesorul poate formula sarcini de lucru similare, individuale sau de grup, cu scopul formării competenței vizate.</li> <li>• Elevii pot fi puși în situația de a crea itemi asemănători, pe care să îi rezolve individual, în propriul ritm</li> </ul>	

Exemple de  
itemi de  
antrenament

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - (x-2)^2$ 
  - a) Arătați că  $\int_0^2 (f(x) + (x-2)^2) dx = 4$ .
  - b) Arătați că  $\int_3^4 \frac{1}{f(x) - 2x} dx = -\frac{1}{2}$ .
  - c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_3^5 \frac{f(x)}{x-2} dx = 4(a + \ln 3)$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1-x)^2 - 3x^2$ 
  - a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - (x-1)^2) dx = -2$ .
  - b) Arătați că  $\int_2^4 \frac{1}{3x^2 + f(x)} dx = \frac{2}{3}$
  - c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_2^5 \frac{f(x)}{1-x} dx = 3(a + 2 \ln 2)$ .
3. Se consideră funcția  $f : \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{2x-1} - e^x$ 
  - a) Arătați că  $\int_1^3 \left(\frac{4}{2x-1} - f(x)\right) dx = e(e-1)(e+1)$ .
  - b) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) + e^x) dx = 2 \ln 3$ .
  - c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției  $g : \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (1-2x)f(x) + 4$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 2$  și  $x = 3$  are aria egală cu  $e^2(3e-1)$ .

4. Se consideră funcția  $f: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + \frac{4}{(2x+3)^2}$ .
- a) Arătați că  $\int_1^2 \left( f(x) - \frac{4}{(2x+3)^2} \right) dx = e(e-1)$
- b) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - e^x) dx = \frac{8}{5}$ .
- c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției  $g: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (2x+3)^2 f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$  are aria egală cu  $13e-1$ .
5. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - 2x$ .
- a) Arătați că  $\int_2^3 (f(x) - \ln x) dx = -5$ .
- b) Arătați că  $\int_1^e \frac{f(x) + 2x}{x} dx = \frac{1}{2}$ .
- c) Determinați numărul natural nenul  $n$  pentru care  $\int_1^n (f(x) + 4x) dx = 2(\ln n + 1)$ .
6. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2 \ln x$ .
- a) Arătați că  $\int_1^4 (f(x) - 2 \ln x) dx = 21$ .
- b) Arătați că  $\int_1^e \frac{f(x) - x^2}{x} dx = 1$ .
- c) Determinați numărul natural nenul  $n$  pentru care  $\int_1^n f(x) dx = 5(n-1) + 2n \ln n$ .

7. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + 3x$ .

a) Arătați că  $\int_2^3 (f(x) - 4x^3) dx = \frac{15}{2}$ .

b) Arătați că  $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{f(x) - 3x^3} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{7}{2}$ .

c) Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) - 3x}{x^4}$  este egal cu  $4\pi g(2)$ .

8. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

a) Arătați că  $\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 1$ .

b) Arătați că  $\int_1^2 f(x) dx = \ln \frac{5}{2}$ .

c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_0^1 x f(x) dx = 2(1 + a\pi)$ .

9. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1$ .

a) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - x^2 - 1) dx = \frac{1}{3}$ .

b) Arătați că  $\int_0^2 \frac{x+1}{f(x) - x^2 + 2x} dx = \ln 3$ .

c) Determinați numărul natural  $n$ , știind că  $\int_1^{e^n} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = f(n) + \frac{2n^3}{3} - 2$ .

10. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + 4$ .

a) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) - x^2 - 4) dx = \frac{9}{2}$ .

b) Arătați că  $\int_0^1 \frac{x}{f(x) - 3x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$ .

c) Determinați valorile reale ale lui  $a > 0$ , știind că  $\int_0^a (f(x) - x^2) e^x dx = e^a (f(a) - 4) - 1$ .

**Propuneri de probleme pentru exersare\*, clasa a XII-a (similare subiectelor II și III Bacalaureat sau selectate din variantele publice)****Nr. crt. Probleme exersare****A. ALGEBRĂ**

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2xy - 3(x + y) + 1$ .
  - a) Arătați că  $\frac{1}{\sqrt{2}} \circ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ .
  - b) Demonstrați că dacă  $x, y, z \in \mathbb{R}$  și  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$  atunci  $x = z$ .
  - c) Determinați mulțimea numerelor reale  $x$  pentru care  $x \circ x \leq 9$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 4xy - 3x + 2y - 1$ .
  - a) Arătați că  $(-1) * 1 = 0$ .
  - b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x * 1 = 1 * x$ .
  - c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $a * x = -a$ , pentru orice număr real  $x$ .
3. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție.  $x * y = 4xy - 3x + 2y - 1$ .
  - a) Arătați că  $E(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) * x$  nu depinde de valorile reale ale lui  $x$ .
  - b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația  $x * x = 4$ .
  - c) Determinați o pereche  $(m, n)$  de numere naturale nenule pentru care  $(-n) * m + m * n = 0$ .
4. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$ .
  - a) Arătați că  $\sqrt{2} * (-\sqrt{2})$  este un număr întreg.
  - b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $(x + 4) * 5 = 5$ .
  - c) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care  $(n - 1) * (n + 1) \leq 4$ .
5. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + 2x - y - 1$ .
  - a) Calculați  $\frac{1}{2} * 1$ .
  - b) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $n * n = 1$ .
  - c) Arătați că  $x * (1 - x) \leq 2$ , pentru orice număr real  $x$ .
6. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 2X^2 - 2x + m$ , unde  $m$  este un număr real.
  - a) Determinați  $m$  număr real pentru care  $f(-1) = 1$ .
  - b) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 3x_1x_2x_3 = 2$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
  - c) Determinați numărul real  $m$  pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $X - 2$ .

7. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 2X^2 - 2x + m$ , unde  $m$  este un număr real.
- Determinați  $m$  număr real pentru care  $f(2) + f(-2) = 0$ .
  - Determinați numărul real  $m$  pentru care  $(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot (1 - x_3) = 1$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
  - Determinați numărul real  $m$  pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $X^2 - 2$ .
8. Se consideră polinomul  $f = X^3 + 3X^2 + mX - 4$ , unde  $m$  este un număr real.
- Arătați că  $f(1) = m$  pentru orice număr  $m$  real.
  - Determinați numărul real  $m$ , știind că 2 este rădăcină a polinomului  $f$ .
  - Determinați numerele naturale  $m$  pentru care  $(1 + x_1)^2 + (1 + x_2)^2 + (1 + x_3)^2 > 1$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
9. Se consideră polinomul  $f = X^3 + 3X^2 + mX - 4$ , unde  $m$  este un număr real.
- Arătați că  $f(1) + f(-1) = -2$ , pentru orice număr  $m$  real.
  - Determinați numărul real  $m$ , știind că 0,5 este rădăcină a polinomului  $f$ .
  - Determinați numerele naturale  $m$  pentru care  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_1 x_2 x_3$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

**B. ANALIZĂ MATEMATICĂ**

10. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - (x - 2)^2$
- Arătați că  $\int_0^2 (f(x) + (x - 2)^2) dx = 4$ .
  - Arătați că  $\int_3^4 \frac{1}{f(x) - 2x} dx = -\frac{1}{2}$ .
  - Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_3^5 \frac{f(x)}{x - 2} dx = 4(a + \ln 3)$ .
11. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1 - x)^2 - 3x^2$ .
- Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - (x - 1)^2) dx = -2$ .
  - Arătați că  $\int_2^4 \frac{1}{3x^2 + f(x)} dx = \frac{2}{3}$ .
  - Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_2^5 \frac{f(x)}{1 - x} dx = 3(a + 2 \ln 2)$ .

12. Se consideră funcția  $f : \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{2x-1} - e^x$ .
- Arătați că  $\int_1^3 \left(\frac{4}{2x-1} - f(x)\right) dx = e(e-1)(e+1)$ .
  - Arătați că  $\int_1^2 (f(x) + e^x) dx = 2 \ln 3$ .
  - Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției  $g : \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (1-2x)f(x) + 4$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 2$  și  $x = 3$  are aria egală cu  $e^2(3e-1)$ .
13. Se consideră funcția  $f : \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + \frac{4}{(2x+3)^2}$ .
- Arătați că  $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{4}{(2x+3)^2}\right) dx = e(e-1)$
  - Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - e^x) dx = \frac{8}{5}$ .
  - Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției  $g : \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (2x+3)^2 f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$  are aria egală cu  $13e-1$ .
14. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - 2x$ .
- Arătați că  $\int_2^3 (f(x) - \ln x) dx = -5$ .
  - Arătați că  $\int_1^e \frac{f(x) + 2x}{x} dx = \frac{1}{2}$ .
  - Determinați numărul natural nenul  $n$  pentru care  $\int_1^n (f(x) + 4x) dx = 2(\ln n + 1)$ .
15. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2 \ln x$ .
- Arătați că  $\int_1^4 (f(x) - 2 \ln x) dx = 21$ .
  - Arătați că  $\int_1^e \frac{f(x) - x^2}{x} dx = 1$ .
  - Determinați numărul natural nenul  $n$  pentru care  $\int_1^n f(x) dx = 5(n-1) + 2n \ln n$ .



16. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + 3x$ .
- Arătați că  $\int_2^3 (f(x) - 4x^3) dx = \frac{15}{2}$ .
  - Arătați că  $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{f(x) - 3x^3} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{7}{2}$ .
  - Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) - 3x}{x^4}$  este egal cu  $4\pi g(2)$ .
17. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- Arătați că  $\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 1$ .
  - Arătați că  $\int_1^2 f(x) dx = \ln \frac{5}{2}$ .
  - Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_0^1 x f(x) dx = 2(1 + a\pi)$ .
18. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1$ .
- Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - x^2 - 1) dx = \frac{1}{3}$ .
  - Arătați că  $\int_0^2 \frac{x+1}{f(x) - x^2 + 2x} dx = \ln 3$ .
  - Determinați numărul natural  $n$ , știind că  $\int_1^{e^n} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = f(n) + \frac{2n^3}{3} - 2$ .
19. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + 4$ .
- Arătați că  $\int_1^2 (f(x) - x^2 - 4) dx = \frac{9}{2}$ .
  - Arătați că  $\int_0^1 \frac{x}{f(x) - 3x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$ .
  - Determinați valorile reale ale lui  $a > 0$ , știind că  $\int_0^a (f(x) - x^2) e^x dx = e^a (f(a) - 4) - 1$ .

*\*Lista este constituită prin reunirea tuturor problemelor exemplificate la fiecare dintre problemele comentate, asociate clasei a XII-a, atât la algebră cât și la analiză matematică, pentru a facilita utilizarea acestora de către cadrele didactice și elevi în pregătirea examenului național de bacalaureat*



SECȚIUNEA a IV-a



## SECȚIUNEA a IV-a.

Prezentare comentată a utilizării, în cadrul unor activități de învățare/recapitulare, a unei probleme/a unui item ales dintre subiectele asociate probei de matematică la Simularea examenului național de bacalaureat (martie 2024)  
Perspectiva elevului – Perspectiva profesorului

*Definiția unei probleme matematice bune este mai degrabă legată de matematica pe care o generează decât problema în sine.*  
Andrew Wiles

În această secțiune, pornind de la unul dintre itemii instrumentului de evaluare aplicat elevilor de clasa a XII-a în cadrul Simulării examenului național de bacalaureat 2024, facem o prezentare comentată, extinsă, dar nu exhaustivă, a acestuia și a contextului de examen, atât din perspectiva elevului, cât și din perspectiva profesorului, inclusiv prin raportare la descriptorii competențelor-cheie și ai atributelor prioritare din Profilul de formare al absolventului – Anexa la O.M.E. nr. 6731/2023:

[https://rocnee.eu/images/rocnee/fisiere/curriculum/profilul\\_absolventului/OM\\_6731\\_28.11.2023\\_MOF\\_Parte\\_a\\_I\\_nr.\\_1099.pdf](https://rocnee.eu/images/rocnee/fisiere/curriculum/profilul_absolventului/OM_6731_28.11.2023_MOF_Parte_a_I_nr._1099.pdf)



*Am structurat secțiunea IV astfel:*

#### **IV.1. Comentarii din perspectiva elevului:**

- aspecte legate de rezolvare și redactarea acestora pe foaia de examen (ce am în vedere și cum transpun ce gândesc în redactare)
- aspecte privind cheile de verificare (probă/validare)
- legătura cu competențele-cheie și atributele prioritare din profilul de formare al absolventului

##### **IV.1.1. Sunt elev/elevă.**

*Comentarii din perspectiva rezolvării cerinței de evaluare*

##### **IV.1.2. Sunt absolvent/absolventă de liceu.**

*Comentarii din perspectiva susținerii probei de examen național de bacalaureat, la matematică, inclusiv din perspectiva redactării rezolvării pe foaia de examen*

#### **IV.2. Comentarii din perspectiva profesorului**

- aspecte legate de învățare (remediere/consolidare/aprofundare) în context de recapitulare
- reflecție asupra activității, la finalul acesteia
- reflecție asupra evaluării

##### **IV.2.1. Sunt profesor/profesoară.**

*Comentarii privind utilizarea unei cerințe de evaluare în context de recapitulare pentru a obține maximum de beneficiu pentru elevi*

##### **IV.2.2 Sunt profesor/profesoară.**

*Comentarii din perspectiva momentului de final al activității de recapitulare, cu asigurarea timpului necesar pentru reflecție, precum și asigurarea transferului (fixare/consolidare) prin teme pentru activitate individuală*

##### **IV.2.2.1. Etapa de reflecție**

##### **IV.2.2.2. Teme pentru activitate individuală în vederea asigurării transferului (fixare/consolidare), asigurarea învățării diferențiate**

##### **IV.2.3. Sunt profesor evaluator la examenul de bacalaureat.**

*Comentarii din perspectiva realizării unei evaluări conforme și obiective în cadrul examenului național de bacalaureat*

Toate comentariile din cadrul acestei secțiunii au la bază și dezvoltă următorul context:

<b>Item*</b>	Arătați că $\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5$ .	<b>5p</b>
Domeniu de conținut**	Algebră. Mulțimi și elemente de logică matematică	
Conținut**	Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale	
Clasa	a IX-a	
Competență specifică**	Alegerea și utilizarea de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale	
<b>Barem*</b>	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = (0,2 + 0,3) \cdot 10 =$	<b>3p</b>
	$= 0,5 \cdot 10 = 5$	<b>2p</b>
Ce se cunoaște (ipoteză)	O relație de egalitate în care intervin numere și operații între acestea, inclusiv calcul cu paranteze	
Ce se cere (concluzia)	A arăta	
Ce trebuie să înțeleagă elevul că are de făcut:	Dezvoltarea unui raționament prin care arată (descrie/explică/justifică) faptul că egalitatea este adevărată, adică membrii acesteia sunt egali	

\*Simulare 2024 – Examen național de bacalaureat, Subiectul I.1.

\*\*Conform programei de examen pentru disciplina Matematică – **M\_tehnologic**, Anexa nr. 2 la OMEN nr. 4430/29.08.2014 privind organizarea și desfășurarea examenului de bacalaureat național



**IV.1. Comentarii din perspectiva elevului:**

- aspecte legate de rezolvare și redactarea acestora pe foaia de examen (ce am în vedere și cum transpun ce gândesc în redactare)
- aspecte privind cheile de verificare (probă/validare)
- legătura cu competențele-cheie și atributele prioritare din profilul de formare al absolventului

*Este clar că  
scopul principal al studiului matematic  
trebuie să fie acela  
de a-i determina pe elevi  
să gândească.*

**John Wesley Young**

În cele ce urmează, autorii și-au propus să prezinte o *serie de situații asupra cărora elevul/eleva reflectează și formulează o serie de opinii care să-l motiveze, să-i orienteze în procesul de învățare și să-l facă mai conștient asupra specificului examenului național de bacalaureat. Considerăm că este util ca profesorul să se transpună în situația elevului/elevei, în acest fel poate identifica bariere și oportunități cu care acesta se confruntă.*

Am considerat potrivit să formulăm paragrafele următoare folosind *persoana I singular (eu, elevul/eleva)*, tocmai pentru a ținti adresabilitatea acestora spre elev. *Încurajăm profesorul să parcurgă secțiunile scrise din perspectiva elevului/elevei, să reflecteze și să le adapteze/completeze pentru a le prezenta și discuta cu aceștia. În **anexa nr. 2** la secțiunile dedicate învățământului liceal, filiera tehnologică, asociem o *exemplificare a interacțiunii elevului/elevei cu aplicații care au componentă IA, în scopul învățării.**







*Matematica  
este ca și cum ai merge la sală  
pentru creierul tău.  
Îți ascuți mintea.*  
**Danica Mae McKellar**

**IV.1.1. Sunt elev/elevă.****Pentru a rezolva o sarcină de lucru/o cerință de evaluare, am în vedere:****Relația  
învățare – profilul de formare al absolventului**

În abordarea oricărei activități de învățare, mă raportez la *profilul de formare al absolventului* de liceu, atât din perspectiva *descriptorilor competențelor-cheie*, cât și din perspectiva *descriptorilor atributelor prioritare*.

Referindu-mă la *învățarea matematicii*, am în vedere, în principal, *competența-cheie în matematică, științe, tehnologie și inginerie*, prin raportare la *descriptorii\** asociați profilului absolventului învățământului liceal:

- *utilizez și mă raportez critic* la moduri de gândire și forme de prezentare specifice matematicii (de exemplu, formule, modele, constructe, grafice), inclusiv în relație cu întrebări relevante pentru viața reală și pentru diferite contexte profesionale;
- *construiesc demersul de rezolvare a problemelor* pe care le identific într-o varietate de contexte, inclusiv profesionale, prin aplicarea principiilor și proceselor matematice;
- *evaluez constant validitatea unor raționamente matematice* aplicate în contexte diverse, inclusiv profesionale;
- *aplic gândirea științifică prin cercetarea unor situații/probleme* specifice științelor naturii și prin raportarea propriilor ipoteze la rezultatele experimentale validate;
- *evaluez, proiectez și îmbunătățesc*, în mod independent, diferite *metode de investigație*;
- *evaluez adecvat explicațiile alternative* pe baza datelor și *explic* diferite surse de incertitudine;
- *fundamentez concluzii sau decizii*, utilizând date științifice și instrumente tehnologice;
- *evaluez validitatea și fiabilitatea afirmațiilor* făcute în surse secundare cu referire la opinii științifice, la calitatea metodologiei și la dovezile citate;
- *mă raportez critic la tehnologiile digitale* pentru a îmbunătăți calitatea datelor obținute;
- *evaluez avantajele, limitările și riscurile teoriilor științifice și aplicațiilor tehnologice* ale acestora, pentru luarea deciziilor informate și pentru rezolvarea unor probleme de natură etică și profesională;
- *evaluez dovezile teoriilor științifice* studiate și modul în care au fost luate în considerare fiabilitatea, siguranța, corectitudinea și acțiunile etice în investigațiile științifice efectuate.

*\*Preluare după Anexa la O.M.E. nr. 6731/2023*

În baza *descriptorilor competențelor-cheie*, pe parcursul anilor de studiu din liceu, prin activitățile de la clasă, cu sprijinul profesorilor mei, prin activitate independentă sau în cooperare, *mi-am format competențele generale și specifice*, utile pentru urmărirea și atingerea obiectivelor mele de învățare.

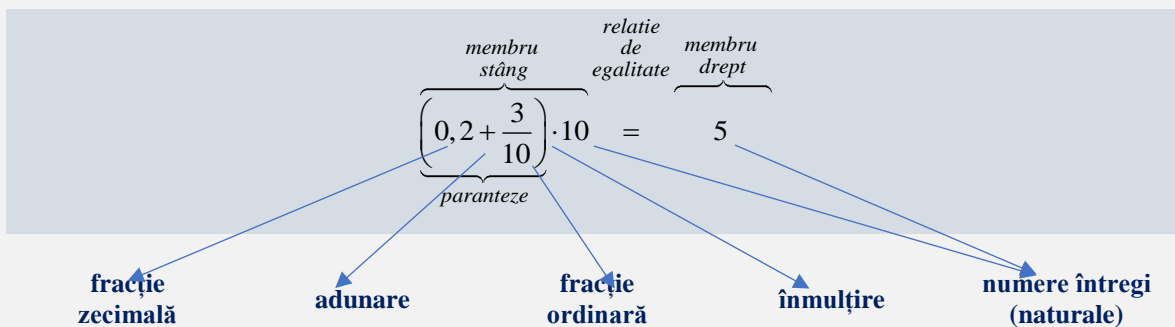
*Sunt elev în clasa a XII-a*, an care conține provocări suplimentare, în principal susținerea diferitelor examene și concursuri care să-mi permită continuarea traseului educațional la nivel postliceal/universitar și/sau încadrarea cu succes pe piața muncii.

*Deși susținerea examenului național de bacalaureat nu este obligatorie, doresc să valorific competențele formate la disciplinele care au corespondent în probele examenului, printre acestea și matematica. Astfel, mi-am stabilit ca obiectiv promovarea acestui examen, cunoscând faptul că obținerea diplomei de bacalaureat îmi deschide multiple oportunități.*

În acest sens, *particip activ la orele de matematică și abordez cu responsabilitate activitățile de recapitulare*, astfel:

**Mă raportez la un context anterior de învățare → recunosc/identific  
(ancore în învățarea anterioară):**

- exercițiu în care intervine *calculul numeric*;
- numerele implicate în calcul sunt *numere reale*, din clase și forme diferite de reprezentare: *fracții zecimale, fracții ordinare, întregi*;
- operații de tip *adunare, înmulțire*;
- existența *parantezelor*;
- *relație de egalitate*.



**Aleg, construiesc/dezvolt  
și aplic strategia de rezolvare:**

- așa cum este formulată cerința de evaluare, *am de arătat că egalitatea este adevărată*; fac analogia cu o balanță în echilibru;
- pentru a arăta că o egalitate este adevărată, trebuie să *arăt că membrul stâng este egal cu membrul drept*;
- observ că membrul drept este reprezentat de un număr cunoscut, numărul 5, deci *membrul drept nu necesită efectuare de calcule* (nu-l prelucrez);
- cum membrul stâng conține paranteze și operații de tip adunare și înmulțire, *înțeleg că efectuarea calculelor în acest membru trebuie să aibă ca rezultat numărul 5*;
- știu că *apariția parantezelor într-un calcul are legătură cu ordinea în care pot efectua calculele*; în acest sens pot „rezolva paranteza”; aceasta înseamnă să *efectuez calculele dintre paranteze*:

- am de efectuat *o adunare*;
- observ că termenii adunării sunt *numere exprimate sub diferite forme*;
- pentru efectuarea adunării, trebuie să *aduc unul dintre numere la forma celuilalt*; îmi reamintesc *regulile de transformare*:

- aduc numărul 0,2 la forma de *fracție ordinară*:  $0,2 = \frac{2}{10}$

- sau aduc numărul  $\frac{3}{10}$  la forma de *fracție zecimală*:  $\frac{3}{10} = 0,3$

- *exprimând numerele sub aceeași formă*, am de efectuat adunarea:

- $\frac{2}{10} + \frac{3}{10}$

sau

- $0,2 + 0,3$

- *efectuez adunarea*:



- ținând cont că am același numitor la fracțiile ordinare:
$$\frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10}$$
sau
- ținând cont de regula de adunare a fracțiilor zecimale, obțin:
$$0,2 + 0,3 = 0,5$$
; eventual efectuez adunarea scriind termenii unul sub celălalt, astfel: 
$$\begin{array}{r} 0,2 + \\ 0,3 \\ \hline 0,5 \end{array}$$
;
- înțeleg că, indiferent de calea aleasă, rezultatul obținut „înlocuiește” expresia dintre paranteze;
- revin la membrul stâng și înlocuiesc expresia dintre paranteze cu rezultatul obținut:
  - $$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \frac{5}{10} \cdot 10$$
sau
  - $$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = (0,2 + 0,3) \cdot 10 = 0,5 \cdot 10$$
- continui efectuarea calculelor în membrul stâng; în acest sens, indiferent de calea urmată, trebuie să efectuez o înmulțire; în mod particular observ că este o înmulțire cu 10; efectuarea înmulțirii depinde de forma în care am exprimat expresia dintre paranteze, astfel:
  - $\frac{5}{10} \cdot 10$  reprezintă înmulțirea dintre o fracție ordinară și un număr întreg; pot proceda în următoarele moduri:
    - $\frac{5}{10} \cdot 10 = \frac{5 \cdot 10}{10} = \frac{50}{10} = \frac{5}{1} = 5$ , unde am înmulțit întregul cu numărătorul, am efectuat operația de simplificare prin factorul 10, apoi am adus fracția  $\frac{5}{1}$  la forma pe care o reprezintă membrul drept
    - sau
    - $\frac{5}{10} \cdot 10 = \frac{5}{\cancel{10}^1} \cdot \frac{10^1}{1} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{5}{1} = 5$ , unde am scris numărul 10 sub formă de raport (fracție ordinară), aplicând apoi regulile de simplificare la înmulțirea a două astfel de fracții
  - $0,5 \cdot 10$  reprezintă înmulțirea unei fracții zecimale cu 10 (sau o putere a lui 10); îmi reamintesc că efectuarea înmulțirii cu 10 se face prin „mutarea” virgulei cu o poziție spre dreapta; obțin ca rezultat  $0,5 \cdot 10 = 5$ ;
- ca rezultat al tuturor calculelor din membrul stâng, în oricare dintre strategiile alese, am obținut numărul 5, deci **am arătat** că egalitatea este adevărată (membrul stâng este într-adevăr egal cu membrul drept).

***Mă asigur că nu am erori  
sau că nu am sărit peste etape, explicații sau justificări:***

- mă întreb *dacă și cum pot efectua proba*; în acest caz, obținerea aceluiași rezultat ca cel precizat explicit în membrul drept poate reprezenta validarea parcurgerii unui raționament corect, dar nu uit că, uneori, cumulara mai multor erori mă pot conduce la un rezultat cerut explicit (ca în cazul de față), raționamentul nefiind corect; astfel, *pentru a avea un plus de siguranță*:

- o pot efectua calculele din membrul stâng parcurgând altă cale/una dintre celelalte căi evidențiate anterior;
- o pot să folosesc și alte proprietăți și reguli de calcul numeric:

- în acest sens, îmi aduc aminte de „desfacerea parantezelor”, strategie pe care o pot aplica având *înmulțirea unui număr cu o paranteză*:

$$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 0,2 \cdot 10 + \frac{3}{10} \cdot 10; \text{ îmi pot aminti că desfacerea parantezei}$$

are la bază *proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare*;

- continui cu *efectuarea înmulțirilor și finalizez cu efectuarea operației de adunare* a rezultatelor înmulțirilor:

$$0,2 \cdot 10 + \frac{3}{10} \cdot 10 = 2 + 3 = 5; \text{ îmi amintesc că operația de înmulțire (de}$$

ordinul II) *are prioritate față de operația de adunare* (de ordinul I);

- o pot alege să folosesc *transformarea egalității* și „metoda mersului invers”:

$$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5 \quad | :10 (\neq 0) \longrightarrow \text{împart ambii membri ai egalității prin 10, număr nenul!}$$

$$0,2 + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} \quad \left| -\frac{3}{10} \longrightarrow \text{scad din ambii membri ai egalității aceeași valoare}$$

- $0,2 = \frac{5}{10} - \frac{3}{10}$

$$0,2 = \frac{5-3}{10} \longrightarrow \text{efectuez calculele în membrul drept}$$

$$0,2 = \frac{2}{10} \longrightarrow \text{recunosc forme echivalente de scriere pentru același număr}$$

unde ultima egalitate este adevărată în mod evident, pentru că reprezintă forme de scriere pentru același număr rațional.

După lectura atentă a cerinței, un rezumat al etapelor de raționament, inclusiv cu evidențierea variantelor de rezolvare, este:

<b>Ce am de făcut:</b>	arăt că $\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5$		
<b>Cum:</b>	arăt că <i>egalitatea este adevărată</i>		arăt că <i>membrul stâng este egal cu membrul drept</i>
<b>Observ că:</b>	membrul drept nu necesită efectuare de calcule		membrul stâng conține paranteze și operații de tip adunare și înmulțire, precum și forme diferite de reprezentare a numerelor reale
<b>Înțeleg că:</b>	efectuarea calculelor în membrul stâng trebuie să aibă ca rezultat numărul 5, valoarea membrului drept		
<b>Efectuez calcule în membrul stâng:</b>	<b>Varianta 1</b>	<b>Varianta 2</b>	<b>Varianta 3</b>
	$0,2 = \frac{2}{10}$	$\frac{3}{10} = 0,3$	
	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 =$ $= \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 =$ $= \frac{5}{10} \cdot 10$	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 =$ $= (0,2 + 0,3) \cdot 10 =$ $= 0,5 \cdot 10$	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 =$ $= 0,2 \cdot 10 + \frac{3}{10} \cdot 10$
	$\frac{5}{10} \cdot 10 = \frac{5 \cdot 10}{10} = \frac{50}{10} = \frac{5}{1} = 5$ <p style="text-align: center;">sau</p> $\frac{5}{10} \cdot 10 = \frac{5}{\cancel{10}^1} \cdot \frac{\cancel{10}^1}{1} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{5}{1} = 5$	$0,5 \cdot 10 = 5$	$0,2 \cdot 10 + \frac{3}{10} \cdot 10 =$ $= 2 + 3 =$ $= 5$
<b>Concluzie intermediară</b>	membrul stâng este egal cu membrul drept		
<b>Concluzie:</b>	Am arătat că egalitatea este adevărată: $\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5$ .		
<b>Probă (verificare)</b>	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5 \quad   :10 (\neq 0)$ $0,2 + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} \quad \left  -\frac{3}{10}\right.$ $0,2 = \frac{5}{10} - \frac{3}{10}$ $0,2 = \frac{5-3}{10}$ $0,2 = \frac{2}{10}$ <p>Egalitatea este adevărată, valorile din cei doi membri sunt forme de reprezentare pentru același număr rațional.</p>		

**În condițiile în care cerința de evaluare este abordată într-un context de consolidare a învățării, dacă la rezolvarea acesteia am întâmpinat dificultăți sau am avut nesiguranță privind anumite etape de rezolvare, mi le notez pentru a le discuta cu colegi/pentru a cere sprijin din partea profesorului (listă de situații posibile):**

- nu am înțeles ce se cere (ce trebuie să fac pentru a formula un răspuns la cerință);
- nu-mi aduc aminte cum pot să adun numerele din paranteză, pentru că sunt de diferite forme;
- am încercat să desfac paranteza dar nu-mi aduc aminte regulile;
- nu am reușit să transform fracția zecimală în fracție ordinară;
- nu am reușit să transform fracția ordinară în fracție zecimală;
- nu-mi aduc aminte cum se adună fracțiile zecimale;
- nu-mi aduc aminte cum se adună fracțiile ordinare;
- la efectuarea înmulțirii nu am obținut rezultatul 5, e posibil ca cerința să conțină erori;
- am încercat metoda mersului invers, dar m-am încurcat;
- ... (alte posibile situații întâmpinate de elev)





*Lucrul important  
de reținut despre matematică  
este să nu te temi.*  
**Richard Dawkins**

#### IV.1.2. Sunt absolvent/absolventă de liceu.

Susțin proba de examen național de bacalaureat, la matematică.

Pentru a redacta rezolvarea pe foaia de examen, am avut în vedere:

- am lecturat cu atenție textul cerinței și am folosit ciorna pentru a schița rezolvarea, inclusiv pentru a efectua proba/a verifica;
- pe foaia de examen:
  - o am folosit notarea corespunzătoare a subiectului/problemei și a itemului, de exemplu: *Subiectul I.1*;
  - o am redactat cât mai complet și structurat rezolvarea, după caz însoțind rezolvarea cu explicații și justificări.

#### **Exemplu de redactare pe foaia de examen:**

##### Subiectul I.1

Voi arăta că ambii membri ai relației sunt egali.

Efectuez calculele în membrul stâng al egalității:

$$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \frac{5}{10} \cdot 10 = 5 \cdot 1 = 5$$

Cum membrul stâng este egal cu membrul drept, am obținut că egalitatea este adevărată.

#### **Legătura reușită la examen – atribute prioritare cuprinse în profilul de formare al absolventului**

*Pentru a obține și formula în scris rezultatul prezentat anterior, m-am bazat pe competențe specifice formate pe parcursul învățării la matematică.*

*Pentru a promova examenul, am nevoie de exprimarea unui set mai amplu de competențe. Mai mult, pentru reușita la examenul de bacalaureat, am în vedere nu numai cunoștințe și deprinderi specifice disciplinelor de examen, ci și o serie de atitudini și comportamente. În acest sens, pregătirea pentru examen nu presupune doar pregătirea în specialitate. Astfel, formarea de atitudini și comportamente, precum cele asociate atributelor prioritare din **profilul de formare al absolventului**, reprezintă un atu pentru promovarea examenului.*

*M-am raportat la acest profil în stabilirea obiectivelor pentru propria învățare și dezvoltare personală, precum și pentru a mă raporta reflectiv la rezultatele învățării.*

Recunosc și am în vedere atributele prioritare pe care trebuie să le dețin pentru ca, în calitate de absolvent de liceu, să pot fi o persoană independentă, rațională, critică și motivată, în toate contextele cu care mă voi confrunta ca tânăr și viitor adult.

<b>ATRIBUTE PRIORITARE*</b>	comunicativ	creativ	reflexiv	colaborativ
prospectiv	autonom	rezilient	responsabil	etic

\*Conform profilului de formare al absolventului, Anexa la OME nr. 6731/2023

În acest sens, *cu sprijinul și sub îndrumarea profesorilor mei*, în cadrul activităților de învățare am urmărit să-mi dezvolt atitudini și comportamente, ca răspuns la întrebările esențiale asociate fiecărui atribut.

Mi-am îndemnat colegii să acceseze, lectureze și să reflecteze la materialele asociate profilului de formare, în principal la seriile de întrebări cărora trebuie să le identificăm cele mai bune răspunsuri sau care să genereze cele mai relevante acțiuni pentru atingerea obiectivelor pe care ni le propunem fiecare dintre noi:

[https://www.edu.ro/sites/default/files/fi%C8%99iere/Minister/2023/preuniversitar\\_root/Curriculum/profil\\_absolvent\\_consultare/9\\_Profilul\\_absolventului\\_Atribute\\_reflectie\\_profesor.pdf](https://www.edu.ro/sites/default/files/fi%C8%99iere/Minister/2023/preuniversitar_root/Curriculum/profil_absolvent_consultare/9_Profilul_absolventului_Atribute_reflectie_profesor.pdf)

Am reflectat asupra modului în care, pe parcursul liceului, în acest an final de studiu și în vederea participării la examenul național de bacalaureat, am identificat răspunsurile, deciziile și strategiile potrivite pentru a deține aceste atribute prioritare. În baza acestora, mi-am definit și conturat o serie de repere și chei care să mă conducă la realizarea obiectivelor pe care mi le-am propus.

#### ***Alte aspecte de care țin cont în pregătirea și la susținerea probei de matematică în cadrul examenului național de bacalaureat:***

- *am acordat atenție învățării la matematică*, pe tot parcursul liceului, deoarece competențele de matematică îmi sunt necesare pentru aspecte de viață cotidiană, pentru viitoare aspecte profesionale, pentru a avea o gândire logică, structurată, rezolvarea de probleme fiind întâlnită în contexte variate, deci voi putea transfera ceea ce am învățat în noi situații;
- *am abordat cu ritmicitate pregătirea* pentru susținerea examenului de bacalaureat, *am solicitat sprijinul* din partea profesorului de la clasă în situațiile în care am întâmpinat dificultăți și *mi-am consolidat învățarea prin activități în cooperare* cu ceilalți colegi;
- știu că *examenul de bacalaureat este o competiție cu mine însumi*; miza acestui examen este promovarea sa, iar aceasta îmi deschide noi oportunități pentru continuarea studiilor, dar și șanse mai mari pentru angajare în muncă la un nivel mai înalt de calificare; de asemenea, am în vedere și *alternativa unei nereușite* și știu că, într-un astfel de caz, *pot susține examenul într-o altă sesiune, toate probele promovate recunoscându-mi-se*, deci crescând șansa de a promova examenul în următoarea sesiune pentru care mai am de consolidat învățarea doar la proba/probele nepromovate;
- *am participat la simularea examenului de bacalaureat* pentru a mă familiariza cu toate aspectele specifice de organizare și desfășurare a acestuia, precum și pentru a avea un *feedback asupra nivelului achizițiilor* mele într-un context similar cu cel de la examenul propriu-zis;



- *m-am informat în prealabil (profesor diriginte, profesor de specialitate, lectură a informațiilor scrise la avizier/site școală/înaintate spre semnare în etapa de înscriere) și am ascultat cu atenție precizările făcute de profesorii asistenți de sală asupra obligațiilor și drepturilor pe care le am în susținerea probei de examen;*
- *am completat corespunzător zonele/câmpurile predefinite de pe tipizatele de examen, cu datele de identificare și în baza precizărilor făcute de profesorii asistenți de sală;*
- *m-am familiarizat cu tipurile de documente primite: foaia cu subiecte, tipizatele pe care voi completa rezolvările cerințelor de evaluare și care vor constitui lucrarea care va fi predată și care va fi transmisă spre evaluare, respectiv foile tip ciornă; cunosc faptul că foaia cu subiecte și foile de tip ciornă se predau separat și nu fac parte din lucrarea care va fi predată spre evaluare;*
- *la primirea subiectului, am verificat că acesta este în conformitate cu filiera, profilul, specializarea/calificarea corespunzătoare clasei la care am finalizat studiile liceale și toate informațiile sunt lizibile; știu că foaia cu subiectul nu face parte din lucrarea mea care va intra în evaluare și, dacă îmi este necesar:*
  - *pe foaia de subiect, atunci când fac lectura cerințelor de evaluare, pot folosi tehnici care să mă ajute în înțelegerea textelor: pot face sublinieri, notații, adnotări; dacă sunt incluse și reprezentări grafice, desene, pot interveni asupra lor pentru a le completa cu elemente ajutătoare;*
  - *pot ține evidența parcurgerii cerințelor de lucru; astfel, pot încercui itemii pe care îi consider rezolvați, pot semnala itemii la care am încercat o strategie de rezolvare, dar la care consider că trebuie să revin (de exemplu, pot să le asociez un semn de întrebare); printr-o astfel de evidență, pot mai ușor să-mi estimez punctajul cumulat al itemilor rezolvați integral/parțial;*
- *am în vedere timpul total de lucru (timpul precizat pe foaia de subiect, de regulă 3 ore din momentul primirii subiectului) și acord atenție acestuia pentru a-l distribui astfel:*
  - *timp de reflecție asupra cerințelor și schițarea de rezolvări pe ciornă;*
  - *timp de redactare a rezolvărilor pe tipizatele de examen,*
  - *timp de verificare (probă);*
  - *un exemplu de management al timpului de lucru ar putea fi acesta:*

Timp de lectură inițială a subiectelor	Timp de schițare a ideilor de rezolvare pe ciornă	Timp de relaxare	Timp de redactare a rezolvărilor pe tipizatele de examen	Timp de verificare și probă
10 minute, la începutul timpului efectiv de lucru	o medie de max. 2 minute de cerință x nr. de cerințe	1 minut la fiecare jumătate de oră	timpul rămas după scăderea timpilor alocați celorlalte activități	15 minute, de regulă spre finalul timpului total de lucru
	2 minute x 18* cerințe, aprox. 30 de minute	5 minute, în total	$180^{**} - (5+10+15+30) = 120$ de minute (timp efectiv de dezvoltare raționament și de redactare), deci o medie de peste 6 minute/item	

\*raportat la structura subiectului la disciplina matematică din cadrul probei E c) a examenului național de bacalaureat (2024)

\*\*raportat la durata probei E c) a examenului național de bacalaureat (2024) – 3 ore



- *monitorizez timpul efectiv de lucru*: timpul scurs și timpul rămas; în acest sens:
  - *mi-am notat pe ciornă ora de debut al probei*; de regulă, ora de debut este consemnată și pe tabla sălii de examen de către profesorii asistenți;
  - am un ceas pe care-l consult periodic sau urmăresc consemnarea pe tablă, de către asistenții de sală, a timpului parcurs/rămas;
- *am în vedere precizările făcute de asistenții de sală, privind: redactarea de texte/reprezentări specifice pe tipizatul de examen* (tipuri de instrumente de scris, culoarea cernelii, pastă de pix, creion); *modul de numerotare a paginilor tipizate de examen* (poziție pe pagină, format al numerotării); *modul de semnalare a unei erori de redactare pe tipizatele de examen* (modul de anulare a unui rând scris sau al unui paragraf); de exemplu:
  - dacă, în cadrul unui rând am greșit un cuvânt/o relație/o înșiruire de cuvinte, semnez că acesta/aceasta este greșit/greșită prin tragerea unei linii orizontale peste cuvânt/înșiruirea de cuvinte:

dacă, în cadrul unui rând am greșit un cuvânt/o relație/o înșiruire de cuvinte, semnez că acesta/aceasta este greșit/greșită prin tragerea unei linii orizontale peste cuvânt/înșiruirea de cuvinte

- dacă, în cadrul unei rezolvări consider greșit un întreg paragraf, atunci fiecare rând al paragrafului este marcat ca greșit (nu se va lua în considerare de evaluator) prin tragerea a câte unei linii orizontale pentru fiecare rând al paragrafului:

dacă, în cadrul unei rezolvări considerăm greșit un întreg paragraf, atunci fiecare rând al paragrafului este marcat ca greșit (nu se va lua în considerare de evaluator) prin tragerea a câte unei linii orizontale pentru fiecare rând al paragrafului

- *pe tipizatul de examen, sunt atent la aspecte care pot fi interpretate ca elemente (semne nepermise) ce pot conduce la anularea lucrării și, implicit, la nepromovarea examenului*:
  - să nu las spații goale nejustificate între textele înscrise;
  - să nu scriu cu majuscule cuvinte întregi, dacă nu sunt precizări specifice în acest sens;
  - să nu schimb culoarea de scris (de aceea mi-am pregătit pentru examen un instrument de scris de rezervă, de același tip/culoare de scris);
  - să nu folosesc creionul în alte situații decât pentru realizarea unor desene/reprezentări conținute explicit în cerința de lucru;
  - să nu consemnez înscrisuri/simboluri/semne/desene, altele decât cele care sunt în legătură cu răspunsurile la cerințele de lucru;
- *sunt atent la diferitele informații înscrise pe foaia cu subiectele de examen*:
  - informații care se referă la înscrisuri ce trebuie să se regăsească și pe tipizatul de examen (de exemplu: denumirea probei de examen, tipul de subiect);
  - informații care se referă la timpul efectiv de lucru;
  - informații care se referă la obligativitatea de a aborda toate subiectele pentru a putea obține maximum de punctaj;
  - informații care se referă la punctajul acordat din oficiu (pentru sesiunile din anul 2024, acesta este de 10 puncte dintr-un total de 100 de puncte);
  - de asemenea, pe foaia cu subiectele se află informații privind punctajele care sunt asociate fiecărui subiect/item;
  - raportat la sesiunile anului 2024, instrumentul de evaluare asociat probei E c) la disciplina matematică este constituit astfel:





Subiectul I	Subiectul al II-lea	Subiectul al III-lea	Punctaj din oficiu	Total maxim de punctaj
<b>30 de puncte</b>	<b>30 de puncte</b>	<b>30 de puncte</b>	<b>10 puncte</b>	<b>90+10 = 100 de puncte</b>
Acest subiect este format din:	Acest subiect este format din:	Acest subiect este format din:		
6 itemi (cerințe de evaluare)	2 probleme cu câte 3 itemi	2 probleme cu câte 3 itemi		
6 itemi x 5 puncte	6 itemi x 5 puncte	6 itemi x 5 puncte		
Un total de <b>18 itemi x 5 puncte = 90 de puncte</b> (maxim acordat pentru redactarea corectă și completă a tuturor răspunsurilor)				

- știu că *un start bun este motivator*, în acest sens am identificat, la lectura subiectelor, acele *cerințe de evaluare cu care sunt familiarizat și a căror rezolvare a fost, de regulă, corectă*; în acest sens, pe ciornă voi schița/rezolva mai întâi cerințele familiare și care nu necesită număr mare de etape de raționament;
- cunosc *condițiile de promovare a probei de examen, respectiv de promovare a examenului*; astfel, raportat la sesiunile 2024:
  - o proba E c) se consideră promovată dacă, în urma evaluării, nota medie obținută este de minimum 5 (echivalentul a minimum 50 de puncte din maximumul de 100 de puncte; de exemplu, cele 50 de puncte ar putea reprezenta cele 10 puncte din oficiu și punctajele maxime pentru rezolvarea și redactarea corecte a 8 itemi dintre cei 18 ai subiectelor de examen);
  - o examenul de bacalaureat se consideră promovat dacă au fost susținute și promovate/echivalate probele de competențe lingvistice și digitale, iar în urma evaluării probelor scrise media notelor acestora este minimum 6;
- știu că *pot redacta rezolvările* pe tipizatele de examen *nu neapărat în ordinea cerințelor din subiect și sunt atent să încep o rezolvare cu scrierea numărului de identificare a cerinței*; în acest sens, profesorul evaluator asociază rezolvarea mea cu cerința corespunzătoare din subiectele de examen; pe tipizatele de examen, încep redactarea cu răspunsurile la cerințele pentru care am cea mai mare siguranță că știu să le rezolv corect;
- folosesc *tipizatele de tip ciornă pentru a schița rezolvări, nu pentru a redacta complet răspunsurile la cerințele de evaluare*; examenul este o verificare atât a competențelor deținute și a modului în care le transfer în situații noi/relativ noi, cât și un test de încadrare în timp; în acest sens, utilizez judicios timpul de lucru;
- știu că *reușita la un astfel de examen se obține pas cu pas*; de aceea, *îmi stabilesc obiective minimale/intermediare/maximale*, dar acestea *trebuie să fie realiste* (realizarea lor se bazează pe achizițiile în învățare validate anterior în mod obiectiv și constant, precum și cu încadrarea în timpul efectiv de lucru alocat probei); astfel:
  - o *un prim obiectiv (minimal) ar fi promovarea probei de examen*; mă asigur că am identificat, schițat rezolvarea și redactat răspunsul corect și complet, pe tipizatul de examen, la cel puțin 8 dintre cei 18 itemi propuși spre rezolvare (la proba E c), matematică); împreună cu punctajul din oficiu, rezolvarea corectă a acestora îmi asigură promovarea probei;
  - o *pot stabili alte obiective intermediare* (să obțin note mai mari de 5/să obțin cel puțin nota 7/să obțin o notă care să-mi asigure promovarea întregului examen/să obțin cel puțin nota 9/să obțin o notă de peste 9), dar doar după ce m-am asigurat de realizarea obiectivului minimal, cel de promovare a probei de examen;
  - o *pot stabili ca obiectiv final obținerea notei maxim posibile la probă* (nota 10), dar doar dacă am realizat toate celelalte obiective intermediare.

- în cadrul oricărui examen, sunt conștient că *starea de tensiune/de conflict/stresul reprezintă provocări la care trebuie să fac față*; raportat la examenul de bacalaureat, în particular la proba E c), provocările sunt diminuate pentru că:
  - o *nu este primul examen la care particip*;
  - o *am participat la simularea acestui examen și m-am familiarizat cu aspectele care privesc organizarea și desfășurarea acestuia*;
  - o *am susținut deja probe în cadrul acestui examen (probele de evaluare a competențelor lingvistice și digitale, proba E a)*;
  - o *mi-am fixat un obiectiv realist* legat de reușita la această probă (nota care să mă mulțumească/să-mi permită urmărirea altor obiective) *pentru care m-am pregătit consecvent*;
  - o *am dozat efortul specific acestor zile de examen*, alternând perioade dedicate studiului/recapitulării cu perioade de odihnă/relaxare, acordând atenție și altor factori pozitivi: alimentație sănătoasă, exerciții fizice, somn, activitate recreativă cu familia/prietenii etc.;
  - o *în situația unui blocaj* (de exemplu, un blocaj indus de încercarea nereușită de a rezolva o cerință pe care am considerat-o familiară/simplă), *îmi impun o foarte scurtă pauză sau renunțarea pentru moment de a rezolva cerința, orientându-mă spre alta și revenind, dacă timpul permite, cu o nouă abordare*;
  - o *mă gândesc la ceva pozitiv*;
  - o *trec în revistă alte sfaturi și recomandări* pe care le-am primit de la profesori, colegi prieteni;
- *o situație de conflict* poate fi generată de faptul că, în urma abordării unei cerințe care conține explicit răspunsul așteptat, prin raționamentul făcut ajung la un răspuns diferit/o contradicție; într-o astfel de situație, *există o probabilitate extrem de redusă ca subiectul să fie conceput cu erori* și, în acest sens:
  - o *recitesc cu atenție cerința*, fiind posibil să se fi strecurat o eroare la identificarea elementelor de text (ipoteze, concluzii);
  - o *revăd propriul raționament făcut, etapă cu etapă, eventual încerc o cale alternativă de rezolvare*;
  - o dacă prin verificările anterioare conflictul se menține, pot apela la asistenții de sală, fără a deranja pe ceilalți candidați, solicitând prezența unui membru al comisiei care să poată confirma corectitudinea cerinței de lucru;
- prin participarea la simularea examenului de bacalaureat, prin contextele de recapitulare de la clasă, la proba de matematică am percepția clară a încadrării subiectelor în materia studiată pe cei patru ani de studiu, astfel:

Subiectul I	Subiectul al II-lea	Subiectul a III-lea
Itemi care acoperă <i>competențe specifice și conținuturi</i> aferente claselor a IX-a și a X-a	Itemi care acoperă <i>competențe specifice și conținuturi de algebră, aferente claselor a XI-a și a XII-a</i> , dar pentru rezolvarea anumitor cerințe sunt necesare <i>legături intradisciplinare</i> cu materia studiată în clasele a IX-a și a X-a	Itemi ce acoperă <i>competențe specifice și conținuturi de analiză matematică, aferente claselor a XI-a și a XII-a</i> , dar pentru rezolvarea anumitor cerințe sunt necesare <i>legături intradisciplinare</i> cu materia studiată în clasele a IX-a și a X-a
6 cerințe <i>independente</i> , variind ca grad de dificultate și ca volum de redactare	<i>Ambele subiecte sunt formate din câte 2 probleme cu câte 3 cerințe</i> Cele trei cerințe ale fiecărei probleme, notate prin a), b) și c), sunt în relație; de regulă, informații din cerința a) și elemente utilizate în rezolvarea acesteia sunt utile/sprijină rezolvarea cerințelor de la b); la fel, a) și/sau b) pot sprijini rezolvarea cerinței c) De regulă, nivelul de dificultate/volumul de redactare al cerințelor a), b) și c) este în creștere (de la a la c)	

- cunosc că *punctajul fiecărui item se acordă integral numai dacă:*
  - *am răspuns corect la cerința de evaluare;*
  - *am descris raționamentul care m-a condus la răspuns și acesta nu conține erori;*
- am clar un exemplu de acordare a punctajelor și mă ghidez după acesta în autoevaluare (raportare la cele 5 puncte/item, conform structurii subiectelor pentru sesiunile 2024):

Punctaje asociate unui item, proba E c), matematică	0 p	1 p	2 p	3 p	4 p	5 p
<b>În ce condiții se acordă punctajul:</b>	<p><i>Nu am consemnat nimic din rezolvare pe tipizatul pe care-l reprezintă lucrarea mea.</i></p> <p><i>Deși am redactat anumite elemente, niciunul nu este în relație directă cu cerința de lucru.</i></p>	<p><i>Am redactat răspunsul pe tipizatul de examen (lucrare), dar:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- am ajuns la un rezultat pe care l-am considerat corect, dar consultând baremul, acesta nu este cel așteptat;</li><li>- am parcurs etape de raționament, le-am redactat, dar nu am reușit să finalizez răspunsul/să obțin răspunsul așteptat;</li><li>- am scris doar răspunsul, care este corect, fără a explica raționamentul care m-a condus la acesta;</li><li>- am ajuns la rezultatul corect, dar am omis etape esențiale de raționament (am intuit anumite aspecte);</li><li>- am ajuns la rezultatul corect, dar în redactare s-au strecurat erori, fie de raționament, fie în utilizarea limbajului specific.</li></ul>	<p><i>Am redactat răspunsul la cerința de lucru, acesta este corect și, în redactarea răspunsului, am folosit explicațiile și justificările care susțin răspunsul.</i></p>			

- am în vedere că, în funcție de răspunsul redactat pe tipizatul pe examen (lucrare) la un item, *pot primi punctaje parțiale*; în acest sens:
  - mă străduiesc să *construiesc părți de raționament care folosesc răspunsului*, chiar dacă anumite cerințe de lucru mi se par dificile, noi față de ceea ce am învățat și exersat;
  - nu renunț, *folosesc integral timpul efectiv de lucru pentru a îmi crește șansele de promovare a probei/a examenului*;
- *respect toate regulile de examen, acționez cu fair-play, evit orice tentativă de fraudare a examenului*; sunt conștient că *orice rezultat obținut trebuie să reflecte efortul și nivelul competențelor formate prin învățare* la disciplina matematică; cunosc faptul că eliminarea din examen are ca urmare interdicția de a participa la sesiunile imediat următoare ale examenului;
- *abordez responsabil și cu fair-play etapa de contestații*; cunosc dreptul meu de a depune contestație asupra notei rezultate în urma evaluării lucrării și *îmi exercit acest drept numai în următoarele situații*:

- am în vedere să *rețin cât mai mult din rezultatele consemnate pe lucrare*, precum și raționamentele dezvoltate;
  - *compar rezultatele mele cu baremul* asociat subiectelor și am o estimare a punctajelor ce ar corespunde răspunsurilor la cerințele de evaluare;
  - *compar această estimare cu nota primită* la proba de examen;
  - dacă estimarea făcută de mine diferă semnificativ de nota primită, *mă consult cu profesorul de la clasă/cu alți colegi* pentru a înțelege care ar fi elementele care au putut conduce la această diferență;
  - decid depunerea unei contestații numai dacă, după parcurgerea etapelor anterioare, diferența dintre nota estimată și nota primită se menține;
  - *sunt conștient că prin depunerea contestației, nota de după reevaluarea lucrării poate să crească, să rămână nemodificată, dar poate să și scadă; iau în calcul consecințele situației în care nota finală va fi mai mică;*
- reușesc să *controlez situațiile de stres*, atât în cazul succesului, cât și în caz de insucces.





#### IV.2. Comentarii din perspectiva profesorului

- aspecte legate de învățare (remediere/consolidare/aprofundare) în context de recapitulare, inclusiv din perspectiva relației dintre demersul didactic și profilul de formare al absolventului
- reflecție asupra activității, la finalul acesteia
- reflecție asupra evaluării

*În matematică,  
arta de a propune o întrebare  
trebuie să aibă o valoare mai mare  
decât rezolvarea ei.*

**Georg Cantor**

În această subsecțiune, autorii și-au propus să prezinte o serie de situații asupra cărora profesorul/profesoara reflectează, formulează o serie de opinii și dezvoltă strategii prin care să faciliteze o mai bună învățare a elevilor/elevelor. Acordând atenție motivării, orientării lor în procesul de învățare.

Ca în prezentarea pentru elevi/eleve, am considerat potrivit să păstrăm formulările folosind persoana I singular, tocmai pentru a ținti adresabilitatea acestora spre fiecare dintre colegii de la catedră. Încurajăm profesorul să parcurgă secțiunile scrise cu răbdare, atenție și spirit critic, să reflecteze și să le adapteze/completeze în baza propriilor experiențe și având în vedere particularitățile grupurilor de elevi la care predă. De asemenea, tot în **anexa nr. 2** la secțiunile dedicate învățământului liceal, filiera tehnologică, asociem o *exemplificare a interacțiunii cadrelor didactice cu aplicații care au componentă IA*, în scopul identificării sprijinului pe care inteligența artificială îl oferă proiectării și organizării propriu-zise a activităților de învățare pentru elevi/eleve.



**II.1. Sunt profesor/profesoară.**

**Folosesc o cerință de evaluare în context de recapitulare pentru a obține maximum de beneficiu pentru elevii mei, în particular cerința de lucru prezentată anterior:**

- *aleg cu sens și construiesc cu semnificație contextul de recapitulare, acesta fiind în fapt un context de învățare (remediere, consolidare), nu și de predare:*
  - *prin recapitulare nu îmi propun să refac predarea; nici din punct de vedere al timpului, nici din punct de vedere al efortului elevilor nu voi putea aborda, încă o dată, întreg curriculumul disciplinei;*
  - *nu pornesc de la premisa că anumite aspecte/competențe sunt deținute/formate la elevi, deci „pot sări peste chestiunile de bază”; în etapa de recapitulare, exact baza trebuie să mă asigur că este accesibilă oricărui elev;*
  - *dau sens recapitulării, fixând un cadru clar la nivelul grupului de elevi – asigurarea promovării examenului de bacalaureat; de regulă, la nivelul clasei, elevii sunt de niveluri diferite; astfel, acest obiectiv poate fi prea jos pentru unii dintre elevi; pentru a nu se simți excluși, elevii care au rezultate ale învățării bune vor fi tutori/sprijin pentru elevii care au întâmpinat dificultăți în învățare;*
  - *dau semnificație recapitulării, bazând activitățile pe rezolvarea cerințelor conținute în subiectele examenului de bacalaureat, cu evidențierea acestui aspect în mod clar către elevi (atrag atenția că „vom rezolva o serie de probleme care au fost date la examen, este posibil să regăsiți cerințe similare și în subiectele pe care le veți primi la examenul pe care-l veți susține”);*
  - *bazând recapitulările pe exemplificări de itemi incluși în subiecte date la examenele/simulările anterioare/modele propuse, este posibil să nu acopăr întreg spectrul de competențe specifice/conținuturile programei de examen; folosesc acești itemi ca punct de start în recapitulare, construind în jurul lor teme de recapitulare, cu legături intradisciplinare, evidențiind similitudini și accentuând noi contexte facile pentru transfer;*
  - *aleg itemii dintre cei dați la probele de examen pentru că aceștia au fost atent elaborați, nu conțin erori și au fost calibrați pentru a acoperi niveluri diferite de dificultate;*
  - *cu cât aloc mai mult timp rezervat recapitulărilor (orele standard ale disciplinei, ore de pregătire suplimentară), cu atât mai amplă va fi aria de acoperire a programei de examen; la nivelul clasei, extind aria de acoperire numai în condițiile în care obiectivul „promovarea examenului” este asigurat de toți elevii, gândind unele secvențe de activitate prin abordări diferențiate (de exemplu: suplimente cu noi contexte de exersare pentru elevii cu rezultate bune la învățare), dar solicit atenția tuturor pentru acele elemente de recapitulare care constituie baza și care asigură premisele promovării examenului;*
  - *analizez în prealabil itemii, identific elemente care să reprezinte puncte de reper în discutarea acestora și care să întărească învățarea și le asociez acestora o serie de cerințe de lucru pornind de la „copii” ale acestora, continuând cu prelucrări/mici modificări și ajungând până la dezvoltări/integrare în noi contexte;*

- în context de recapitulare, în baza enunțului subiectului:
  - *las timp elevilor să abordeze individual cerința de lucru (lectură a textului, încercări, redactare pași de rezolvare);*
  - *îi pun să discute în perechi asupra strategiilor de rezolvare și, după caz, a rezultatului obținut, precum și asupra elementelor de text, dacă au avut neclarități;*
  - *observ elevii în activitatea de punere în discuție, îi identific pe cei care au abordat corect cerința de lucru; îmi notez eventualele erori observate; acestea vor sta la baza comentariilor ulterioare, la nivelul clasei, prin care să le clarific elevilor și să descopăr, cu sprijinul lor, aspectele ce trebuie remediate; am pregătite secvențe de activitate diferențiată;*
  - *îl chem la tablă pe unul dintre elevii care a reușit parcurgerea etapelor de raționament, fără erori, pentru a le prezenta tuturor propria rezolvare tuturor; îl rog să redacteze fără grabă și să comunice verbal etapele parcurse în rezolvarea cerinței;*
  - *le solicit celorlalți elevi să compare propria rezolvare cu cea redactată la tablă, inclusiv să reflecteze asupra explicațiilor furnizate de colegul/colega lor; încurajez elevii să adreseze întrebări colegului lor și pe acesta să le răspundă; în cazul în care la o întrebare, elevul de la tablă nu reușește să furnizeze răspunsul așteptat, las posibilitatea altui elev să completeze răspunsul; preiau sarcina de a răspunde unei întrebări, numai dacă niciunul dintre elevii clasei nu reușește să răspundă corect; într-un astfel de caz, mă asigur că aspectul pus în discuție este unul de interes general, îl interpretez ca pe o „barieră în învățare” căreia trebuie să-i găsec resortul de a o îndepărta; continui activitatea cu prezentarea comentată a subiectului, cu accent pe acele aspecte la care elevii/unii dintre elevi au întâmpinat dificultăți;*
  - *în situația în care toți elevii au raționat corect, am toate motivele să apreciez întreg colectivul, punctând că startul lor este unul încurajator, aceștia făcând dovada deținerii unor competențe matematice de bază; restructurez planul de comentare al subiectului, dar folosesc contextul pentru a mă asigura că la diferite grade de modificare a textului/cerinței, elevii oferă tot răspunsuri corecte; astfel, atrag atenția că subiectul ales a fost propus într-un context de evaluare externă (model/simulare/examenul propriu-zis), dar că apariția unei cerințe identice la examenul pe care-l vor susține nu este posibilă;*
- *discut subiectul cu elevii, pornind de la lectura textului, atât științific cât și non-științific:*
  - *din perspectiva vocabularului specific, semnelor grafice/simbolurilor specifice domeniului matematic/științelor, a elementelor de legătură;*
  - *pot apărea texte mai elaborate, pot conține cuvinte din afara specialității, necesar de explicat – vocabular general/nescific, dar esențial pentru înțelegerea textului;*
  - *îndrum elevii să sublinieze cuvinte, simboluri, expresii; dacă sunt neclarități, implic elevi pentru a aduce explicații „pe înțelesul celorlalți”;*
- *identific cu elevii:*
  - *ce se dă (ce știm/ipoteze) și ce se cere (concluzia);*
  - *cunoscutele și necunoscutele; după caz, le atrag atenția elevilor asupra notării necunoscutele, dacă textul nu asociază astfel de notații;*
- *discut cu elevii asupra a ceea ce se cere, insistând pe identificarea și elaborarea strategiei de rezolvare; uneori, etapa cea mai dificilă este identificarea primului pas pe care se fundamentează strategia de rezolvare!*





După ce *am clarificat*, cu ajutorul elevilor, *aspecte care privesc textul* (prin lectură), las timp fiecăruia dintre aceștia să *reflecteze asupra propriei strategii de rezolvare și asupra pașilor de raționament făcuți*. În acest caz, pașii au presupus: *efectuarea unui calcul, aplicarea de tehnici, reguli și/sau proprietăți*.

### Legătura demersului didactic cu profilul de formare al absolventului

Sunt un profesor/o profesoară *competent/ă și responsabil/ă*. În acest sens, mă străduiesc să le *asigur elevilor mei contexte de învățare relevante și în acord cu nevoile, interesele și nivelul achizițiilor anterioare* ale acestora.

*Îmi construiesc demersul didactic prin raportare la:*

- *curriculumul național și componente suport: planuri-cadru de învățământ, programele școlare pentru disciplina matematică, pentru filiera, profilul și specializarea/calificarea profesională pentru care au optat elevii clasei, manuale școlare, ghiduri și auxiliare pentru profesori/elevi, resurse educaționale deschise;*
- *metodologia examenului național de bacalaureat, programa de examen pentru disciplina matematică, precum și la instrumentele de evaluare specifice acestui examen (subiecte care au fost selectate pentru diferite sesiuni ale examenului, inclusiv pentru simulările examenului, precum și la modele de subiecte elaborate la nivel central/local).*

În cadrul orelor de specialitate, dar și în afara acestor ore, în relațiile și interacțiunile cu elevii mei, în abordările curriculare și extracurriculare, *am în vedere profilul de formare al absolventului* (Anexa la O.M.E. nr 6731/2023), competența matematică fiind una dintre cele prevăzute în setul de competențe-cheie. *Înțeleg că demersurile didactice nu trebuie să se rezume doar la formarea competențelor generale și specifice ale disciplinei pe care o predau, în acest sens le asigur elevilor experiențe de învățare care să contribuie, în ponderi diferite, la formarea tuturor competențelor-cheie, din perspectiva caracterului lor transversal.*

De asemenea, am în vedere *formarea la elevii mei a unui set de atitudini, valori și comportamente* care să-i conducă la *deținerea unor obiective de învățare*, să-i motiveze în vederea *urmăririi cu consecvență a acestora și a realizării lor* în baza propriului efort al fiecărui elev, precum și a sprijinului pe care li-l acord tuturor elevilor, atât în ansamblu, cât și diferențiat.

Pentru formarea competențelor generale și specifice la elevii mei, *lecturez și reflectez asupra aspectelor și întrebărilor cuprinse în materialele conexe profilului de formare al absolventului și colaborez cu ceilalți colegi de catedră, diriginți, consilieri școlari, după caz solicit sprijin de specialitate, cu scopul de a identifica strategiile optime pentru a facilita la elevi exprimarea tuturor caracteristicilor asociate atributelor prioritare ce definesc profilul absolventului de liceu:*

[https://www.edu.ro/sites/default/files/ fi%C8%99iere/Minister/2023/preuniversitar\\_root/Curriculum/profil\\_a bsolvent\\_consultare/9\\_Profilul\\_absolventului\\_Attribute\\_reflectie\\_profesor.pdf](https://www.edu.ro/sites/default/files/ fi%C8%99iere/Minister/2023/preuniversitar_root/Curriculum/profil_a bsolvent_consultare/9_Profilul_absolventului_Attribute_reflectie_profesor.pdf)

Având în vedere aspectele menționate anterior, dau sens și semnificație demersurilor mele didactice și mă asigur că, sub îndrumarea mea, elevii sunt motivați spre o învățare asumată și relevantă.

$$(5p) \text{ Arătați că } \left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5.$$

Pentru cerința de lucru prezentată (**Subiectul I.1., Simulare 2024**), ceea ce se cere este:  
**„a arăta”\***

Elevul trebuie să aibă clar că această acțiune presupune, în acest caz, *dezvoltarea unui raționament prin care justifică egalitatea celor doi membri ai relației de egalitate.*

Raționamentul poate implica:

- *prelucrarea numai a unui membru/a ambilor membri, cu efectuare de calcule;*
- *transformări prin echivalență ale relației de egalitate;*
- *abordări combinate.*

Îndrum elevii să identifice:

- *tipurile de relații/operații implicate, tipurile de numere implicate/formele de reprezentare a acestora;*
- *alte aspecte particulare; de exemplu, numere raționale sub formă diferită (fracții zecimale/fracții ordinare); apariția parantezelor în calcul; operații de ordine diferite (adunare – ordinul I, înmulțire – ordinul II);*

Încurajez elevii să dezvolte raționamente personalizate.

La final, folosesc eventualele erori de raționament ale unor elevi pentru a întări învățarea la nivelul clasei. Unele erori pot fi în categoria erorilor tipice, deci comentarea și atenționarea asupra respectivelor erori, precum și îndreptarea acestora, mai ales dacă se realizează cu sprijinul altor elevi, nu direct de către profesor, vor consolida învățarea.

*\*În anexa nr. 3 la secțiunile asociate învățământului liceal, filiera tehnologică, am asociat o prezentare a acțiunilor/verbelor utilizate în enunțul itemilor din instrumentul de evaluare din cadrul Simulării 2024, precum și o prezentare extinsă a tipurilor de acțiuni/verbe în corelație cu niveluri de competență, urmate de o listă de descrieri și exemplificări*

*Este util, atât pentru cei care au rezolvat corect cerința, cât și pentru cei care au întâmpinat dificultăți, să punctez o serie de aspecte, precum:*



- *calculul numeric a debutat – într-o abordare structurată – în clasele primare, a fost continuat și dezvoltat în gimnaziu și liceu, prin introducerea treptată a noi tipuri de numere, noi operații și noi proprietăți;*
- *având în vedere că elemente de calcul numeric sunt, de regulă, într-o relație directă cu o serie de situații concrete, cotidiene, deținerea de competențe de calcul reprezintă baza înțelegerii și transferului intra, interdisciplinar și transdisciplinar;*
- *chiar dacă nivelul de complexitate al calculului numeric acoperă grade diferite (de la simplu la dificil), în cerința de lucru propusă la Simulare observăm că, deși se folosesc diferite clase și reprezentări de numere, în calcul sunt implicate forme „simple”.*

În cele ce urmează, respectând succesiunea etapelor de rezolvare a cerinței de la Simulare, le propunem profesorilor să lectureze comentariile care pot fi oportune în cadrul activității de recapitulare în contextul calculului numeric. Atragem atenția că ceea ce pare/este simplu pentru un elev poate fi o barieră în învățare pentru alt elev. În acest sens, prezentarea comentată a fiecărei etape pornește de la aspectele elementare, deloc de neglijat și care asigură, printr-o abordare repetată și dezvoltată în cadrul altor teme de recapitulare, competențele de literație și numerație.

**Tipuri de numere/forme de reprezentare a acestora (exemplificare bazată pe subiectul propus)**

- dintre tipurile de fracții zecimale – finite, periodice simple/mixte –, în calcul intervine doar *forma finită*,  $0,2$ ; le atrag atenția elevilor asupra încadrării numărului într-o clasă/categorie (fracție zecimală finită), *dar nu insist în a reține denumirea; fac diferențierea următoare pentru a putea justifica elevilor că  $0,2$  este „simplu” pentru rescrierea sa sub o altă formă (fracție ordinară):*

$0,2$	$0,(2)$	$0,7(2)$
fracție zecimală finită	fracție zecimală periodică simplă	fracție zecimală periodică mixtă
exemplificări și explicații pentru toți elevii	dacă există elevi care aplică corect transformările și calculele cu fracții zecimale finite, ei sunt orientați să aplice transformări ale acestor alte tipuri de fracții zecimale pentru a le aduce la forma de fracții ordinare; dacă au acces la internet, pentru a se valida, pot căuta, pe internet, informații privind regulile de transformare	
$0,200000\dots$	$0,222222\dots$	$0,72222222\dots$

Transformarea unor fracții zecimale finite în fracții ordinare		
<p><i>o zecimală</i></p> $0,2 \xrightarrow{\uparrow} \frac{0,2}{1,0} \rightarrow \frac{02}{10} \rightarrow \frac{2}{10}$ <p style="text-align: center;">↓ un zero ↓</p> <p>fracție zecimală                      fracție ordinară</p>	$0,2 \rightarrow \frac{2}{10}$ <p style="text-align: center;">↓                      ↑</p> <p><i>două zecimi</i> → <i>doi pe zece</i></p>	$0,2 = \frac{2}{10}$
$0,2$ (dintr-un km) → $200$ (din 1000 de metri) ↓                      ↓ $0,2 : 1$ $200 : 1000$ ↓                      ↓ $\frac{0,2}{1} \rightarrow \frac{200}{1000}$ ↓                      ↓ $0,2 = \frac{2}{10}$		<p><i>Contextualizare</i></p> <p>Dăm semnificație valorii <math>0,2</math> considerând-o, de exemplu, ca distanță dintr-un kilometru: două zecimi dintr-un întreg sau 200 de metri din 1000 de metri</p>
		
		
		<p><i>Utilizarea reprezentării pe axa numerelor reale</i></p> <p><i>Reprezentare pentru „2 pe 10”</i></p>

$0,3 = \frac{3}{10}$ ; $5,1 = \frac{51}{10}$ ; $3,14 = \frac{314}{100}$ ; $10,001 = \frac{10001}{1000}$ ; Evidențiați similitudini și diferențe între exemplele date!	Exemple (fixare, consolidare)
$0,8 = \dots$ ; $0,50 = \dots$ ; $8,1 = \dots$ ; $8,100 = \dots$ ; $8,001 = \dots$ ; $11,0 = \dots$ Efectuați transformările individual, apoi discutați în perechi. Fiecare elev/elevă propune colegului/colegei de bancă un exercițiu similar cu cele lucrate; în pereche, discută rezultatele; dacă au neclarități, le semnaleză profesorului.	Contexte de exersare
Verificați că, prin transformarea fracției zecimale finite în fracție ordinară, numitorul este de forma 10, 100, 1000 etc., iar numărul de zerouri ale numitorului este egal cu numărul de zecimale, începând de la virgulă, în dreapta, până la ultima cifră nenulă a părții zecimale: $0,0090 = \frac{9}{1000}$	Util de reținut

- dintre tipurile de fracții ordinare, în calcul intervine doar o fracție cu numitor 10,  $\frac{3}{10}$ ; le atrag atenția elevilor asupra tipului de fracție, dar nu insist în a reține denumirea (fracție ordinară); fac diferențierea următoare pentru a putea justifica elevilor că  $\frac{3}{10}$  este „simplu/facil” pentru rescrierea sa sub o altă formă (fracție zecimală), mai ales în contextul în care au înțeles toți transformarea inversă (zecimale  $\rightarrow$  ordinară), exersată anterior:

Transformarea unei fracții ordinare cu numitor 10 în fracție zecimală		
Prin recapitulare, elevii au înțeles: $0,2 \leftrightarrow \frac{2}{10}$ $\downarrow \quad \quad \downarrow$ două zecimi $\leftrightarrow$ doi pe zece	Procedul invers: $\frac{3}{10} \rightarrow 0,3$ $\downarrow \quad \quad \uparrow$ trei pe zece $\rightarrow$ trei zecimi	
„mutăm” virgula spre stânga, cu o poziție $\frac{3}{10} = \frac{3,0}{10} = 0,3$ <small>un zero</small>		$\frac{3}{10} = 0,3$
$\frac{5}{10} = 0,5$ ; $\frac{23}{10} = 2,3$ ; $\frac{0}{10} = 0$ ; $\frac{7}{100} = 0,07$ ; $\frac{1006}{1000} = 1,006$ Evidențiați similitudini și diferențe între exemplele date!		Exemple (fixare, consolidare)
$\frac{9}{10} = \dots$ ; $\frac{90}{10} = \dots$ ; $\frac{9}{100} = \dots$ ; $\frac{314}{100} = \dots$ ; $\frac{4}{1000} = \dots$ ; $\frac{3}{125} = \dots$ Efectuați transformările individual, apoi discutați în perechi. Fiecare elev/elevă propune colegului/colegei de bancă un exercițiu similar cu cele lucrate; în pereche, discută rezultatele; dacă au neclarități, le semnaleză profesorului.		Contexte de exersare

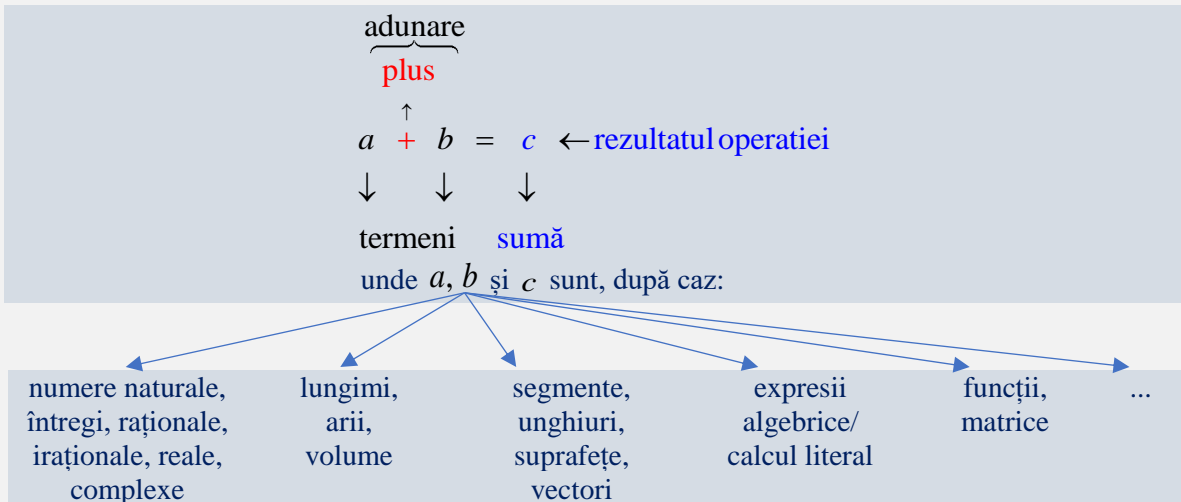
$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ (jumătatea)} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ (cincimea)}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25 \text{ (sfertul)}; \quad \frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0,04;$$
$$\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0,125 \text{ (optimea)}; \quad \frac{1}{125} = \frac{8}{1000} = 0,008; \dots$$

*Util de reținut!*  
Frații ordinare care pot fi aduse la numitor 10 sau putere a lui 10 pentru a fi transformate mai ușor în fracții zecimale



**Adunarea de numere, în situația în care termenii sunt exprimați prin diferite forme de reprezentare (exemplificare bazată pe subiectul propus)**

- am în vedere că, *pe parcursul învățării la matematică, operația de adunare a fost mereu prezentă;*
- în acest sens este *esențială pentru o înțelegere* a altor concepte și proceduri matematice:



- conduc elevii să conștientizeze că, în cadrul subiectului prezentat, *adunarea se face între numere* → raționale → **cu reprezentări diferite** și că *provocarea* are drept cauză *diferența de reprezentări* ale termenilor adunării; ofer ocazia elevilor să reflecteze asupra următoarelor adunări:

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
$2 + 3$	$3 + 2$	$0,2 + 0,3$	$0,2 + 0, (3)$	$\frac{2}{10} + \frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} + \frac{3}{5}$	$2 + 0,3$	$2 + \frac{3}{10}$	$0,2 + \frac{3}{10}$

Care sunt adunările în care intervin numere?  
 Care sunt adunările în care intervin numere naturale?  
 Care sunt adunările în care intervin doar numere naturale? Prin ce diferă cazurile? Discuție.  
 Care sunt adunările în care intervin numere raționale? (Atenție: toate!)  
 Care sunt adunările în care intervin doar numere raționale? (Atenție: toate!)  
 Care sunt adunările în care intervin numere raționale cu diferite reprezentări? Discuție.  
 Pe care dintre adunări le pot face cu ajutorul funcției calculator a telefonului? Discuție.  
 ... (încurajez elevii să formuleze și alte întrebări)  
 Efectuați adunările. Comparați în perechi rezultatele. Discuție. Notarea aspectelor de remediere/consolidare a învățării.

$0,2 + \frac{3}{10}$

$0,2 + 0,3$   
*adunare fără trecere peste ordin*

$= 0,5$

$\frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

strategii diferite, același rezultat exprimat în forme diferite de reprezentare



<p style="text-align: center;"><math>0,3 + 0,5 = 0,5 + 0,3 = 0,8</math></p> <p style="text-align: center;"> <math>0,3 + \quad 0,3 + \quad 0,3</math>  <math>\frac{0,5}{8} \rightarrow \frac{0,5}{,8} \rightarrow \frac{0,5}{0,8}</math> </p> <p> <math>3 + 5 = 5 + 3 = 8</math>; <i>comutativitate</i>  <i>schimbarea ordinii termenilor, același rezultat</i> </p> <p style="text-align: center;"> <i>efectuez adunare pe coloane,</i>  <i>de la dreapta spre stânga,</i>  <i>acord atenție poziției virgulei</i> </p> <p> <math>2,31 + 13,4 \rightarrow 02,31 + 13,40 \rightarrow 2,31 + 13,4 = 15,71</math> </p> <p> <i>corelez numărul de cifre din cei doi termeni</i> </p> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 02,31+ \\ 13,40 \\ \hline 15,71 \end{array}</math> </div>	<p><i>Exemple</i> (fixare, consolidare)</p>
<p> <math>\frac{2}{10} + \frac{7}{10} = \frac{2+7}{10} = \frac{9}{10} = 0,9</math> </p> <p> <i>adunarea a două fracții cu același numitor</i> </p> <p> <i>fracția rezultată păstrează numitorul comun iar numărătorul este suma numărătorilor fracțiilor de sumat</i> </p> <p> <i>dacă rezultatul se cere exprimat sub formă de fracție zecimală</i> </p> <p> <math>\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2</math> </p> <p style="text-align: center;"><i>8:4=2</i></p>	
<p> <math>0,2 + 0,7 = \dots</math> ; <math>0,4 + 0,4 = \dots</math>; <math>10,1 + 1,01 = \dots</math>; <math>4 + 0,3 = \dots</math>;  <math>0,9 + 0,08 = \dots</math>; <math>\frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \dots</math>; <math>\frac{7}{10} + \frac{2}{10} = \dots</math>; <math>0,4 + \frac{1}{10} = \dots</math>; <math>\frac{2}{10} + 0,2 = \dots</math>;  <math>0,7 + \frac{7}{10} = \dots</math>; <math>0,7 + 0,4 = \dots</math>; <math>\frac{4}{10} + \frac{8}{10} = \frac{\dots + \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots, \dots</math>; <math>\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \dots</math> </p> <p>Efectuați individual calculele, inclusiv eventualele transformări din fracții ordinare în fracții zecimale, sau invers, apoi discutați în perechi. Fiecare elev/elevă propune colegului/colegei de bancă un exercițiu similar cu cele lucrate; în pereche, discută rezultatele; dacă au neclarități, le semnaleză profesorului.</p>	<p><i>Contexte de exersare</i></p>
<p>Putem efectua mental unele <i>calcule mai simple</i>, dar, în condiții de examen, este indicat să <i>le efectuăm și „pe hârtie”</i>.</p> <p>Pot folosi proprietățile operației de adunare pentru a „ușura”/optimiza calculul. Alături de proprietatea de <i>comutativitate</i>, ne reamintim:</p> <p> <math>0,4 + 0,3 + 0,2 \xrightarrow[\text{variante de calcul (același rezultat)}]{\text{asociativitate (gruparea termenilor)}} 0,4 + (0,3 + 0,2) = 0,4 + 0,5 = 0,9</math>  <math>(0,4 + 0,3) + 0,2 = 0,7 + 0,2 = 0,9</math> </p> <p style="text-align: center;"><i>element neutru la adunare</i></p> <p style="text-align: center;">↑</p> <p style="text-align: center;"> <math>0,5 + 0 = 0 + 0,5 = 0,5</math> </p> <p style="text-align: center;"><i>adunarea cu zero (nu modifică rezultatul)</i></p> <p>Când termenii sunt exprimați prin forme diferite de reprezentare, utilizez transformări ale formelor pentru a-i aduce la aceeași formă.</p>	<p><i>Util de reținut!</i></p> <p>La efectuarea adunărilor, în calcul pot utiliza și proprietățile de <i>comutativitate</i> (ordinea termenilor), <i>asociativitate</i> (gruparea termenilor) sau ale lui 0, ca <i>element neutru</i>.</p>



Forme de scriere/reprezentare pentru un număr întreg, de exemplu:

$$2 = \begin{cases} 2,0 & \rightarrow \text{evidențierea poziției virgulei și a părții zecimale} \\ 2,000\dots & \rightarrow \text{partea zecimală se poate completa cu numărul necesar de zecimale} \\ \frac{2}{1} & \rightarrow \text{rescrierea numărului sub formă de raport (fracție ordinară)} \end{cases}$$

De asemenea, în ceea ce privește scrierile, putem să facem legăturile următoare:

$$2 = 2 + 0 \text{ (rescrierea ca sumă cu unul dintre termeni 0)}$$

$2 = 1 \cdot 2$  (*un doi!*; egalitatea este evidentă, interpretarea sa nu întotdeauna imediată și este utilă în diferite contexte)

$2,03 = 2 + 0,03$  (evidențierea prin sumă, a părții întregi și a părții zecimale a unui număr)

$$102,035 = \begin{matrix} 102 & + & 0,035 \\ \text{100+0+2} & & \text{0,0+0,03+0,005} \\ \text{sute+zeci+unități} & & \text{zecimi+sutimi+mimi} \\ \frac{1 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} \end{matrix}$$

*Acordăm  
atenție!*



**Calculul cu paranteze (exemplificare bazată pe subiectul propus)**

- pregătesc *etapa de calcul cu paranteze*;
- *identific* cu sprijinul elevilor, în enunțul subiectului discutat, scrierea cu *paranteze*, care pot fi de mai multe tipuri (dar insistând doar pe cazul direct legat de cerința de lucru în discuție):

(...)	[...]	{...}	{...[...(...)]...}
paranteze rotunde	paranteze drepte	acolade	ordinea acestora

- *exemplific o serie de situații care necesită apariția parantezelor*, folosind contextul pentru a le reaminti elevilor și *clasificarea operațiilor pe ordine (I și II)*, respectiv utilizarea *regulilor de semn la înmulțire/împărțire*:

$(2+3) \cdot 5$	$-4 : (3 \cdot 2 - 5) *$	$4 \cdot (-1) *$	$(-2)^4 *$									
prin scrierea cu paranteze se marchează factorul care se înmulțește cu 5;	prin scrierea cu paranteze se marchează factorul (împărțitorul) la care se împarte $-4$ ;	în acest caz, apariția parantezei este necesară pentru a marca factorul exprimat printr-un număr negativ	în acest caz, apariția parantezei este necesară pentru a marca faptul că ridic la putere un număr negativ									
<i>fac diferența față de scrierea <math>2+3 \cdot 5</math>, caz în care înmulțirea se efectuează prima (operație de ordinul II), factorii fiind 3 și 5, apoi adunarea (operație de ordinul I), respectând și ordinea efectuării</i>	<i>fac diferența față de scrierea <math>-4 : 3 \cdot 2 - 5</math>, în care se efectuează, în ordine, întâi operațiile de ordinul II (în ordinea apariției acestora), apoi operația de scădere (de ordinul I)</i>	<i>fac diferența față de scrierea <math>-1 \cdot 4</math>, în acest caz nefiind obligatorie introducerea factorului <math>-1</math> între paranteze</i>	<i>fac diferența față de scrierea <math>-2^4</math>, în acest caz ridicarea la putere se referă la numărul 2, nu și la semnul minus</i>									
	în toate cele trei situații, pentru înmulțiri/împărțiri, ținem cont de regula semnelor:											
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>La înmulțire/ la împărțire</th> <th>+</th> <th>-</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>+</td> <td>+</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </tbody> </table>			La înmulțire/ la împărțire	+	-	+	+	-	-	-	+
La înmulțire/ la împărțire	+	-										
+	+	-										
-	-	+										

\*contexte care pot face obiectul diferențierii activităților de recapitulare

- prin prezentarea *strategiilor alternative*, urmăresc *valorificarea regulilor/tehnecilor/proprietăților de calcul*; pot propune elevilor integrarea calcului de tipul  $(2+3) \cdot 5$  într-un *context practic-aplicativ*, precum:

**În coșul de cumpărături am pus *două* sticle cu apă plată a câte *5 lei*/sticla, precum și *trei* pâini, tot a câte *5 lei*/bucata. Care este prețul cumpărăturilor din coș?**

**Știm:** *două* sticle cu apă plată a câte *5 lei*/sticla (1)  
*trei* pâini, tot a câte *5 lei*/bucata (2)

**Pentru a determina prețul total al produselor – variante de raționament:**

Determin prețul total pe tipuri de produse:

- determinarea prețului sticlelor cu apă plată  
(1) 1 (sticlă cu apă plată)..... 5 lei  
2 (sticle cu apă plată).....  $2 \times 5$  lei

- determinarea prețului pâinilor  
(2) 1 (bucată de pâine)..... 5 lei  
3 (bucati de pâine).....  $3 \times 5$  lei

Observ că cele două tipuri de produse au același preț/bucată

(1) și (2) 1 (sticlă cu apă plată)..... 5 lei  
1 (bucată de pâine) ..... 5 lei  
*două* sticle cu apă plată și *trei* pâini

- determinarea numărului de produse cu același preț:

$2 + 3$  produse (cu același preț)

<u>nr. produse</u>	×	<u>pret pe produs</u>
$2 + 3$ (produse)	×	5 (lei)

Expresia prin care determinăm prețul total al produselor:

$$2 \times 5 + 3 \times 5$$

$$\underline{10 + 15}$$

$$25 \text{ (lei)}$$

Expresia prin care determinăm prețul total al produselor:

$$\underline{(2 + 3)} \cdot 5$$

$$5 \cdot 5$$

$$25 \text{ (lei)}$$

**Cum calculăm:**

$$(2 + 3) \cdot 5 ?$$

1. Efectuăm calculele din paranteză (atunci când este posibil):

$$(2 + 3) \cdot 5 = 5 \cdot 5$$

2. Efectuăm restul de calcule:

$$5 \cdot 5 = 25$$

1. Desfacem paranteza:

$$(2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

Atragem atenția că factorul 5 se înmulțește cu fiecare dintre termenii sumei din paranteză.

2. Continuăm cu efectuarea înmulțirilor (ca operație de ordinul II):

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 10 + 15$$

3. Finalizăm cu efectuarea adunării (operație de ordinul I):

$$10 + 15 = 25$$

**Rezumat:**

$$(2 + 3) \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25$$

**Rezumat:**

$$(2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 10 + 15 = 25$$

Ambele strategii de calcul conduc la același rezultat.

Alegerea strategiei o putem face în funcție de deprinderile formate, dar există și situații care impun una dintre strategii!

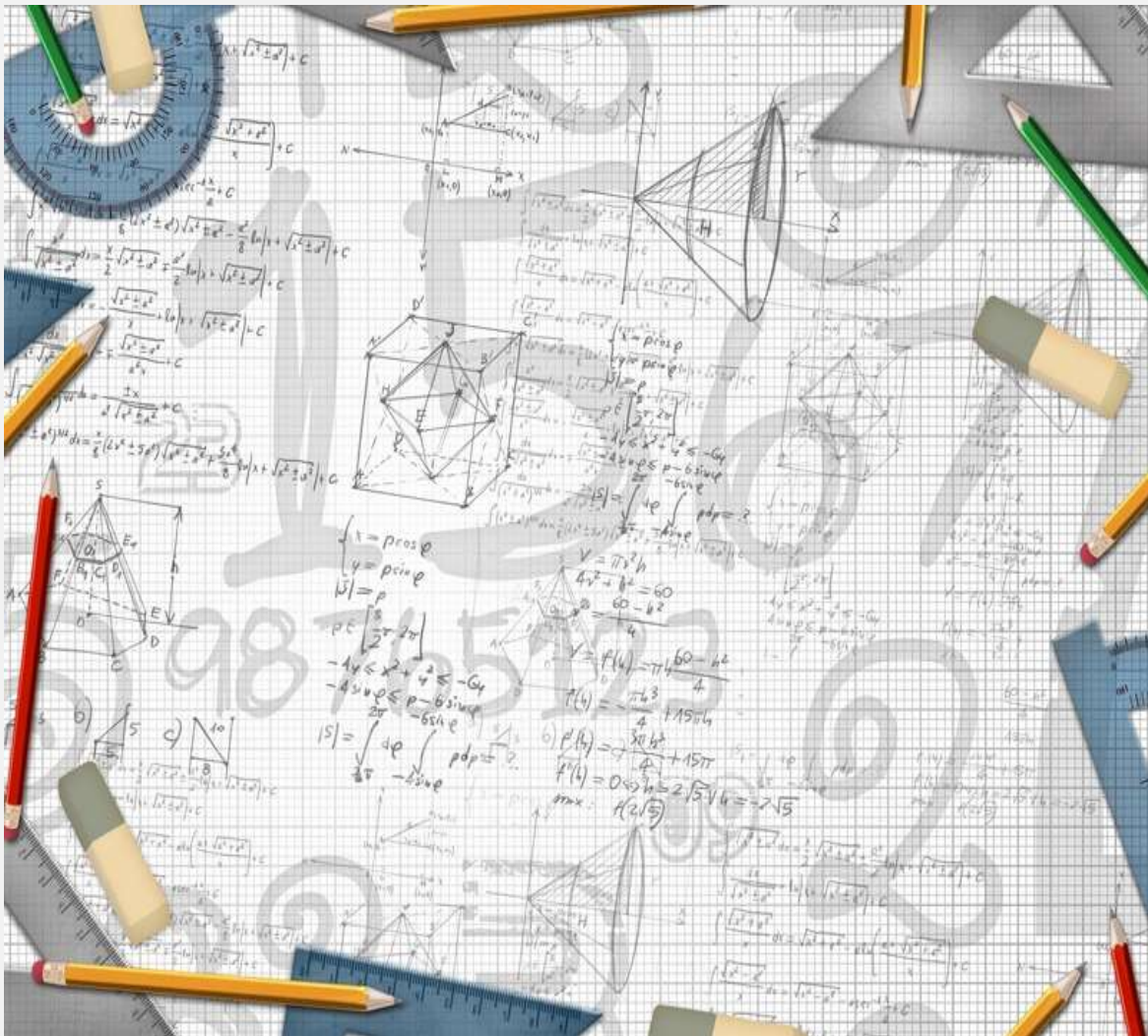
În condițiile unei evaluări, dacă nu este cerută explicit o anumă strategie, punctajul acordat pentru efectuarea corectă a calculului nu depinde de strategia utilizată.

Le justificăm elevilor necesitatea cunoașterii ambelor strategii de calcul:

$$\underbrace{(1 + \sqrt{5})}_{\substack{\text{numerele din paranteză} \\ \text{nu permit} \\ \text{efectuarea adunării}}} \cdot \sqrt{5} - 5 = 1 \cdot \sqrt{5} + \underbrace{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}_{=\sqrt{25}=5} - 5 = \sqrt{5} + 5 - 5 = \sqrt{5}$$

Util de reținut:

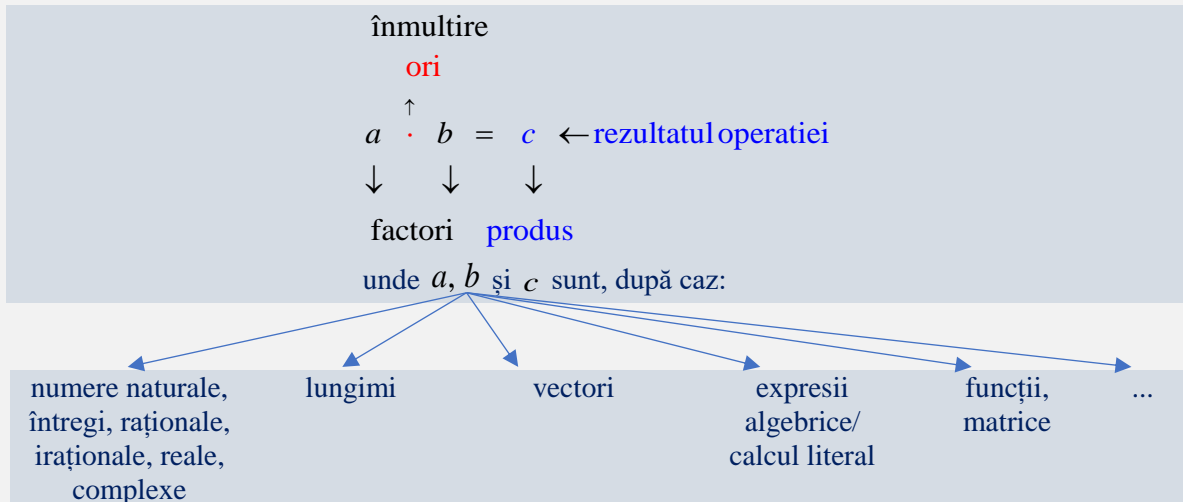
- calculul în expresiile de tipul  $(2+3) \cdot 5$  sau  $5 \cdot (2+3)$ , realizat prin desfacerea parantezelor, are la bază proprietatea de *distributivitate a înmulțirii față de adunare* (la fel și pentru scădere);
- pentru a avea sens, *orice paranteză deschisă prin „(” trebuie urmată de închiderea ei prin „)”*
- notații precum  $(...)$ ,  $[...]$  și  $\{...\}$  au și *alte semnificații* decât cele de a delimita expresii într-un calcul; pentru a asocia corect semnificația, *ținem cont de contextul* în care este folosită notația; **spre exemplificare**, în scrierea  $f(x)$ , în contextul funcțiilor, între paranteze se evidențiază *variabila  $x$  a funcției  $f$* ; de asemenea, scrierea  $(2,5)$  poate desemna *intervalul deschis de numere reale* de capete 2 și 5; prin scrierea  $[5,2]$ , notăm *partea întreagă* a numărului 5,2, iar prin scrierea  $\{5,2\}$  putem să facem referire fie la *partea fracționară* a numărului 5,2, fie la mulțimea formată cu elementele 5 și 2, chiar și la mulțimea având ca unic element numărul 5,2; acordăm atenție faptului că *multe dintre notațiile/simbolurile utilizate în matematică au semnificații speciale pentru texte din alte domenii*.





**Înmulțirea de numere, inclusiv în situația în care factorii sunt exprimați prin diferite forme de reprezentare (exemplificare bazată pe subiectul propus)**

- am în vedere că, *pe parcursul învățării la matematică, operația de adunare a fost mereu prezentă;*
- în acest sens este *esențială pentru o înțelegere* a altor concepte și proceduri matematice:



- conduc elevii să conștientizeze că, în cadrul subiectului prezentat, *înmulțirea se face între:*

numere → raționale → **cu reprezentări diferite**

și că *provocarea* are drept cauză *diferența dintre reprezentări* ale factorilor; le ofer ocazia elevilor să reflecteze asupra următoarelor înmulțiri:

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
$2 \cdot 3$	$3 \cdot 2$	$0,2 \cdot 10$	$0,2 \cdot 0,3$	$\frac{2}{10} \cdot 10$	$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{5}$	$2 \cdot 0,3$	$2 \cdot \frac{3}{10}$	$0,2 \cdot \frac{3}{10}$
Care sunt înmulțirile în care intervin numere? Care sunt înmulțirile în care intervin numere naturale? Care sunt înmulțirile în care intervin doar numere naturale? Prin ce diferă cazurile? Discuție. Care sunt înmulțirile în care intervin numere raționale? (Atenție: toate!) Care sunt înmulțirile în care intervin doar numere raționale? (Atenție: toate!) Care sunt înmulțirile în care intervin numere raționale cu diferite reprezentări? Discuție. Pe care dintre înmulțiri le pot face cu ajutorul funcției calculator a telefonului? Discuție. ... ( <i>încurajez elevii să formuleze și alte întrebări</i> ) Efectuați înmulțirile. Comparați în perechi rezultatele. Discuție. Notarea aspectelor de remediere/consolidare a învățării.								
<b>În funcție de strategia aleasă, în cerința de lucru intervin următoarele înmulțiri între numere raționale (inclusiv întregi):</b>								
a)	b)	c)	d)					
$0,5 \cdot 10$	$0,2 \cdot 10$	$\frac{3}{10} \cdot 10$	$\frac{5}{10} \cdot 10$					
<b>produsul dintre o fracție zecimală și un întreg</b>				<b>produsul dintre o fracție ordinară și un întreg</b>				

$0,5 \cdot 10 \rightarrow 0,50 \cdot 10 \rightarrow 05,0 \rightarrow 5,0 \rightarrow 5$ <p><i>înmulțire cu 10, mutarea virgulei cu o poziție spre dreapta</i></p> $0,5 \cdot 10 = 5,0 = 5$ $0,2 \cdot 10 = 2,0 = 2$	$\frac{3}{10} \cdot 10 = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{1} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 1} = \frac{3 \cdot \cancel{10}}{\cancel{10} \cdot 1} = \frac{3}{1} = 3$ $\frac{3}{10} \cdot 10 = \frac{3}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{1} = \frac{3}{1} = 3$ $\frac{5}{10} \cdot 10 = \frac{5}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{1} = \frac{5}{1} = 5$
<ul style="list-style-type: none"> <li>- înmulțind un număr real cu 10, acesta crește de 10 ori, deci ordinul de mărime crește cu o unitate</li> <li>- în cazul în care partea zecimală a numărului rațional are cifre nenule, prin înmulțire cu 10 mutăm virgula o poziție spre dreapta</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- la înmulțirea unei fracții ordinare cu un întreg, rescriu întregul sub formă de fracție ordinară și utilizez regulile de înmulțire dintre două astfel de fracții, după caz urmărind și simplificările care se pot face;</li> <li>- la înmulțirea a două fracții ordinare, sunt atent la simplificările care se pot face în cadrul fiecărei fracții sau între numărători și numitori de la fracții diferite;</li> <li>- dacă nu sunt implicate simplificări – sau după efectuarea acestora –, produsul unor fracții ordinare se obține ca produsul numărătorilor supra produsul numitorilor;</li> <li>- simplificarea este operația prin care împart numărătorul și numitorul unei aceleași fracții ordinare – sau pe ai unor fracții ordinare care sunt factori ai unui produs –, printr-un același număr (divizor comun al numărătorului și numitorului)</li> </ul>
<b>Ne amintim:</b>	
Amplificarea unei fracții ordinare:	$^4) \frac{2}{25} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 25} = \frac{8}{100} = 0,08 \text{ (factorul de amplificare este 4)}$ <p>Amplificarea poate fi realizată cu orice factor nenul și prin acest procedeu se obțin fracții echivalente cu cea căreia îi aplicăm procedeu. Prin amplificare, se poate obține un șir infinit de rapoarte egale.</p>
Simplificarea unei fracții ordinare:	$\frac{21}{14} = \frac{21 : 7}{14 : 7} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} = 1,5 \text{ (factorul de simplificare este 7)}$ <p><i>Simplificarea în fracțiile ordinare (cu numărător și numitor exprimați prin numere întregi) poate fi realizată numai cu factori care reprezintă divizori comuni numărătorului și numitorului și se obțin fracții echivalente cu cea căreia i s-a aplicat procedeu. Numărul de rapoarte echivalente obținute prin simplificare este finit. Prin simplificare putem aduce o fracție ordinară la formă ireductibilă.</i></p>
Util de reținut	$\frac{\overset{2}{\cancel{2024}} \cdot 3}{5 \cdot \underset{1}{\cancel{1012}}} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{12,0}{10} = 1,2$ <p style="text-align: center;"> <span style="margin-right: 100px;"><i>simplificare prin 1012</i></span> <span style="margin-right: 100px;"><i>amplificare cu 2 pentru a obține numitor 10</i></span> <span><i>mutarea virgulei cu o unitate spre stânga</i></span> </p>

- revin asupra cerinței de lucru, de a arăta că  $\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5$ , solicitând elevilor să efectueze calculul din membrul stâng integrând toate elementele discutate (*transformări, calcul cu paranteze, ordinea operațiilor, efectuarea operațiilor cu numere de diferite tipuri/forme de reprezentare*), inclusiv prin aplicarea de transformări prin echivalență a relației de egalitate (*metoda mersului invers*), insistând asupra faptului că *pentru o strategie de calcul aleasă, orice altă strategie poate fi utilizată pentru verificare (probă)*:

<b>Varianta 1</b>	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = (0,2 + 0,3) \cdot 10 = 0,5 \cdot 10 = 5$ <p>Am parcurs următoarele etape:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>I. Efectuarea calculelor dintre paranteze                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- transformarea unei fracții ordinare în fracție zecimală;</li> <li>- adunarea fracțiilor zecimale;</li> </ul> </li> <li>II. Finalizare                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- înmulțirea unei fracții zecimale cu 10.</li> </ul> </li> <li>III. Formularea concluziei</li> </ol> <p>Cum membrul stâng este egal cu membrul drept, am arătat că <math>\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5</math></p>
<b>Varianta 2</b>	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \frac{2+3}{10} \cdot 10 = \frac{5}{\cancel{10}^1} \cdot \cancel{10}^1 = 5$ <p>Am parcurs următoarele etape:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>I. Efectuarea calculelor dintre paranteze                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară;</li> <li>- adunarea fracțiilor ordinare;</li> </ul> </li> <li>II. Finalizare                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- înmulțirea unei fracții ordinare cu un număr întreg;</li> </ul> </li> <li>III. Formularea concluziei</li> </ol> <p>Cum membrul stâng este egal cu membrul drept, am arătat că <math>\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5</math>.</p>
<b>Varianta 3</b>	$\left({}^{10}0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \left(\frac{0,2 \cdot 10}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \frac{2+3}{10} \cdot 10 = \frac{5}{\cancel{10}^1} \cdot \cancel{10}^1 = 5$ <p>Am parcurs următoarele etape:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>I. Efectuarea calculelor dintre paranteze                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- aducerea la același numitor;</li> <li>- efectuarea înmulțirii, apoi adunarea fracțiilor ordinare;</li> </ul> </li> <li>II. Finalizare                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- înmulțirea unei fracții ordinare cu un număr întreg;</li> </ul> </li> <li>III. Formularea concluziei</li> </ol> <p>Cum membrul stâng este egal cu membrul drept, am arătat că <math>\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5</math>.</p>
<b>Varianta 4</b>	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 0,2 \cdot 10 + \frac{3}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 2 + 3 = 5$



	<p>Am parcurs următoarele etape:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>I. <i>Desfacerea parantezelor</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- distribuirea factorului 10 la ambii termeni ai adunării;</li> </ul> </li> <li>II. <i>Efectuarea calculelor, cu respectarea ordinilor operațiilor</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- efectuarea <b>înmulțirii unui întreg (10) cu o fracții zecimală</b>, respectiv cu o fracție ordinară;</li> <li>- efectuarea adunării numerelor întregi (naturale).</li> </ul> </li> <li>III. <i>Formularea concluziei</i></li> </ol> <p>Cum membrul stâng este egal cu membrul drept, am arătat că <math>\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5</math>.</p>
<b>Varianta 5</b>	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5 \quad   :10 (\neq 0)$ $0,2 + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} \quad \left  -\frac{3}{10}\right.$ $0,2 = \frac{5}{10} - \frac{3}{10}$ $0,2 = \frac{5-3}{10}$ $0,2 = \frac{2}{10}$
	<p>Am parcurs următoarele etape:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>I. <i>Transformarea relației de egalitate (prin echivalență)</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>împărțirea ambilor membri printr-un număr nenul</b>;</li> <li>- scăderea din ambii membri a unei fracții ordinare;</li> </ul> </li> <li>II. <i>Efectuarea calculelor și finalizare</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Efectuarea scăderii fracțiilor ordinare (cu același numitor)</b>;</li> <li>- obținerea egalității dintre fracția zecimală și fracția ordinară corespunzătoare aceluiași număr rațional.</li> </ul> </li> <li>III. <i>Formularea concluziei</i></li> </ol> <p>Cum ultima egalitate este adevărată, am arătat că aceasta a fost obținută prin aplicarea de transformări prin echivalență a relației din enunț, și rezultă că <math>\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5</math> este o relație adevărată..</p>

În **anexa nr. 2** la secțiunile dedicate învățământului liceal, filiera tehnologică, este prezentat un exemplu de interacțiune dintre profesor/profesoară cu aplicații care au componentă IA (inteligentă artificială), în scopul pregătirii în timpul desfășurării unui demers didactic, având la bază subiectul discutat anterior.

**IV.2.2. Sunt profesor/profesoară.**

La finalul activității de recapitulare, asigur timpul necesar pentru reflecție, precum și transferul (fixare/consolidare) prin teme pentru activitate individuală.

**IV.2.2.1. Etapa de reflecție**

Pe parcursul activității, *am implicat elevii și aceștia au formulat întrebări, au exprimat opinii și au făcut adnotări* în caiete. Pentru a mă asigura că *fiecare dintre elevi reflectează* asupra propriei învățări, le propun *completarea unei fișe* după un model pe care-l pun la dispoziția lor sau *îi îndrum să-și realizeze propriile modele de structurare a informațiilor și ideilor.*

**Exemple de fișe de reflecție asupra propriei învățări**

Pentru a reflecta asupra propriei învățări, vă propun\* un model de structurare a elementelor-cheie ale activității de recapitulare:

**Exemplul 1**

Tematica recapitulării	Calcul numeric		
	Știam/Puteam să rezolv independent	Am învățat/consolidat în timpul activității și pot să rezolv independent	Îmi propun
Operația de adunare	Da, situații simple, precum ... (exemple)	Să folosesc proprietăți ale operației în calcul (comutativitate, asociativitate, 0)	Să rezolv subiectele I.1. (modele sau subiecte date la examen), care conțin calcul numeric
Operația de înmulțire	Înmulțiri între numere întregi, inclusiv regula semnelor	Înmulțiri între fracții/numere raționale	...
Clase de numere	...		
Tipuri de reprezentări ale numerelor raționale	...		
Transformări (fracții zecimale, fracții ordinare)	...		
Calcul cu paranteze	...		
Alte aspecte	...		

\*Pot pregăti fișe pentru fiecare elev, astfel încât aceștia să-și poată consemna diferite aspecte pe parcursul desfășurării activității

**Exemplul 2**

<b>Competență specifică</b>	<b>Alegerea și utilizarea de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale</b>	
<b>Domeniu de conținut</b>	<b>Algebră. Mulțimi și elemente de logică matematică</b>	
<b>Rețin:</b>	<b>Exemple</b>	<b>Acord atenție</b>
<b>1. Frații zecimale. Frații ordinare. Transformări</b>		
<b>Breviar teoretic (prin exemple)</b>	$0,2 = \frac{2}{10}$ ...	- modul în care transform fracțiile zecimale în cele ordinare și reciproc - ... ...
<b>Idei utile</b>	$2) \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$ ...	- pentru a transforma o fracție ordinară în fracție zecimală pot efectua împărțirea sau pot avea o situație particulară în care este util să amplific/simplific fracția ordinară; - ... ...
<b>2. Operația de adunare. Calcul cu diferite tipuri de numere. Proprietăți</b>		
<b>Breviar teoretic (prin exemple)</b>	...	...
<b>Idei utile</b>	...	...
<b>3. Operația de înmulțire. Calcul cu diferite tipuri de numere. Proprietăți</b>		
<b>Breviar teoretic (prin exemple)</b>	...	...
<b>Idei utile</b>	...	...
<b>4. Ordinea operațiilor</b>		
<b>Breviar teoretic (prin exemple)</b>	...	...
<b>Idei utile</b>	...	...
<b>5. Calcul cu paranteze</b>		
<b>Breviar teoretic (prin exemple)</b>	...	...
<b>Idei utile</b>	...	...
<b>6. Alte elemente abordate în activitatea de recapitulare</b>		
<b>Breviar teoretic (prin exemple)</b>	...	...
<b>Idei utile</b>	...	...

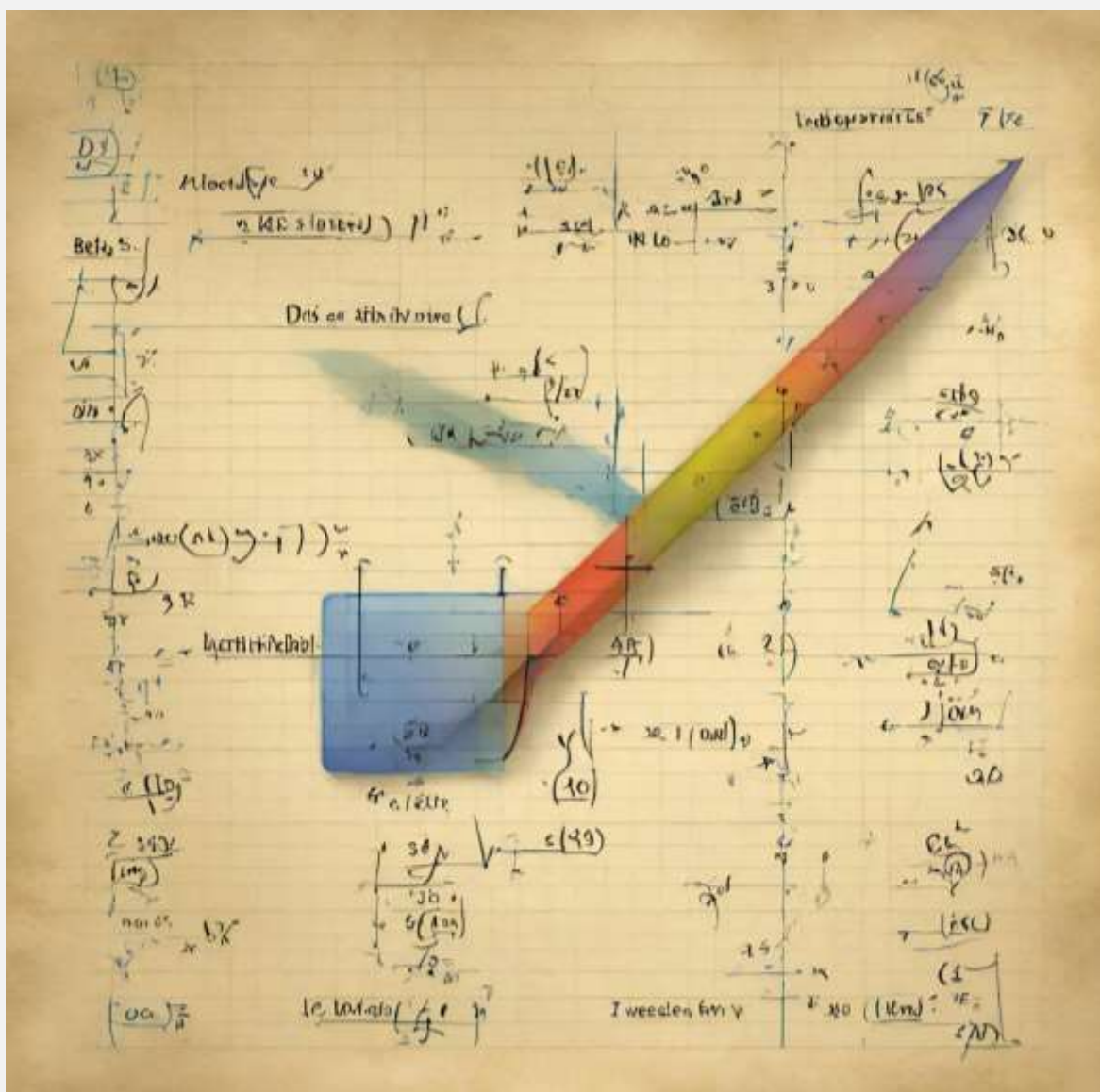
*\*Pot pregăti fișe pentru fiecare elev, astfel încât aceștia să-și poată consemna diferite aspecte pe parcursul desfășurării activității*

**Exemplul 3** Listă de verificare a cunoștințelor și deprinderilor implicate în rezolvarea unui item

SI.1	Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale				
	Alegerea și utilizarea de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale				
Cunoștințe implicate (inclusiv procedurale)	Elevul este capabil:	Da	Nu	Nu a fost cazul*	Lectură/ Remediere/ Consolidare
Număr	- să transforme un număr dintr-o formă dată într-o altă formă necesară rezolvării cerinței				Accesează secvența de recapitulare la pagina ...
	- să transforme un număr zecimal într-o fracție ordinară				
	- să identifice forma la care trebuie adusă o fracție ordinară/păstrarea formei inițiale pentru optimizarea unui calcul în care intervine (aplicând după caz amplificări/simplificări ale acesteia)				
Operație de adunare	- să înțeleagă necesitatea de a exprima într-o aceeași formă numerele ce reprezintă termenii unei adunări, dovedită prin aplicarea de transformări ale unuia sau ambilor termeni ai adunării				
	- să efectueze corect adunarea a două numere raționale reprezentate prin fracții zecimale simple				
	- să efectueze corect adunarea a două numere raționale reprezentate prin fracții ordinare cu același numitor				
	- să efectueze corect adunarea a două numere raționale reprezentate prin fracții ordinare cu numitori diferiți, prin aducere la același numitor, cu identificarea c.m.m.m.c. al numitorilor				
	- să efectueze corect adunarea a două numere raționale reprezentate prin fracții ordinare cu numitori diferiți, prin aducere la același numitor, identificat ca produs al numitorilor (nu neapărat c.m.m.m.c.)				
Operația de înmulțire	- să efectueze corect înmulțirea dintre o fracție zecimală pozitivă, cu partea zecimală nenulă, și un număr natural				
	- să efectueze corect înmulțirea dintre o fracție ordinară pozitivă și un număr natural				
Calcul cu paranteze	- să efectueze corect calculele dintre paranteze, ca etapă necesară pentru a putea efectua ulterior alte calcule				
	- să aplice corect proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare				
Ordinea operațiilor	- să efectueze corect, în ordinea corespunzătoare operațiilor de ordine diferite (înmulțiri – ca operații de ordinul II, apoi adunări – ca operații de ordinul I), atunci când calculul implică o astfel de ordonare				

Relația de egalitate	- să aplice corect transformări prin echivalență ale unei relații de egalitate				
	- să prelucreze un membru/ambii membri ai relației (efectuarea unui calcule sau prelucrare prin utilizare de proprietăți ale operațiilor implicate), cu aducerea la o formă utilă rezolvării cerinței				
Înțelegerea cerinței de lucru	- să formuleze un enunț prin care precizează ce urmărește să facă prin rezolvare				
	- să dezvolte un raționament prin care explică/justifică egalitatea dintre cei doi membri ai relației de egalitate				
Formularea concluziei	- să formuleze printr-un enunț concluzia, ca rezultat al raționamentului făcut				
	- să redacteze clar rezolvarea din care să reiasă concluzia				

\*Strategia de rezolvare aleasă de elev nu a implicat acest aspect





**IV.2.2.2. Teme pentru activitate individuală/independentă, în vederea asigurării transferului (fixare/consolidare), precum și asigurarea învățării diferențiate. Alte recomandări**

Pentru a consolida deprinderile de calcul numeric, am pregătit o serie de cerințe de lucru în următorul exemplu de fișă. Cerințele sunt introduse grupat, urmând tipurile de calcule care au fost necesar de efectuat în prezentarea/discutarea *Subiectului I.1* din cadrul simulării examenului național de bacalaureat 2024.

Îi ofer elevului/elevei și o serie de exemple\* de organizatoare care cuprind noțiuni și concepte-cheie utilizate în calculul numeric și îl/o încurajez să dezvolte astfel de organizatoare (hărți conceptuale/mentale) la fiecare etapă de recapitulare

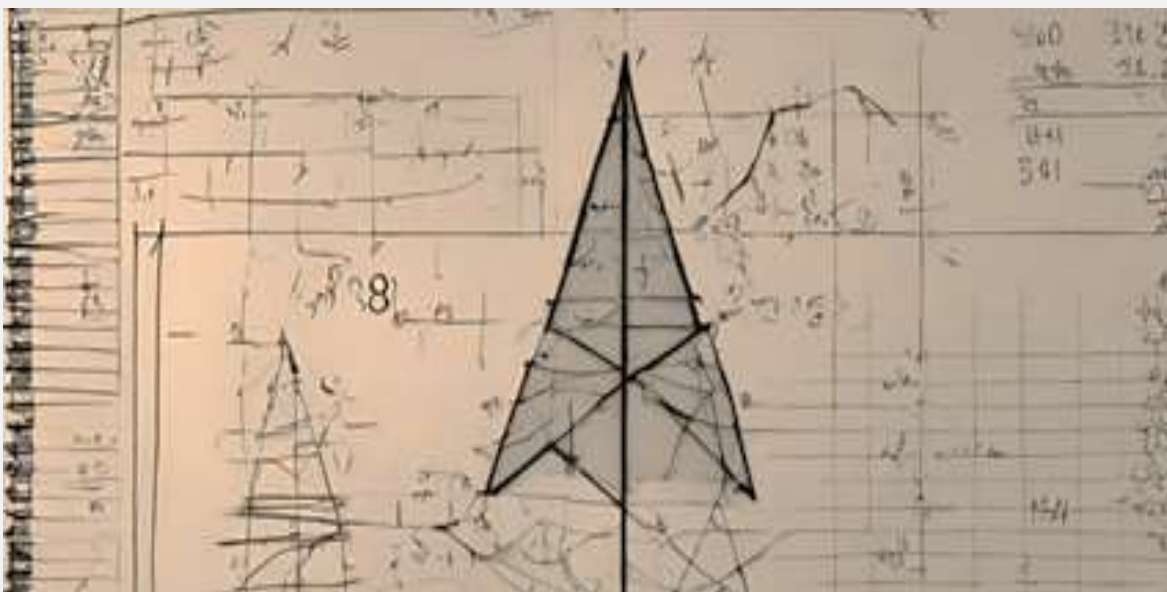
\*Exemple grupate în [anexa nr. 4](#)

Recomand ca rezolvarea acestor cerințe s-o realizezi prin *activitate individuală* și, după abordarea în mod independent, să *discuți rezultatele obținute în pereche/grupă* de colegi. *Urmărește* în discuțiile avute *variante de rezolvare* și *reține aspectele ce pot consolida propria învățare*. *Cere sprijinul* unui coleg/unei colege în situațiile în care întâmpini dificultăți, *dar numai după ce ai revăzut notițele* luate în cadrul activității de recapitulare.

După fiecare secțiune de lucru, ai un *spațiu rezervat în care să propui exerciții similare unui coleg din clasă/colegului/colegei de bancă* spre rezolvare, apoi îți recomand să le *discuțați împreună*. Este foarte *important să încerci să creezi propriile exerciții* după exemplele și modelele date, iar în discuțiile de după vei putea constata ce noi provocări apar. Dacă, în cadrul propunerilor care au fost realizate, au existat aspecte la care tu și colegul ați întâmpinat dificultăți, notează-le pentru a le discuta la o următoare oră de recapitulare.

Având în vedere faptul că, dincolo de tiparul probei de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat, elevii/elevele au nevoi și interese privind matematica, fie din perspectiva unor probe de admitere, fie din perspectiva unor probe de angajare sau a aplicării propriu-zise a matematicii în contexte profesionale diverse, pot propune o evaluare alternativă, axată pe literație/alfabetizare matematică, un exemplu fiind inclus în [anexa nr. 5](#) al acestor repere.

Nu în ultimul rând, atât pentru proiectarea și realizarea demersurilor didactice, cât și pentru elevi/eleve, pot ține cont de resurse educaționale deschise, parte au unor biblioteci virtuale, create în diverse formate. În acest sens, am identificat, utilizez și recomand elevilor/elevelor o serie de *link-uri* către platforme educaționale, câteva exemple fiind grupate în [anexa nr. 6](#) a acestor repere.



## Exemplificarea unei fișe de lucru

**1. Frații zecimale. Frații ordinare. Transformări****1.1. Transformați în fracții ordinare:**

$$0,8 = \dots; \quad 0,50 = \dots; \quad 8,1 = \dots; \quad 8,100 = \dots; \quad 8,001 = \dots; \quad 11,0 = \dots$$

**1.2. Transformați în fracții zecimale:**

$$\frac{9}{10} = \dots; \quad \frac{90}{10} = \dots; \quad \frac{9}{100} = \dots; \quad \frac{314}{100} = \dots; \quad \frac{4}{1000} = \dots$$

**1.3. (Extindere) Lecturați cu atenție transformările următoarelor fracții zecimale în fracții ordinare:**

$$0,(2) = \frac{2}{9}; \quad 0,(13) = \frac{13}{99}; \quad 0,2(5) \rightarrow \frac{025-02}{90}; \quad 0,2(5) = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90};$$

$$1,(047) = 1 + 0,(047) = \frac{1}{1} + \frac{47}{999} = \frac{999+47}{999} = \frac{1000+47-1}{999} = \frac{1047-1}{999} = \frac{1046}{999};$$

$$21,0(84) = \frac{21084-210}{990} = \frac{20874}{990} = \frac{10437}{495} = \frac{3479}{165}$$

După model, transformați:  $0,(4) = \dots$ ;  $2,(41) = \dots$ ;  $10,73(602) = \dots$

**1.4. (Extindere) Lecturați cu atenție transformările următoarelor fracții ordinare în fracții zecimale:**

$$\frac{7}{10} \rightarrow \frac{07,0}{10}; \quad \frac{7}{10} = 0,7; \quad \frac{271}{10} = \frac{271,0}{10} = 27,1; \quad \frac{41}{2} = 41:2 = 20,5 \text{ (efectuând împărțirea) sau}$$

$${}^5) \frac{41}{2} = \frac{41 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{205}{10} = \frac{205,0}{10} = 20,5 \text{ (prin amplificarea fracției și aducerea la numitor 10);}$$

$$\frac{23}{7} = 23:7 = 23,(285714)$$

$$\begin{array}{r} 23,000000 \dots | 7 \\ \underline{21} \phantom{000000} \\ =20 \phantom{000000} \\ 14 \phantom{000000} \\ \underline{14} \phantom{000000} \\ =60 \phantom{000000} \\ 56 \phantom{000000} \\ \underline{56} \phantom{000000} \\ =40 \phantom{000000} \\ 35 \phantom{000000} \\ \underline{35} \phantom{000000} \\ =50 \phantom{000000} \\ 49 \phantom{000000} \\ \underline{49} \phantom{000000} \\ =7 \phantom{000000} \\ 7 \phantom{000000} \\ \underline{7} \phantom{000000} \\ =30 \phantom{000000} \\ 28 \phantom{000000} \\ \underline{28} \phantom{000000} \\ =20 \phantom{000000} \\ 14 \phantom{000000} \\ \underline{14} \phantom{000000} \\ =6 \phantom{000000} \end{array}$$

$$\frac{5}{6} = 5:6 = 0,8(3)$$

$$\begin{array}{r} 5,000 \dots | 6 \\ \underline{0} \phantom{000} \\ 50 \phantom{000} \\ \underline{48} \phantom{000} \\ =20 \phantom{000} \\ 18 \phantom{000} \\ \underline{18} \phantom{000} \\ =20 \phantom{000} \\ \dots \end{array} \text{ sau}$$

După model, transformați:  $\frac{17}{2} = \dots$ ;  $\frac{3}{6} = \dots$ ;  $\frac{2}{9} = \dots$ ;  $\frac{3}{25} = \dots$ ;  $\frac{1}{7} = \dots$

Propunerea ta de exerciții de calcul pentru colegul de bancă:

...



**2. Operația de adunare. Calcul cu diferite tipuri de numere. Proprietăți**

$$0,2 + 0,7 = \dots ; \quad 0,4 + 0,4 = \dots ; \quad 10,1 + 1,01 = \dots ; \quad 4 + 0,3 = \dots ; \quad 0,9 + 0,08 = \dots ; \quad \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \dots$$
$$; \quad \frac{7}{10} + \frac{2}{10} = \dots ; \quad 0,4 + \frac{1}{10} = \dots ; \quad \frac{2}{10} + 0,2 = \dots ; \quad 0,7 + \frac{7}{10} = \dots ; \quad 0,7 + 0,4 = \dots ;$$
$$\frac{4}{10} + \frac{8}{10} = \frac{\dots + \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots, \dots ; \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \dots ; \quad \frac{1}{7} + \frac{12}{14} = \dots ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \dots$$

Propunerea ta de exerciții de calcul pentru colegul de bancă:

...

**3. Operația de înmulțire. Calcul cu diferite tipuri de numere. Proprietăți**

...

Propunerea ta de exerciții de calcul pentru colegul de bancă:

...

**4. Ordinea operațiilor**

...

Propunerea ta de exerciții de calcul pentru colegul de bancă:

...

**5. Calcul cu paranteze**

...

Propunerea ta de exerciții de calcul pentru colegul de bancă:

...

**6. Calcule similare cerinței de evaluare prezentate în cadrul activității de recapitulare**

Arătați că:

a)  $\left(0,5 + \frac{1}{10}\right) \cdot 10 = 6$  ;  $\left(\frac{3}{10} + 0,1\right) \cdot 10 = 4$  ;  $10 \cdot \left(0,6 + \frac{6}{10}\right) = 12$  ;

b)  $\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) : 10 = 0,05$  ;  $\left(0,5 - \frac{3}{10}\right) : 10 = 0,02$  ;  $\left(19,5 + \frac{5}{10}\right) : 10 = 2$  ;

c)  $\left[0, (3) + \frac{6}{9}\right] \cdot 10 = 10$  ;  $[1, 2(3) + 0, (6)] \cdot 10 = 19$  (extindere)

Propunerea ta de exerciții de calcul pentru colegul de bancă:

...

**7. Alte elemente abordate în activitatea de recapitulare**

...



### IV.2.3. Sunt profesor evaluator la examenul de bacalaureat. Ce am în vedere pentru a realiza o evaluare obiectivă?

În calitate de profesor evaluator, *fac parte din comisia de evaluare* constituită pentru un centru zonal de evaluare, în cadrul unei sesiuni a examenului național de bacalaureat. În această calitate, *atribuțiile pe care le am mi-au fost aduse la cunoștință prin fișa de atribuții*.

Având în vedere că, începând cu anul școlar 2024-2025, evaluarea lucrărilor scrise în cadrul examenului național de bacalaureat se realizează în format digital, am primit un *cont de utilizator* care îmi permite *accesul pe platforma dedicată* acestui examen. De asemenea, am primit și am lecturat *ghidul profesorului evaluator*.

Prin *logarea la contul meu de utilizator, am acces la copiile electronice ale lucrărilor repartizate spre evaluare, la baremele de evaluare și de notare, precum și la borderourile de notare, în format digital*.

*Borderourile-tip de notare* sunt generate de platforma dedicată pentru fiecare lucrare repartizată spre evaluare. Sunt responsabil de *înregistrarea electronică a rezultatului evaluării* în aceste borderouri-tip, în sensul *consemnării punctajelor acordate* pentru etape de rezolvare asociate tuturor itemilor ce constituie subiectul de examen, în baza baremului asociat tipului de subiect.

În *ghidul profesorului evaluator* elaborat pentru *Simularea examenului de bacalaureat 2024*, sunt cuprinse *informații (reguli) privind completarea borderoului electronic* la care m-am raportat/mă voi raporta, sub rezerva modificărilor pe care le va avea acest ghid la fiecare sesiune de examen:

*completez doar valorile permise, indicate în fiecare câmp; nu contează ordinea în care completez câmpurile;*

*pentru itemii obiectivi (precum în cazul subiectelor I și II la Evaluarea națională, clasa a VIII-a, matematică), completez răspunsul elevului, de exemplu: dacă elevul a ales varianta **b**, completez **b** în câmpul dedicat itemului; dacă elevul nu a ales nicio variantă sau a ales mai multe, completez **n** (de la non-răspuns);*

*pentru itemii subiectivi, completez punctajele, conform baremului, doar cu una dintre valorile permise (cele care apar în fiecare câmp); dacă elevul nu a răspuns, completez **0** (zero) în acel câmp;*

*pentru completarea borderoului, folosesc tastatura;*

*dacă am completat greșit un câmp, acesta se înroșește și primesc mesajul **Punctajul introdus nu este conform cu baremul pentru itemul ...**; din acest moment, niciun punctaj acordat nu va fi salvat; dacă nu identific unde este eroarea, este necesar să închid lucrarea, caz în care toate punctajele greșite vor fi șterse; pot relua, apoi, evaluarea lucrării.*

*acord atenție faptului că nota finală este calculată doar dacă am completat toate câmpurile. Dacă nu am completat toate câmpurile, platforma va afișa, în locul notei, mesajul **Nu există**.*

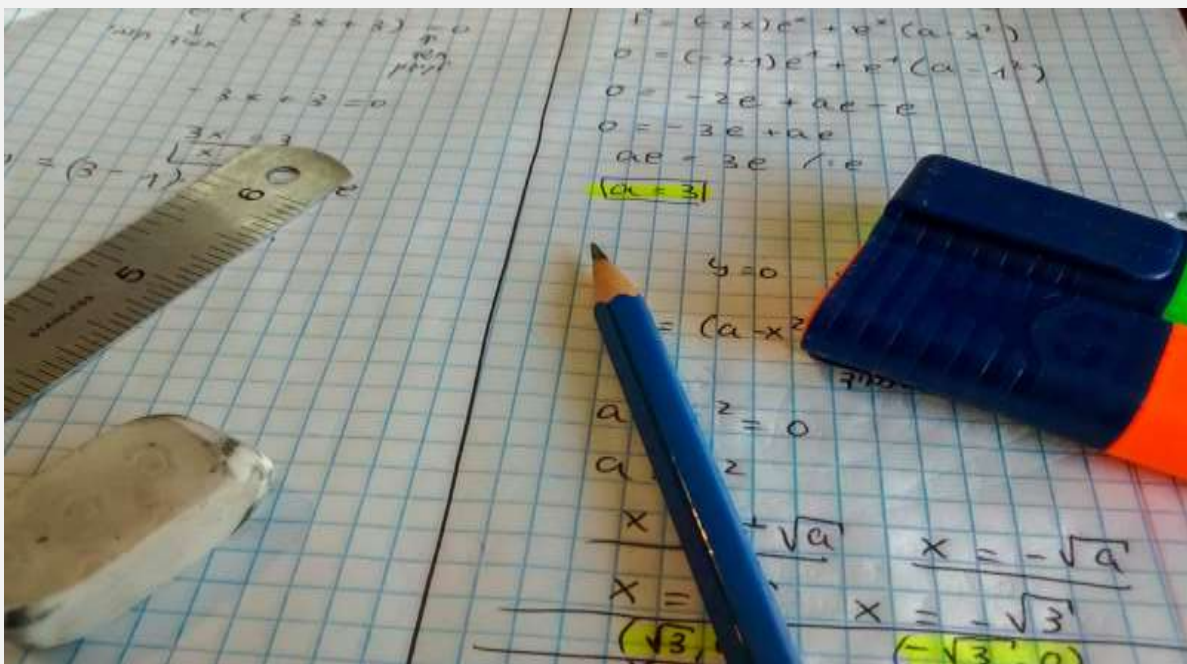
*Ghidul profesorului evaluator conține toate precizările bunei desfășurări a etapei de evaluare, în acest sens, pentru orice situație întâlnită, consult ghidul pentru a identifica modalitatea de abordare/rezolvare a situației respective.*

În *activitatea de evaluare propriu-zisă a lucrărilor scrise*, accesate în format electronic din platforma dedicată, *lecturez cu maximă responsabilitate* fiecare lucrare, *având în vedere baremul de evaluare și notare*. Acord atenție *situațiilor care necesită alocarea de punctaje parțiale, raportându-mă la barem* în situația în care strategia de rezolvare a unui item urmează pașii de rezolvare prezentați de barem, dar și în situația în care strategia de evaluare este diferită de cea prezentată în barem. Acord *punctajul maxim total* alocat itemului în situația în care *răspunsul (rezolvarea cerinței de lucru) este corect și este prezentat coerent, structurat, cu redactarea etapelor care au condus la răspuns, indiferent de strategia de rezolvare aleasă, atât timp cât nu conține erori.*

**Exemplificare:**

Raportare la instrumentul de evaluare	Informații:	Punctaje	Observații
<b>Item*</b>	Arătați că $\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = 5$ .	<b>5p</b>	Punctaj total/item
<b>Barem*</b>	$\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = (0,2 + 0,3) \cdot 10 =$	<b>3p</b>	Punctaj acordat integral pentru efectuarea corectă a transformării unei fracții ordinare în fracție zecimală
	<b>Variantă (3p):</b> $\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 =$ În situația în care elevul parcurge aceleași etape de raționament, dar nu reușește aducerea celor două fracții la aceeași formă sau încearcă adunarea directă a lor, dar cu eroare, punctajul acordat este 0. Într-un astfel de caz, punctajul celeilalte etape de raționament va fi tot 0.		
	$= 0,5 \cdot 10 = 5$  <b>Variante (2p):</b> $= \frac{5}{10} \cdot 10 = 5$ sau $0,2 \cdot 10 + 0,3 \cdot 10 = 2 + 3 = 5$ sau $\frac{2}{10} \cdot 10 + \frac{3}{10} \cdot 10 = 2 + 3 = 5$  În situația în care elevul a adus în mod corect fracțiile din paranteză la aceeași formă, dar greșește prima etapă de calcul (adunare/aplicarea proprietății de distributivitate), punctajul acordat este 0; dacă parcurge prima etapă corect (adunarea/aplicarea proprietății de distributivitate), dar greșește la calculul final (înmulțire/adunare), atunci punctajul acordat este 1.	<b>2p</b>	Punctaj acordat integral pentru efectuarea corectă a operațiilor de adunare și înmulțire.

\*Simulare 2024 – Examen național de bacalaureat, Subiectul I.1.









SECTIUNEA a V-a.  
ANEXE

*Dacă oamenii nu cred că  
matematica este simplă,  
este doar pentru că nu realizează  
cât de complicată este viața.*

**John von Neumann**

La elaborarea secțiunilor Reperelor metodologice de anul acesta, pentru învățământul liceal, filiera tehnologică, s-au identificat o serie de oportunități care să aducă plus-valoare didactică și metodică.

Pentru a păstra cursivitatea secțiunilor, anumite texte au fost reorganizate ca anexe la acestea, după cum urmează:

**Anexa nr. 1** – „Îmi va fi, vreodată, matematica de folos?” – material care reunește o sinteză a unor considerații privind legătura domeniului cunoașterii matematice cu alte domenii și cu probleme ale realității înconjurătoare.

**Anexa nr. 2** - Exemplificare de interacțiune elev/elevă sau profesor/profesoară cu aplicații care au componentă IA (inteligentă artificială generativă) – material structurat pe două componente:

- exemplu de dialog euristic între elev/elevă și ChatGPT, cu scop de întărire a învățării; la final identificându-se un posibil tipar de interacțiune cu valoarea educațională;
- exemplu de dialog euristic între profesor/profesoară și ChatGPT, atât cu scop de suport al proiectării unui demers didactic, cât și ca exemplu de utilizare în tipul activității cu elevii/elevele, finalizat cu o serie de concluzii

**Anexa nr. 3** - conține 3 organizatoare, astfel:

- 3.1. Acțiunile (cerințele, verbele) incluse în itemii subiectelor propuse în cadrul Simulării examenului național de bacalaureat, martie 2024;
- 3.2. Niveluri de competență și exemple de acțiuni/verbe asociate (având la bază taxonomia Bloom revizuită/extinsă)
- 3.3. Descrierea unor acțiuni (verbe) specifice domeniului matematic și care sunt utilizate în formularea unei cerințe de lucru/de evaluare

**Anexa nr. 4** - prezentarea unor organizatoare pentru întărirea învățării, utilizând diverse aplicații (MindOnMap, Canva), astfel:

- 4.1. Lista simbolurilor și scrierilor simbolic-matematice utilizate în enunțul subiectului comentat în secțiunea IV
- 4.2. Exemple de organizatoare (hărți mentale) în cadrul activităților de recapitulare – aplicație la subiectul I.1 din cadrul Simulării examenului național de bacalaureat 2024

**Anexa nr. 5** – Exemplu de cerințe de (auto)evaluare a competențelor de literație/alfabetizare matematică, având la bază subiectul I din cadrul instrumentului de evaluare asociat probei de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat

**Anexa nr. 6** - Recomandări de resurse educaționale deschise: prezentarea comentată a itemilor selectați din Subiectul I din cadrul testelor de antrenament elaborate de Ministerul Educației în perioada martie-iunie 2020, ca suport la învățării elevilor în contextul pandemiei COVID-19, precum și promovarea lecțiilor filmate în cadrul programului Teleșcoală (TVR 2)

**Anexa nr. 1**

„Dacă vrei să ajungeți istorici, învățați matematică.  
Și le spun de ce.  
Dacă vrei să ajungeți medici, învățați matematică  
Și le spun de ce.  
Și dacă vrei să ajungeți pictori, sculptori, muzicanți,  
critici literari. Și le spun de ce.  
Și copiii înțeleg.“  
(Grigore Moisil, Contemporanul, 1972)

**Îmi va fi, vreodată, matematica de folos?**

Întrebarea din titlu face parte din categoria „evergreen” în universul elevilor și ar trebui să i se găsească răspuns la fiecare oră de matematică din școală, pentru ca cele învățate să se transforme într-o explozie de imaginație în rezolvarea problemelor din lumea reală.

Catedralele gotice, apeductele, turnurile de vânt, iluminatul electric, locomotiva cu aburi, sistemele de navigare, podurile, aeroplanul, turbinele eoliene, calculatorul, internetul, telefonul mobil, realitatea virtuală (VR) sau cea augmentată (AV), fațadele adaptive, vehiculele autonome, sateliții artificiali, *blockchainul*, internetul tuturor lucrurilor ne trezesc curiozitatea și imaginația, fiind doar câteva dintre inovațiile fundamentate pe matematică și care au schimbat în mod ireversibil lumea în care trăim.

*Matematica ne oferă o cale de a descoperi și înțelege structuri din natură, de a le adapta, dându-le inovatoare funcționalități, de a construi și cuantifica relații, de a crea conexiuni și modele, de a prezice evoluția unor evenimente.*

*Matematica oferă conceptele și instrumentele necesare pentru ca algoritmi de inteligență artificială să analizeze volume foarte mari de date, să învețe modele și să ne sprijine în luarea unor decizii informate (de exemplu, în *medicină* pentru identificarea timpurie a celulelor bolnave și recomandarea unui tratament personalizat, în *securitate cibernetică* pentru identificarea fraudelor). *Matematica este o componentă esențială* în crearea și implementarea cu succes a sistemelor inteligente. Oferă *baza teoretică și instrumentele practice* necesare pentru proiectarea, analiza și integrarea algoritmilor și modelelor IA care, la rândul lor, sprijină dezvoltarea unor tehnologii remarcabile precum asistența vocală, traducerea automată, vederea artificială și nu în ultimul rând a fascinantului și controversatului *ChatGPT*.*

*G. H. Hardy*, un susținător al matematicii teoretice „pure”, cunoscut pentru realizările în *teoria numerelor* și în domeniul *analizei matematice*, dar cunoscut și datorită principiului de bază din *genetica populației* care-i poartă numele, *principiul Hardy-Weinberg*, remarcă, în celebra carte „*A Mathematician’s Apology*” (1940), faptul că în matematică tiparele sunt create din idei, ideile fiind singurul material pe care un matematician îl are la dispoziție, și comparându-le cu cele create de pictor cu ajutorul formelor și culorilor sau cele create de poeți prin jocul cuvintelor, afirmă:

„Modelele create de matematician, ca și cele create de pictor sau poet, trebuie să fie frumoase; ideile, ca și culorile sau cuvintele, trebuie să se potrivească într-un mod armonios. Frumusețea este primul test: nu există un loc permanent în lume pentru o matematică urâtă.” (Hardy, p. 14).

Dacă rămânem în sfera modelelor frumos construite pe idei, ne aducem aminte de modul în care *Solomon Marcus* amintea că „teorema”, un concept caracteristic matematicii provine din limba greacă, unde însemna „spectacol”, iar spectacolul reprezintă - spunea profesorul - „numitorul comun în orice profesie”. Aruncând o privire peste domeniile matematicii, nu cu mult efort îi regăsim ambasadorii în *spectacolul lumii*.

*Matematica are un substrat revelator construit pe structuri logice*. Acestea joacă un rol esențial în explicarea fenomenelor naturale și în evoluțiile tehnologice, dar are și un substrat filosofic.

Studierea *geometriei* și *topologiei* este *esențială pentru a înțelege și explica ideile, conceptele, tehnicile care stau la baza modelării spațiului arhitectural* din întreaga lume, de la construcțiile sumeriene din cărămizi de nămol și paie mărunțite ce impuneau formele și configurațiile (*materialele impun forma*), la proiectele experimentale ale arhitecturii contemporane ale căror forme stranii, obținute prin transformări continue, impun descoperirea de materiale inovative pentru a le putea transforma în arhitectură construită (*proiectarea unor materiale pentru o structură propusă*), o schimbare de paradigmă în care matematica a jucat un rol esențial dând relațiilor spațiale non-metrică un rol important în noile configurații arhitecturale.

În cartea „*Introduction in Mathematical Thinking*”, *Keith Devlin*, afirmă că dezvoltarea spectaculoasă a matematicii a condus în anii 1980 la definirea acesteia ca știință a analizei tiparelor, identificând printre acestea: tipare numerice, geometrice, de mișcare, de comportament, ale modului în care se votează într-o populație, de repetare a evenimentelor probabiliste; iar diferite tipuri de tipare (patterns) sunt asociate diferitelor ramuri ale matematicii (de exemplu, calculul facilitează studiul modelelor sistemelor dinamice, topologiei îi sunt asociate modele ale vecinătăților, fractalilor autosimilaritatea din natură).

De exemplu, *tiparele geometrice* se regăsesc în arta și arhitectura islamică – sub forme geometrice sau biomorfe aranjate în configurații artistice – putând fi folosite drept context pentru a explora și înțelege *grupurile de simetrie*. Reamintim că cel care a anunțat ca nouă direcție de cercetare abordarea teoriei grupurilor, ce utilizează metode algebrice de abstractizare a conceptului de simetrie, pentru a caracteriza diferite geometrii, a fost *Felix Klein*, în discursul inaugural de la Universitatea Erlangen (1872).

*Cu ajutorul instrumentelor matematice potrivite putem da sens lumii și rezolva probleme complexe, interconectate, imprevizibile cu ancore în realitate* (de exemplu, modelarea matematică cu scopul prevenirii accidentelor aviatice, prevenirea fraudelor bancare, privind declinul dramatic al populației în diferite zone ale lumii, privind pericolul dispariției unor sisteme bio-ecologice precum reciful de corali, răspândirea bolilor sau crearea unor scheme de tratament pentru eradicarea lor, problemele climatice asociate unor fenomene precum *El Niño*, topirea ghețarilor sau emisiile de gaze cu efect de seră).

Prin *algebră*, putem explica cât de repede se pot contamina sursele de apă, creând o multitudine de probleme de sănătate, sociale și de mediu care limitează posibilitățile oamenilor de a duce o viață sănătoasă, activă, rodnică.

*Statistica și teoria probabilităților* oferă instrumente solide și tehnici riguroase în modelarea și simularea răspândirii bolilor infecțioase (create de viruși precum *ebola*, *HIV*, *SARS-CoV-2* sau de bacterii precum holera). Putem estima numărul deceselor în cazul conflictelor militare, numărul persoanelor afectate în urma unor dezastre naturale, cum ar fi erupțiile vulcanice, inundațiile, cutremurele sau tsunami-urile și a altor calamități, volumul ajutoarelor care ar putea fi necesare pentru a veni în sprijinul acestora, numărul de persoane care ar trebui strămutate. Putem crea modele care să ofere soluții pentru repopularea siturilor cu o faună pe cale de dispariție. Putem prezice profiturile și putem oferi modele de strategie care să susțină succesul unei afaceri.

Analiza rețelelor media sociale, prin intermediul *teoriei grafurilor* și *teoriei jocurilor*, constituie un instrument puternic pentru înțelegerea modului în care o informație devine virală și, astfel, putem oferi modele fiabile ale modului în care se răspândesc știrile false sau caracteriza rolul pe care tacticile de manipulare a maselor îl joacă în generarea unor conflicte.

Înțelegerea lumii, a relațiilor ce o definesc și contribuie la dezvoltarea ei presupune și cunoașterea, înțelegerea și aprecierea diverselor civilizații și culturi. *Matematica a construit punți între acestea.*

În *algebră*, de exemplu, amintim sistemele numerice poziționale ce leagă de-a lungul secolelor moștenirile matematice de pe continente și au servit drept fundație atât în organizarea vieții cotidiene cât și în dezvoltarea tehnologică: baza 20 (vigesimală), utilizată de mayași și azteci, este folosită încă în unele limbi în structura lingvistică a numerelor, de exemplu cele franceze – *quatre-vingts* (patru-douăzeci), *quatre-vingt-seize* (patru-douăzeci-șaisprezece) – sau în informatică de sistemul OLC (*Open Location Code*), dezvoltat de *Google* pentru codificarea zonelor geografice; baza 60 (sexagesimală), întrebuițată de vechii sumerieni și utilizată astăzi într-o formă modificată pentru măsurarea timpului (împărțirea orei în intervale de 60 de minute) și a unghiurilor (cele 360° ale unui cerc); baza 10 (zecimală), elaborată de indieni și perfecționată de arabi a căror contribuție



majoră adusă acestui sistem a fost introducerea cifrei 0, menționată pentru prima dată în lucrările matematicianului și scriitorului persan *al-Khwarizmi*, amintit adesea în literatură ca „părintele algebrei”, cel care a dat numele și celei mai importante noțiuni cu care lucrează informatica, *algoritmul*. Inițial *algoritmul* reprezenta o regulă pe baza căreia se efectuau calcule aritmetice, în timp a evoluat transformându-se într-o modalitate fundamentală de abordare a problemelor în informatică, unii dintre cei mai populari fiind *algoritmii genetici*. Aceștia reprezintă metode de căutare bazate pe principiile selecției naturale și geneticii, care au proprietatea de a deveni performanți în timp ce rulează (utilizați în optimizarea tranzacțiilor la bursă, optimizarea rețelelor neuronale în scenariile de jocuri în care capacitatea de a se adapta la strategiile adversarilor este primordială, în screening-ul bolilor, diagnostic, planificarea tratamentului și managementul asistenței medicale, în sprijinul matematicii pentru a găsi maximul relativ al unei funcții diferențiabile care este dificil de găsit prin metode analitice).

Un *exemplu de utilizare a algoritmilor genetici* îl găsim în programarea zborurilor. Să presupunem că trebuie să elaborăm un program pentru decolări și aterizări pe un aeroport foarte aglomerat, de exemplu Aeroportul „Henri Coandă”. Scopul este de a crea un orar care să respecte cerințele de siguranță, restricțiile privind perioada de timp dintre aterizare și decolare, cerințele companiilor aeriene privind aterizările și decolările săptămânale precum și alte constrângeri legate de siguranța pasagerilor, reducând în același timp la minim timpul în care un avion se află inutil la sol. *Problema organizării zborurilor poate fi enunțată sub forma unor ecuații matematice complexe de optimizare*, dar nu există nicio modalitate de a rezolva complet astfel de probleme.

Utilizarea algoritmilor genetici oferă o abordare diferită. În primul rând, construim un orar, care poate fi departe de a fi optim, dar satisface diferitele constrângeri. Apoi, încercăm diverse mutații, mici modificări ale orarului, îndeplinind totuși toate cerințele. Pentru fiecare mutație, măsurăm dacă indicele de optimizare s-a îmbunătățit și, dacă da, cu cât. Apoi selectăm zece rezultate cu cele mai bune variante de optimizare. Pentru fiecare dintre acestea, repetăm procesul, adică introducem modificări suplimentare și selectăm din nou cele mai bune zece dintre aceste rezultate de a doua generație. Continuăm să repetăm procesul până când nu mai există nicio îmbunătățire semnificativă a rezultatelor. Rezultatul final poate depinde de orarul inițial propus. Câteva astfel de încercări vor produce un orar satisfăcător pentru aeroport și călători.

Această tehnică adaptivă bazată pe principii ale geneticii și selecției naturale este utilizată pe scară largă în industrie, economie, robotică. Utilizări recente ale metodei implică identificarea de ecuații sau, legi ale naturii care stau la baza datelor experimentale. Dar acest lucru nu este tocmai nou în matematică, *Gauss* bazându-se pe măsurătorile disponibile cu privire la asteroidul Ceres și, folosind metoda celor mai mici pătrate pentru parametrii ecuațiilor de mișcare a asteroidului, a prezis când va reapărea Ceres din spatele Soarelui. Punctul de plecare al lui Gauss a fost informația că ecuațiile mișcării lui Ceres erau ecuații diferențiale ale lui *Newton*.

*Economia* oferă un alt exemplu. Practica curentă în cercetarea economiei aplicate este de a asuma o *formă generală de dependență între două variabile* macroeconomice, de exemplu, de intrare și de ieșire, și de a folosi calcule matematice pentru a găsi parametrii care asigură cea mai bună corelație. În astfel de cazuri și în altele similare, prima propunere, fie că este vorba despre ecuațiile lui *Newton*, fie despre relația dintre intrare și ieșire, se bazează pe înțelegerea umană.

Pe măsură ce inteligența mașinilor evoluează și contribuie la modelarea lumii în care trăim prin intermediul unor aplicații valoroase sau controversate, *asocierea dintre domeniile matematicii și inteligența artificială rămâne crucială*, înlăturând frontiere și oferind oportunități remarcabile de inovare.

*Inteligența artificială* (IA) remodelează și revoluționează modul în care trăim, lucrăm și interacționăm. Se referă la simularea proceselor de inteligență umană de către mașini, în special de către sisteme informatice, algoritmii genetici sunt o formă de IA. Aceasta implică dezvoltarea de sisteme informatice care pot îndeplini sarcini care necesită în mod obișnuit inteligența umană, cum ar fi rezolvarea problemelor, raționamentul, învățarea și luarea deciziilor.

*Matematica joacă un rol important în diverse aspecte ale inteligenței artificiale, inclusiv în învățarea automată, învățarea profundă și procesarea limbajului natural*. În învățarea automată, concepte matematice precum *algebra liniară, calculul diferențial și integral, precum și teoria probabilităților* sunt esențiale pentru înțelegerea și dezvoltarea de algoritmi care pot învăța din date.

Acești algoritmi utilizează tehnici matematice pentru a recunoaște tipare, a face predicții și a rezolva probleme complexe.

Învățarea profundă, un subdomeniu al învățării automate, se bazează în mare măsură pe concepte matematice avansate, cum ar fi operațiile cu *matrice*, *algoritmii de optimizare*.

*Rețelele neuronale*, elementele de bază ale modelelor de învățare profundă, se bazează pe modele matematice ale nodurilor interconectate care procesează și transformă datele.

În plus, *matematica contribuie la procesarea limbajului natural*, permițând mașinilor să înțeleagă și să genereze limbajul uman. *Modelele statistice* și algoritmii bazați pe *teoria probabilităților* sunt utilizați pentru a analiza și procesa datele nestructurate (ex. colecțiile de texte) pentru a obține o analiză a sentimentelor în contextul comentariilor sau postărilor de imagini pe diverse platforme sociale în legătură cu un anumit subiect (*X*, *Facebook*, *LinkedIn*, *Instagram*, *Pinterest*), traduceri automate din diverse limbi, sau recomandări pe platformele ce oferă servicii de *streaming* (*Apple music*, *Deezer*, *Spotify*, *Netflix*).

*Calculul diferențial*, *calculul multivariat*, *calculul integral*, *minimizarea erorilor* și *optimizarea prin metoda gradientului*, *limitele* și *regresiile logistice avansate* sunt toate concepte utilizate în modelarea matematică. Modelarea *in silico*, care reprezintă aplicarea abordărilor de inteligență artificială în biomedicină, este un model complet automatizat care nu necesită probe umane, teste pe animale, studii clinice sau echipamente de laborator. În model se utilizează o ecuație matematică diferențială pentru a testa noi ipoteze și pentru a evalua noi ținte terapeutice. Este cea mai ieftină și convenabilă modalitate de a studia răspunsurile bolilor la medicamente prin manipularea parametrilor modelului matematic.

Este important de reținut că IA nu este sinonimă cu inteligența umană. Deși sistemele de IA pot imita anumite aspecte ale inteligenței umane, acestea nu posedă conștiință sau emoții. Inteligența artificială este un instrument care poate spori capacitățile umane și poate ajuta în diverse domenii, cum ar fi asistența medicală, finanțele, transporturi.

În spatele progreselor și capabilităților remarcabile ale IA se află rolul fundamental al matematicii. Matematica oferă cadrul care permite sistemelor IA să învețe, să raționeze și să ia decizii inteligente.

Matematica servește drept coloana vertebrală a algoritmilor și modelelor IA, dând putere mașinilor să proceseze, să analizeze și să interpreteze cantități mari de date atât structurate cât și nestructurate. Conceptele din algebra liniară, calcul, analiză matematică, teoria probabilităților și statistică sunt esențiale pentru dezvoltarea algoritmilor de învățare automată. Acești algoritmi folosesc ecuații și funcții matematice pentru a identifica tipare, a face predicții și a clasifica informațiile.

*Algebra liniară* ajută la generarea de noi idei, poate abstractiza date și modele folosind *scalari*, *vectori*, *tensori*, *matrice*, *noțiuni de topologie*, *elemente de teoria jocurilor* și *teoria grafurilor*, *funcții*, *transformări liniare*, *valori proprii* și *vectori proprii*. Este fundamentală în proiectarea rețelelor neuronale, învățarea ei dezvoltând trei moduri de gândire: algebrică prin abordarea corectă a simbolurilor într-un cadru logic consistent (de exemplu pentru a rezolva ecuații); geometrică prin extinderea conceptelor cunoscute bi- și tridimensionale la dimensiuni superioare într-un mod riguros; computațională clarificând relația dintre structurile algebrice abstracte și calculele reale ajungând la un răspuns într-un mod eficient.

Știința din spatele clasamentului stabilit de motoarele de căutare se bazează pe noțiuni de matematică. Clasamentul paginilor, care reprezintă însăși fundamentul Google, se bazează pe perspectiva matematică. *Page rank* este algoritmul, formulat inițial de *Larry Page* și *Sergey Brin* în lucrarea lor de cercetare „Anatomia unui motor de căutare web hipertextuală pe scară largă”. Pentru a face această descoperire, au aplicat conceptele de bază ale valorilor proprii principale și vectorilor proprii, care există de sute de ani.

În programarea liniară, *vectorii* sunt folosiți pentru a trata inegalitățile și sistemele de ecuații. Se utilizează diferite tehnici, vectori pentru a rezolva probleme de regresie, de grupare, de recunoaștere a vorbirii și de traducere automată. Conceptele sunt, de asemenea, utilizate pentru a stoca reprezentările interne ale modelelor de inteligență artificială, cum ar fi clasificatoarele liniare și rețelele de învățare profundă.

*Matricele și vectorii* sunt folosiți pentru a reprezenta și manipula datele în rețelele neuronale, facilitând calculele complexe și permițând sistemelor IA să extragă informații semnificative din date. *Calculul diferențial și integral* joacă un rol important în optimizarea modelelor IA. Tehnici precum coborârea în gradient și propagarea inversă (aplicate în antrenarea rețelelor neuronale) utilizează calculul diferențial și integral pentru a minimiza erorile și pentru a ajusta parametrii modelelor de învățare automată. Aceste tehnici matematice permit sistemelor IA să învețe din date și să își îmbunătățească continuu performanța.

Teoria probabilităților și statistica sunt vitale în IA pentru sarcini precum procesarea limbajului natural, viziunea computerizată și luarea deciziilor. *Distribuțiile de probabilitate, inferența bayesiană și testarea ipotezelor* oferă cadrul matematic pentru a cuantifica incertitudinea, a analiza datele și a face predicții probabilistice. Aplicarea matematicii în IA este fundamentală pentru dezvoltarea și succesul sistemelor inteligente. Matematica oferă instrumentele și conceptele necesare pentru ca algoritmi IA să proceseze date, să învețe tipare (patternuri) și să ia decizii informate. Pe măsură ce IA continuă să evolueze și să modeleze lumea reală, legătura dintre matematică și IA va rămâne crucială, deblocând noi frontiere și posibilități de inovare. Valorificând puterea matematicii, IA are potențialul de a transforma industriile, de a rezolva probleme complexe și de a ne îmbunătăți viața de zi cu zi în moduri remarcabile. Ceea ce pare farmec, iluzie în relația cu tehnologii precum *ChatGPT* sau *Midjourney*, este de fapt matematică. *Grigore Moisil* afirma, în unul dintre interviurile sale, că „*Matematicii îi aparține fantezia, imaginația, demonstrația. Toate au un caracter pur uman și nu pot fi făcute decât de oameni. Când vrem să le mecanizăm, demonstrația se reduce la un calcul, iar fantezia la un șir de întâmplări*”.

Aceste tehnologii bazate pe *rețelele generative adverse* ce pot crea date complet noi construite pe concepte matematice din *teoria jocurilor*, au în spate o problemă serioasă, tot de matematică, ce ne dă frisoane. Dacă interacționăm cu un *Chatbot* (*ChatGPT*, *Copilot* sau *Gemini*) observăm că, în esență, IA poate oferi răspunsuri convingătoare, dar inexacte. „Tot ceea ce generează este plauzibil”, spune *Rayid Ghani*, un reputat profesor de la *Heinz College of Information Systems and Public Policy (Carnegie Mellon)*. „Și exact pentru asta a fost conceput, să genereze lucruri plauzibile, mai degrabă decât lucruri corecte din punct de vedere faptic, pentru că nu cunoaște diferența dintre corect din punct de vedere real și plauzibil.”

Ideile din spatele acestor tehnologii (de exemplu, *ChatGPT* de la *OpenAI* sau *Bard* de la *Google*) și posibilitatea de a imita comportamentul uman sunt realizate tot cu ajutorul conceptelor matematice, se bazează pe teoria probabilităților și statistică. Modelele create pot detecta tipare (patternuri) ale limbajului uman suficient de bine pentru a răspunde cu o luciditate uluitoare, dar nu înțeleg cu adevărat subiectul. Având în vedere un cuvânt sau o literă, modelele se referă la datele lor de antrenament și determină cuvântul sau setul de cuvinte, cel mai probabil să apară în continuare, creând uneori informații periculoase false, înșelătoare, greu de a le putea discerne. Este cunoscut faptul că *ChatGPT* a creat un malware polimorfic care este o tulpină de malware ce evoluează, își modifică frecvent caracteristicile pentru a evita detectarea de către soluțiile de securitate tradiționale. Acesta utilizează tehnici evazive prin modificarea unor mici secțiuni din codul său original, modificându-și aspectul, caracteristicile și comportamentul.

Matematica îi ajută pe oamenii de știință din domeniul inteligenței artificiale să rezolve probleme abstracte, dificile, folosind metode și tehnici tradiționale cunoscute de sute de ani. Dar *matematica ne ajută și pe fiecare dintre noi la înțelegerea raționamentului logic și antrenează atenția la detalii. Îmbunătățește abilitățile de a gândi sub presiunea timpului și crește rezistența mentală (o abilitate care ne ajută să fim puternici în fața adversității)*. Conceptele matematice oferă soluția reală la probleme ipotetice sau virtuale. Este vorba de structură, de dezvoltarea unor principii care rămân valabile chiar dacă facem o modificare a componentelor, de construcții cu ajutorul ideilor despre care aminteam la începutul eseului.

*Matematica poate îmbunătăți gândirea analitică*, o abilitate care este vitală în IA. Matematica este cea care creează magia din spatele acestor invenții. Pentru a conduce în lumea de astăzi, bazată pe IA, trebuie să stăpânești concepte matematice ce oferă un fundament teoretic pentru:

- alegerea unor strategii de management și comunicare care să devină dinamice și competitive;
- înțelegerea și crearea instrumentelor necesare modelării unor fenomene naturale sau evenimente sociale, politice, economice;
- explicarea, prin intermediul modelelor, complexității și interdependenței evenimentelor în orice domeniu;
- luarea și susținerea unei decizii informate, ținând seama de context.

În spatele tuturor progreselor semnificative din tehnologie se află matematica: *noțiuni și concepte de algebră liniară, analiză matematică, teoria jocurilor, teoria probabilităților, statistică, analiza rețelelor, geometrie, topologie* etc. Inteligența artificială și matematica sunt ramuri ale aceluiași copac. A fi un utilizator pasiv, pasionat al gadgeturilor sau jocurilor pe calculator și admirator al SF-ului nu mai este suficient, pentru că aceste tehnologii impun un nivel de cunoaștere a noțiunilor matematice și multă imaginație.

### Bibliografie selectivă

Arstein Zvi (2014) - Mathematics and the Real World: The Remarkable Role of Evolution in the Making of Mathematics, A Prometheus Books

Casti John L. (1996) – Five Golden Rules: Great Theories of 20th-Century Mathematics and Why They Matter, Wiley

Devlin Keith (1994) - Mathematics: The Science of Patterns The Search for Order in Life, Mind, and the Universe, W H Freeman & Co

Hardy, G. H. (1992) - A mathematician's apology. With a foreword by C. P. Snow. Cambridge: Cambridge University Press. (Originalul publicat în 1940)

Hurst Edward (2009) - Bridging the Gap to University Mathematics, Springer

Bill Brink – Generative AI is a Math Problem. Left unchecked, it could be a real problem

<https://www.heinz.cmu.edu/media/2023/July/generative-ai-is-a-math-problem-left-unchecked-it-could-be-a-real-problem>

Neil Sahota - The AI Factor In Political Campaigns: Revolutionizing Modern Politics, Forbes, Jan 2024

<https://www.forbes.com/sites/neilsahota/2024/01/12/the-ai-factor-in-political-campaigns-revolutionizing-modern-politics/>

Sergey Brin, Lawrence Page - The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine

<https://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/Brin98Anatomy.pdf>



**Anexa nr. 2****Exemplificare de interacțiune elev/elevă sau profesor/profesoară cu aplicații care au componentă IA (inteligentă artificială generativă)**

Sunt elev.

Pot folosi aplicații de tip IA (inteligentă artificială) pentru a-mi consolida învățarea?

Sunt profesor.

Ce răspuns îi pot da elevului și cum îl pot ghida pentru ca utilizarea IA să fie un sprijin real pentru învățare?

Cum integrez IA în activitatea didactică, la clasă, ca sprijin al predării și evaluării?

**2.1. Ca elev/elevă:**

- pot folosi o aplicație IA creând un cont prin care am acces la aceasta;
- înțeleg că sprijinul în propria învățare pe care mi-l poate oferi inteligența artificială poate fi de următoarele tipuri\*:
- *IA ca mentor/tutor/antrenor și în același timp ca elev:* pot include idei și raționamente asupra cărora cer un feedback din partea IA; în situația în care ceva nu este corect/nu este clar explicat, formulez cerințe/întrebări suplimentare prin care ajut IA să se autocorecteze și să-și îmbunătățească feedback-ul;
- *IA ca furnizor de clarificări asupra anumitor concepte sau ca sprijin în identificarea de strategii privind rezolvarea de probleme.*

\*prelucrare după [Use of generative AI for teaching, learning and assessment | Staff | Imperial College London](#)

În cele ce urmează, am realizat un exemplu de conversație cu ChatGPT, pornind de la o „greșeală intenționată”, posibil de întâlnit în rezolvările anumitor elevi/eleve. Cum rezultatul final nu este cel așteptat, în situația în care, în activitatea sa de consolidare a învățării elevul/eleva nu are acces la un manual/coleg/profesor pentru a solicita clarificare, poate iniția o conversație cu IA.

**Exemplificare interacțiune elev/elevă - IA**

<b>Cerința/Întrebarea elevului/elevei și răspunsul ChatGPT*</b>	<b>Observații/Limite/Cum pot sprijini elevul/eleva</b>
<p>Elev: Este corectă rezolvarea următorului calcul: <math>(0,2+3/10) \times 10 = 0,5/10 \times 10 = 0,5</math>? (1)</p> <p>ChatGPT</p> <p>Da, rezolvarea este corectă. (2)</p> <p>Pas cu pas:</p> <p>1. <math>\left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10</math> (3)</p> <p>Întâi, evaluăm expresia din paranteză:</p> $0,2 + \frac{3}{10} = 0,2 + 0,3 = 0,5.$	<p>(1) Ca <i>limită a utilizării aplicației</i>, aceasta nu permite copiere-lipire a unei capturi de ecran/fotografierea unui text matematic, în acest sens elevul trebuie să găsească, în elementele obișnuite ale tastaturii, soluțiile de redactare a textului matematic.</p> <p>(2) Aplicația nu sesizează diferența de rezultat și prin afirmația inițială, induce elevului/elevei un <i>grad mare de incertitudine</i>, afirmând în același timp că rezolvarea este corectă, ceea ce ar presupune că rezultatul 0,5 este cel așteptat, în același timp prin rezolvarea</p>

<p>Apoi, înmulțim rezultatul cu 10: <math>0.5 \cdot 10 = 5</math>.</p> <p>Deci, rezultatul final este 5.</p>	<p>descrișă de aplicație, corectă de altfel, se ajunge la rezultatul 5, care este cel corect. O astfel de situație poate determina elevul/eleva să renunțe la utilizarea IA, considerând, pe bună dreptate că „mai mult încurcă, decât descurcă”.</p> <p>(3) Deși formalismul matematic este bazat pe un pachet de simboluri unitar utilizate în diferite sisteme de educație matematică, există o serie de <i>convenții și notații</i> care pot varia în exprimarea formal matematică. Un astfel de exemplu îl reprezintă și <i>notația utilizată pentru fracțiile zecimale</i>; în sistemul nostru de învățământ și în uzul curent se folosește <i>virgula</i> pentru separarea părții ce corespunde întregilor de partea ce corespunde zecimalelor; ChatGPT utilizează <i>punctul</i> pentru a separa cele două părți. Într-o astfel de <i>dualitate a notațiilor</i>, elevul/eleva este pus/pusă în fața unor provocări de care trebuie să țină cont, să le înțeleagă/interpreteze.</p>
<p>Elev: <b>Dar eu am obținut 0,5 ca rezultat...</b> (4)</p> <p>ChatGPT</p> <p>Vă rog să îmi permiteți să revizuiesc calculele. Începând cu expresia originală:</p> $\left(0.2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10$ <ol style="list-style-type: none"><li>1. Calculăm suma din paranteză: <math display="block">0.2 + \frac{3}{10} = 0.2 + 0.3 = 0.5</math></li><li>2. Apoi înmulțim această sumă cu 10: <math>0.5 \cdot 10 = 5</math>.</li></ol> <p>Deci, rezultatul corect al expresiei este, de fapt, 5, nu 0.5. <b>Vă rog să verificați din nou calculele sau să-mi furnizați mai multe detalii pentru a înțelege mai bine situația.</b> (5)</p>	<p>(4) Având în vedere că elevul/eleva are explicit rezultatul pe care trebuia să-l obțină prin calcul, este natural să nu accepte răspunsul inițial. În acest sens, ca <i>parte a învățării</i>, ca profesor trebuie să îndrumăm pe elev/elevă să valorizeze contextul prin <i>formularea de întrebări</i> clarificatoare către IA.</p> <p>(5) Mesajul este extrem de folositor pentru elev/elevă, deoarece este un îndemn spre reflecție, spre a identifica singur eroarea/erorile de calcul. De asemenea, este exprimată deschiderea IA pentru a furniza explicații suplimentare în cazul în care cele enunțate nu sunt pe înțelesul elevului și este important să <i>încurajăm elevul/eleva să reformuleze o întrebare/cerință în baza căreia să primească noi informații utile</i>.</p>
<p>Elev: Unde anume am o greșală?</p> <p>ChatGPT</p> <p><i>Vă cer scuze pentru confuzie.</i> (6) Analiza corectă a expresiei este următoarea:</p> $\left(0.2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10$ <ol style="list-style-type: none"><li>1. Calculăm suma din paranteză: <math display="block">0.2 + \frac{3}{10} = 0.2 + 0.3 = 0.5</math></li><li>2. Apoi înmulțim această sumă cu 10: <math>0.5 \cdot 10 = 5</math>.</li></ol>	<p>(6) O caracteristică a aplicației este <i>disponibilitatea de a explica/reformula un răspuns de oricâte ori îi este cerut</i>, ceea ce ar trebui să fie mulțumitor pentru elev/elevă.</p> <p>(7) <i>Aplicația sesizează zona care conține eroare, dar nu este capabilă să înțeleagă/să explice cum s-a produs sau ce a condus elevul/eleva la obținerea rezultatului intermediar greșit</i>. În acest sens, validează răspunsul final greșit (0,5), sugerând că restul calculului este corect. <i>Elevul/eleva trebuie obișnuit/obișnuită să descifreze informația</i></p>

<p>Cu toate acestea, în calculul dvs. inițial, ați scris <math>0,5/10 \times 10</math>, ceea ce este diferit de expresia inițială. Acest lucru ar fi într-adevăr 0.5, deoarece <math>0.5/10</math> este 0.05 și, când este înmulțit cu 10, devine 0.5. Deci, ați avea dreptate în acea situație.</p> <p>Deci, îmi pare rău pentru confuzie, în funcție de expresia inițială, rezultatul corect ar fi 5, dar pentru expresia <math>0.5/10 \times 10</math>, rezultatul corect este într-adevăr 0.5. Vă rog să mă scuzați pentru orice neclaritate. (7)</p>	<p>primită ca răspuns, ceea ce îl/o va sprijini în propria învățare.</p>
<p>Elev: Dar și eu am calculat suma din paranteză: <math>0,2+3/10=0,5/10</math>? Unde greșesc?</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>În calculul sumei din paranteză <math>0.2 + \frac{3}{10}</math> ați scris <math>\frac{0.5}{10}</math>, ceea ce nu este corect. Aici a existat o greșeală în calcul. Haideți să îl corectăm:</p> $0.2 + \frac{3}{10} = 0,2 + 0.3 \text{ (deoarece } \frac{3}{10} = 0,3 \text{)}$ $= 0,5. \text{ (8)}$ <p>Deci, suma din paranteză este într-adevăr 0,5, nu <math>0,5/10</math>.</p> <p>Apoi, rezolvăm expresia:</p> $0.5 \cdot 10 = 5.$ <p>Deci, rezultatul corect al expresiei este 5. Scuze pentru confuzie și mulțumesc pentru clarificare!</p>	<p>(8) Prin reformulare, <i>aplicația reușește să izoleze eroarea de calcul, deși nu explică cum s-a produs, însă prezintă modul corect de calcul, mai în detaliu</i>, ceea ce permite elevului să înțeleagă faptul că este nevoie să aducem la o aceeași formă termenii pentru a putea efectua operația de adunare.</p>
<p>Elev: Înțeleg că am greșit la adunare... <i>Poți să-mi dai alte câteva exemple</i> ca să înțeleg mai bine adunările de acest tip? (9)</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Desigur! Voi oferi câteva exemple suplimentare pentru a vă ajuta să înțelegeți mai bine adunările de acest tip.</p> <p>1. Exemplu simplu: Calculează <math>0.3 + \frac{1}{5}</math>.</p> <p><b>Soluție (10):</b> Pentru a aduna <math>0.3</math> și <math>\frac{1}{5}</math>, trebuie să aducem fracția <math>\frac{1}{5}</math> la același numitor ca <math>0.3</math>, care este 5. Astfel, <math>\frac{1}{5}</math> rămâne <math>\frac{1}{5}</math>. Prin urmare, avem:</p> $0.3 + \frac{1}{5} = 0.3 + 0.2 = 0.5.$ <p>2. Exemplu cu numere zecimale: Calculează <math>1.25 + 0.6</math>.</p>	<p>(9) Elevul/eleva trebuie obișnuit/obișnuită, mai ales în contexte de remediere, <i>să acceseze cât mai multe exemple/contraexemple, decât să solicite informații teoretice</i>. Prin lectura acestor exemple poate să sesizeze <i>varietatea</i> contextelor de aplicare, <i>particularități</i> pe care le poate întâlni în cerințe asemănătoare, dar care implică <i>adaptări procedurale</i>.</p> <p>(10) Soluția dată de aplicație conține <i>multiple elemente neclare/neconforme</i>. Elevul/eleva trebuie să înțeleagă limitele explicațiilor/neclaritățile în expunerea raționamentului. <i>Folosim eroarea aplicației tocmai pentru a atenționa elevul/eleva să fie atent/atență nu numai la elementele de redactare formală, ci și la explicațiile/justificările care însoțesc rezolvarea</i>.</p> <p>(11) Într-adevăr, setul de exerciții oferă un <i>minim de contexte</i> prin care elevului/elevei i se semnalează situații de calcul de tip adunare în care termenii sunt exprimați sub diverse</p>



Soluție: Începem prin adunarea numerelor zecimale direct:  $1.25 + 0.6 = 1.85$ .

3. Exemplu cu fracții: Calculează  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ .

Soluție: Aducem fracțiile la același numitor, care

este 6:  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$ .

4. Exemplu cu numere întregi și fracții:

Calculează  $4\frac{2}{5} + 1\frac{3}{10}$ .

Soluție: Începem prin adunarea părților întregi și apoi adunăm fracțiile:  $4 + 1 = 5$  (partea întreagă)

$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ . Deci, rezultatul final

este  $5\frac{7}{10}$ .

*Aceste exemple ar trebui să vă ofere o mai bună înțelegere a adunării de acest tip. (11) Dacă aveți alte întrebări sau dacă doriți să vedeți mai multe exemple, nu ezitați să întrebați!*

Elev: Din păcate *nu înțeleg explicațiile pe care le-ai asociat rezolvării exercițiului 1*. Poți reformula? (12)

ChatGPT

Desigur! Haideți să privim încă o dată la exemplul 1, unde trebuie să calculăm  $0.3 + \frac{1}{5}$ .

(12)

1. Pentru a aduna  $0.3$  și  $\frac{1}{5}$ , trebuie să

aducem fracția  $\frac{1}{5}$  la același format ca și numărul zecimal  $0.3$ .

2. Numărul zecimal  $0.3$  poate fi scris ca fracție folosind zecimala, astfel:

$$0.3 = \frac{3}{10}$$

3. Așadar, acum avem:  $0.3 + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{5}$

4. Pentru a aduna aceste fracții, avem nevoie să le aducem la același numitor. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor 10 și 5 este 10.

5. Aducem fracția  $\frac{1}{5}$  la același numitor 10 prin înmulțirea atât a numărătorului, cât

forme, deci necesitând aplicarea de reguli de calcul specifice.

(11) *Dacă elevul/eleva formulează o astfel de întrebare, înseamnă că face un pas mare spre consolidarea învățării*. A înțelege limitele unei explicații și a fi interesat de a îndepărta orice neclaritate va reprezenta un atu pentru elev/elevă și utilizarea IA va deveni în timp din ce în ce mai relevantă pentru învățare.

(12) Deși cu anumite limite în exprimare, *prezentarea etapizată a strategiei de calcul este extrem de utilă* și elevul/eleva, în urma parcurgerii pașilor, ar trebui să abordeze fără greșeli alte cerințe similare.

<p>și a numitorului cu 2, deoarece <math>5 \cdot 2 = 10</math> :</p> $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10}.$ <p>6. Acum putem aduna fracțiile:</p> $\frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10}.$ <p>7. Frația <math>\frac{5}{10}</math> poate fi simplificată la forma sa cea mai simplă, care este 0.5.</p> <p>8. Deci, <math>0.3 + \frac{1}{5} = 0.5</math>.</p> <p>Sper că această explicație vă este de ajutor! Dacă mai aveți întrebări, vă rog să le adresați.”</p>	
<p>Elev: Am văzut rezolvarea exercițiului 2, dar <i>nu înțeleg de ce rezultatul nu este 1.31.</i> (13)</p> <p>ChatGPT</p> <p>Desigur, să clarificăm rezolvările: Exemplul 2: Calculează <math>1.25 + 0.6</math>. Pentru a aduna aceste două numere zecimale, le adunăm direct: <math>1.25 + 0.6 = 1.85</math>. Deci, rezultatul este 1.85, nu 1.31. Așadar, rezultatul corect al adunării <math>1.25 + 0.6</math> este 1.85, iar nu 1.31. (14) Dacă aveți alte întrebări sau nelămuriri, vă rog să mă anunțați!</p>	<p>(13) Din perspectiva elevului/elevei, <i>este posibil ca acesta/aceasta să nu-și aducă aminte corect regulile adunării fracțiilor zecimale</i>, de exemplu efectuând următorul calcul cu erori:</p> $\begin{array}{r} 1 \\ 1,25 + \\ \underline{0,6} \\ 1,31 \end{array}$ <p>(14) Explicația nu aduce elemente de clarificare, dovedind încă o dată <i>limitele aplicației</i> care nu percepe cum se produce eroarea, ci doar că este o eroare.</p>
<p>Elev: Tot nu înțeleg de ce nu este 1.31. (15)</p> <p>ChatGPT</p> <p>Înțeleg confuzia acum. Haideți să revizuiem calculul: Pentru a aduna două numere zecimale, cum ar fi 1.25 și 0.6, <i>pur și simplu adunăm fiecare cifră zecimală cu cealaltă, în funcție de poziția lor</i>:</p> <pre>\begin{array}{c} c@{\quad}c@{}c@{}c@{}c@{} \\ \{c\} &amp; &amp; 1 &amp; . &amp; 2 &amp; &amp; 5 \\ + &amp; &amp; 0 &amp; . &amp; 6 &amp; &amp; 0 \\ \cline{1-6} &amp; &amp; 1 &amp; . &amp; 8 &amp; &amp; 5 \end{array}</pre> <p>(16) Deci, rezultatul corect al adunării este 1.85, nu 1.31. Sper că această explicație clarifică situația. Dacă aveți orice alte întrebări, vă rog să mă anunțați.</p>	<p>(15) Cu perseverență, aplicația face dovada că <i>se poate adapta oricărui nivel de înțelegere</i>, prin insistența cu care elevul/eleva cere noi clarificări, ChatGPT adaptează explicațiile. (16) Poate fi o provocare pentru elev/elevă faptul că în explicațiile suplimentare, <i>aplicația prezintă elemente de cod/programare</i>, în același timp stârnind interesul acestuia pentru a înțelege cum se construiește un text în limbaj de programare.</p>
<p>Elev: Nu înțeleg din ceea ce ai scris prin elementele de programare, <i>spune pe înțelesul meu cum adun aceste numere corect.</i> (17)</p> <p>ChatGPT</p>	<p>(17) O nouă solicitare de a explica regula de adunare a fracțiilor zecimale, de această dată <i>insistând pe o exprimare cât mai simplă, face ca aplicația să își îmbunătățească comunicarea</i> cu elevul.</p>

Cu siguranță! Voi explica procesul de adunare pas cu pas, folosind un limbaj mai simplu. Pentru a aduna 1.25 și 0.6, procedăm astfel:

1. Așezăm numerele unul sub altul, aliniind zecimalele:

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ +0.6 \\ \hline \end{array} \quad (18)$$

2. Adunăm zecimalele de la dreapta la stânga:

- Adunăm zecimalele:  $5+0=5$ .
- Apoi adunăm zecimalele următoare:  $2+6=8$ .
- În cele din urmă, adunăm părțile întregi:  $1+0=1$ .

3. Așadar, rezultatul final este 1.85.

Deci, când adunăm corect aceste numere, obținem 1.85, nu 1.31. Sper că această explicație este mai clară pentru dvs. Dacă aveți încă nelămuriri, vă rog să mă anunțați!

Elev: *Aș dori să mă verific.* (19) Am lecturat exemplele rezolvate, aș vrea să-mi propui o serie de exerciții de calcul, similare cu cel din problema pe care am pus-o în discuție, cu cele din exemplele rezolvate, dar și câteva exerciții care să aducă noi provocări.

ChatGPT

Desigur! Vă voi propune o serie de exerciții de calcul, incluzând unele similare cu cele rezolvate și altele care aduc noi provocări. Vă rugăm să verificați dacă rezultatele obținute sunt corecte.

Exemple similare cu cele rezolvate:

1. Calculează  $0.4 + \frac{2}{5}$ .
2. Calculează  $2.7 + 0.9$ .
3. Calculează  $3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}$ .
4. Calculează  $1.8 + \frac{3}{10}$ .

Exerciții care aduc noi provocări:

5. Calculează  $0.25 + \frac{3}{8}$ .
6. Calculează  $4.6 + 1.25$ .
7. Calculează  $5\frac{3}{4} + 2\frac{2}{3}$ .
8. Calculează  $0.75 + \frac{4}{5}$ .

(18) Aplicația prezintă *ideea principală a adunării fracțiilor zecimale*, însă scrierea unui termen sub altul nu este în total acord cu explicația literală a etapei de calcul. Însă descrierea din etapa 2 poate sprijini înțelegerea procedurii de calcul.

(19) Elevul/eleva trebuie încurajat/încurajată să folosească aplicații IA pentru a genera *contexte similare de exersare*, inclusiv cu elemente care să permită consolidare și aprofundare.

(20) Este *extrem de util* faptul că aplicația încurajează elevul/eleva să rezolve independent cerințele de lucru și *să acorde feedback* pe rezolvările formulate. În acest sens, deși presupune un efort suplimentar de redactare, încărcarea rezolvărilor în aplicație va fi urmată rapid de furnizarea feedback-ului imediat, ceea ce permite progresul în învățare, facilitându-se astfel diferențierea/personalizarea învățării.

<p>Dacă doriți, puteți încerca să rezolvați aceste exerciții și să îmi comunicați rezultatele pentru a verifica corectitudinea acestora sau puteți să mă întrebați pentru orice nelămurire. Succes!</p> <p>(20)</p>	
<p>Elev: Te rog să-mi propui și o serie de exerciții ca cel cu care am început discuția noastră, care să conțină diferite operații și paranteze. (21)</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Înțeles! Vă voi propune o serie de exerciții care să includă diferite operații și paranteze, similar cu cel cu care am început discuția noastră:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Calculează <math>(2+3)\times 4</math>.</li><li>2. Calculează <math>5\times(1+2)-3</math>.</li><li>3. Calculează <math>(8-3)\div 2+1</math>.</li><li>4. Calculează <math>(6\times 2)+(4\div 2)</math>.</li><li>5. Calculează <math>(10-2)\times(3+1)</math>.</li></ol> <p>Aceste exerciții vor implica utilizarea diferitelor operații și paranteze pentru a obține rezultatele corecte.</p> <p>Vă sugerez să le rezolvați și să verificați rezultatele. Dacă aveți întrebări sau nelămuriri, nu ezitați să mă întrebați!</p> <p>Elev: Aș vrea și o serie de exerciții care să conțină fracții zecimale și fracții ordinare, le voi încerca și pe cele de mai sus, dar aș dori și mai asemănătoare cu exercițiul de început.</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Înțeles! Vă voi propune câteva exerciții care să includă fracții zecimale și fracții ordinare, similare cu exercițiul de început:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Calculează <math>\left(0.3 + \frac{1}{4}\right) \cdot 5</math>.</li><li>2. Calculează <math>2 \cdot \left(0.6 + \frac{1}{3}\right)</math>.</li><li>3. Calculează <math>(1.5 - 0.2) : \frac{1}{5}</math>.</li><li>4. Calculează <math>\left(3\frac{1}{2} + 0.25\right) \cdot 2</math>.</li><li>5. Calculează <math>\left(0.8 + \frac{2}{5}\right) : 2</math>.</li></ol> <p>Aceste exerciții conțin atât fracții zecimale, cât și fracții ordinare, și implică utilizarea diferitelor operații și paranteze. Vă recomand să le rezolvați și să verificați rezultatele. Dacă aveți întrebări suplimentare sau aveți nevoie de clarificări, vă rog să mă anunțați!</p>	<p>(21) În funcție de rezolvările puse spre verificare în aplicație, <i>comunicarea cu ChatGPT poate fi utilizată de elev/elevă pentru a genera:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- <i>explicații suplimentare</i>, în situația în care anumite etape de raționament nu sunt corecte din punct de vedere matematic (Te rog, explică-mi cum/de ce...)</li><li>- <i>variante de rezolvare</i> a unora dintre probleme (Aș fi putut rezolva și în alt mod...?);</li><li>- <i>noi contexte de exersare</i> (Te rog, mai propune-mi exerciții de tipul ...);</li><li>- <i>recomandări/sfaturi</i> (Recomandă-mi ce trebuie să fac pentru ... De ce trebuie să țin cont când abordez astfel de cerințe)</li></ul>

<p>Elev: Mulțumesc. Poți să-mi faci un <i>rezumat al elementelor-cheie de care trebuie să țin cont în rezolvarea unor astfel de calcule numerice?</i> (22)</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Desigur! Iată un rezumat al elementelor-cheie de care trebuie să ții cont în rezolvarea unor astfel de calcule numerice:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. <b>Înțelegerea operațiilor matematice de bază:</b> Asigurați-vă că aveți o înțelegere solidă a adunării, scăderii, înmulțirii și împărțirii.</li><li>2. <b>Adunarea și scăderea numerelor zecimale:</b> Când adunați sau scădeți numere zecimale, asigurați-vă că zecimalele sunt aliniate corect și că operațiile sunt efectuate pe fiecare cifră zecimală corespunzătoare.</li><li>3. <b>Înmulțirea și împărțirea numerelor zecimale:</b> Pentru înmulțire și împărțire, ignorați inițial zecimalele și tratați numerele ca numere întregi. După efectuarea operației, plasați punctul zecimal în rezultat în funcție de numărul total de cifre zecimale din toate numerele inițiale.</li><li>4. <b>Lucrul cu fracții ordinare și zecimale:</b> Aducerea fracțiilor la același numitor și conversia fracțiilor zecimale în numere zecimale pot facilita adunarea, scăderea și înmulțirea.</li><li>5. <b>Utilizarea parantezelor:</b> Parantezele sunt esențiale pentru stabilirea ordinii corecte a operațiilor. Respectați întotdeauna regulile de priorizare a operațiilor atunci când lucrați cu expresii care conțin paranteze.</li><li>6. <b>Verificarea rezultatelor:</b> După ce ați terminat calculul, verificați întotdeauna rezultatul pentru a vă asigura că este corect. Revedeți pașii și asigurați-vă că nu ați făcut vreo eroare în timpul procesului.</li></ol> <p>Dacă aveți o înțelegere solidă a acestor concepte și urmați pașii corect, veți fi capabil să rezolvați cu succes o gamă largă de calcule numerice.</p>	<p>(22) <i>Formularea de concluzii poate fi una generală</i>, ca cea prezentată în răspunsul ChatGPT, dar <i>poate fi și personalizată</i> pentru a surprinde aspectele care au reprezentat provocări în rezolvarea cerințelor de lucru. Este important ca lectura acestor concluzii să fie însoțită de întrebări suplimentare la care aplicația să ofere detalii. De asemenea, rolul profesorului este esențial (mai ales dacă toată conversația cu aplicația se desfășoară în cadrul orei, ca activitate de învățare diferențiată), punându-se la dispoziția elevului/elevei pentru a oferi, la rândul său, feedback și clarificări asupra informațiilor generate de IA.</p>

Elev: Aș dori să-mi evaluez competențele de calcul numeric, după ce am exersat independent și am ținut cont de feedback-ul pe care mi l-ai dat. Te rog *propune-mi un test prin care să-mi pot face și o autoevaluare*. Mulțumesc. (23)

ChatGPT

Bineînțeles! Iată un test care poate fi folosit pentru a evalua competențele dumneavoastră în calcul numeric. Testul conține o varietate de exerciții care acoperă adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, precum și lucrul cu numere zecimale și fracții. După ce ați completat testul, puteți verifica rezultatele și puteți face o autoevaluare pentru a vedea în ce domenii puteți îmbunătăți.

Test de Evaluare a Competențelor în Calcul Numeric (24):

1. Calculează  $3.25 + 2.75$ .
2. Calculează  $6 \cdot 0.5$ .
3. Calculează  $10 - \frac{3}{5}$ .
4. Calculează  $1.5 : 0.3$ .
5. Calculează  $\left(2.4 + \frac{1}{3}\right) \cdot 5$ .
6. Calculează  $\left(3\frac{1}{2} - 0.75\right) : 1.25$ .
7. Calculează  $0.8 + \frac{2}{5}$ .
8. Calculează  $4 \cdot \left(0.6 + \frac{1}{4}\right)$ .
9. Calculează  $\frac{3}{4} - 0.25$ .
10. Calculează  $5\frac{1}{3} : (2.5 - 1.75)$ .

După ce ați răspuns la toate întrebările, puteți verifica rezultatele și puteți face o autoevaluare. Dacă aveți nevoie de ajutor suplimentar sau de explicații, vă rog să mă anunțați! Succes!

Elev: Cum nu mi-ai asociat un punctaj, *atașez rezolvările* (25) pentru a-mi spune ce am reușit să rezolv corect. Dacă am greșeli, te rog să-mi precizezi unde le am și cum trebuia să procedez pentru a face corect calculul. Mulțumesc.

Rezolvare (26):

1.  $3,25 + 2,75 = 5$
2.  $6 \times 0,5 = 3 \times (2 \times 0,5) = 3 \times 1 = 3$
3.  $10 - 3/5 = 100/10 - 6/10 = 94/10$
4.  $1,5 : 0,3 = 15 : 3 = 5$
5.  $(2,4 + 1/3) \times 5 = (24/10 + 1/3) \times 5 = 25/13 \times 5 = 125/13$

(23) O astfel de cerință permite elevului/elevei să se transpună într-un context de evaluare și poate fi o finalizare bună a recapitulării pe o temă/subiect dat.

(24) Propunerea de test este *în corelație cu contextele de exersare anterioare și aduce elemente de noutate* față de acestea, ceea ce este în favoarea elevului/elevei care poate sesiza astfel care sunt zonele care necesită revenire/completare.

(25) *Limitele aplicației sunt semnificative* în condițiile în care elevul/eleva vrea să le încerce în aplicație. Deși în redactare am utilizat doar simboluri curente ale tastaturii, fără a apela la simboluri speciale, aplicația reușește să recunoască sensul scrierilor matematice.

(26) Pentru a crește relevanța evaluării cu ajutorul aplicației ChatGPT, *am strecurat intenționat o serie de greșeli de calcul, posibil de făcut de către unii dintre elevi/eleve*.



6.  $(3\frac{1}{2} - 0,75) : 1,25 = (3 + 0,5 - 0,75) : 1,25 = 2,75 : 1,25 = 275/125 = 11/5 = 2,2$
7.  $0,8 + 2/5 = 0,8 + 4/10 = 0,8 + 0,4 = 1,2$
8.  $4 \times (0,6 + 1/4) = 4 \times 0,6 + 4/4 = 2,4 + 1 = 3,4$
9.  $3/4 - 0,25 = 0,75 - 0,25 = 0,5$
10.  $5\frac{1}{3} : (2,5 - 1,75) = 5\frac{1}{3} : 0,75 = (5 \times 3 + 1) / 3 : (3/4) = 16/3 \times 4/3 = 64/9$

**ChatGPT**

Vă mulțumesc pentru rezolvările trimise. Voi evalua fiecare răspuns și vă voi oferi feedback acolo unde este necesar: (27)

1. **Corect.**  $3.25 + 2.75 = 5$
2. **Corect.**  $6 \times 0.5 = 3$
3. **Greșit.**  
 $10 - 3/5 = 100/10 - 6/10 = 94/10 = 9.4$ . În mod greșit ați calculat subtracția.
4. **Corect.**  $1.5 \div 0.3 = 5$
5. **Greșit.**  $(2.4 + 1/3) \times 5 = (24/10 + 1/3) \times 5 = (25/13) \times 5 = 125/13$ . Ați făcut corect adunarea, dar ați greșit înmulțirea cu 5.
6. **Greșit.**  $(3\frac{1}{2} - 0.75) \div 1.25 = (7/2 - 3/4) \div 1.25 = (14/4 - 3/4) \div 5/4 = (11/4) \div (5/4) = (11/4) \times (4/5) = 44/20 = 2.2$ . Ați făcut corect prima parte a problemei, dar ați greșit calculul împărțirii.
7. **Greșit.**  $0.8 + 2/5 = 0.8 + 4/10 = 0.8 + 0.4 = 1.2$ . Ați făcut corect adunarea fracțiilor, dar ați greșit în conversia fracției 2/5 într-o formă zecimală.
8. **Greșit.**  
 $4 \times (0.6 + 1/4) = 4 \times (0.6 + 0.25) = 4 \times 0.85 = 3.4$ . Ați făcut corect adunarea, dar ați greșit înmulțirea cu 4.
9. **Corect.**  $3/4 - 0.25 = 0.75 - 0.25 = 0.5$
10. **Greșit.**  $5\frac{1}{3} \div (2.5 - 1.75) = 5\frac{1}{3} \div 0.75 = 5.33 \div 0.75 = (16/3) \div (3/4) = (16/3) \times (4/3) = 64/9$ . Ați făcut corect prima parte a problemei, dar ați greșit împărțirea cu 0.75 și înmulțirea cu inversul acesteia.

În concluzie, ați rezolvat corect majoritatea problemelor, dar au existat unele greșeli în operațiile mai complexe și în conversiile dintre fracții și zecimale. Continuați să exersați și să vă concentrați pe aceste aspecte pentru a vă îmbunătăți competențele în calcul numeric. Dacă aveți întrebări suplimentare sau doriți clarificări pe anumite probleme, vă rog să mă întrebați!

(27) Evaluarea și feedback-ul automate, furnizat de aplicație, conțin erori multiple, în acest sens, la modul în care feedback-ul a fost returnat, acesta este în defavoarea elevului. În acest sens, deși este utilă solicitarea ca aplicația să furnizeze un set de cerințe de evaluare, elevul trebuie să apeleze la evaluarea automată prin aplicația ChatGPT cu mari rezerve, cel mult comparând acest feedback furnizat automat cu feedback colegial/ de la profesor.

*Comentarii privind rezolvările propuse și feedback-ul furnizat automat:*

a) dintre cele 10 cerințe de lucru:  
- 3 sunt evaluate incorect și/sau conțin explicații/comentarii care nu sunt conforme;  
- alte 4 sunt evaluate (etichetate) corect, dar explicațiile/comentarii nu sunt conforme;  
- doar la 3 cerințe evaluarea este în conformitate, în toate cele trei cazuri rezolvarea „elevului/eleveii” neconținând erori de calcul și este finalizat cu obținerea răspunsului așteptat, deci feedback-ul nu a necesitat și furnizarea de explicații/comentarii.

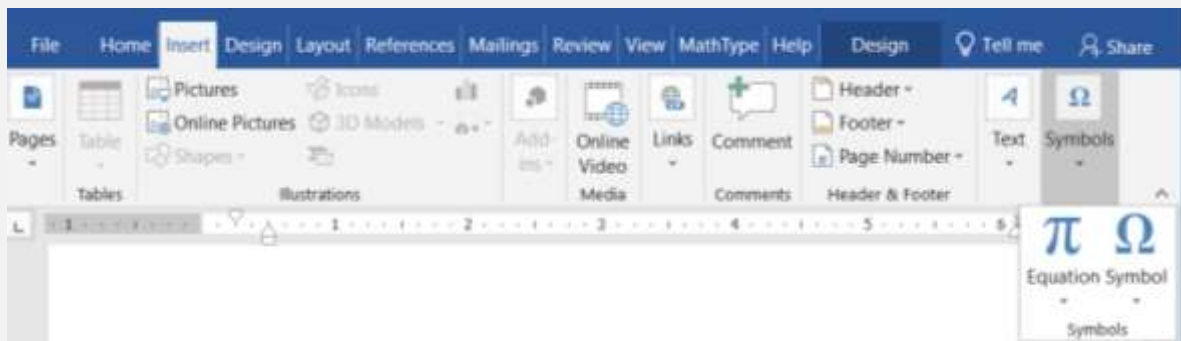
\*<https://chat.openai.com> – texte prelucrate din punct de vedere al redactării simbolic-matematice specifice, în baza utilizării aplicației



**Concluzii privind utilizarea aplicațiilor cu componentă IA de către elevi/eleve**

1) Există, cel puțin la momentul realizării experimentului nostru, o serie de *limitări ale aplicației IA utilizate (ChatGPT – versiunea de bază, accesibilă fără costuri)* și acestea se referă, în principal, la:

- *introducerea de text științific de către utilizatorul primar în aplicație*; pentru a introduce text matematic este nevoie simboluri specifice, acestea complicând transpunerea textului în aplicație; în situația în care dorim să sprijinim elevi/elevele să folosească aplicația și pentru texte ce conțin simboluri specifice, altele decât cele asociate uzual tastaturii, putem să-i îndrumăm pe elevi să își dezvolte abilitățile de redactare de text prin utilizarea funcțiilor din bara de lucru a aplicației Word: *Insert – Symbols -Equation/Symbol*; redactarea în acest fel a unui text matematic, întâi într-un document Word, apoi copiat și lipit în aplicație, va fi recunoscută de către aplicație:



- *acuratețea/corectitudinea informațiilor puse la dispoziție de aplicație*; pornind de la convenții de notare, care pot diferi, până la validarea unui rezultat și furnizarea unor explicații, aplicația poate induce bariere de învățare sau conflict în raport cu învățarea; în acest sens, aplicația are vizibil mesajul „**ChatGPT can make mistakes. Consider checking important information.**”, deci *utilizarea acesteia de către elev trebuie să fie întotdeauna critică, pe cât posibilă validată/verificată cu alte surse, în colaborare cu colegi/profesor*; așa cum se poate observa și din conversațiile prezentate anterior, aplicația poate sesiza o eroare produsă într-un calcul numeric dezvoltat pe mai multe etape, dar nu o poate localiza/delimita întotdeauna sau, chiar dacă o localizează, nu o poate explica suficient de clar, de regulă asigurând doar prezentarea unui mod corect de efectuare a calculelor.

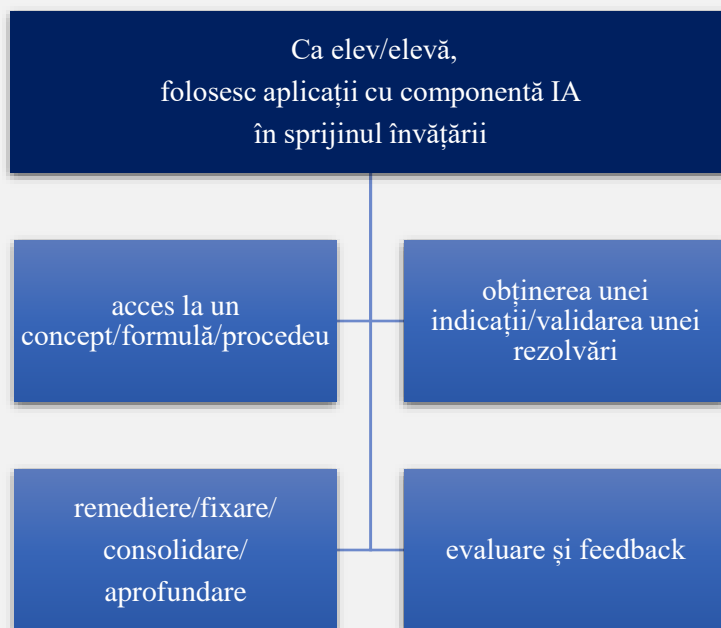
2) *Utilizarea ChatGPT de către elevi/eleve, pentru învățare și evaluare, trebuie exersată în contexte formale, în cadrul orelor de curs, sub îndrumarea profesorului și cu sprijinul acestora, astfel:*

- *stabilirea și urmărirea unui obiectiv de utilizare a aplicației*: în exemplul furnizat, obiectivul elevului/elevei a presupus obținerea unui punct de vedere extern asupra unui context de exersare, în condițiile în care rezultatul obținut de acesta nu coincidea cu cel așteptat; elevii/elevele trebuie să aibă clar acest obiectiv pentru a formula întrebarea/cererea la care aplicația va furniza un răspuns;
- *formularea de întrebări/cereri*: orice interacțiune cu aplicația, prin introducerea unui text de către elev/elevă, va fi urmată întotdeauna de un răspuns al aplicației; cu cât cerința către aplicație este mai clară, cu atât posibilitatea de a obține un răspuns țintit și util învățării, din partea aplicației, este mai mare; aceasta nu înseamnă că elevul/eleva trebuie să aibă „temeri” asupra modului în care conversează cu aplicația, iar acest aspect este unul pozitiv; pe ceea ce trebuie să se concentreze elevul/eleva este perseverența; astfel, chiar dacă la o cerere/întrebare, răspunsul aplicației nu este mulțumitor, elevul/eleva trebuie să înțeleagă că poate reformula cerința către aplicație de oricâte ori este necesar, atât pentru a sprijini aplicația să identifice răspunsul, cât și pentru a-l „traduce pe înțelesul elevului/elevei”; un

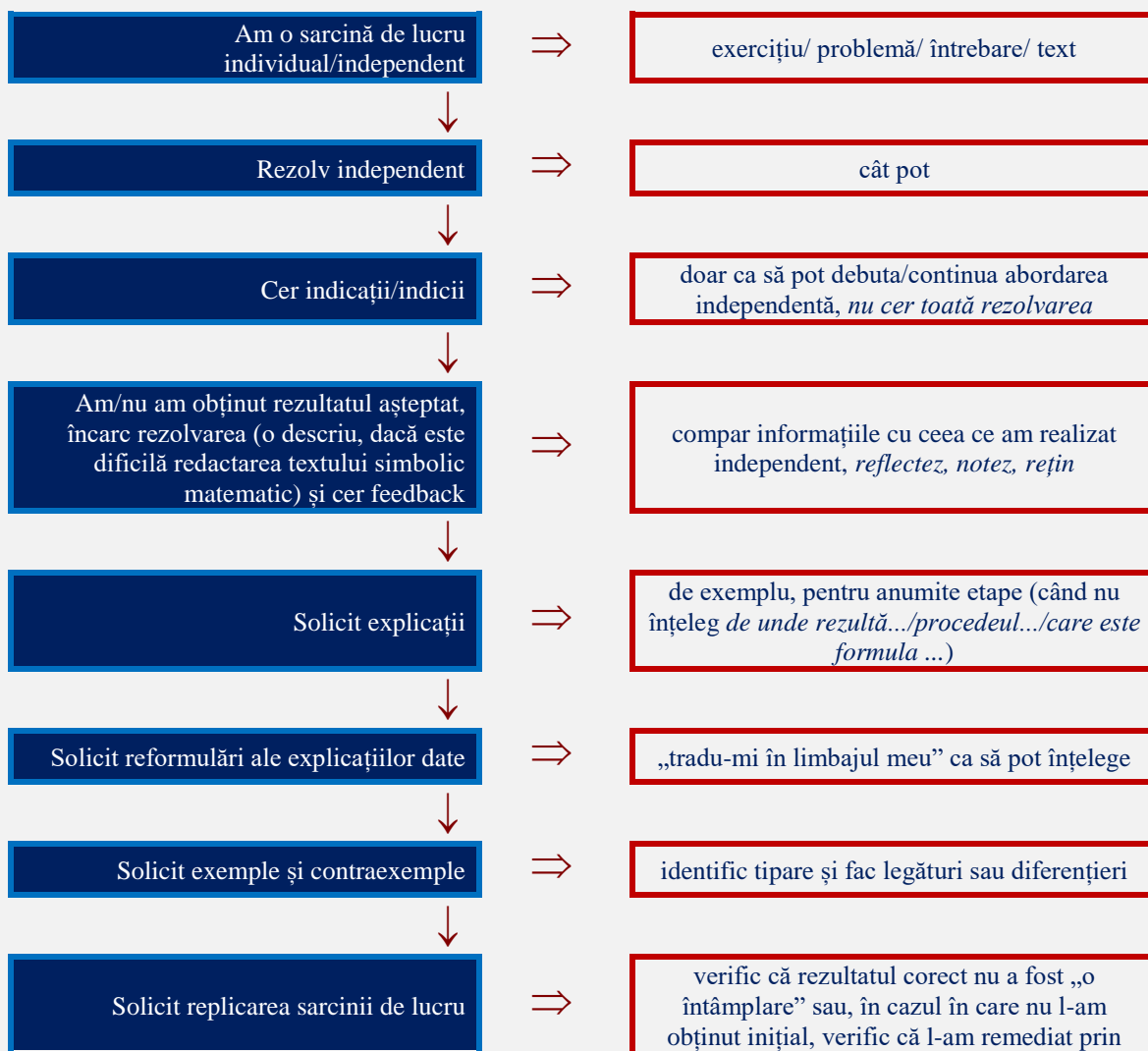


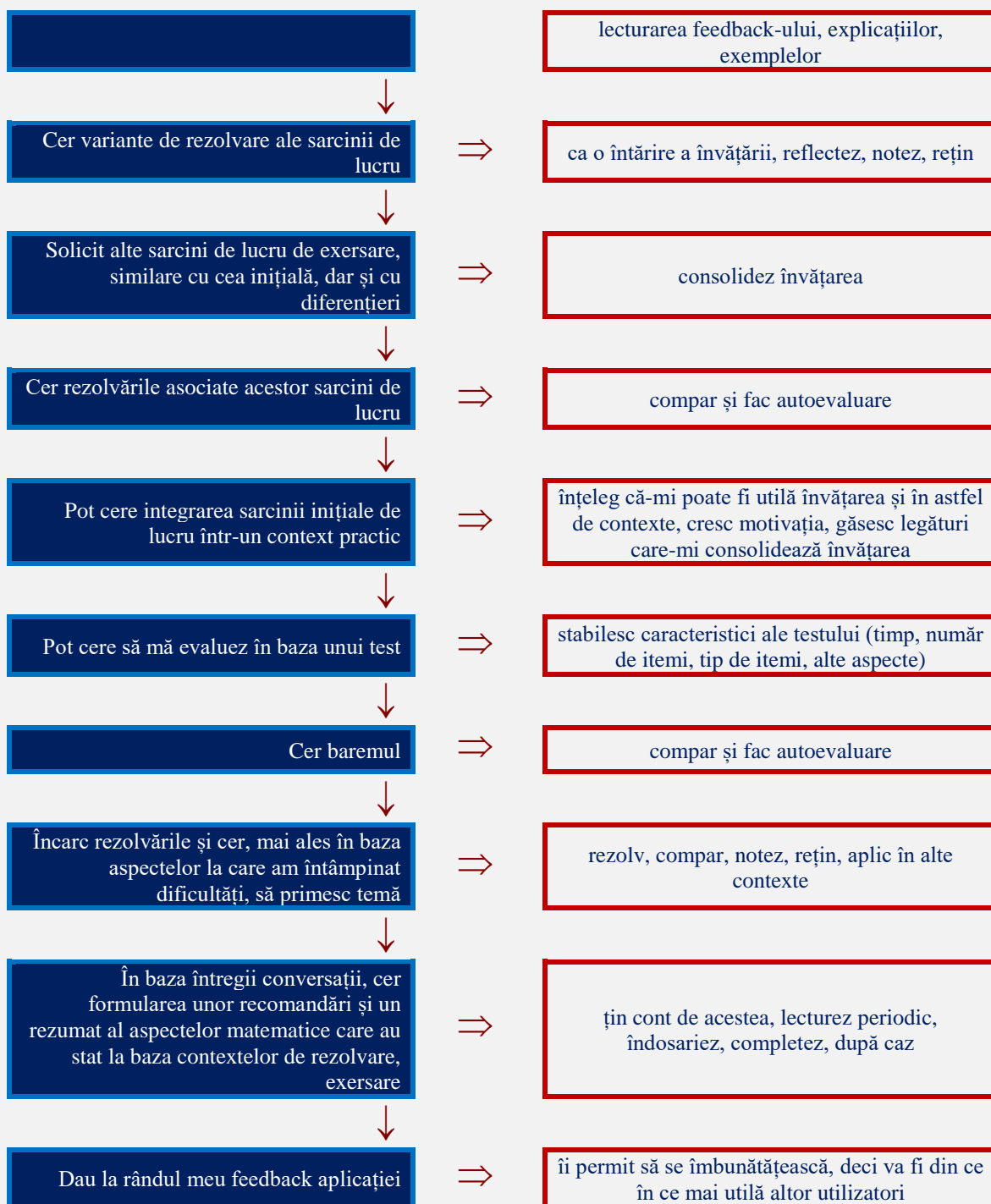
punct forte al aplicației este acela că „reține” logica schimbului de mesaje; în acest sens, dacă elevul este, în timp, obișnuit, să folosească cu sens aplicația, exercițiul de comunicare între elev/elevă și aplicație se poate constitui în secvență de activitate de învățare diferențiată/personalizată: deși se pornește de la un același text/cerință și obiectiv, accesarea individuală a aplicației va furniza fiecărui utilizator variante de text, dar nu text identic; mai mult, la lectura răspunsului de către fiecare elev/elevă, vor apărea întrebări/nedumeriri care se vor concretiza în noi cereri către aplicație, moment de la care diferențierea învățării devine din ce în ce mai relevantă; în exersarea inițială a aplicației, profesorul trebuie să îndrume elevul pentru a genera seria de întrebări și a extrage cât mai mult posibil din fiecare răspuns;

- *reflecția supra răspunsurilor furnizate de aplicație*; dacă elevul/eleva este în situația de remediere a învățării, este important ca în utilizarea aplicației, cel puțin la început, să fie sprijinit de profesor, în sensul în care să valideze informația furnizată de aplicație, pentru a nu produce elevului/elevei un conflict privind învățarea, precum și, după caz, să-l sprijine în înțelegerea mesajului: Este acesta răspunsul la cerință/întrebare sau nu? Explicațiile date le înțeleg? Dacă nu, pot reformula cerința? Cum? Dacă înțeleg explicațiile, sunt acestea suficiente? Ce cer suplimentar pentru a mă clarifica? ș.a.m.d.; de exemplu, învățare relevantă nu înseamnă să am o cerință de lucru și să cer direct aplicației să-mi returneze o rezolvare a ei, mai ales dacă nu este urmată de o cerință de a replica contextul pentru a putea transfera strategia; astfel, elevul/eleva trebuie să încerce rezolvarea sarcinii de lucru în mod independent, prin activitate individuală sau, după caz, în perechi/în grup, apoi să ceară aplicației să valideze încercarea făcută, iar în cazul în care „nu am nicio idee asupra rezolvării” să ceară doar un indiciu privind rezolvarea (Care ar fi primul pas pentru a rezolva problema?) și să încerce să-l aplice;
- *transformarea conversației elev/elevă - aplicație într-un proces coerent de învățare, inclusiv de evaluare*; exact în acest sens a fost realizată exemplificarea anterior prezentată, cu o înlănțuire a întrebărilor și răspunsurilor care să permită elevului/elevei să remedieze, fixeze, consolideze și aprofundeze învățarea în raport cu contextul inițial și cu obiectul propus; astfel, după comentarea/explicarea unui context, eventual din mai multe perspective (Reformulează, te rog, nu am înțeles etapa .../nu am înțeles cum ai obținut .../de ce ai aplicat ...), continuarea conversației trebuie să urmărească prezentarea de către aplicație a unei serii de exemple rezolvate, apoi a unor sarcini de rezolvat; cu cât conversația este mai elaborată și coerentă, cu atât elevul își va consolida învățarea; având în vedere limitele aplicației, menționate anterior, este recomandabil ca elevul care folosește aplicația în context remedial să fie monitorizat de profesor și, în același timp să fie învățat să analizeze critic informația pentru a identifica aspectele asupra cărora să ceară și validare din partea unui coleg/colegă sau profesorului.



Ca elev, dezvolt interacțiunea cu aplicația IA ca suport pentru învățare, astfel:





## 2.2. Ca profesor/profesoară:

- pot îndruma elevul pentru a folosi o aplicație IA pentru o învățare personalizată, în sensul prezentat anterior;
- pot folosi aplicații cu componentă IA pentru a pregăti secvențe de activitate didactică, precum și în desfășurarea propriu-zisă a orelor de curs:

Aplicațiile cu componentă IA oferă oportunități de a eficientiza și de a sprijini profesorul în anumite aspecte ale demersului didactic, cel puțin din următoarele perspective\*:

- generarea de exemple suplimentare pentru a ilustra anumite secvențe de predare;
- generarea de explicații variate pentru aceeași idee sau același concept;
- analizarea aspectelor principale privind învățarea (erori tipice/bariere în învățare) într-un context predefinit și aplicat prin colectarea feedback-ului de la elevi/eleve prin diferite tehnici de evaluare.

\*prelucrare după [Use of generative AI for teaching, learning and assessment / Staff / Imperial College London](#)

### Exemplificare interacțiune profesor/profesoară - IA:

Cerința/Întrebarea profesorului și răspunsul ChatGPT*	Observații/Limite/Cum pot sprijini elevul/eleva
<p>Profesor: Am nevoie de <i>generarea unor exemple de calcul numeric, organizate în ordine crescătoare a complexității calculului, folosind tipuri și forme variate de numere reale, reguli de semn, implicând ordinea operațiilor și calcul cu paranteze, în baza modelului următor:</i> (1) Arătați că <math>(0,2+3/10) \times 10 = 5</math>. <i>Competența vizată</i> este: alegerea și utilizarea de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Bineînțeles! Iată <i>câteva exemple</i> organizate în ordine crescătoare a complexității calculului, folosind diverse tipuri și forme de numere, reguli de semn, implicând ordinea operațiilor și calculul cu paranteze: (2)</p> <ol style="list-style-type: none"><li><b>Adunare și înmulțire cu numere întregi:</b> <math>(2+3) \times 5 = 5 \times 5 = 25</math></li><li><b>Scădere și înmulțire cu numere întregi:</b> <math>(8-4) \times 3 = 4 \times 3 = 12</math></li><li><b>Înmulțire și împărțire cu numere întregi:</b> <math>(6 \cdot 2) : 4 = 12 : 4 = 3</math></li><li><b>Operații cu numere fracționare:</b> <math>\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{12}</math></li></ol>	<p>(1) Pentru a obține <i>o generare cât mai reprezentativă</i>, utilă activității de predare/recapitulare în contextul dat, este necesar să fim cât mai riguroși în detaliile pe care le asociem; o importanță mare ar trebui să o aibă și menționarea competenței.</p> <p>(2) În situația menționată, <i>seria de exemple generată are limite</i>, însă <i>pot reformula cererea, eventual măbind gradul de precizie al cerinței</i> (de exemplu, toate exemplele trebuie să conțină forme diferite de reprezentare a numerelor reale, operații de diferite ordine și cel puțin un calcul cu paranteze). Chiar și în baza acestei liste de exemple, cu rezolvările la vedere, <i>profesorul poate conduce elevii/elevele să descopere cum evoluează complexitatea calculului</i>, prin introducerea treptată a unor reguli, numere etc.</p> <p><i>Exemplu de întrebări/comentarii:</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Ce au în comun și prin ce diferă exemplele 1 și 2 (răspuns așteptat: calcul cu numere naturale/întregi, paranteze care pot fi rezolvate ușor). Exemplele diferă prin tipul operației dintre paranteze.</li><li>- Obținem un alt rezultat al calculului <math>2 + 3 \cdot 5</math> față de cel din exercițiul 1? Explicați.</li><li>- Putem folosi o proprietate de calcul pentru a efectua în alt mod calculele din exercițiul 1 și 2? (răspuns așteptat: da, desfacem parantezele).</li></ul> <p>...</p>



<p>5. <b>Operații cu numere zecimale:</b>  <math>(0.3 + 0.4) \cdot 2 = 0.7 \cdot 2 = 1.4</math></p> <p>6. <b>Adunare și scădere cu numere zecimale:</b>  <math>(1.5 - 0.7) + 0.2 = 0.8 + 0.2 = 1</math></p> <p>7. <b>Operații cu fracții și numere zecimale:</b>  <math display="block">\left(\frac{3}{5} + 0.2\right) \cdot \frac{10}{3} = \left(\frac{6}{10} + \frac{2}{10}\right) \cdot \frac{10}{3} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{3} =</math> <math display="block">= \frac{80}{30} = \frac{8}{3}</math></p> <p>8. <b>Operații complexe cu ordine specificată a operațiilor:</b>  <math display="block">\frac{5 \cdot (4 - 2)}{3 + 1} = \frac{5 \cdot 2}{3 + 1} = \frac{10}{4} = 2.5</math></p> <p>9. <b>Operații cu paranteze și priorități specifice:</b>  <math display="block">\frac{2 \cdot (6 + 4)}{8 - 2} = \frac{2 \cdot 10}{8 - 2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}</math></p> <p>10. <b>Calcul cu expresii care implică fracții și numere zecimale:</b> (3)  <math display="block">\left(\frac{1}{4} + 0.3\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 0.1\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) =</math> <math display="block">= \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{40}</math></p> <p>Aceste exemple ar trebui să ofere o varietate de situații pentru a dezvolta abilitățile elevilor în operații cu numere reale, astfel încât să înțeleagă și să aplice regulile și procedurile corecte pentru a obține răspunsuri corecte.</p>	<p>(3) Discutarea exemplurilor poate continua. Însă, în seria de exemple, al 10-lea conține erori în rezolvarea calculului. Putem transforma această eroare într-o oportunitate din mai multe privințe, astfel:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dacă am făcut cerința pentru aplicație în etapa de pregătire a activității, este timp să fac corecția rezolvării, astfel încât să furnizez numai exemple corecte, pentru a concentra atenția elevului pe etapele de raționament, nu și pe eventuale erori.</li> <li>- dacă fac cerința în timpul orei, este indicat să sesizez personal eroarea pentru a pregăti o explicație; în situația în care elevii o semnalează, voi aprecia atenția cu care au lecturat rezolvarea; în ambele cazuri, voi iniția o discuție privind importanța deținerii de competențe, a învățării, pentru că așa cum aplicația îmi poate oferi informații greșite/false, așa se poate întâmpla cu alte aplicații care, voluntar, pot să producă informații false (<i>fake news</i>); din perspectiva erorii de calcul, este interesant să discutăm care ar fi eroarea/erorile care au condus la rezultatul greșit. Un răspuns posibil este: cum numitorul comun din prima paranteză este 20 și <math>\frac{1}{4} = \frac{5}{20}</math> probabil că s-a efectuat calculul <math>\frac{5}{20} + \frac{2}{20} = \frac{7}{20}</math>, deci în calcul, în loc de fracția <math>\frac{3}{10} = \frac{6}{20}</math> s-a folosit în mod eronat fracția <math>\frac{1}{10} = \frac{2}{20}</math>; similar, în loc de efectuarea calculului <math>\frac{2}{5} - \frac{1}{10}</math> s-a efectuat <math>\frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}</math>, cu rezultatul <math>\frac{1}{2}</math>.</li> </ul>
<p>Profesor: Vreau să le prezint elevilor <i>strategii diferite de rezolvare</i> (3) a următoarei cerințe, după caz folosind ordinea operațiilor sau desfacerea parantezelor sau transformări prin echivalență ale relației de egalitate/metoda mersului invers: Arătați că <math>(0,2+3/10) \times 10 = 5</math>.</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Desigur! Iată câteva strategii diferite de rezolvare a cerinței date, utilizând diverse abordări matematice:</p>	<p>(3) Este indicat să „ajutăm” aplicația, astfel încât să orientăm exemplele de strategii pe direcții diferite. În acest sens, sugerăm posibilele variante de rezolvare și, după cum se poate observa, aplicația a reușit să le descrie. După lecturarea cu elevii a variantelor returnate de aplicație, putem să continuăm cu o întrebare/întrebări către elevi, apoi și adresate aplicației, pentru comparație:</p>

<p>1. <b>Folosirea ordinii operațiilor:</b> Elevii pot rezolva problema respectând ordinea operațiilor matematice (paranteze, exponenți, înmulțire și împărțire, apoi adunare și scădere).</p> <ul style="list-style-type: none"><li>○ <math>\left(0.2 + \frac{3}{10}\right) \times 10</math></li><li>○ Mai întâi, se efectuează adunarea: <math>0.2 + 0.3 = 0.5</math></li><li>○ Apoi, se înmulțește rezultatul cu 10: <math>0.5 \times 10 = 5</math></li></ul> <p>2. <b>Desfacerea parantezelor:</b> Elevii pot desface parantezele și să rezolve expresia pas cu pas.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>○ <math>\left(0.2 + \frac{3}{10}\right) \times 10</math></li><li>○ Desfacerea parantezelor: <math>0.2 \times 10 + \frac{3}{10} \times 10</math></li><li>○ Calculul: <math>2 + 3 = 5</math></li></ul> <p>3. <b>Transformări prin echivalență ale relației de egalitate/metoda mersului invers:</b> Elevii pot începe cu rezultatul final și pot lucra înapoi pentru a arăta echivalența expresiei date. (4)</p> <ul style="list-style-type: none"><li>○ <math>5 = \left(0.2 + \frac{3}{10}\right) \times 10</math></li><li>○ Transformarea: <math>5 : 10 = 0.5</math></li><li>○ Echivalența: <math>0.5 = 0.2 + \frac{3}{10}</math></li><li>○ Rezolvarea: <math>0.5 = 0.5</math></li></ul> <p>Aceste strategii diferite le arată elevilor că există mai multe moduri de a aborda o problemă matematică și îi ajută să își dezvolte abilitățile de rezolvare de probleme și de gândire critică. De asemenea, le oferă oportunitatea de a alege metoda care li se potrivește cel mai bine sau de a încerca mai multe abordări pentru a-și consolida înțelegerea.</p>	<p>- anumite etape din rezolvarea 1/2/3 se putea aborda în alt fel?</p> <p>- am putea construi și alte strategii de rezolvare?</p> <p>- ce au în comun toate strategiile de rezolvare?</p> <p>(4) Putem acorda atenție strategiei prezentate la punctul (3), considerând necesară explicarea fiecărei etape ce presupune transformarea prin echivalență a relației de egalitate.</p>
<p>Profesor: Ajută-mă să <i>explic elevilor sensul verbului „a arăta”</i> folosit în cerința de mai sus, precum și în comparație cu alte contexte matematice în care este folosit. (5)</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Cu siguranță!</p> <p>Termenul "a arăta" în contextul matematic se referă la prezentarea unor pași sau proceduri care demonstrează o anumită afirmație sau egalitate matematică.</p>	<p>(5) În relație cu întrebarea formulată anterior – ce au în comun strategiile prezentate –, o astfel de cerință clarifică răspunsul așteptat: <i>indiferent de strategia aleasă, arăt prin parcurgerea mai multor etape de raționament că afirmația este adevărată.</i> Poate fi interesant și de evidențiat utilizarea aceluiași verb în alte contexte matematice, în acest fel facilitând intradisciplinaritatea.</p>



<p>În esență, elevii sunt solicitați să prezinte o demonstrație sau să explice modul în care s-a ajuns la o anumită concluzie matematică. Aceasta implică adesea exprimarea unei secvențe de operații matematice corecte, însoțite de explicații adecvate care să justifice fiecare pas.</p> <p>În cazul cerinței date, "a arăta că <math>(0,2+3/10) \times 10 = 5</math>", elevii trebuie să demonstreze că cele două expresii sunt echivalente, urmând pașii corecți de calcul și justificând fiecare etapă a transformării.</p> <p>În alte contexte matematice, termenul "a arăta" este folosit în mod similar pentru a solicita elevilor să demonstreze sau să justifice o afirmație matematică. <i>De exemplu:</i> (6)</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. În demonstrațiile geometrice, elevii sunt adesea rugați să arate că două figuri geometrice sunt congruente sau că un anumit unghi este congruent cu altul, prezentând lanțuri de argumente și raționamente pentru a susține afirmația.</li><li>2. În rezolvarea ecuațiilor sau inegalităților, elevii sunt încurajați să arate toate etapele pe care le-au urmat pentru a ajunge la soluția finală.</li><li>3. În rezolvarea problemelor de matematică aplicată, elevii trebuie să arate pașii lor de gândire și de calcul pentru a obține răspunsul corect.</li></ol> <p>În general, în toate aceste situații, "a arăta" implică prezentarea unor argumente sau proceduri matematice în mod clar și convingător, astfel încât să se poată verifica și valida rezultatul obținut.</p>	<p>(6) Exemplele furnizate de aplicație dovedesc <i>o serie de limite</i>, în acest sens <i>este utilă comentarea fiecărei situații în parte sau, pentru a fi mai concreți, solicitarea către elevi de a propune exemple</i> de cerințe în care acțiunea este de a arăta, legate de alte teme de matematică.</p>
<p>Profesor: Pentru relația adevărată <math>(0,2+3/10) \times 10 = 5</math> poți să propui <i>un context practic, din realitate, care să se descrie matematic</i> prin membrul stâng al egalității? (7)</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Desigur! Un context practic din realitate care poate fi descris matematic prin membrul stâng al egalității <math>(0,2+3/10) \times 10 = 5</math> ar putea fi calculul unei reduceri la preț pentru un produs într-un magazin.</p> <p>Să presupunem că un magazin oferă o reducere de 20% (0.2) la un produs, iar apoi adaugă încă o reducere de 30% (0.3) <i>din prețul redus</i>. Astfel, în total, beneficiem de o reducere de 50% (0.5) <i>din prețul inițial</i> al produsului. (8)</p> <p>Prin aplicarea acestei reduceri, prețul final al produsului este echivalent cu prețul inițial redus</p>	<p>(7) Pentru unii dintre elevi/eleve, membrul stâng al relației de egalitate <i>poate fi un calcul „fără semnificație”</i> (unde voi întâlni un astfel de calcul, de ce este relevant să știu asta?). Ne putem ajuta de aplicație pentru <i>a identifica un context</i> și, astfel, să <i>întărim motivația și chiar înțelegerea</i> mai bună a etapelor de calcul.</p> <p>(8) Exemplu dat de aplicație este util, însă <i>are limite</i>: astfel, <i>a doua reducere trebuie aplicată tot prețului inițial</i>; factorul 10 din membrul stâng a fost considerat ca preț inițial al produsului, însă <i>această informație nu este explicită și lectura exemplului poate fi însoțită de nedumeriri</i> din partea elevului/elevei. Este necesară intervenția profesorului pentru a se asigura că toți au înțeles exemplul; eventual profesorul poate să întrebe elevii dacă</p>

<p>la jumătate, ceea ce este reprezentat de rezultatul 5 în contextul dat.</p> <p>Astfel, expresia <math>(0.2+310) \times 10</math> poate fi interpretată ca prețul final al produsului după aplicarea ambelor reduceri.</p>	<p>exemplul este clar pentru toți și dacă nu, ce lipsește pentru a clarifica acest exemplu.</p>
<p>Profesor: Realizează un <i>test pentru elevi în care să incluzi probleme asemănătoare de calcul</i>, atât în formă strict matematică, precum și în context practic, din realitate. Asociază fiecărei probleme un punctaj, menționează că sunt acordate din oficiu 10 puncte și ai în vedere ca suma punctajelor la care adăugăm și punctele din oficiu să fie egală cu 100 de puncte. Calibreză testul pentru o rezolvare în 10 minute. Mulțumesc. (8)</p>	<p>(8) Putem folosi aplicația în sprijinul activității didactice, în baza secvențelor anterioare fiind oportun să asigurăm și un context de evaluare. În acest sens, pentru test putem avea la bază itemii propuși de aplicație. Pentru a obține un instrument cât mai relevant, descriu în cerință cât mai multe aspecte de care să țină cont aplicația în realizarea testului.</p> <p>(9) Instrumentul de evaluare are o <i>serie de limite</i>; de exemplu, am identificat și evidențiat <i>exprimări care sunt neclare sau exprimări gramaticale cu erori</i>, însă, dacă cer aplicației testul în perioada de pregătire a activității, intervin și fac corecțiile necesare; de asemenea, pot sprijini aplicația să se îmbunătățească, semnalând într-o conversație aspectele neconforme; dacă testul este returnat în cadrul activității propriu-zise, lectuez cu elevii întregul test înainte ca aceștia să înceapă rezolvarea cerințelor și implic elevii pentru a identifica și corecta aspectele neconforme.</p> <p>(10) Pentru a fi în concordanță cu scopul activității și prin raportare la competența în baza căreia construiesc tot demersul didactic, <i>pot interveni pe test</i> (acesta se poate copia din conversația cu ChatGPT și transpune într-un alt format), <i>aducând modificări și completări</i>, după caz.</p>
<p><b>ChatGPT</b></p> <p>Desigur! Iată un test pentru elevi, format din probleme de calcul matematic și din contexte practice, alături de punctajul asociat fiecărei probleme. Fiecare problemă are un timp recomandat de rezolvare de aproximativ 1 minut.</p> <hr/> <p><b>Test de Matematică - Calcul și Aplicații Practice</b> (9), (10)  <b>Timp recomandat pentru rezolvare: 10 minute</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><b>Calcul matematic:</b> Calculează rezultatul expresiei: <math>\left(0.3 + \frac{4}{10}\right) \cdot 8</math>.             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punctaj: 15 puncte</li> </ul> </li> <li><b>Context practic:</b> <i>Intră</i> o reducere de 25% la un produs care costă inițial 80 de lei. Care este prețul final al produsului după aplicarea reducerii?             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punctaj: 10 puncte</li> </ul> </li> <li><b>Calcul matematic:</b> <i>Simplifică</i> expresia: <math>\frac{5}{2} \times \frac{3}{5}</math>.             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punctaj: 10 puncte</li> </ul> </li> <li><b>Context practic:</b> Ai un buchet de flori care costă 25 de lei. Primești o reducere de 15% la acest buchet. Care va fi prețul după reducere?             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punctaj: 10 puncte</li> </ul> </li> <li><b>Calcul matematic:</b> Calculează rezultatul expresiei: <math>\left(0.4 + \frac{2}{5}\right) \times 6</math>.             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punctaj: 15 puncte</li> </ul> </li> <li><b>Context practic:</b> Ai cumpărat 3 kg de mere la prețul de 5 lei pe kilogram. Cât plătești în total?             <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punctaj: 10 puncte</li> </ul> </li> </ol>	<p>(10) Pentru a fi în concordanță cu scopul activității și prin raportare la competența în baza căreia construiesc tot demersul didactic, <i>pot interveni pe test</i> (acesta se poate copia din conversația cu ChatGPT și transpune într-un alt format), <i>aducând modificări și completări</i>, după caz.</p> <p>În acest sens, comparând itemul 3 cu itemul 7, ambele cerințe presupun înmulțirea de fracții ordinare; consider util păstrarea itemului 3, dar transformarea itemului 7 ca raport de fracții:</p> <p><b>7. Calcul matematic:</b> Efectuează calculele și scrie rezultatul sub formă de fracție zecimală, folosind rotunjirea la zecimi: <math>\frac{7}{9} : \frac{1}{3}</math>.</p> <p>La fel, comparând itemul 1 cu itemul 5, deși sunt aspecte de diferențiere între cele două expresii <math>\left(\frac{4}{10}\right)</math> care se transformă mai ușor în fracție zecimală, față de <math>\frac{2}{5}</math>, pot opta pentru o reformulare a itemului 5 care să aducă noi elemente în evaluare, de exemplu:</p> <p><b>5. Calcul matematic:</b> Calculează rezultatul expresiei: <math>\left(0.4 - \frac{2}{5}\right) : 6</math>. (sau <math>\left(0.7 - \frac{2}{5}\right) : 6</math>)</p>

<p>7. <b>Calcul matematic: Simplifică</b> expresia:</p> $\frac{1}{3} \times \frac{7}{9}$ <p>○ Punctaj: 10 puncte</p> <p>8. <b>Context practic:</b> Un magazin oferă o reducere de 20% la toate hainele. Dacă o pereche de blugi costă inițial 120 de lei, care va fi prețul după aplicarea reducerii?</p> <p>○ Punctaj: 10 puncte</p> <p><b>Punctaj din oficiu: 10 puncte</b></p> <p><b>Total puncte: 100 puncte</b></p> <hr/> <p>Acest test oferă elevilor oportunitatea de a aplica conceptele matematice în situații practice și de a-și dezvolta abilitățile de rezolvare de probleme.</p>	<p>Comparând itemii 2, 4 și 8, aș putea opta pentru menținerea primilor doi, deși presupun același raționament, dar formularea itemului are diferențe, deci presupune lectură atentă; astfel, un exemplu pentru itemul 8 ar putea fi:</p> <p>8. <b>Context practic:</b> Un magazin aplică o scumpire cu 20% la toate hainele. Dacă o pereche de pantaloni costă după scumpire 60 de lei, care a fost prețul inițial al acesteia?</p>
<p>Profesor: Pentru <i>a permite elevilor ca după rezolvarea cerințelor din test să se autoevalueze</i>, te rog prezintă și un <i>barem de evaluare</i>, cu evidențierea etapelor de rezolvare la fiecare problemă și a punctajului acordat pentru etapa parcursă, cu explicarea a ceea ce s-a realizat/aplicat la etapa respectivă (exemplu: la această etapă s-au folosit reguli de simplificare în cazul a două fracții ordinare care sunt înmulțite, simplificând numărătorul uneia dintre fracții cu numitorul celeilalte). (11)</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Cu plăcere! Iată un barem de evaluare pentru fiecare problemă din test, împreună cu punctajul acordat pentru fiecare etapă a rezolvării:</p> <p><b>Barem de Evaluare</b> (12)</p> <p>1. <b>Calcul matematic (15 puncte):</b></p> <p>○ <math>\left(0.3 + \frac{4}{10}\right) \cdot 8</math></p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ 5 puncte: Adunarea numerelor zecimale și fracțiilor</li><li>▪ 5 puncte: Înmulțirea rezultatului cu 8</li><li>▪ 5 puncte: Obținerea rezultatului corect: 3.2</li></ul> <p>2. <b>Context practic (10 puncte):</b></p> <p>○ Reducere de 25% la un produs care costă 80 de lei</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ 10 puncte: Calculul prețului final după aplicarea reducerii: 60 lei</li></ul>	<p>(11) Asociem propunerii de itemi și <i>baremul, pe care-l putem crea noi sau poate fi cerut aplicației</i>. Pentru a fi cât mai relevant, cerința adresată aplicației trebuie să fie cât mai exactă.</p> <p>(12) Baremul are o <i>serie de limite</i>:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- la asocierea punctajelor parțiale pe etape de rezolvare la itemul 1, optăm pentru <i>reformularea baremului</i> astfel:<ul style="list-style-type: none"><li>▪ (5 puncte) Aducerea termenilor adunării la aceeași formă (fracție zecimală/fracție ordinară)</li><li>▪ (5 puncte) Adunarea termenilor, cu obținerea rezultatului în forma 0,7 sau <math>\frac{7}{10}</math></li><li>▪ Înmulțirea rezultatului cu 8, cu obținerea rezultatului final în forma 5,6 sau <math>\frac{56}{10} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}</math></li></ul></li><li>- de remarcat faptul că <i>rezultatul final</i> menționat în baremul asociat itemului 1 <i>este greșit</i>; de asemenea, doar consemnarea uneia dintre forme ca răspuns așteptat în barem poate induce elevului/elevei obligativitatea de a exprima rezultatul final al unui astfel de calcul sub formă de fracție zecimală; atragem atenția elevilor că, dacă nu sunt precizări în acest sens în enunțul itemului, oricare rezultat corect, indiferent de formă de reprezentare, va fi acceptat și punctat; putem recomanda elevilor/elevelor ca, dacă optează pentru exprimarea rezultatului sub formă de fracție ordinară, aceasta să fie adusă la forma ireductibilă; de asemenea, scoaterea întregilor din fracție crește semnificația rezultatului;</li></ul>

3. **Calcul matematic (10 puncte):**

- Simplificare a expresiei:  $\frac{5}{2} \times \frac{3}{5}$ 
  - 5 puncte: Simplificarea fracțiilor
  - 5 puncte: Înmulțirea rezultatului: **1.5**

4. **Context practic (10 puncte):**

- Reducere de 15% la un buchet de flori care costă 25 de lei
  - **10 puncte: Calculul prețului după aplicarea reducerii: 21.25 lei**

5. **Calcul matematic (15 puncte):**

- $\left(0.4 + \frac{2}{5}\right) \times 6$ 
  - 5 puncte: Adunarea numerelor zecimale și fracțiilor
  - 5 puncte: Înmulțirea rezultatului cu 6
  - 5 puncte: Obținerea rezultatului corect: **4.8**

6. **Context practic (10 puncte):**

- **Calculul total** al unui lot de mere: 3 kg la 5 lei pe kilogram
  - 10 puncte: Calculul total: 15 lei

7. **Calcul matematic (10 puncte):**

- **Simplificare** a expresiei:  $\frac{1}{3} \times \frac{7}{9}$ 
  - 5 puncte: Simplificarea fracțiilor
  - 5 puncte: Înmulțirea rezultatului: **0.777...**

8. **Context practic (10 puncte):**

- Reducere de 20% la o pereche de blugi care costă 120 de lei
  - 10 puncte: Calculul prețului după aplicarea reducerii: 96 lei

**Punctaj din oficiu: 10 puncte****Total puncte: 100 puncte**

Acest barem de evaluare oferă un ghid clar elevilor pentru a-și evalua propriile răspunsuri și pentru a înțelege cum sunt acordate punctele în funcție de performanța lor la fiecare etapă a rezolvării.

- **reformularea baremului** asociat itemului 2:

- (5 puncte) scrierea relației matematice:  $25\% \cdot 80 = \frac{25}{100} \cdot 80$  sau  $25\% \cdot 80 = 0,25 \cdot 80$

- (5 puncte) finalizarea calculului, cu obținerea rezultatului corect: 60 de lei

- **reformularea baremului** asociat itemului 3, în sensul în care rezultatul așteptat poate fi exprimat atât sub forma zecimală, 1,5, cât și

ca fracție ordinară,  $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$  (oricare dintre

forme);

- **reformularea baremului** asociat itemului 4:

- (5 puncte) scrierea uneia dintre relațiile matematice:  $15\% \cdot 25 = 3,75$  lei, care permite calculul valorii (în lei) a reducerii prețului sau  $100\% - 15\% = 85\%$  care reprezintă procentul prețului final din prețul inițial

- (5 puncte) finalizarea calculelor, cu obținerea rezultatului corect:  $25 - 3,75 = 21,25$  lei sau  $85\% \cdot 25 = 21,25$  lei; le putem atrage atenția elevilor/elevelor asupra faptului că rezultatul așteptat este cel scris sub formă de fracție zecimală, acesta având semnificație clară în context (sumă de bani), iar una dintre formele  $\frac{2125}{100} = \frac{85}{4} = 21\frac{1}{4}$  este de evitat (are mai puțină relevanță în context)

- **reformularea baremului** asociat itemului 5 în același sens ca cel de la itemul 1; la fel pentru itemul 6, similar cu itemul 2; la fel pentru itemul 8, similar cu 2;

- completarea cerinței cu precizarea aducerii rezultatului sub formă de fracție zecimală și rotunjirea acestuia la zecimi, în acest caz și cu **reformularea baremului** asociat itemului 7:

- (5 puncte) înmulțirea fracțiilor ordinare:  $\frac{1}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{27}$

- (5 puncte) rescrierea rezultatului ca fracție zecimală, apoi aplicare procedurii de rotunjire la zecimi:



	<p>▪ <math>\frac{7}{27} = 0,259</math> sau</p> <p><math>0,25 &lt; \frac{7}{27} &lt; 0,26</math>, deci rotunjirea la zecimi este 0,3</p>
<p>Profesor: Propune câte un <i>set de exerciții</i> astfel: un set care să se adreseze elevilor care sunt în situația de remediere (au lacune în utilizarea calculelor numerice); un set pentru consolidarea competențelor de calcul numeric; un ultim set pentru aprofundare și performanță. Asociază fiecărui exercițiu câte un <i>hint</i> (o indicație pentru elev). (13)</p> <p><b>ChatGPT</b></p> <p>Desigur! Iată <i>câte un set de exerciții</i> pentru fiecare nivel de competență în calcul numeric: (14)</p> <p><b>Set pentru Remediere (nivel începător)</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li><b>Exercițiu 1: Adunare și scădere</b> Calculează rezultatul următoarelor operații: a) <math>23+14</math>; b) <math>48-19</math>. Hint: Începe cu adunarea sau scăderea unităților și apoi treci la zecimi și fracții, dacă este necesar.</li><li><b>Exercițiu 2: Înmulțire și împărțire</b> Rezolvă următoarele probleme: a) Calculează <math>5 \times 7</math>. b) Împarte 36 la 6. Hint: Folosește tabla înmulțirii și relația inversă dintre înmulțire și împărțire pentru a rezolva aceste exerciții.</li><li><b>Exercițiu 3: Calcul cu fracții</b> Simplifică următoarele fracții: a) <math>\frac{4}{8}</math> b) <math>\frac{3}{9}</math> Hint: Gândește-te la cel mai mare divizor comun al <b>numeratorului</b> și al numitorului pentru a simplifica fracțiile.</li></ol> <p><b>Set pentru Consolidare (nivel intermediar)</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li><b>Exercițiu 4: Calcul cu zecimale</b> Efectuează următoarele operații: a) <math>3.5+2.8</math>; b) <math>9.6-4.25</math>. Hint: <b>Așează</b> zecimalele aliniate și efectuează adunarea sau scăderea ca în cazul numerelor întregi.</li></ol>	<p>(13) Prin secvențele anterioare, elevul/eleva a fost pus/pusă în situații de reamintire, înțelegere, aplicare, analiză, sinteză; în baza testului aplicat, prin acces la barem, elevul are posibilitatea să se autoevalueze (sau poate fi facilitată evaluarea încrucișată, astfel elevul/eleva va fi pus în situația de a analiza atât corespondența răspunsului final formulat de un coleg/colegă, cât și modul în care acesta a raționat și a redactat rezolvările; acest exercițiu de evaluare încrucișată devine un context relevant de învățare). <b>Pentru consolidarea învățării</b>, este util să pregătim și contexte noi de exersare, în acest sens putem cere aplicației să ofere seturi de exerciții și probleme. Având în vedere nivelurile diferite ale competențelor de calcul, pentru a asigura și <b>abordarea diferențiată a învățării</b>, în cerință putem include detalii privind gradul de dificultate și varietatea sarcinilor de lucru. <b>Înspre consolidarea învățării putem cere ca fiecare exercițiu să conțină și elemente de sprijin</b> (indicații).</p> <p>(14) Exemplificare are o <b>serie de limite</b>: - am evidențiat în text cuvinte care nu sunt în acord cu normele gramaticale; este important ca elevii/elevele să îl identifice cel puțin pe cel de-al doilea și să se insiste asupra formei sale corecte (așază) - calibrarea itemilor pe nivel de dificultate poate fi îmbunătățită, profesorul putând schimba și completa, după caz, seturile de exerciții.</p>

**5. Exercițiu 5: Calcul cu fracții și zecimale**

Rezolvă următoarele probleme:

a)  $\frac{1}{2} \times 0.4$ ;

b)  $3.25 : \frac{5}{4}$ .

Hint: **Convertă** numerele zecimale în fracții sau fracțiile în zecimale, dacă este necesar, pentru a simplifica calculul.

**6. Exercițiu 6: Probleme practice**

Rezolvă următoarele probleme:

a) Dacă ai 15 dolari și cumperi 3 produse identice la prețul de 4.50 dolari fiecare, cât vei avea rămas?

b) Un rezervor are o capacitate de 12.5 litri. Dacă a fost deja umplut cu 3,3 litri de apă, câți litri mai pot fi adăugați?

Hint: Identifică operațiile necesare pentru rezolvarea problemei și aplică-le în mod corespunzător.

**Set pentru Aprofundare și Performanță (nivel avansat)****7. Exercițiu 7: Calcul cu puteri**Calculează următoarele expresii: a)  $3^2$ ;

b)  $4^{\frac{1}{2}}$ .

Hint: Folosește proprietățile puterilor pentru a simplifica expresiile.

**8. Exercițiu 8: Calcul cu radicali**9. Simplifică **următoarele** radicali: a)  $\sqrt{16}$ 

b)  $\sqrt[3]{27}$

Hint: Gândește-te la numere întregi care, ridicate la puterea corespunzătoare, dau rezultatul **dat de** radical.

**8. Exercițiu 9: Calcul cu fracții complexe**

9. Efectuează următoarele operații: a)

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6}; \text{ b) } \frac{7}{8} \times \frac{3}{4}.$$

Hint: Identifică numitorul comun și simplifică fracțiile, dacă este necesar, înainte de a efectua operațiile.

**Hint: Utilizați proprietățile matematice relevante și relațiile între diferitele tipuri de numere pentru a rezolva corect exercițiile.**

Aceste seturi de exerciții acoperă diferite nivele de dificultate și oferă elevilor oportunitatea de a-și consolida și aprofunda competențele în calcul numeric.

Profesor: Pentru final, vreau să sprijin elevii să formuleze *concluzii privind învățarea*: concepte, elemente procedurale, alte aspecte. (15)

ChatGPT

Cu siguranță! Este important ca elevii să reflecteze asupra procesului de învățare și să extragă concluzii din exercițiile pe care le-au rezolvat. Iată *câteva întrebări și sugestii* care îi pot ajuta pe elevi să formuleze concluzii privind învățarea: (16)

1. **Concepte matematice:** Am întâlnit o varietate de concepte matematice în rezolvarea exercițiilor, cum ar fi ... (adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, fracțiile, zecimalele, puterile, radicalii etc.)
2. **Elemente procedurale:** Am aplicat diverse proceduri și algoritmi pentru a rezolva exercițiile, cum ar fi: ... (ordinea operațiilor, simplificarea fracțiilor, transformarea zecimalelor în fracții sau invers, proprietățile puterilor și radicalilor etc.)
3. **Provocări întâmpinate:** (17) Am întâmpinat anumite provocări în rezolvarea exercițiilor, cum ar fi: ... (aplicarea corectă a regulilor matematice, interpretarea cerințelor problemei și gestionarea timpului.)
4. **Strategii eficiente:** Am folosit diverse strategii și metode eficiente în rezolvarea exercițiilor, cum ar fi: ... (utilizarea tabelii înmulțirii, desfacerea parantezelor, aplicarea unor trucuri sau tehnici specifice etc.)
5. **Învățăminte din procesul de rezolvare:** Am învățat o mulțime de lucruri noi din procesul de rezolvare a acestor exerciții, îmbunătățindu-mi cunoștințele, abilitățile și experiența în matematică, cel mai important fiind ....

(15) Printr-o astfel de cerință, atât ca profesor, cât și ca elev/elevă, *construim un context de învățare complet, încheiat cu etapa de (auto)reflecție:*

- *profesorul* – asupra activității didactice proprii ( a se vedea următoarea secvență);  
- *elevul/eleva* – asupra propriei învățări.

(16) *Ideile enumerate pot orienta procesul de reflecție a elevilor/elevelor asupra propriei învățări.* Profesorul poate transforma această listă într-un *chestionar electronic* pe care elevii/elevetele să-l completeze la finalul activității; formatul electronic, mai ales în cazul în care are și funcția de centralizare automată a răspunsurilor (de exemplu, google forms) permite accesul facil al profesorului la feedback, precum și analizarea acestuia pentru a obține concluzii care să orienteze activitatea didactică viitoare.

(17) *Profesorul va acorda atenție feedback-ului elevilor, în special privind răspunsurile acestora la cerința 3* (provocări întâmpinate), deoarece, prin centralizarea răspunsurilor se pot identifica tipare privind erorile, ceea ce permite acționarea într-o activitate/serie de activități ulterioare înspre corectarea acestora; având în vedere orientarea întregii acestei activități pe competențe de calcul, ca fiind competențe de bază și implicate în majoritatea altor contexte de lucru matematic, îndreptarea erorilor tipice poate fi adresată unei activități viitoare de sine stătătoare sau prin micro-secvențe dedicate calculului prin diverse activități asociate diferitelor teme din curriculum.

Profesor: Mulțumesc pentru lista de idei care orientează procesul de reflecție a elevului asupra propriei învățări. Formulează o *listă de idei (check-list) asupra cărora trebuie să reflectez eu la finalul activității* realizate în baza secvențelor anterioare. (18)

ChatGPT

Cu plăcere! Iată o *check-listă* cu idei pe care ar trebui să le iei în considerare pentru a reflecta asupra activității desfășurate:

(18) Nu numai elevul trebuie pus și obișnuit să reflecteze la finalul activității. În acest sens, cu siguranță *am propria listă de verificare* care să cuprindă aspecte asupra cărora reflectez, însă *mă pot folosi de aplicație pentru a avea acces rapid la o listă ce rezultă din integrarea tuturor informațiilor pe care le deține* ChatGPT, deci am șansa de a identifica *noi aspecte* la care trebuie să raportez rezultatele activității didactice.



<ol style="list-style-type: none"><li>1. <b>Obiectivele activității:</b><ul style="list-style-type: none"><li>○ Am atins obiectivele stabilite inițial pentru această activitate?</li><li>○ „Ce erau” obiectivele principale și secundare ale activității și cum le-am îndeplinit?</li></ul></li><li>2. <b>Eficiența materialelor și resurselor:</b><ul style="list-style-type: none"><li>○ Au fost materialele și resursele utilizate adecvate pentru obiectivele activității?</li><li>○ Au fost resursele suficiente sau au fost necesare resurse suplimentare?</li></ul></li><li>3. <b>„Engajamentul” și participarea elevilor:</b><ul style="list-style-type: none"><li>○ Cum a fost nivelul de angajament al elevilor în timpul activității?</li><li>○ Cum au reacționat elevii la diferitele secvențe și sarcini ale activității?</li></ul></li><li>4. <b>Eficacitatea instruirii și transmiterea de cunoștințe:</b><ul style="list-style-type: none"><li>○ Au înțeles elevii conceptele și abilitățile prezentate în activitate?</li><li>○ Ce strategii de instruire au funcționat cel mai bine și care nu au fost la fel de eficiente?</li></ul></li><li>5. <b>Diferențierea și adaptarea:</b><ul style="list-style-type: none"><li>○ Am reușit să diferențiez instrucțiunile și sarcinile pentru a răspunde nevoilor individuale ale elevilor?</li><li>○ Cum pot adapta activitatea pentru a îmbunătăți experiența de învățare pentru toți elevii?</li></ul></li><li>6. <b>Managementul timpului și organizarea:</b><ul style="list-style-type: none"><li>○ Cum am gestionat „timpul în timpul” activității? Au fost secvențele bine structurate și organizate?</li><li>○ Există aspecte pe care le-aș putea îmbunătăți pentru a gestiona mai eficient timpul și activitatea?</li></ul></li><li>7. <b>Feedback și evaluare:</b><ul style="list-style-type: none"><li>○ Ce feedback am primit de la elevi pe parcursul activității?</li><li>○ Cum pot folosi acest feedback pentru a îmbunătăți activitățile viitoare?</li></ul></li></ol>	<p>Evident, <i>lista are propriile limite</i>, în principal privind <i>formulările/exprimarea/elemente de gramatică neconforme</i> (evidențiate în textul alăturat), dar aceasta nu trebuie să reprezinte o barieră de a lectura cu atenție setul de idei și de a-mi completa, după caz, propria listă.</p>
--	---

<p>8. <b>Relevanța și conexiunea cu conținutul de învățare:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>○ <b>Cum</b> a fost relevanța activității pentru <b>conținutul de învățare și obiectivele curriculumului</b>?</li><li>○ Ce legături am făcut între activitate și experiențele de viață ale elevilor?</li></ul> <p>9. <b>Autoevaluarea și dezvoltarea personală:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>○ Ce pot învăța din această experiență și cum mă pot îmbunătăți <b>ca și</b> educator?</li><li>○ Care au fost punctele mele tari și care sunt aspectele la care mai am de lucrat?</li></ul> <p>10. <b>Planificarea pentru viitor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>○ Ce ajustări sau îmbunătățiri pot face pentru activitățile viitoare bazate pe această experiență?</li><li>○ Cum pot utiliza această experiență pentru a ghida planificarea și practica mea viitoare?</li></ul> <p>Reflectând asupra acestor aspecte, vei putea să îți îmbunătățești practica pedagogică și să optimizezi experiența de învățare pentru elevii tăi.</p>	
---	--

\*<https://chat.openai.com> – texte prelucrate din punct de vedere al redactării simbolic-matematice specifice, în baza utilizării aplicației

### Concluzii privind utilizarea aplicațiilor cu componentă IA de către profesori/profesoare

Așa cum am evidențiat în comentariile noastre, există o serie de *limitări ale aplicației IA utilizate (ChatGPT – versiunea de bază, accesibilă fără costuri)* și acestea se referă, în principal, la aceleași aspecte precizate în concluziile descrierii activității elevului/interacțiunii acestuia cu aplicația.

*Interacțiunea profesorului cu o aplicație cu componentă IA (generativă), trebuie privită ca:*

- *sprijin* în proiectarea și realizarea unor demersuri didactice;
- *învățare reciprocă:*
  - întrebările/cerințele formulate de noi pentru aplicație și, după caz, semnalarea către aplicație a limitelor identificate, permit acestuia să se *autoîmbunătățească*;
  - informațiile returnate, exemplele identificate și puse la dispoziția noastră sunt aproape instantanee, deci din punct de vedere al timpului alocat pregătirii, dar și al desfășurării activității, reprezintă o *economie de resurse semnificativă*;
  - faptul că aplicația reține *fluxul schimbului de informații* în cadrul conversației de tip *chat*, permite ca la fiecare nouă cerință/întrebare să invoc elemente de discuție anterioare, *relevanța răspunsului* aplicației fiind crescută (nu ia de la „zero”, construiește pe ...);

- a produce *învățare prin diferențiere* reprezintă o *provocare* pentru profesor; aplicația facilitează generarea de contexte de învățare diferențiate, la cererea noastră, în condițiile în care „învățăm ce și cum să cerem”;
- faptul că *aplicația are erori* (gramaticale, chiar științifice) poate fi *transformat în oportunitate*, în acest sens, elevul/eleva și profesorul/profesoara se simt mai *confortabili față de inteligența artificială*, în sensul în care fiecare are de învățat de la celălalt; posibilele erori, atunci când sunt identificate, ne asigură că deținem *competențele de literație matematică/în general* și că ni le consolidăm prin lectura critică a textelor;
- interacțiunea cu IA este un *simulator pentru interacțiunea noastră în comunități/grupuri profesionale*; nu toți profesorii se simt confortabili să acceseze astfel de comunități; faptul că răspunsurile IA integrează informațiile la care aplicația are acces din mediul online/din băncile de date asociate acestuia de către creatorii aplicației, înseamnă că *o întrebare pusă IA returnează o sinteză a informațiilor create de o întreagă comunitate*;
- **utilizarea IA în demersul didactic nu trebuie să înlocuiască orice altă strategie sau instrument anterior utilizat de profesor, dar având în vedere rata de inovare în domeniul tehnologiilor viitorul educației nu poate fi disociat de IA.**

*Preocupări similare* privind utilizarea aplicațiilor cu componentă IA în educației *au multe sisteme de învățământ*. În acest sens, vă *propunem spre lectură și reflecție*:

<https://www.letudiant.fr/bac/revisions-bac/article/comment-bien-utiliser-chatgpt-pour-reviser-son-bac.html>

Alternative la aplicația ChatGPT, în aceleași condiții de utilizare fără costuri:

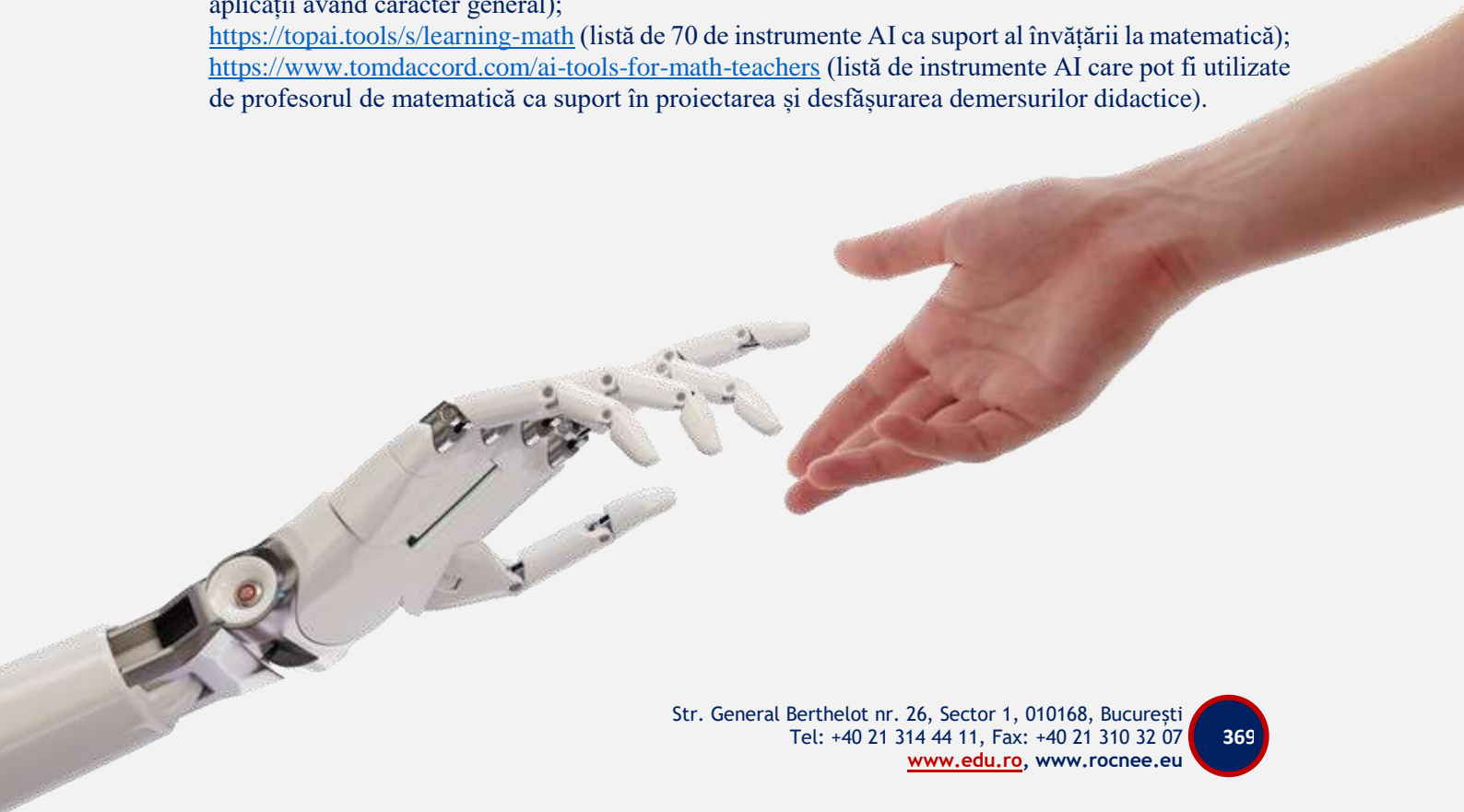
<https://educationblog.microsoft.com/en-us/2024/01/meet-your-ai-assistant-for-education-microsoft-copilot> (prezentare generală a aplicației); <https://copilot.microsoft.com/> (pentru creare cont de utilizator);

Sprijin pentru procesul de predare-învățare-evaluare prin aplicații cu componentă IA:

<https://screenapp.io/blog/best-free-ai-tools-for-students-teachers-via-digital-learning> (listă de 11 aplicații având caracter general);

<https://topai.tools/s/learning-math> (listă de 70 de instrumente AI ca suport al învățării la matematică);

<https://www.tomdaccord.com/ai-tools-for-math-teachers> (listă de instrumente AI care pot fi utilizate de profesorul de matematică ca suport în proiectarea și desfășurarea demersurilor didactice).



**Anexa nr. 3**
**3.1. Acțiunile (cerințele, verbele) incluse în itemii subiectelor propuse în cadrul Simulării examenului național de bacalaureat, martie 2024:**

SI.1.	SI.2.	SI.3.	SI.4.	SI.5.	SI.6.
<b>a arăta</b>	<b>a determina</b>	<b>a rezolva</b>	<b>a determina</b>	<b>a arăta</b>	<b>a arăta</b>
SII.1.a)	SII.1.b)	SII.1.c)	SII.2.a)	SII.2.b)	SII.2.c)
<b>a arăta</b>	<b>a arăta</b>	<b>a determina</b>	<b>a arăta</b>	<b>a determina</b>	<b>a arăta</b>
SIII.1.a)	SIII.1.b)	SIII.1.c)	SIII.2.a)	SIII.2.b)	SIII.2.c)
<b>a arăta</b>	<b>a arăta</b>	<b>a demonstrează</b>	<b>a arăta</b>	<b>a arăta</b>	<b>a determina</b>

Acțiuni	<b>a arăta*</b>	<b>a determina</b>	<b>a rezolva</b>	<b>a demonstrează</b>	Total itemi
Frecvența de apariție în cadrul itemilor	11	5	1	1	18

\*peste jumătate dintre cerințele subiectelor din cadrul Simulării examenului de bacalaureat (martie 2024) cer „a arăta că ...”, deci la aceste cerințe elevul are explicit rezultatul așteptat la care trebuie să ajungă prin parcurgerea pașilor de rezolvare; voi conștientiza elevii asupra acestor situații, fiind în favoarea lor, prin diminuarea gradului de incertitudine (știu ce trebuie să obțin/la ce trebuie să ajung, mă voi concentra pe „cum”)

O prezentare pe niveluri de competență și o descriere cu asociere de exemple sunt incluse în tabelele următoare.

**3.2. Niveluri de competență și exemple de acțiuni/verbe\* , \*\* asociate**

Cunoaștere (ceea ce știu, ceea ce îmi amintesc)	Înțelegere (ce înțeleg)	Aplicare (cum aplic ceea ce știu)	Analizare (cum leg ceea ce știu, înțeleg și aplic pe etape/părți)	Sinteză/ Evaluare (cum leg etapele/părțile într-un tot, cum îmbunătățesc)	Inovare/ Creație (transfer de metodă/noi probleme/noi soluții/noi metode/nouă cunoaștere)
				nivel superior	
a defini	a descrie	a aplica	a analiza	a relaționa	a genera recomandări
a enumera	a diferenția	a calcula	a evalua (un procedeu/ rezultat)	a integra	a aprecia
a afirma	a explica	a efectua	a compara	a concluziona	a lua decizii
a desena	a identifica	a adapta	a construi	a alege	a adapta
a enunța (cita)	a exemplifica	a prelucra	a discuta/ confrunța	a evalua	a anticipa
a găsi	a aranja	a rezolva	a interpreta	a compara	a colaborează
a numi	a asocia	a organiza date	a confrunța	a dezbate	a combină
a denumi	a clasifica	a demonstrează	a diferenția	a construi	a comunica
a localiza ( a încadra într-un context)	a transforma	a dezvoltă	a asemăna	a estima	a compune
a potrivi	a interpretează	a stabilește	a critica	a formula	a construi
a recita	a parafraza	a examinează	a susține (a apăra o idee)	a genera	a crea



a recunoaște	a raporta	a extrapola	a descoperi	a presupune (a formula o ipoteză)	a concepe (design)
a selecta	a cerceta	a ilustra	a diseca ( a analiza în profunzime)	a integra	a facilita
	a sorta	a implementa	a distinge (între cazuri)	a judeca	a prognoza
	a sumariza	a utiliza	a examina	a justifica	a genera
	a traduce (transpune dintr-o formă de exprimare în alta)	a modifica	a inspecta	a coordona ( a ține sub control)	a iniția
		a relaționa	A inventaria (metode/ procedee)	a organiza	a modela
		a face predicții	a testa (o ipoteză)	a predicționa	a negocia
		a pregăti (fundamenta)		a prescrie (a formula o strategie)	a organiza
				a prioritiza	a performa
				a produce ( un rezultat/o nouă problemă)	a planifica
				a propune	a produce
				a recomanda	a reconcilia
				a structura	a revizui
				a sintetiza	a rezolva
					a substitui
<b>Strategii de predare</b>					
lectură	întrebări	practică	rezolvare de probleme	proiecte	simulări
resurse educaționale video	discuții	demonstrații	studii de caz	rezolvare de probleme	abordare critică
exemplificări/ ilustrări	actualizări (revizuirii)	prezentări	abordare critică	studii de caz	studii complexe de caz
legături cu mediul înconjurător/ realitatea	testare	proiecte	discuții	dezvoltarea unui plan	dezvoltare/ design
organizatori vizuali	exersare	micro-predare/ co-predare	teste	simulări	generare de noutate (metodă/ produs/ soluție)

\*Anumite acțiuni/verbe pot fi specifice doar unuia dintre nivelurile de competență, dar există acțiuni/verbe care au un caracter mai cuprinzător, încadrarea într-un nivel sau altul fiind în relație cu contextul în care sunt utilizate

\*\*prelucrare după: <https://www.utica.edu/academic/Assessment/new/Blooms%20Taxonomy%20-%20Best.pdf>

**3.3. Descrierea unor acțiuni (verbe) specifice domeniului matematic și care sunt utilizate în formularea unei cerințe de lucru/de evaluare**

Acțiune (cerință într-un context matematic general)	Descriere
<b>Află/ Aflați</b>	Obținerea unui răspuns prin dezvoltarea unui raționament, cu evidențierea etapelor parcurse <b>Ex:</b> <i>Află punctul de pe reprezentarea grafică a funcției ..., cu proprietatea că ....</i>
<b>Alege/ Alegeți</b>	Marcarea unui/unor răspuns/răspunsuri dintr-o serie de răspunsuri predefinite (item cu alegere multiplă); alegerea răspunsului nu implică formularea explicită a raționamentului (dacă nu sunt precizări suplimentare în acest sens). <b>Ex:</b> <i>Alegeți răspunsul corect din lista de răspunsuri asociate următoarei afirmații: Cel mai mare element, ce reprezintă un număr natural, al mulțimii</i> $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3\}$ este: <i>a) 0; b) 1; c) 2; d) 3</i>
<b>Arată/ Arătați</b>	Formularea unui raționament care să conducă la validarea unei afirmații date <b>Ex:</b> <i>Arată că <math>3 + (2-5) = 0</math>.</i>
<b>Calculează/ Calculați</b>	Obținerea unui rezultat numeric/algebric în urma prezentării etapelor de raționament (calcul) <b>Ex:</b> <i>Calculează suma ....</i>
<b>Comentează/ Comentați</b>	Formularea unor judecăți în baza ipotezelor date sau asupra rezultatului obținut în urma unui raționament/unor etape de raționament <b>Ex:</b> <i>Comentează soluția obținută.</i>
<b>Compară/ Comparați</b>	Precizarea asemănarilor și a deosebirilor dintre două sau mai multe obiecte/proceduri/contexte matematice <b>Ex:</b> <i>Compară proprietățile dreptunghiului cu cele ale rombului.</i>
<b>Construiește/ Construiți</b>	Transpunerea unor informații/date/ipoteze în limbaj figurativ (desene, grafice, diagrame) sau în limbajul logicii formale <b>Ex:</b> <i>Construiește o piramidă patrulateră regulată ...</i>
<b>Dedu/ Deduceți</b>	Obținerea unei concluzii în baza unor informații date <b>Ex:</b> <i>Dedu formula binomului sumă la pătrat în cazul ...</i>
<b>Demonstrează/ Demonstrați</b>	Formularea/Prezentarea unui raționament corect și clar în baza unor ipoteze date pentru a fundamenta o concluzie, folosind elemente de logică formală <b>Ex:</b> <i>Demonstrează că raportul dintre aria pătratului circumscris unui cerc și aria pătratului înscris în același cerc este egal cu 2.</i>
<b>Describe/ Descrieți</b>	Prezentarea detaliată a unui obiect/procedeu/situație matematică <b>Ex:</b> <i>Describe triunghiul isoscel.</i>
<b>Determină/ Determinați</b>	Prezentarea unui raționament care conduce la un răspuns formulat în mod explicit <b>Ex:</b> <i>Determină soluțiile ecuației...</i>
<b>Diferențiază/ Diferențiați</b>	Precizarea clară a unei/unor diferențe dintre două obiecte/proceduri/situații matematice <b>Ex:</b> <i>Diferențiați procedeul de introducere de factor sub radical de procedeul de scoatere a unui factor sub radical din perspectiva scopului pentru care este utilizat fiecare dintre procedee</i>
<b>Desenează/ Desenați</b>	Reprezentarea unor elemente geometrice, a unor funcții, a unor diagrame, utilizând instrumente de geometrie <b>Ex:</b> <i>Desenează un cerc.</i>
<b>Dezvoltă/ Dezvoltați</b>	Obținerea unui nou rezultat în baza unui context anterior rezolvat <b>Ex:</b> <i>Ca urmare a faptului că ....., verificați că ...</i>
<b>Enumeră/ Enumerați</b>	Prezentarea unor cazuri care îndeplinesc o serie de condiții date <b>Ex:</b> <i>Enumeră elementele mulțimii ... care au proprietatea ...</i>
<b>Estimează/ Estimați</b>	Efectuarea unui calcul/formularea unui raționament prin care se obține o aproximare a unei valori numerice <b>Ex:</b> <i>Estimează valoarea ce reprezintă soluția pozitivă a ecuației ..., cu aproximare prin adaos la zecimi.</i>



<b>Explică/ Explicați</b>	Formularea unui raționament cu evidențierea etapelor și a considerentelor care susțin raționamentul respectiv <b>Ex:</b> <i>Explică de ce aria unui triunghi cu două vârfuri fixe și cel de-al treilea vârf mobil, situat pe o paralelă la dreapta determinată de celelalte două vârfuri este constantă.</i>
<b>Identifică/ Identificați</b>	Formularea unui răspuns așteptat dintr-o serie de răspunsuri posibile <b>Ex:</b> <i>Identificați elementele mulțimii ... care îndeplinesc condiția ....</i>
<b>Interpretează/ Interpretați</b>	Folosirea cunoașterii și înțelegerii pentru a asocia o semnificație unui răspuns obținut <b>Ex:</b> <i>Interpretează graficul funcției .... din perspectiva proprietății de monotonie.</i>
<b>Investighează/ Investigați</b>	Observarea/studierea/analizarea aprofundată a unei situații matematice în vederea stabilirii unor caracteristici și formulării unor concluzii <b>Ex:</b> <i>Investighează comportamentul funcției ... în funcție de valoarea coeficientului ...</i>
<b>Justifică/ Justificați</b>	Formularea unor argumente obiective, corecte, care susțin o concluzie <b>Ex:</b> <i>Justificați că produsul oricăror două numere întregi consecutive este număr par.</i>
<b>Numește/ Numiți</b>	Precizarea unui obiect matematic dintr-o serie de obiecte care să îndeplinească una sau mai multe condiții date <b>Ex:</b> <i>Numiți paralelogramele care au proprietatea că diagonalele au lungimi egale.</i>
<b>Poziționează/ Poziționați</b>	Marcarea unei poziții pe o reprezentare grafică/diagramă <b>Ex:</b> <i>Pe reprezentarea grafică a funcției ..., poziționați punctul de coordonate ...</i>
<b>Prognozează/ Prognozați</b>	Formularea unei ipoteze/predicții privind o situație viitoare a unui fenomen în evoluție <b>Ex:</b> <i>Precizează cadrantul în care se va situa un punct de pe cercul trigonometric dacă măsura în radiani crește cu ...</i>
<b>Propune/ Propuneți</b>	Asocierea unei afirmații privind un context matematic dat, fără a o justifica neapărat <b>Ex:</b> <i>Dați o interpretare geometrică a faptului că toate valorile unei funcții definite pe mulțimea numerelor reale sunt pozitive</i>
<b>Rezolvă/ Rezolvați</b>	Parcurgerea etapelor de raționament/calcul care conduc la un răspuns așteptat <b>Ex:</b> <i>Rezolvă în mulțimea ... ecuația ...</i>
<b>Schițează/ Schițați</b>	Folosirea unor etape de raționament care să contureze un rezultat (fără a detalia toate etapele în mod necesar, dar incluzând elemente cheie) <b>Ex:</b> <i>Schițează graficul funcției de gradul al II-lea, f: ....</i>
<b>Scrie/ Scrieți</b>	De regulă, formularea unui răspuns de completare/scurt în cadrul unui text lacunar sau în completarea acestuia. <b>Ex:</b> <i>Numărul de trei ori mai mare decât 5 este ...</i> <i>Scrieți două numere reale care adunate dau suma 3 și al căror produs este negativ.</i> .....
<b>Stabilește/ Stabiliți</b>	Alegerea răspunsului corect dintr-o serie de răspunsuri asociate unei afirmații, de regulă stabilirea valorii de adevăr a unei propoziții matematice <b>Ex:</b> <i>Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Oricare trei puncte distincte de pe un cerc sunt necoliniare.”</i>
<b>Verifică/ Verificați că/dacă</b>	Formularea unui raționament/aplicarea unui algoritm prin care validăm (în cazul „verificați că” și validăm sau invalidăm (în cazul „verificați dacă”) o afirmație dată <b>Ex:</b> <i>Verificați că cifra unităților oricărei puteri de bază 2 și exponent număr natural este element al mulțimii {1,2,4,6,8}.</i>  <i>Verificați dacă printre numerele naturale de forma <math>5n+1</math>, unde <math>n</math> este număr natural nenul se găsesc și numere al căror radical este număr natural.</i>

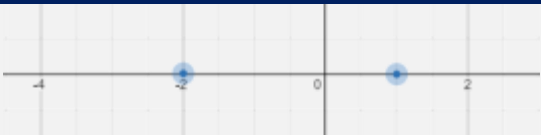



**Anexa nr. 4**
**4.1. Lista simbolurilor și scrierilor simbolic-matematice utilizate în enunțul subiectului comentat în secțiunea a IV-a**

Simbol/ Scriere simbolică	Ceea ce reprezintă	Observații
+	adunare, sumă	operație de ordinul I asociativă comutativă element neutru 0 $-a$ opusul lui $a$
$\cdot, \times$	înmulțire, produs	operație de ordinul al II-lea asociativă comutativă element neutru 1 $\frac{1}{a} = a^{-1}$ inversul lui $a$ , $a \neq 0$
( )	paranteze rotunde	delimitează o secvență de calcul
=	egal, egalitate	relație de egalitate reflexivă simetrică tranzitivă
$a + b = c$	$a, b$ – termenii adunării	$c$ – sumă (rezultatul adunării)
$m \cdot n = p$	$m, n$ – factorii înmulțirii	$p$ – produsul (rezultatul înmulțirii)
0,2	exemplu de fracție zecimală finită	formă de scriere a <u>unor</u> numere raționale
$\frac{3}{10}$	exemplu de fracție ordinară	formă de scriere a numerelor raționale

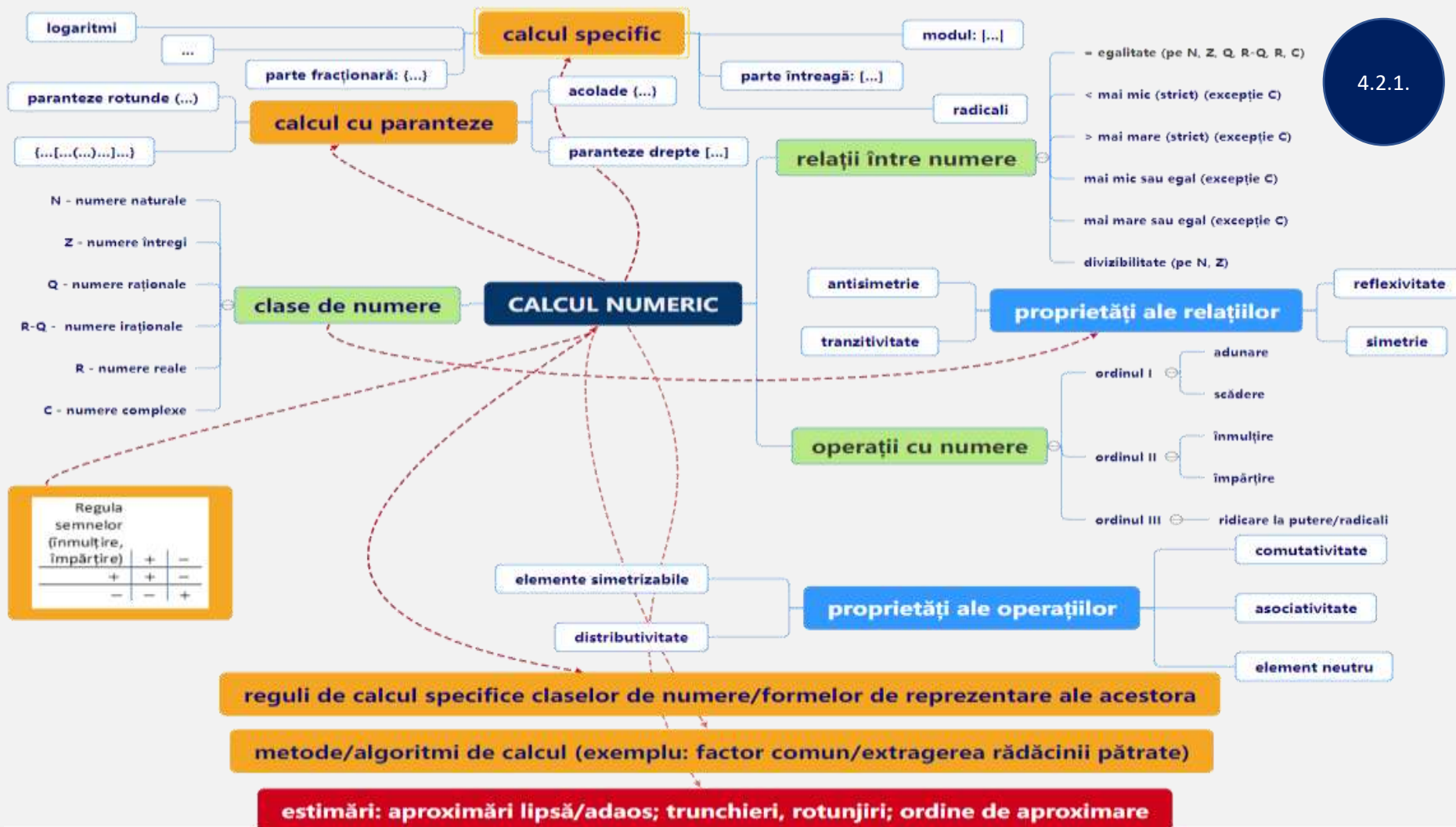
**Completarea listei anterioare cu alte simboluri/expresii matematice uzuale:**

Simbol/ Scriere simbolică	Ceea ce reprezintă	Observații
$\neq$	diferit	<a href="https://www.cuemath.com/numbers/not-equal/">https://www.cuemath.com/numbers/not-equal/</a>
$\leq$	mai mic sau egal	relație de ordine cu proprietățile: <i>reflexivitate, antisimetrie, tranzitivitate</i> o comparație care este adevărată atunci când valoarea din stânga este mai mică sau egală cu valoarea din dreapta Exemplu: $-2 \leq x \leq 1$ înseamnă că numărul real $x$ trebuie să ia valori între -2 și 1, inclusiv ambele valori (de capăt, margini) altfel scris $x \in [-2, 1]$ sau utilizând reprezentarea grafică:

		
$\geq$	mai mare sau egal	<p>relație de ordine cu proprietățile: <i>reflexivitate, antisimetrie, tranzitivitate</i></p> <p>o comparație care este adevărată atunci când valoarea din stânga este mai mare sau egală cu valoarea din dreapta</p> <p>Exemplu:</p> <p><math>x \geq -2</math> înseamnă că numărul real <math>x</math> trebuie să ia valori mai mari sau egale cu <math>-2</math></p> <p>Altfel scris, <math>x \in [-2, \infty)</math></p> <p>sau</p> <p>utilizând reprezentarea grafică:</p> 



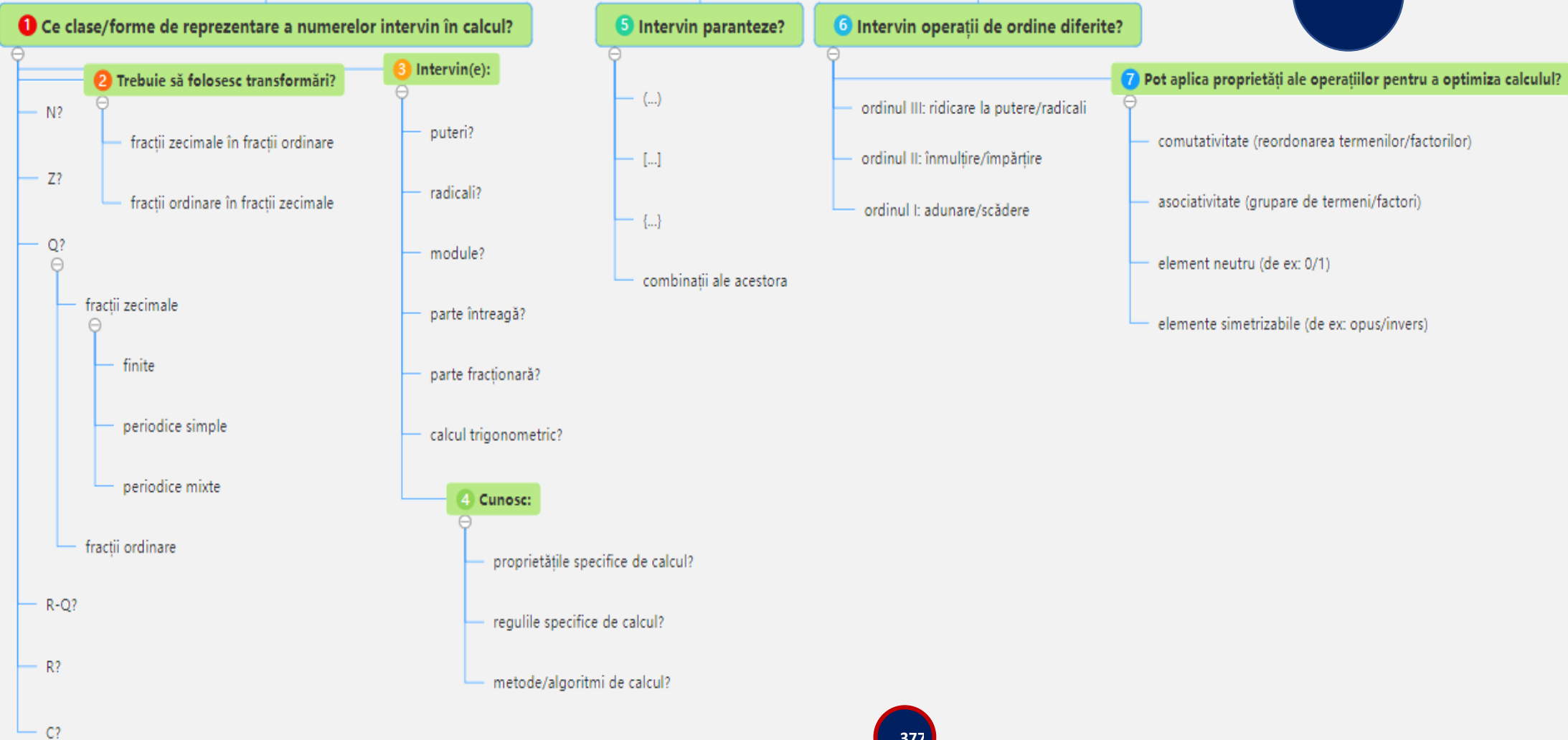
4.2. Exemple de organizatoare (hărți mentale) în cadrul activităților de recapitulare – aplicație la subiectul I.1 din cadrul Simulării examenului național de bacalaureat 2024



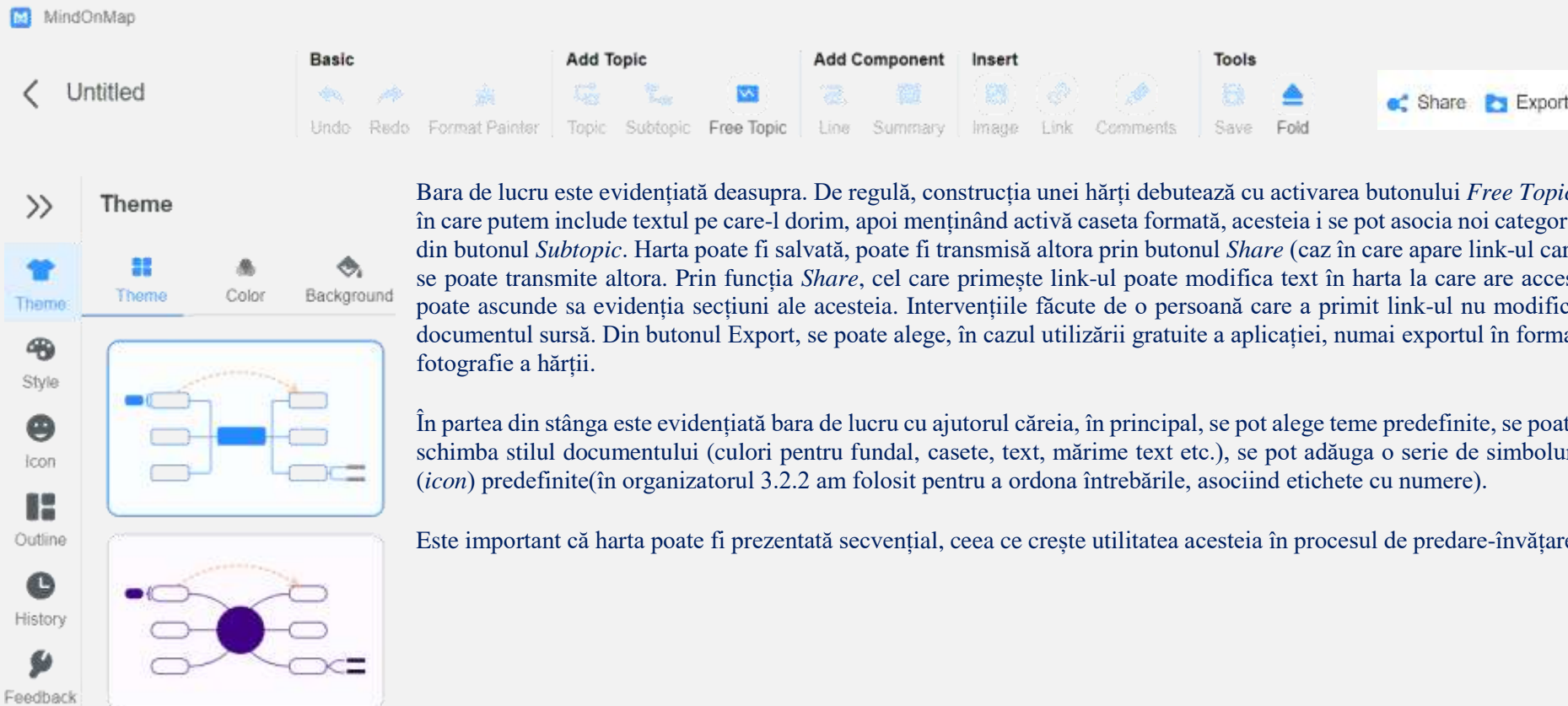
4.2.1.

**Pentru efectuarea calculului numeric, mă întreb:**

4.2.2.



**Organizatoarele 4.2.1 și 4.2.2** sunt realizate cu ajutorul aplicației MindOnMap , <https://www.mindonmap.com/>. Pentru utilizare, se poate descărca gratuit aplicația, versiunea gratuită permițând crearea de organizatoare ca cele prezentate anterior, cu posibilitate de a le descărca doar în format foto (png). La alegerea creării unei (noi) hărți, se creează un document de lucru pe care îl puteți denumi (în zona Untitled), iar introducerea de câmpuri se realizează din secțiunea Add Topic. În funcție de ceea ce doriți să realizați, pe bara de lucru se activează diferitele simboluri care dau permisiunea pentru anumite etape de elaborare a hărții.



Bara de lucru este evidențiată deasupra. De regulă, construcția unei hărți debutează cu activarea butonului *Free Topic*, în care putem include textul pe care-l dorim, apoi menținând activă caseta formată, acestea i se pot asocia noi categorii din butonul *Subtopic*. Harta poate fi salvată, poate fi transmisă altora prin butonul *Share* (caz în care apare link-ul care se poate transmite altora. Prin funcția *Share*, cel care primește link-ul poate modifica text în harta la care are acces, poate ascunde sau evidenția secțiuni ale acesteia. Intervențiile făcute de o persoană care a primit link-ul nu modifică documentul sursă. Din butonul *Export*, se poate alege, în cazul utilizării gratuite a aplicației, numai exportul în format fotografie a hărții.

În partea din stânga este evidențiată bara de lucru cu ajutorul căreia, în principal, se pot alege teme predefinite, se poate schimba stilul documentului (culori pentru fundal, casete, text, mărime text etc.), se pot adăuga o serie de simboluri (*icon*) predefinite (în organizatorul 3.2.2 am folosit pentru a ordona întrebările, asociind etichete cu numere).

Este important că harta poate fi prezentată secvențial, ceea ce crește utilitatea acesteia în procesul de predare-învățare.



4.2.3.

Forme de scriere/reprezentare pentru un număr întreg, de exemplu:

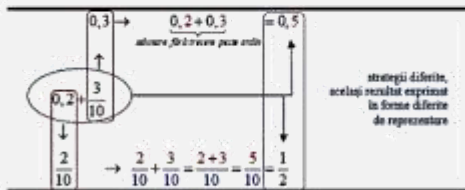
$$2 = \begin{cases} 2,0 & \rightarrow \text{evidențierea poziției virgulei și a părții zecimale} \\ 2,000\dots & \rightarrow \text{para zecimă să se poate completa cu numărul secunilor de zecimale} \\ \frac{2}{1} & \rightarrow \text{reșcrierea numărului sub formă de raport (fracție ordinară)} \end{cases}$$

De asemenea, vorbind de scrieri, putem să facem legăturile următoare:

$2 = 2 + 0$  (rescrierea ca sumă cu unul dintre termeni 0)  
 $2 = 1 \cdot 2$  (un doi!; egalitatea este evidentă, interpretarea sa nu întotdeauna și este utilă în diferite contexte)  
 $2,03 = 2 + 0,03$  (evidențierea prin sumă, a părții întregi și a părții zecimale a unui număr)

$$102,035 = \frac{102}{1} + \frac{0,035}{1}$$

$\frac{100}{100} + \frac{0}{100} + \frac{2}{100} = \frac{102}{100}$        $\frac{0,0}{100} + \frac{0,03}{100} + \frac{0,005}{100} = \frac{0,035}{100}$   
 $100 + 0 + 2 = 102$        $\frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$



o zecimală

$$0,2 \rightarrow \frac{0,2}{1,0} \rightarrow \frac{02}{10} \rightarrow \frac{2}{10}$$

↓ un zero ↓

fracție zecimală      fracție ordinară

$$0,3 + 0,5 = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

$$\begin{array}{r} 0,3 + \quad 0,3 + \quad 0,3 \\ 0,5 \rightarrow 0,5 \rightarrow 0,5 \\ \hline 8 \quad ,8 \quad 0,8 \end{array}$$

efectul: adunare pe coloare, de la dreapta spre stânga, acord amare poziției virgulei

„mutăm” virgula spre stânga, cu o poziție

$$\frac{3}{10} = \frac{3,0}{10} = 0,3$$

asociații (proprietate asociativă) și variație de calcul (asociație rezultat)

$$0,4 + 0,3 + 0,2 \rightarrow 0,4 + (0,3 + 0,2) = 0,4 + 0,5 = 0,9$$

$$(0,4 + 0,3) + 0,2 = 0,7 + 0,2 = 0,9$$

elemente implicite la adunare

$$0,5 + 0 = 0 + 0,5 = 0,5$$

adunarea cu zero (nu modifică rezultatul)

$$\begin{aligned} \left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 &= (0,2 + 0,3) \cdot 10 = 0,5 \cdot 10 = 5 \\ \left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 &= \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \frac{2+3}{10} \cdot 10 = \frac{5}{10} \cdot 10 = 5 \\ \left(10 \cdot 0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 &= \left(\frac{0,2 \cdot 10}{10} + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \frac{2+3}{10} \cdot 10 = \frac{5}{10} \cdot 10 = 5 \\ \left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 &= 0,2 \cdot 10 + \frac{3}{10} \cdot 10 = 2 + 3 = 5 \\ \left(0,2 + \frac{3}{10}\right) \cdot 10 &= 5 \quad | \cdot 10 (\neq 0) \\ 0,2 + \frac{3}{10} &= \frac{5}{10} \quad | \cdot \frac{3}{10} \\ 0,2 &= \frac{5}{10} - \frac{3}{10} \\ 0,2 &= \frac{5-3}{10} \\ 0,2 &= \frac{2}{10} \end{aligned}$$

Organizatorul 4.2.3 este creat cu ajutorul aplicației Canva (<https://www.canva.com/>), care, de asemenea, în baza unui cont personal ce trebuie creat, poate fi accesată limitat, dar gratuit (în utilizarea elementelor, formatelor).

**Anexa nr. 5**

**Exemplu de subiect construit din itemi obiectivi reușiți în baza unui context practic-aplicativ, cu scop de (auto)evaluare a competențelor de bază și a literației/alfabetizării matematice.**

**Preambul:**

Pornind de la modelele de evaluare internațională (PISA), având la bază structura subiectului I de la proba de matematică din cadrul examenului național de bacalaureat, precum și o serie de exemple de instrumente de evaluare care au ca scop determinarea capacităților de utilizare a competențelor matematice de bază în contexte practic-aplicative, cu accent pe literație matematică privită drept capacitatea și încrederea de a utiliza numerele și conceptele de geometrie pentru a interpreta și analiza critic situațiile cotidiene și pentru a rezolva probleme generate de realitate.

În relație și cu anexa nr. 1, considerăm că astfel de instrumente/abordări pot și trebuie să se dezvolte în practica de zi cu zi a cadrelor didactice, mai ales în cazul învățământului tehnologic.

Exemplul propus este constituit din 15 itemi cu alegere multiplă. Fiecărui item îi sunt asociate patru variante de răspuns, doar unul dintre acestea fiind corect.





## SUBIECT

(90 de puncte)

În rețeaua de termoficare a municipiului București s-a produs o avarie. Pentru remedierea acesteia, firma de întreținere trebuie să trimită o echipă de muncitori. Remedierea constă în repararea unei porțiuni dintr-o conductă, prin înlocuirea unor bucăți deteriorate, aflate una în continuarea celeilalte.

Pentru repararea conductei vor fi utilizate două tipuri de țevi: una din PVC, alta din cupru. Muncitorii au la dispoziție ambele tipuri de țevi, fiecare având lungimea de 10 metri. Pentru înlocuirea primei bucăți deteriorate a conductei, muncitorii folosesc 0,2 din țeava de PVC. Pentru înlocuirea



celelalte două bucăți deteriorate a conductei, muncitorii folosesc  $\frac{3}{10}$  din țeava de cupru.

1. În raport cu informațiile date, dintre următoarele afirmații, cea adevărată este:

- Pentru conductă, bucata utilizată a țevii de PVC are o lungime mai mare decât lungimea bucății țevii de cupru utilizate.
- Pentru conductă, bucata utilizată a țevii de PVC are o lungime mai mică decât lungimea bucății țevii de cupru utilizate.
- Pentru conductă, bucata utilizată a țevii de PVC are o lungime egală cu cea a bucății țevii de cupru utilizate.
- Pentru conductă, bucata utilizată din țeava de PVC are o lungime mai mare decât cea a bucății rămase neutilizate.

2. Lungimea conductei formate prin sudarea celor două tipuri de țevi, una în continuarea celeilalte, considerându-se că nu sunt pierderi de material este egală cu:

- 5 metri
- 32 de metri
- 50 de centimetri
- 50 de metri



Pentru a repara conducta este necesară asigurarea accesului la conductă, aceasta fiind subterană, deci necesitând două acțiuni: spargerea carosabilului, apoi săparea terenului.

Pentru prima acțiune, timpul alocat este de 3 ore, după care sunt necesare câte 2 ore pentru fiecare metru liniar săpat.

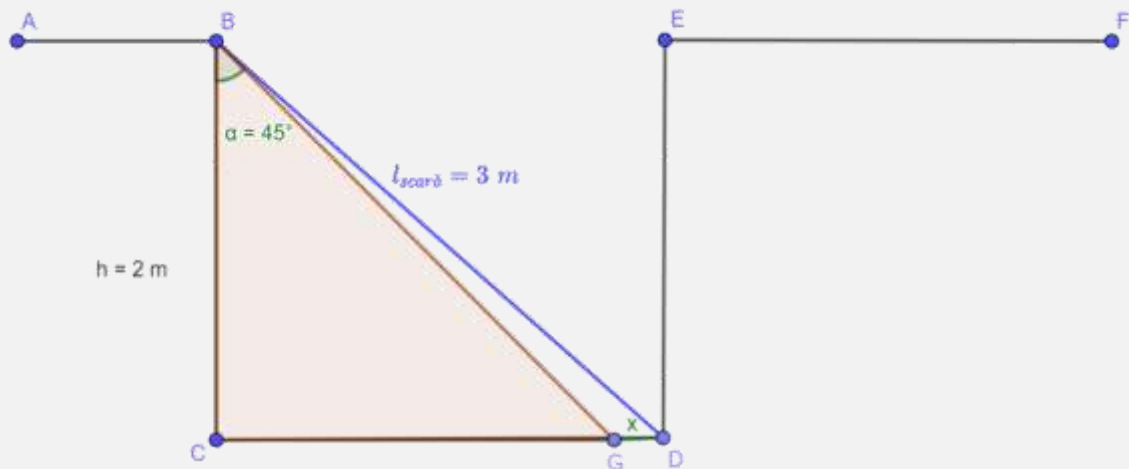
3. În raport cu informațiile date, relația dintre numărul de metri liniari săpați și timpul necesar de lucru pentru ambele categorii de acțiuni corespunde funcției:

- $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = 3$
- $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = 2x - 3$
- $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = 2x + 3$
- $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = 2x$

4. Știind că echipa de muncitori a lucrat 7 ore și nu a terminat de degajat toată partea de conductă avariata, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- Relația care corespunde numărului de metri săpați și timpul precizat este  $T(7) = 3$ .
- Relația care corespunde numărului de metri săpați și timpul precizat este  $T(7) = 7$ .
- Relația care corespunde numărului de metri săpați și timpul precizat este  $T(2) = 7$ .
- Relația care corespunde numărului de metri săpați și timpul precizat este  $T(3) = 7$ .

Adâncimea la care se află conducta este de 2 metri. Pentru a avea acces la conductă, care este dispusă orizontal, muncitorii folosesc o scară fixă de lungime 3 metri. Pentru a poziționa scara oblic, sprijinită de peretele vertical  $BC$  ca în figura alăturată, muncitorii trebuie să degajeze un număr de metri liniari. Unul dintre muncitorii observă că zona degajată este parțial în umbră, reprezentată în figură prin triunghiul  $BCG$ , și că  $\sphericalangle CBG = 45^\circ$ .



5. Dintre următoarele afirmații, cea adevărată este:

- Lungimea segmentului  $CG$  este mai mare decât cea a înălțimii  $BC$ .
- Lungimea segmentului  $CG$  este egală cu cea a înălțimii  $BC$ .
- Lungimea segmentului  $CG$  este mai mică decât cea a înălțimii din  $C$  a triunghiului  $BCG$ .
- Lungimea segmentului  $CG$  este egală cu  $2\sqrt{2}$  metri.

6. Se notează lungimea segmentului  $GD$  cu  $x$  (metri). Determinarea valorii lui  $x$  se face folosind una dintre relațiile următoare:

- $\sqrt{x^2 + 2} = 3$
- $\sqrt{x^2 + 9} = 4$
- $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3$
- $\sqrt{x^2 + 4x + 8} = 3$

7. În condițiile date, distanței  $x$ :

- îi corespund două valori reale, diferite
- îi corespunde doar valoarea  $-\sqrt{5} - 2$
- îi corespunde doar valoarea  $\sqrt{5} - 2$
- nu-i corespunde niciun număr real

În tabelul următor sunt consemnate următoarele date referitoare la rețeaua de termoficare a municipiului Bucureștiului:

A	Traseu canal termic (km)	423,27
B	din care vizitabil (km)	150,50
C	nevizitabil (km)	272,77
D	din vizitabil, traseu aerian (km)	22,38

Sursa: <https://doc.pmb.ro/consiliu/sedinte/473/oz/10662.pdf>

8. În baza informațiilor din tabelul anterior, valorilor consemnate pe ultima coloană le-au fost asociate literele A, B, C și D. Dintre următoarele relații, cea corectă este:

- a)  $A = B + C + D$
- b)  $A = B + C$
- c)  $A = B + D$
- d)  $C = B + D$

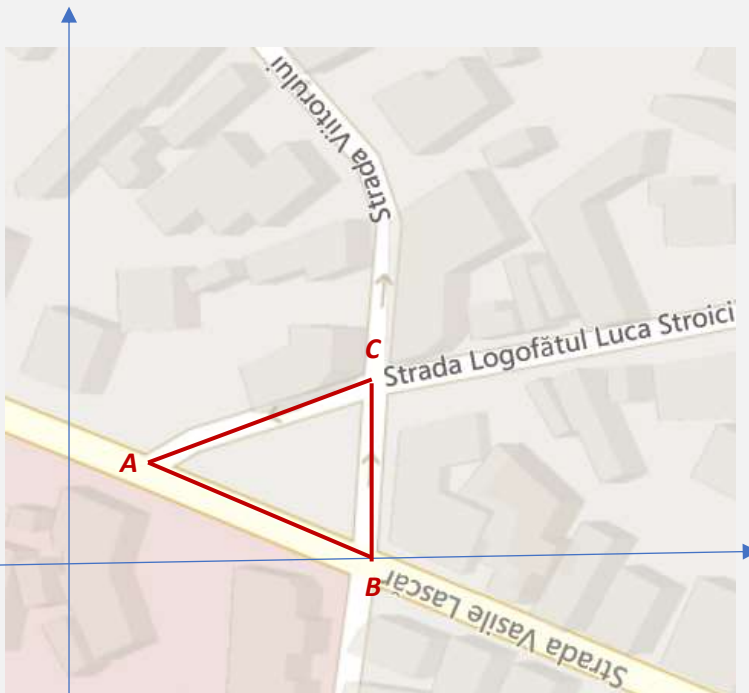
9. Folosind rotunjirea la zecimi, procentajul estimat pe care-l reprezintă orice alt tip de traseu vizitabil cu excepția celui aerian din totalul traseului vizitabil este egal cu:

- a) 22,4%
- b) 22,3%
- c) 14,9%
- d) 14,8%

Utilizați eventual următoarea formulă:

$$p = \frac{\text{lungime traseu vizitabil} - \text{lungime traseu vizitabil aerian}}{\text{lungime traseu vizitabil}} \cdot 100$$

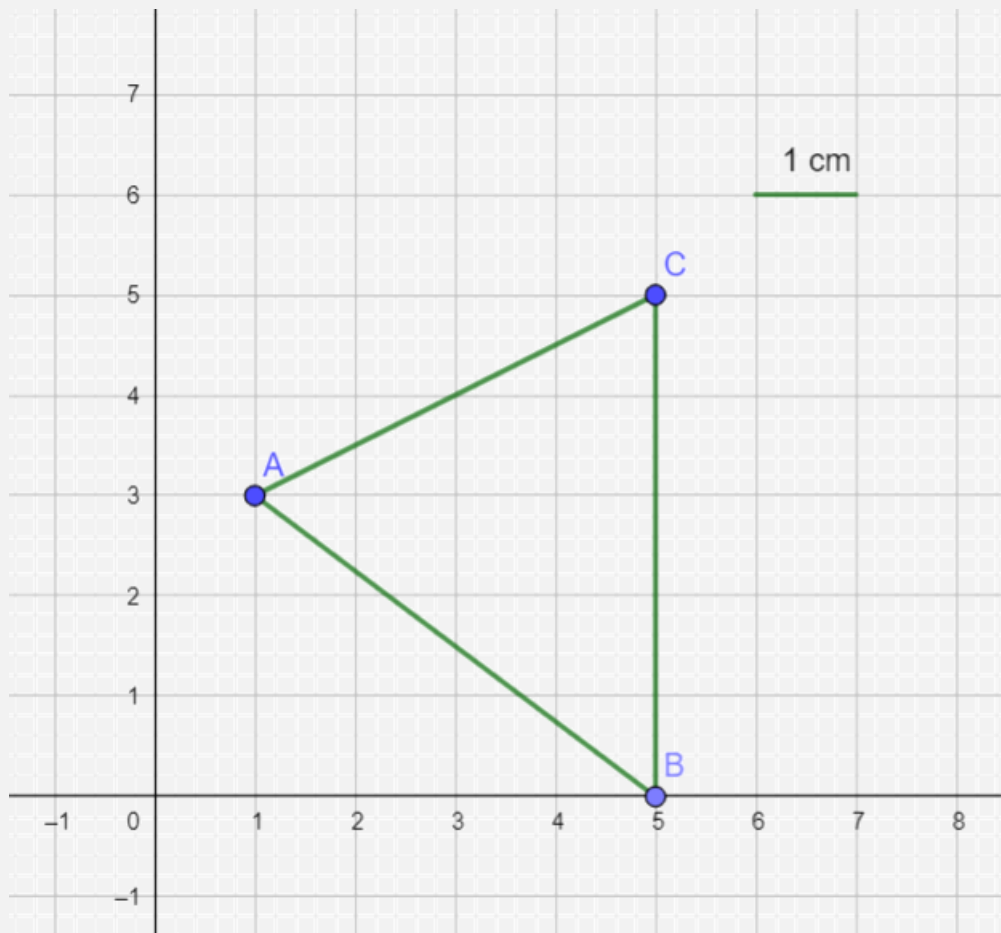
În imagine aveți localizarea avariei conductei, începând la intersecția străzilor *Vasile Lascăr* și *Logofătul Luca Stroici* și continuând pe strada *Vasile Lascăr*. Punctele de intersecție ale străzilor din imagine sunt notate cu A, B și C. Avaria afectează încălzirea pe fiecare dintre conductele reprezentate în figură prin segmentele AB, BC și CA.



10. În condițiile date, dintre următoarele afirmații, cea adevărată este:

- Conducta avariata corespunde în desen unei porțiuni din segmentul  $AB$ , unul dintre capetele zonei avariate fiind în  $A$ .
- Conducta avariata corespunde în desen unei porțiuni din segmentul  $BC$ , unul dintre capetele zonei avariate fiind în  $B$ .
- Conducta avariata corespunde în desen unei porțiuni din segmentul  $CA$ , unul dintre capetele zonei avariate fiind în  $C$ .
- Conducta avariata corespunde în desen unei porțiuni din segmentul  $CB$ , unul dintre capetele zonei avariate fiind în  $C$ .

Proiectantul rețelei de termoficare reprezintă punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  într-un plan în care a fixat reperul cartezian  $xOy$ . Conform măsurătorilor din teren și aduse la scară, asociază coordonatele fiecărui punct, astfel:  $A(1,3)$ ,  $B(5,0)$  și  $C(5,5)$ .



11. Folosind formula  $MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$ , unde  $M(x_M, y_M)$  și  $N(x_N, y_N)$ , precizați care dintre următoarele relații este adevărată:

- $AB = BC = 5$
- $AB = BC = 5\sqrt{2}$
- $AB = AC = 5$
- $AB = AC = 2\sqrt{5}$

12. Știind că scara de reprezentare a zonei de hartă din imaginea anterioară este de 1:10000, *utilizând eventual funcția calculator*, precizați care dintre răspunsurile următoare este corect:

- Rotunjirea la întregi a lungimii exprimate în metri a conductei ce corespunde segmentului  $AC$  este egală cu 400 de metri.
- Rotunjirea la întregi a lungimii exprimate în metri a conductei ce corespunde segmentului  $AC$  este egală cu 447 de metri.
- Rotunjirea la întregi a lungimii exprimate în metri a conductei ce corespunde segmentului  $AC$  este egală cu 448 de metri.
- Rotunjirea la întregi a lungimii exprimate în metri a conductei ce corespunde segmentului  $AC$  este egală cu 500 de metri.

---

**Pentru a putea face reparația bucății de țevă, trebuie oprită apa. Pentru aceasta, pe conducta de pe tronsonul de pe strada *Viiitorului*, situat între străzile *Vasile Lascăr* și *Logofătul Luca Stroici*, se află o vană (sistem de închidere) din care se poate opri apa pe conductele corespunzătoare celor trei străzi menționate. Raportul dintre distanța de la vană la punctul de intersecție al străzilor *Viiitorului* și *Logofătul Luca Stroici* și distanța de la vană la punctul de intersecție al străzilor situat între străzile *Viiitorului* și *Vasile Lascăr* este 2 : 3 .**

---

13. Utilizând reprezentarea în plan, în reperul cartezian  $xOy$ , traseului de conducte avariate în plan, în reperul cartezian  $xOy$ , și considerând că vanei îi corespunde schematic punctul  $V$ , acestuia îi corespunde următoarea pereche de coordonate:

- (3;5)
- (5;3)
- (2;5)
- (5;2)

14. În baza notațiilor utilizate, punctele  $A, V$  și  $B$  :

- sunt coliniare și punctul  $V$  este situat pe segmentul  $AB$
- sunt coliniare și punctul  $A$  este situat pe segmentul  $VB$
- sunt necoliniare și reprezintă vârful unui triunghi dreptunghic
- sunt necoliniare și reprezintă vârful unui triunghi ascuțitunghic

15. În baza notațiilor utilizate, tangenta unghiului  $VAB$ , exprimată sub formă de raport, este:

- $\frac{3}{5}$
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{5}$
- $\frac{4}{3}$

Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Punctaj	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p	6p
<b>Punctaj total subiect - 30p</b> <b>Se acordă din oficiu 10p</b>															
Răspuns corect	b)	a)	c)	c)	b)	d)	c)	b)	c)	a)	a)	b)	b)	c)	b)



**Anexa nr. 6**

**Recomandări de resurse educaționale deschise: prezentarea comentată a itemilor selectați din Subiectul I din cadrul testelor de antrenament elaborate de Ministerul Educației în perioada martie-iunie 2020, ca suport la învățării elevilor în contextul pandemiei COVID-19 și promovarea lecțiilor filmate în cadrul programului Teleșcoală (TVR 2)**

În anul școlar 2019-2020, Ministerul Educației a dezvoltat un program de sprijin pentru elevi în contextul pandemiei COVID-19, atât prin realizarea unui pachet de lecții televizate, în parteneriat cu televiziunea Română (proiect care continuă și în prezent), cât și prin alte resurse educaționale deschise.

În acest sens, având în vedere că, din perspectiva programelor școlare și de examen național de bacalaureat pentru disciplina matematică, acestea nu au suferit modificări majore și că structura instrumentului de evaluare la examenul de bacalaureat a rămas neschimbată, considerăm util să facem trimitere la:

- înregistrările emisiunii TeleȘcoala la TVR2:  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLxO8-C91Lp92xRiauh3jJUZx12e32QTsU>
- resursa educațională denumită

Modele de antrenament, Subiectul I – proba E c), matematică – informatică, științele naturii, tehnologic, pedagogic. Comentarii – rezolvare – observații – aspecte de reținut:

[https://drive.google.com/file/d/1iJ5j\\_ODa5mQfjCWegK7oj2GtVhZGDIjY/view](https://drive.google.com/file/d/1iJ5j_ODa5mQfjCWegK7oj2GtVhZGDIjY/view)

Ambele categorii de resurse educaționale sunt găzduite de platforma proiectului CRED, al Ministerului Educației.

Aducem mulțumiri autorilor resurselor educaționale, atât cele din cadrul programului Teleșcoală, cât și cea care tratează subiectul I din modelele de antrenament 2020.



**SECȚIUNEA a VI-a.  
REFERINȚE WEB**

[https://rocnee.eu/images/rocnee/fisiere/programe\\_scolare/2023/MATE\\_ST/Matematica\\_programa%201\\_2\\_3\\_4\\_5\\_clasa%20a%20XII-a.pdf](https://rocnee.eu/images/rocnee/fisiere/programe_scolare/2023/MATE_ST/Matematica_programa%201_2_3_4_5_clasa%20a%20XII-a.pdf)

[https://www.edu.ro/programe\\_probe\\_examen\\_bacalaureat\\_2024](https://www.edu.ro/programe_probe_examen_bacalaureat_2024)

<https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/planuri-cadru-actuale>

<https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/profilul-absolventului>

[https://www.edu.ro/sites/default/files/ fi% C8% 99iere/Minister/2023/preuniversitar\\_root/Curriculum/profil\\_a bsolvent\\_consultare/9\\_Profilul\\_absolventului\\_Atribute\\_reflectie\\_profesor.pdf](https://www.edu.ro/sites/default/files/ fi% C8% 99iere/Minister/2023/preuniversitar_root/Curriculum/profil_a bsolvent_consultare/9_Profilul_absolventului_Atribute_reflectie_profesor.pdf)

<https://rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice>

<https://www.rocnee.eu/index.php/dcee-oriz/curriculum-oriz/repere-metodologice/reperemetodologice2022>

[http://subiecte.edu.ro/2024/simulare/simulare\\_bac\\_XII/](http://subiecte.edu.ro/2024/simulare/simulare_bac_XII/)

<http://subiecte2023.edu.ro/2023/>

[Use of generative AI for teaching, learning and assessment | Staff | Imperial College London](https://www.utica.edu/academic/Assessment/new/Blooms%20Taxonomy%20-%20Best.pdf)

<https://www.utica.edu/academic/Assessment/new/Blooms%20Taxonomy%20-%20Best.pdf>

<https://www.cuemath.com/numbers/not-equal/>

<https://doc.pmb.ro/consiliu/sedinte/473/oz/10662.pdf>

**Listă de recomandări generale:**

<https://www.letudiant.fr/bac/revisions-bac/article/comment-bien-utiliser-chatgpt-pour-reviser-son-bac.html>

<https://educationblog.microsoft.com/en-us/2024/01/meet-your-ai-assistant-for-education-microsoft-copilot>

<https://copilot.microsoft.com/>

<https://screenapp.io/blog/best-free-ai-tools-for-students-teachers-via-digital-learning>

<https://topai.tools/s/learning-math>

<https://www.tomdaccord.com/ai-tools-for-math-teachers>

<https://www.heinz.cmu.edu/media/2023/July/generative-ai-is-a-math-problem-left-unchecked-it-could-be-a-real-problem>

<https://www.forbes.com/sites/neilsahota/2024/01/12/the-ai-factor-in-political-campaigns-revolutionizing-modern-politics/>

<https://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/Brin98Anatomy.pdf>

**Listă de recomandări pentru resurse educaționale deschise:**

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLxO8-C91Lp92xRiauh3jJUzXl2e32QTsU>

[https://drive.google.com/file/d/1iJ5j\\_ODa5mQfjCWegK7oj2GtVhZGDIjY/view](https://drive.google.com/file/d/1iJ5j_ODa5mQfjCWegK7oj2GtVhZGDIjY/view)

**Aplicații utilizate pentru redactare text de specialitate, reprezentări grafice și organizatoare (hărți mentale):**

<https://www.geogebra.org/>

<https://www.wiris.com/en/> (MathType creat de Design Science)

**Aplicații utilizate pentru redactare text general și editare:**

<https://www.microsoft.com>, pachetul Microsoft Office

<https://www.mindonmap.com/>

**Aplicație utilizată pentru exemplificarea modului în care inteligența artificială sprijină elevul în învățare/profesorul în realizarea demersurilor didactice:**

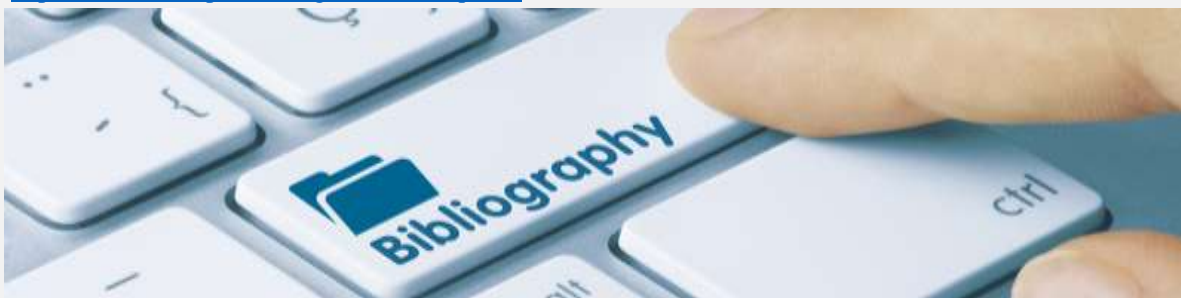
<https://chat.openai.com/>

**Aplicații utilizate pentru realizarea coperților, imagini utilizate, citate:**

<https://www.canva.com/>

<https://www.dreamstime.com>

<https://www.comap.com/blog/item/math-quotes>





**SECȚIUNEA a VII-a.  
COLECTIV DE AUTORI**

Nr. crt.	Nume și Prenume	Instituție
<b>Coordonatori</b>		
1.	Naghi Elisabeta-Ana	Ministerul Educației
2.	Șuță Marian	Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație
3.	Vrînceanu Gabriel-Narcis	Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație
<b>Coordonatori secțiunea a III-a</b>		
Clasa a IX-a	Bălănescu Daniela	Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Constanța
Clasa a X-a	Holhos Viorel	Inspectoratul Școlar Județean Hunedoara
Clasa a XI-a	Văcărețu Ariana Stanca	Colegiul Național „Emil Racoviță”, Cluj-Napoca
Clasa a XII-a	Ionescu Corina Mihaela	Inspectoratul Școlar Județean Călărași
<b>Autori</b>		
1.	Andru Cristian-Adrian	Colegiul Național „Avram Iancu”, Stei, Bihor
2.	Avramescu Ana Nicoleta	Liceul Tehnologic Matei Corvin, Hunedoara
3.	Baias Alina Ramona	Universitatea Tehnică din Cluj Napoca, Cluj
4.	Bălănescu Daniela	Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Constanța
5.	Constantin Irina	Colegiul Național „Barbu Știrbei”, Călărași
6.	Costea Cristina	Liceul Tehnologic „Nicolae Dumitrescu”, Cumpăna, Constanța
7.	Cruț Bianca	Liceul Tehnologic Economic de Turism, Iași
8.	Dârstaru Gheorghe	Colegiul Economic „Regele Mihai I”, Buzău
9.	Dobrică-Văsi Lavinia-Elena	Colegiul Tehnic de Arhitectură și Lucrări Publice „I.N. Socolescu”, București
10.	Gherghe Radu Cătălin	Liceul Teoretic „Lucian Blaga”, București
11.	Hodorogea Anca Cristina	Inspectoratul Școlar Județean Cluj
12.	Holhos Viorel	Inspectoratul Școlar Județean Hunedoara
13.	Ionescu Corina Mihaela	Inspectoratul Școlar Județean Călărași
14.	Jitaru Cristina Fănița	Liceul cu Program Sportiv „Nicolae Rotaru”, Constanța
15.	Lăzureanu Cristian	Universitatea Politehnica Timișoara
16.	Neța Camelia-Elena	Școala Gimnazială nr. 2, Piatra-Neamț, Neamț
17.	Nicoleta Teodorescu	Colegiul Economic, Mangalia, Constanța
18.	Opriș Adonia-Augustina	Colegiul Tehnic „Alexandru Papiu Ilarian”, Zalău, Sălaj
19.	Păun Alexandru	Colegiul Național „Neogoe Basarab”, Oltenița, Călărași
20.	Pipa Liliana Dana	Colegiul Economic „Virgil Madgearu”, Iași
21.	Șargu Rodica	Liceul Tehnologic „Ion Bănescu”, Mangalia, Constanța
22.	Simon Roxana Mirela	Liceul Tehnologic de Mecatronica și Automatizări, Iași
23.	Vitcu Anca Gabriela	Universitatea de Arhitectură și Urbanism „Ion Mincu” București
24.	Vrînceanu Gabriel-Narcis	Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație
25.	Văcărețu Ariana Stanca	Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca
26.	Zeffler Timea Erzsébet	Liceul Tehnologic nr.1, Valea lui Mihai, Bihor

## Validatori și autori secțiunea a IV-a

27.	Constantinescu Alexandru	Colegiul Național „Spiru Haret”, București
28.	Heuberger Daniela	Colegiul Național „Vasile Lucaciu”, Baia Mare, Maramureș
29.	Mușătoiu Silvia-Mihaela	Colegiul Național „Gheorghe Șincai”, București
30.	Șontea Ovidiu-Mihai	Colegiul Național de informatică „Tudor Vianu”, București





De învățat înveți multe și de la toți.  
Dar profesor nu e decât cel care te învață să înveți.  
Constantin Noica