Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)+f(1)=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{x-1}=10^{-2x}\cdot10^2$.
5p	**4.** Determinați câte dintre numerele naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, au ambele cifre pare.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$ și $B(6,0)$. Determinați distanța dintre punctele B și M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=6$ și aria egală cu 24. Arătați că $AB=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1&x+4\\2x&4x-3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=1$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(B(x)-xA\right)=x$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $B(x)+B(x+2)=2A\cdot A\cdot A$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-2X-4$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(1)=1$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care $(x_1x_2x_3)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $X-2$ este egal cu 8.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2}+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=0$.
5p	**c)** Arătați că $4f(x)-1\geq\ln16$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_2^4\left(f(x)-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=18$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^6\left(f(x)-3x\right)dx=2$.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_{-2}^{1}\dfrac{1}{x+3}\left(f(x)-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=9(a-2\ln2)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=$	**2p**
	$=6-5=1$	**3p**
2.	$f(a)=2a-3$, $f(1)=-1$	**3p**
	$2a-3-1=0$, de unde obținem $a=2$	**2p**
3.	$10^{x-1}=10^{-2x+2}$, de unde obținem $x-1=-2x+2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri	**3p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 2 moduri, deci sunt $3\cdot 2=6$ numere	**2p**
5.	$M(2,3)$	**2p**
	$BM=5$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}$, deci $24=\frac{AB\cdot 6}{2}$	**3p**
	$AB=\frac{24\cdot 2}{6}=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
b)	$B(x)-xA=\begin{pmatrix}1 & 4\\ x & 2x-3\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det\left(B(x)-xA\right)=-2x-3$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-2x-3=x$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $2A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 16 & 26\end{pmatrix}$	**3p**
	$B(x)+B(x+2)=\begin{pmatrix}2x+4 & 2x+10\\ 4x+4 & 8x+2\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}2x+4 & 2x+10\\ 4x+4 & 8x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 16 & 26\end{pmatrix}$ și obținem $x=3$	**2p**
2.a)	$f=X^3+6X^2-2X-4 \Rightarrow f(1)=1^3+6\cdot 1^2-2\cdot 1-4=$	**3p**
	$=1+6-2-4=1$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2x_3=4$	**2p**
	$16=-m+4$, de unde obținem $m=-12$	**3p**
c)	$f(2)=8 \Rightarrow 4m=8$, de unde obținem $m=2$	**2p**
	$f=X^3+2X^2-2X-4=(X+2)\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$, deci rădăcinile polinomului f sunt -2, $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{-x^2-2x(3-x)}{x^4}+\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{x-6}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$; pentru orice $x\in(0,2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$ și, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=\frac{1}{4}+\ln 2$, obținem $4f(x)-1\ge\ln 16$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=\int_2^4 3x\,dx=\left.\frac{3x^2}{2}\right\|_2^4=$	**3p**
	$=\frac{48}{2}-\frac{12}{2}=18$	**2p**
b)	$\int_1^6(f(x)-3x)dx=\int_1^6\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx=2\int_1^6\frac{(x+3)'}{2\sqrt{x+3}}dx=\left.2\sqrt{x+3}\right\|_1^6=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
c)	$\int_{-2}^1\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=\int_{-2}^1\left(3-\frac{9}{x+3}\right)dx=\left.3x\right\|_{-2}^1-\left.9\ln(x+3)\right\|_{-2}^1=9(1-\ln 4)$	**3p**
	$9(1-2\ln 2)=9(a-2\ln 2)$, de unde obținem $a=1$	**2p**