Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_2 = 12$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-8$. Determinați numărul real m pentru care $f(1+m)=1-m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2-3x+5\right)=\lg 5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+1}$ să fie natural.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,0)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OA și BC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=9$ și $B=\dfrac{\pi}{3}$. Arătați că $AB=3\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & 0 & x-1\\ x & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(2)\big)=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=2A(x)$.

5p **c)** Arătați că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci și matricea $A(-x)$ este inversabilă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy+\dfrac{2x+2y-1}{4}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=\dfrac{7}{4}$.

5p **b)** Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\circ\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\circ\left(\dfrac{1}{2}+x^2\right)=\dfrac{1}{2}-x^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x^3}{(x-1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x)=m$ are exact două soluții, pentru orice $m\in(27,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-x\ln x\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \left(f(x)-x-1\right)dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)-x\ln x\right)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 12=\frac{2+a_3}{2}$	**3p**
	$a_3=22$	**2p**
2.	$f(1+m)=m-7$, pentru orice număr real m	**2p**
	$m-7=1-m$, de unde obținem $m=4$	**3p**
3.	$x^2-3x+5=5$, de unde obținem $x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=3$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere n pentru care numărul $\sqrt{n+1}$ este natural, deci sunt 7 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{7}{90}$	**3p**
5.	$m_{OA}=2$	**2p**
	$m_{BC}=\frac{a}{2}$ și, cum $m_{OA}=m_{BC}$, obținem $a=4$	**3p**
6.	$\mathrm{tg}B=\frac{AC}{AB}$, deci $\sqrt{3}=\frac{9}{AB}$	**3p**
	$AB=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&2&2\\0&0&1\\2&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+4-0-1-0=3$	**3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1+x&1+x&1+x\\x-1&x-1&x-1\\x+1&x+1&x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x&1+x&1+x\\x-1&x-1&x-1\\x+1&x+1&x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2x&2x\\0&0&2x-2\\2x&2&2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
c)	$\det(A(x))=(x-1)^2(x+1)$ și $\det(A(x))\neq 0$, deci $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**
	Cum $-x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, obținem $\det(A(-x))\neq 0$, deci $A(-x)$ este inversabilă	**2p**
2.a)	$1\circ 1=1\cdot 1+\frac{2\cdot 1+2\cdot 1-1}{4}=$	**3p**
	$=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$	**2p**

b)	$x\circ\frac{1}{2}=x\cdot\frac{1}{2}+\frac{2x+2\cdot\frac{1}{2}-1}{4}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{2}\circ x=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{2\cdot\frac{1}{2}+2x-1}{4}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$\left(\frac{1}{2}-x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}-x^2$, $\left(\frac{1}{2}-x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x^2\right)=\frac{1}{2}-x^4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{2}-x^4=\frac{1}{2}-x^2$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=0$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{12x^2(x-1)^2-4x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$	**3p**
	$=\frac{12x^3-12x^2-8x^3}{(x-1)^3}=\frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{(x-1)^2}=4$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^2-4x}{(x-1)^2}=8$, deci dreapta de ecuație $y=4x+8$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=3$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,3)$, deci f este strict descrescătoare pe $(1,3)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(3,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(3,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$, $f(3)=27$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x)=m$ are exact două soluții pentru orice $m\in(27,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^3(f(x)-x\ln x)dx=\int_1^3(x+1)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{15}{2}-\frac{3}{2}=6$	**2p**
b)	$\int_1^e(f(x)-x-1)dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right\|_1^e-\left.\frac{x^2}{4}\right\|_1^e=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $x\in[1,3]$, deci $V=\pi\int_1^3 g^2(x)dx=\pi\int_1^3\frac{1}{(x+1)^4}dx=\pi\left.\left(-\frac{1}{3(x+1)^3}\right)\right\|_1^3=\frac{7\pi}{192}$	**3p**
	$\frac{7\pi}{192}=\frac{7\pi}{24a}$, de unde obținem $a=8$	**2p**