

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

12 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte, pentru orice număr real m .
- 5p b) Pentru $m = 2$, parabola asociată funcției f are vârful V și intersectează axa Ox în punctele A și B . Arătați că triunghiul VAB este echilateral.
- 5p c) Arătați că, pentru orice număr real m , mulțimea $f^{-1}(\{x_1, x_2\})$ are 4 elemente, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$ și $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$, $A \subset \mathbb{R}$.
2. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB < BC$, punctele D și E sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv AC , iar M este un punct situat pe segmentul DE , diferit de punctele D și E . Punctele N și P sunt simetricile lui M față de punctele D și respectiv E , iar Q este punctul de intersecție a dreptelor BM și CP și T este punctul de intersecție a dreptelor CM și BN .
- 5p a) Arătați că dreptele BN și CP sunt paralele.
- 5p b) Demonstrați că $AM^2 = PQ \cdot NT$.
- 5p c) Arătați că, dacă semidreapta BM este bisectoarea unghiului ABC , atunci $2EQ = BC - AB$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + |xy| - |x| - |y| + 1$.
- 5p a) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p b) Arătați că $x * y \in [0, 1]$, pentru orice $x, y \in [0, 1]$.
- 5p c) Se consideră mulțimea $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a * x = a, \text{ pentru orice } x \in [b, +\infty)\}$. Determinați valoarea minimă a lui $a + b$, unde $(a, b) \in A$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că funcția f este concavă.
- 5p b) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \left(f'\left(\frac{1}{n^2}\right) + f'\left(\frac{2}{n^2}\right) + f'\left(\frac{3}{n^2}\right) + \dots + f'\left(\frac{n}{n^2}\right) \right) \right) = 2$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{x - f(x)}{x^3} dx = \frac{9}{8} + \ln 2$.

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a
<p>1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date</p> <ul style="list-style-type: none">- Identificarea, construcția, notarea și citirea unor drepte concurente/paralele/necoplanare în configurații spațiale, cu exemplificare și în realitatea înconjurătoare- Identificarea, în configurații spațiale simple și în realitate, a pozițiilor relative ale unei drepte față de un plan- Identificarea pozițiilor relative a două plane în configurații spațiale simple și în realitatea înconjurătoare- Recunoașterea figurilor geometrice obținute în urma secționării unei piramide sau a unei prisme cu un plan paralel cu baza
<p>2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date</p> <ul style="list-style-type: none">- Reprezentarea prin desen sau prin modele a unor configurații spațiale în/din contexte reale- Utilizarea instrumentelor geometrice și a softurilor matematice pentru a desena diferite configurații spațiale- Utilizarea diferitelor mijloace didactice pentru a modela rezultate asociate relațiilor de paralelism și perpendicularitate în spațiu- Utilizarea convențiilor de notare și citire a configurațiilor spațiale- Reprezentarea, prin desen, a proiecțiilor și a unghiurilor- Clasificarea prismelor/piramidelor după forma bazei- Construirea înălțimii unei prisme sau a unei piramide
<p>3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor</p> <ul style="list-style-type: none">- Utilizarea măsurilor unghiurilor și a distanțelor pentru stabilirea pozițiilor relative între drepte și/sau plane- Determinarea paralelismului în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple- Determinarea perpendicularității în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate în configurații simple
<p>4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice</p> <ul style="list-style-type: none">- Construirea unor configurații geometrice cu drepte și plane aflate în relații de paralelism sau perpendicularitate- Verificarea validității unor afirmații legate de pozițiile relative ale dreptelor și/sau ale planelor prin exemple și contraexemplu- Identificarea și utilizarea axiomelor, teoremelor directe/reciproce pentru rezolvarea de probleme în configurații spațiale simple- Evidențierea unor aspecte particulare sau a unor aspecte ce pot fi generalizate, referitoare la configurații spațiale
<p>5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice</p> <ul style="list-style-type: none">- Argumentarea demersului de rezolvare a unei probleme de geometrie în spațiu- Adecvarea reprezentărilor configurațiilor spațiale la cerințele problemelor, în vederea optimizării rezolvării problemei- Optimizarea rezolvării de probleme prin utilizarea instrumentelor interactive de realizare a reprezentărilor geometrice (softuri matematice)- Analizarea/interpretarea unor situații din realitatea înconjurătoare și transpunerea lor în probleme de geometrie în spațiu

6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

- Formularea de ipoteze și de concluzii în probleme cu conținut practic legate de proiecții pe plan a unor puncte, drepte, segmente
- Verificarea validității unor rezultate, în cazul înlocuirii unor părți din ipoteză cu părți din concluzie
- Transpunerea unor situații date în limbajul specific geometriei, interpretarea rezultatelor obținute și corelarea răspunsului geometric cu restricțiile impuse de realitatea înconjurătoare

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Geometrie	<p>4. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU</p> <ul style="list-style-type: none">• Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane• Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; prismă dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; cilindru circular drept; con circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări• Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele, aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)• Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept; plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate• Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment; unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare• Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „**Elemente ale geometriei în spațiu. Perpendicularitate**”, care să cuprindă cinci itemi: *un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată;
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat;
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item;
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item;
- respectați formatul tipului de item;
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat.

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
12 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $x^2 + mx - 2 = 0$, $\Delta = m^2 + 8$ $\Delta > 0$, pentru orice număr real m , deci ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte	2p 3p
	b) $A(-1 - \sqrt{3}, 0)$, $B(-1 + \sqrt{3}, 0)$, deci $AB = 2\sqrt{3}$ Cum $V(-1, -3)$, obținem $VA = VB = 2\sqrt{3}$, deci triunghiul VAB este echilateral	2p 3p
	c) $f(x) = x_i$, cu $\Delta_i = \Delta + 4x_i$, $i = \overline{1, 2}$; $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = -2$, pentru orice număr real m $\Delta_1 + \Delta_2 = 2(m-1)^2 + 14 > 0$, $\Delta_1 \Delta_2 = m^2(m-2)^2 + 4(3m^2 - 8m + 8) > 0$, de unde obținem $\Delta_1 > 0$ și $\Delta_2 > 0$, deci ecuațiile $f(x) = x_i$, $i = \overline{1, 2}$, au câte două soluții reale distincte și, cum $x_1 \neq x_2$, obținem că mulțimea $f^{-1}(\{x_1, x_2\})$ are 4 elemente, pentru orice număr real m	2p 3p
2.	a) Segmentele AB și MN au același mijloc, de unde obținem că patrulaterul $ANBM$ este paralelogram, deci $BN \parallel AM$ Segmentele AC și MP au același mijloc, de unde obținem că patrulaterul $AMCP$ este paralelogram, deci $CP \parallel AM$, de unde obținem $BN \parallel CP$	2p 3p
	b) $\Delta MTN \sim \Delta MCP$, de unde obținem $\frac{TN}{CP} = \frac{MN}{MP}$ $\Delta MBN \sim \Delta MQP$, de unde obținem $\frac{BN}{QP} = \frac{MN}{MP}$, deci $\frac{TN}{CP} = \frac{BN}{QP}$ și, cum $BN = CP = AM$, obținem $AM^2 = PQ \cdot NT$	2p 3p
	c) $\sphericalangle CBM = \sphericalangle MBD$ și $DE \parallel BC$, deci $BD = MD$, de unde obținem că $ANBM$ este dreptunghi și, cum QE este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic MPQ , obținem $EQ = \frac{MP}{2}$ $EQ = \frac{NP - NM}{2}$ și, cum $BCPN$ este paralelogram și $NM = AB$, obținem $EQ = \frac{BC - AB}{2}$, adică $2EQ = BC - AB$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $x * 1 = x + x - x - 1 + 1 = x$, pentru orice număr real x $1 * x = x + x - 1 - x + 1 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*“	2p 3p
----	---	----------

	<p>b) $x, y \in [0,1] \Rightarrow \left x - \frac{1}{2} \right \leq \frac{1}{2}$ și $\left y - \frac{1}{2} \right \leq \frac{1}{2}$, de unde obținem $\left \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) \right \leq \frac{1}{4}$, pentru orice $x, y \in [0,1]$</p> <p>$0 \leq 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \leq 1$, de unde obținem $0 \leq 2xy - x - y + 1 \leq 1$, deci $x * y \in [0,1]$, pentru orice $x, y \in [0,1]$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>c) Pentru $(a,b) \in A$, există $x_0 \in [b, +\infty)$ cu $x_0 > 1$ și, cum $a * x_0 = a$, obținem $(x_0 - 1)(a + a - 1) = 0$, deci $a + a - 1 = 0$, de unde rezultă $a = \frac{1}{2}$</p> <p>$\frac{1}{2} * x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x - x + 1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, +\infty)$, deci, pentru $(a,b) \in A$, valoarea minimă a lui b este</p> <p>0, de unde obținem că valoarea minimă a lui $a + b$ este egală cu $\frac{1}{2}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.	<p>a) $f'(x) = 1 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$</p> <p>$f''(x) = -\frac{4}{(4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}} < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem că funcția f este concavă</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>b) $n - \left(f'\left(\frac{1}{n^2}\right) + f'\left(\frac{2}{n^2}\right) + f'\left(\frac{3}{n^2}\right) + \dots + f'\left(\frac{n}{n^2}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{4k}{\sqrt{4k^2 + n^4}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și</p> <p>$\frac{2n(n+1)}{\sqrt{4n^2 + n^4}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{4k}{\sqrt{4k^2 + n^4}} \leq \frac{2n(n+1)}{\sqrt{4 + n^4}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(n+1)}{\sqrt{4n^2 + n^4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(n+1)}{\sqrt{4 + n^4}} = 2$, de unde obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{4k}{\sqrt{4k^2 + n^4}} \right) = 2$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>c) $\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{x - f(x)}{x^3} dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2x^2} \right)' \sqrt{4x^2 + 1} dx = \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \sqrt{4x^2 + 1} \Big _{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} + \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x\sqrt{4x^2 + 1}} dx =$</p> <p>$= -\frac{3}{4} + \frac{15}{8} - 2 \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} dx = \frac{9}{8} - 2 \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right) \Big _{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{9}{8} + \ln 2$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item - respectarea formatului itemului - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
---	---

<i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p