Ministerul Educației

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc

MATEMATICĂ

clasa a VI-a

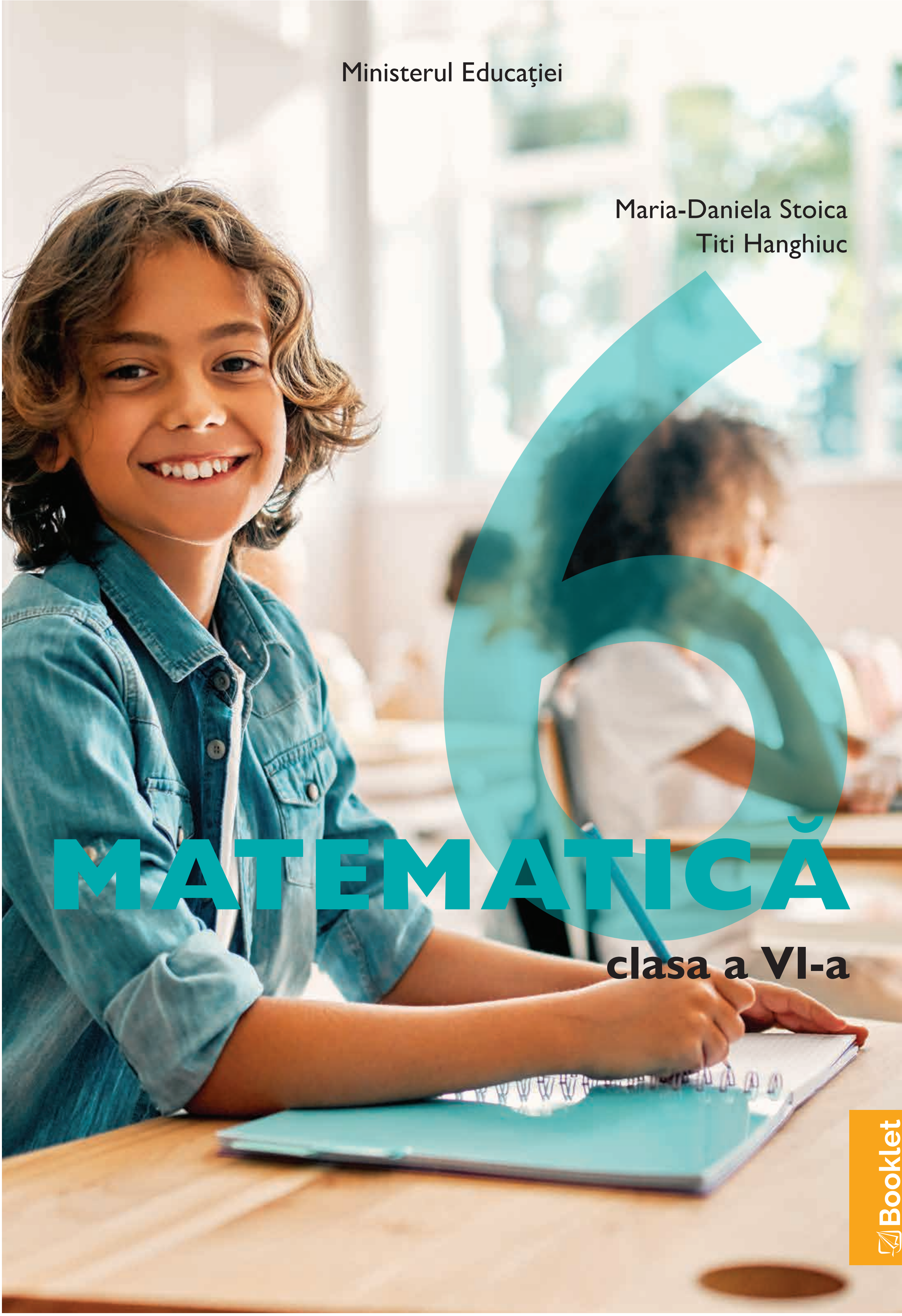
Booklet

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017.

119 – număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor
116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

Ministerul Educației

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc



MATEMATICĂ

clasa a VI-a

Booklet

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației prin Ordinul de ministru nr. 5268/04.08.2023.
Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2023 – 2024.

Inspectoratul Școlar ______________________________

Școala/ Colegiul/ Liceul ______________________________

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1.							
2.							
3.							
4.							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: *nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
STOICA, MARIA-DANIELA
Matematică : clasa a VI-a / Maria-Daniela Stoica, Titi Hanghiuc. - Bucureşti : Booklet, 2023
ISBN 978-630-6530-17-5

I. Hanghiuc, Titi
51

Referenți științifici: conf. univ. dr. habil. Georgia Irina Oros, Universitatea din Oradea
prof. gr. I Valerian Vlăduț, Liceul Teoretic „Dimitrie Bolintineanu”, București
Redactor: Alin Gogan
Corector rezolvator: Daniela Ciofu
Corectură: Dorina Lipan
Design copertă: Silvia Olteanu
Layout interior: Roxana Ignat
Tehnoredactare: Carmen Dumitrescu
Grafică și DTP: Mihaela Cojoc
Video: Quartz Film Studio
Voce: Ramona Hilohe
Digital: MyKoolio
Credite foto: Adobe Stock, Wikimedia Commons

Booklet
Pentru comenzi:
tel.: 021.430.30.95/021.440.10.02
e-mail: comenzi@booklet.ro
site: www.booklet.ro

CUPRINS

CUPRINS

Ce vei învăța anul acesta la matematică?

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$

1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale

1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate

1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional

1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date

1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 în $\mathbb{N}$

2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date

2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor

2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $a \cdot x + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale

2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte

2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a *c.m.m.d.c.* și a *c.m.m.m.c.*

3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale

3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi

3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale

3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice

3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi

4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale

4.5. Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc

4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$

5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date

5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi

5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale

5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc

5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului

6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale

6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc

6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI DIGITAL

Manualul digital reproduce integral versiunea tipărită, oferind elevilor posibilitatea de a interacționa cu diverse elemente de conținut. Astfel, aceștia vor putea să vizioneze animații sau filme, să rezolve exerciții interactive și să navigheze prin manual.

Simboluri:

1. Elemente grafice (AMII-uri statice): imagini, informații și activități suplimentare.

2. Elemente video (AMII-uri animate): videoclipuri cu informații și activități suplimentare, curiozități.

3. Exerciții interactive (AMII-uri interactive): exerciții de alegere multiplă, de tip adevărat sau fals, de asociere, de completare etc.

Cum se folosește manualul digital?

1. Meniul superior

Mărire/micșorare – se mărește sau se micșorează fereastra.

Căutare – pot fi efectuate căutări în manualul digital după cuvinte-cheie.

Cuprins – deschide cuprinsul manualului digital.

Înapoi la prima pagină – se revine la prima pagină a manualului digital.

Pagina anterioară – se accesează pagina anterioară paginii curente.

Pagina următoare – se accesează pagina următoare paginii curente.

Salt la ultima pagină – se accesează ultima pagină a manualului digital.

Adnotări – deschide o galerie de instrumente, cu funcții diferite, ce permit operații în timp real: sublinieri, adnotări, încercuiri, demarcări, mascări, evidențieri etc.

Tipărește pagini din manualul digital.

Indicații – se accesează ecranul cu indicații.

2. Ajutor în utilizarea exercițiilor interactive (AMII-urilor interactive):

Deschide exercițiul interactiv dând click pe . Pentru exercițiile de completare, utilizează mouse-ul pentru a poziționa cursorul pe spațiul în care dorești să completezi. Pentru exercițiile de alegere, urmărește cerința, apoi utilizează mouse-ul și apasă pe varianta de răspuns pe care o consideri corectă. Apasă butonul **Verifică** pentru a vedea dacă ai ales corect. Pentru toate tipurile de exerciții apare ✔ în cazul răspunsului corect și ✖ în cazul răspunsului greșit. Pentru a relua rezolvarea exercițiului, apasă butonul **Mai încearcă**.

3. Ajutor în utilizarea elementelor video (AMII-urilor animate):

Apasă butonul pentru a deschide videoclipul. Butonul **Play (Vizualizare)** este localizat pe bara de jos a ferestrei, alături de **Volum** și de opțiunea **Afișare completă** pe ecran. Pentru a opri temporar videoclipul, apasă butonul **Pauză**, de pe bara de jos a ferestrei. Pentru a închide videoclipul, apasă butonul din colțul din dreapta sus al ferestrei.

4. Ajutor în utilizarea elementelor grafice (AMII-urilor statice):

Apasă butonul . Imaginea se va deschide într-o fereastră nouă. Apasă butonul din colțul din dreapta sus, pentru a închide imaginea.

Recapitulare inițială

1. Ordonează crescător seturile de numere:

a) 11 011, 11 100, 11 010, 11 101, 10 111;
c) 1,5; 1,35; 1,52; 2; 1,495;
e) $\frac{12}{5}, \frac{13}{5}, \frac{11}{5}, \frac{9}{5}, \frac{14}{5}$;
b) 3^8, 27^3, $(3^2)^3$, 81, 2022^0;
d) $\frac{7}{12}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$;
f) 1,4; $\frac{5}{4}$; $1\frac{3}{4}$; 1,33; $\frac{33}{25}$.

Exemplu: e) $\frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{12}{5}, \frac{13}{5}, \frac{14}{5}$

2. Rotunjește numărul:

a) 124 053 la sute;
b) 64 231 la zeci de mii;
c) 123,825 la zecimi;
d) 0,52572 la sutimi.

Indicație: Se scriu aproximările prin lipsă și prin adaos.

3. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Produsul numerelor 1,23 și 100 este egal cu:

A. 12,3; B. 0,0123; C. 123; D. 1230.

b) Rezultatul calculului $2^3 - 2^2$ este egal cu:

A. 2; B. 4; C. 0; D. 12.

c) Suma numerelor $\frac{1}{4}$ și $\frac{5}{6}$ este egală cu:

A. $\frac{6}{10}$; B. $\frac{6}{4}$; C. 1; D. $\frac{13}{12}$.

d) Fracția ordinară ireductibilă echivalentă cu $\frac{2+8}{4}$ este:

A. $\frac{5}{2}$; B. $\frac{4}{1}$; C. $\frac{3}{2}$; D. $\frac{1}{4}$.

Exemplu: a) C.

4. Calculează:

a) $12 + 2020 : 20 - 19 \cdot 3$;
e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} + \frac{5}{3} : \frac{10}{9} - \frac{3^2}{2^3}$;
b) $1 + 2 + 3 + ... + 50 - 275$;
f) $\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + ... + \frac{100}{100}$;
c) $[5 + 5 \cdot (5^2 + 5^{75} : 5^{73})] : 51$;
g) $1{,}4 \cdot 2{,}5 + 1{,}5^2 - 3{,}6 : 0{,}9$;
d) $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) : \frac{9}{8}$;
h) $3{,}4 + 3{,}(4) - 3{,}04 - 3{,}0(4)$.

Indicație: Se ține cont de ordinea efectuării operațiilor.

5. Determină ultima cifră a numărului natural m:

a) $m = 55^{99} + 99^{55}$; b) $m = 2^{10} + 3^{10} + 7^{10}$.

6. a) Determină cel mai mare număr natural care dă câtul 20 prin împărțire la 17.
b) Determină cel mai mic număr natural care, prin împărțire la 23, dă câtul 10.
Indicație: deîmpărțit = împărțitor · cât + rest

7. Calculează media aritmetică a numerelor: a) 28 și 36; b) 225 și 475; c) 154, 24 și 17.

8. Scrie divizorii numărului: a) 36; b) 81; c) 144; d) 96.

9. Scrie câte trei multipli nenuli ai numărului: a) 24; b) 56; c) 18.

10. Scrie sub formă de fracție ordinară ireductibilă: a) $\frac{60}{54}$; b) $\frac{20\,202}{30\,303}$; c) 1,2(3); d) 0,(6); e) 1,25.

11. Demonstrează că numărul $m = \overline{ab} + \overline{ba} + 143$ este divizibil cu 11, oricare ar fi numărul natural de două cifre $\overline{ab}$.

12. Demonstrează că numărul $a = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$ este multiplu al numărului 15, pentru oricare număr natural n.

13. Diferența a două numere raționale pozitive este 3,2. Determină cele două numere, știind că unul dintre ele este de trei ori mai mare decât celălalt.

14. Pentru un pix și două caiete, Dan a plătit 11,1 lei. Determină prețul unui caiet, știind că acesta costă cu 1,8 lei mai mult decât două pixuri.

15. Pentru 8 caiete de același tip, Aura a plătit 24 de lei. Câți lei ar fi plătit dacă ar fi cumpărat numai 5 caiete?

16. Cinci robinete cu același debit umplu o piscină în 4 ore și 15 minute. În cât timp se va umple piscina dacă curg numai trei robinete?

17. Andrei a cumpărat 3 caiete și 2 pixuri pentru care a plătit 14,1 lei. Mara a plătit 19,4 lei pentru 4 caiete și 3 pixuri. Mircea cumpără 3 caiete și 5 pixuri. Ce rest primește Mircea de la o bancnotă de 200 de lei?

18. Într-un bloc sunt 40 de apartamente cu două și patru camere, în total fiind 100 de camere.

a) Verifică dacă numărul apartamentelor cu două camere poate fi egal cu numărul apartamentelor cu patru camere.

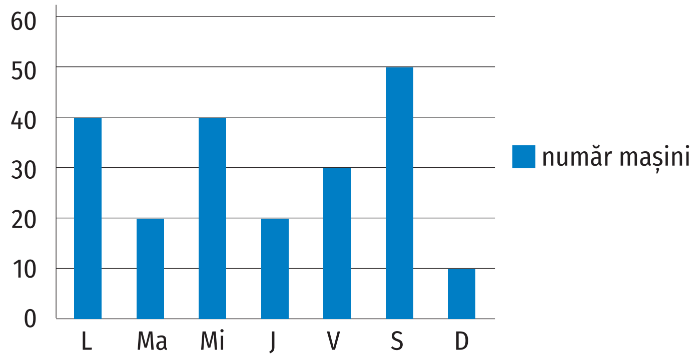
b) Determină numărul apartamentelor cu 2 camere.

19. Determină media aritmetică a numerelor *a*, *b* și 3, știind că media aritmetică a numerelor *a* și *b* este 1,5.

20. În graficul alăturat este reprezentat numărul autoturismelor care au intrat într-o parcare pe parcursul unei săptămâni.

a) Câte mașini au intrat în parcare în acea săptămână?

b) Calculează câte mașini au intrat în parcare, în medie, pe zi.



21. Calculează:

a) $102°46' + 10°52'$;

c) $26°24' \cdot 3$;

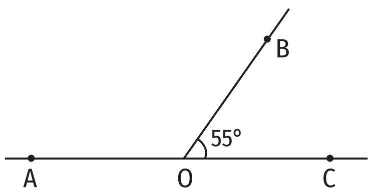
b) $150° - 123°25'$;

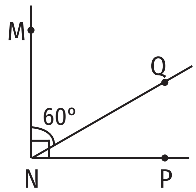
d) $127° : 4$.

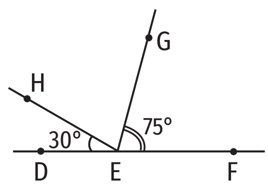
22. În figura 1, punctul E este mijlocul segmentului AD, punctul C este simetricul punctului A față de punctul D, iar punctul B este simetricul punctului A față de punctul C. Determină lungimea segmentului BD, știind că ED = 1,5 cm.

Figura 1

23. Determină măsurile unghiurilor AOB, PNQ și HEG din figurile geometrice de mai jos, știind că punctele A, O, C și, respectiv, F, E, D sunt coliniare.







24. Un dreptunghi cu lungimea egală cu 22 cm și lățimea egală cu 18 cm are același perimetru cu un pătrat. Care dintre ele are aria mai mare?

25. Un tractor ară într-o zi 9 hectare. În câte zile vor ara 12 tractoare un teren în formă de dreptunghi cu lungimea de 4,8 km și lățimea de 360 dam?

26. Un robinet are debitul 2400 l pe oră. În câte ore poate umple o piscină în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 9 m, lățimea de 8 m și adâncimea de 2 m?

27. Câți litri de apă încap într-un acvariu în formă de cub cu lungimea muchiei egală cu 40 cm?

28. Pentru a vopsi un cub din lemn cu latura de 3 dm sunt necesare 720 g de vopsea. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi un cub (din același material) cu latura de 6 dm?

Unitatea 1

Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

Grupul literelor din alfabetul limbii române cu ajutorul cărora se scriu semivocalele și vocalele

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

Descopăr


Colonie de pinguini


Buchet de lalele


Turmă de oi

Folosind imaginile de mai sus, răspunde la următoarele întrebări:

1. Litera „u" face parte din grupul literelor din alfabetul limbii române cu ajutorul cărora se scriu semivocalele și vocalele? De câte ori apare în acest grup? Există litere care nu fac parte din acest grup? Dă câteva exemple.

2. Cuvintele „turmă", „colonie", „buchet", „grup" implică existența unui anumit număr de obiecte distincte și bine determinate, din care sunt compuse. Dă exemple de alte cuvinte de același tip. Care este termenul care poate înlocui aceste cuvinte?

Învăț

Mulțimea este o colecție de obiecte (numite elementele mulțimii) de natură oarecare, bine determinate și distincte.

În general, mulțimile se notează cu majuscule din alfabetul latin (A, B, C, ...), dar se pot folosi și notații de tipul: A_1, A_2, D_8 etc.

Pentru a pune în evidență faptul că este vorba despre o mulțime, nu despre o simplă enumerare, vom scrie elementele acesteia între acolade. De exemplu, mulțimea numerelor naturale de o cifră poate fi scrisă $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

OBSERVAȚII

1. **Într-o mulțime, orice element apare o singură dată.**

   De exemplu, mulțimea literelor din alfabetul limbii române cu ajutorul cărora scriem cuvântul „bibliotecă" este {b, i, l, o, t, e, c, ă}. Deși litera „b" apare de două ori în scrierea cuvântului „bibliotecă", în mulțime este scrisă o singură dată.

2. **Într-o mulțime nu contează ordinea scrierii elementelor.**

   De exemplu, mulțimea $\{a, b, c\}$ mai poate fi scrisă $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$ sau $\{c, b, a\}$.

Există două **moduri de definire a unei mulțimi**:

- **Explicit (sintetic)**, numind individual elementele sale:
  – Mulțimea se scrie punând între acolade elementele sale.
  Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră se poate scrie {1, 3, 5, 7, 9}.
  – Mulțimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (**diagrama Venn-Euler** a mulțimii considerate).
  Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră se poate reprezenta ca în figura 1.

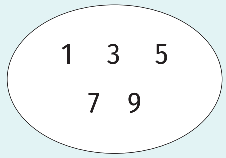


Figura 1

- **Implicit (analitic)**, specificând o proprietate pe care o au toate elementele sale și nu o au alte elemente care nu aparțin mulțimii.

  Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră se poate scrie $\{x \mid x$ este număr natural impar de o cifră$\}$ (citim „mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este număr natural impar de o cifră”).

Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțimea vidă și se notează cu $\varnothing$.

O mulțime ale cărei elemente sunt numere se numește mulțime numerică.

Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră este o mulțime numerică.

Mulțimile care nu sunt numerice se numesc mulțimi nenumerice.

Exemplu: Mulțimea orașelor din țara noastră este o mulțime nenumerică.

Dacă A este o mulțime și x este un element al său, spunem că x aparține mulțimii A și notăm $x \in A$.

Dacă A este o mulțime și x nu este un element al său, spunem că x nu aparține mulțimii A și notăm $x \notin A$.

Exemple:

1. Dacă A este mulțimea numerelor prime, atunci $3 \in A$ și $4 \notin A$.
2. Dacă $B = \{a, b, c, d\}$, atunci $c \in A$ și $e \notin A$.
3. Dacă $C = \{n \mid n$ este număr natural mai mic decât $4\}$, atunci $0 \in A$ și $7 \notin A$.

Exercițiu rezolvat

Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x$ este număr natural, $1 < x \leq 5\}$, $B = \{x$ este număr natural, $18 \vdots x\}$ și $C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$.

i) Scrie mulțimile A și B prin enumerarea elementelor.

ii) Scrie mulțimea C folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale.

iii) Completează casetele cu unul dintre simbolurile $\in$ sau $\notin$ pentru a obține propoziții matematice adevărate.

a) 2 ☐ A; b) 1 ☐ A; c) 36 ☐ B; d) 0 ☐ B; e) 100 ☐ C; f) 453 ☐ C.

Rezolvare:

i) Numerele naturale x care verifică inegalitatea $1 < x \leq 5$ sunt 2, 3, 4 și 5, deci $A = \{2, 3, 4, 5\}$.

Dacă $18 \vdots x$, atunci x poate fi 1, 2, 3, 6, 9 sau 18. Așadar, $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

ii) $C = \{x \mid x = k^2$, k este număr natural$\}$

iii) a) $2 \in A$; b) $1 \notin A$; c) $36 \notin B$; d) $0 \notin B$; e) $100 \in C$; f) $453 \notin C$.

Aplic

1. Dă exemple de mulțimi ale căror elemente sunt obiecte:

a) din penarul tău; b) din camera ta; c) din sala de sport.

2. i) Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor din cuvântul:

a) matematică; b) tehnologie; c) cancelarie; d) geografie; e) mulțime.

ii) Compară, în fiecare caz, numărul elementelor mulțimii cu numărul literelor cuvântului.

Exemplu: i) a) {m, a, t, e, i, c, ă}; ii) Cuvântul „matematică" are 10 litere, iar mulțimea literelor cuvântului are 8 elemente și 8 < 10.

3. i) Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimea cifrelor numărului:

a) 1 201 120; b) 2 023; c) 77 777; d) 302 203 032; e) 9 182 736 450.

ii) Compară în fiecare caz numărul elementelor mulțimii cu numărul cifrelor numărului.

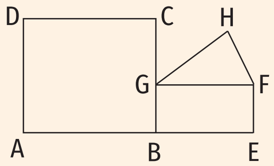


Figura 2

4. Fie M mulțimea literelor cu ajutorul cărora este notat dreptunghiul din figura 2, P mulțimea literelor cu ajutorul cărora este notat pătratul din figura 2 și T mulțimea literelor cu ajutorul cărora este notat triunghiul din figura 2. Scrie mulțimile M, P și T prin enumerarea elementelor. *Exemplu: M = {B, E, F, G}*

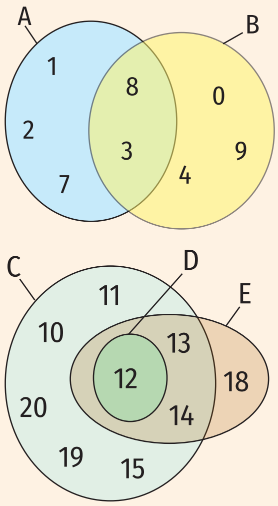


Figura 3

5. În figura 3 sunt reprezentate mulțimile A, B, C, D și E cu ajutorul diagramelor Venn-Euler. Scrie aceste mulțimi prin enumerarea elementelor.

6. Realizează diagrama Venn-Euler pentru fiecare dintre mulțimile:

a) mulțimea numerelor naturale prime mai mici decât 20;

b) mulțimea numerelor naturale pare de o cifră;

c) mulțimea divizorilor numărului 12;

d) mulțimea formelor de relief din țara noastră.

7. Găsește greșeala și scrie corect mulțimile A = {5, 7, 9, 7}, B = {a, 5, 6, 3, a}, C = {7, 5, 7, 5, 7, 5}.

8. Completează spațiile libere cu unul dintre simbolurile $\in$ sau $\notin$ pentru a obține propoziții matematice adevărate.

Exemplu: a) $\in$

a) 8 ___ {2, 4, 6, 8}; e) 8 910 ___ {8, 9, 10};

b) p ___ {$a, ă, â, e, i, o, u$}; f) 0 ___ $\varnothing$;

c) 12 ___ {1, 2, 4, 6, 8}; g) 5 ___ {n | n e număr natural impar};

d) 9 ___ {8, 9, 10}; h) 0 ___ {x | x e pătratul unui număr natural}.

9. Se consideră mulțimea M = {x | x e număr natural par, $8 < x \leq 71$}. Precizează valoarea de adevăr a afirmațiilor:

Exemplu: a) F

a) $8 \in M$; c) $8^2 + 1 \in M$; e) $3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \in M$;

b) $2^4 \in M$; d) $20^0 \in M$; f) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \in M$.

10. Determină mulțimea A, știind că are 3 elemente, $0 \notin A$, $2 \in A$, $4 \in A$, $7 \notin A$, $10 \notin A$ și $6 \in A$.

11. Se consideră mulțimile: A = {x | x este număr prim de o cifră}, B = {x | x este țară vecină cu România}, C = {x | x este zi a săptămânii}, D = {x | x este număr impar de o cifră, $x \mid 30$}, E = {x | x este lună a anului care are 31 de zile}, F = {n | n este număr natural impar, $3 < n < 9$}. Scrie mulțimile A, B, C, D, E și F prin enumerarea elementelor.

12. În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii înregistrate timp de o săptămână la o stație meteorologică.

Ziua	luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
Temperatura (°C)	21	20	22	20	19	18	21

Fie T mulțimea temperaturilor medii înregistrate, M mulțimea zilelor în care temperatura medie a fost mai mare decât 20°C și P mulțimea zilelor în care temperatura medie a fost mai mică decât 20°C. Scrie mulțimile T, M și P prin enumerarea elementelor.

13. Reprezintă în trei moduri (prin enumerarea elementelor, scriind o proprietate comună a elementelor, folosind diagrama Venn-Euler):

a) mulțimea divizorilor numărului 32;

b) mulțimea numerelor naturale care împărțite la 5 dau câtul 3;

c) mulțimea numerelor naturale prime de o cifră;

d) mulțimea numerelor de o cifră care sunt pătratele unor numere naturale.

14. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $10 \in \{x \mid x = 5^n$, n este număr natural$\}$;

b) $8 \notin \{x \mid x = 2n$, n este număr natural prim$\}$;

c) $7 \in \{x \mid x = 2n + 1$, n este număr natural$\}$;

d) $50 \in \{x \mid x = n^2$, n este număr natural$\}$;

e) $17 \notin \{x \mid x = 5n + 2$, n este număr natural$\}$;

f) $0 \in \{x \mid x = 2n$, n este număr natural$\}$.

15. Scrie mulțimea A, folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale:

a) A = {1, 3, 9, 27, 81};

b) A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19};

c) A = {0, 2, 4, 6, 8};

d) A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19};

e) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}$.

16. Fie A mulțimea literelor cuvântului „bacalaureat” și B mulțimea silabelor cuvântului „bacalaureat”. Precizează valoarea de adevăr a afirmațiilor:

a) *bac* ∈ B;

b) *ba* ∈ B;

c) *u* ∈ A;

d) *a* ∈ A și *a* ∈ B;

e) *c* ∈ A și *ca* ∈ B;

f) *at* ∈ B;

g) *f* ∈ A.

17. Se consideră mulțimile:

$A = \left\{x \mid x \text{ e număr natural nenul, } \frac{6}{x} \text{ e număr natural}\right\}$,

$B = \{x \mid x = \overline{ab},\ \overline{ab} + \overline{ba} = 66\}$,

$C = \{x \mid x = \overline{abc}$, a, b, c sunt numere naturale, $a \cdot b \cdot c = 8\}$,

D = {x | x este divizor par al numărului 24},

E = {x | x e multiplu de două cifre al numărului 15}.

Scrie mulțimile A, B, C, D și E prin enumerarea elementelor.

JOC:
ELIMINĂ INTRUSUL

Elementele fiecăreia dintre mulțimile de mai jos, cu excepția unuia dintre ele, au o proprietate caracteristică. Precizează care este această proprietate și elimină „intrusul”.

I.

oaia, vaca, câinele, lupul, pisica, capra, porcul

Paris, București, Viena, România, Budapesta, Berlin

pătrat, dreptunghi, romb, cub, paralelogram, triunghi

II.

a) {0, 2, 4, 5, 6, 8};

b) {0, 1, 4, 9, 12, 25, 49};

c) {3, 6, 9, 11, 12, 15};

d) {1, 2, 4, 6, 8, 16, 32}.

2. Relații între mulțimi

Descopăr

1. Se consideră mulțimile A = {x | x e număr natural nenul de o cifră} și B = {y | y = 2x, x e număr natural nenul, x ≤ 4}. Scrie mulțimile A și B prin enumerarea elementelor. Ce relație este între elementele mulțimii B și mulțimea A?

2. Se consideră mulțimile C = {x | x e cifră a numărului 112 102} și D = {x | x e cifră a numărului 2 012}.

a) Reprezintă mulțimile C și D cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

b) Scrie elementele care aparțin atât mulțimii C, cât și mulțimii D. Ce poți spune despre mulțimile C și D?

Învăț

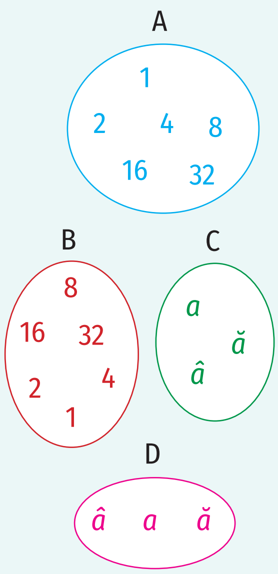


Figura 1

Două mulțimi A și B sunt egale dacă au aceleași elemente. Se notează A = B.

Dacă două mulțimi A și B nu au aceleași elemente, atunci mulțimile nu sunt egale. Se notează A ≠ B.

EXEMPLE:

1. Mulțimile A și B, respectiv C și D din figura 1 sunt egale. Scriem A = B și C = D.

2. Mulțimile A = {2, 4, 6, 8} și B = {m | m e număr natural par nenul de o cifră} sunt egale. Într-adevăr, reprezentând mulțimea B prin enumerarea elementelor sale, obținem B = {2, 4, 6, 8}, deci cele două mulțimi au aceleași elemente. Scriem A = B.

3. Mulțimile M = {x | x e număr natural, x < 4} și P = {1, 2, 3} nu sunt egale. Reprezentând mulțimea M prin enumerarea elementelor sale obținem M = {0, 1, 2, 3}. Cum 0 ∈ M și 0 ∉ P, mulțimile M și P nu sunt egale. Scriem M ≠ P.

OBSERVAȚII

1. A = A pentru orice mulțime A.

2. Dacă A = B, atunci B = A.

3. Dacă A = B și B = C, atunci A = C.

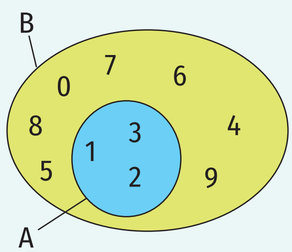


Figura 2
(A ⊂ B, B ⊃ A)

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B. Se notează A ⊂ B și se citește: „mulțimea A este inclusă în mulțimea B”. În acest caz, putem spune că **mulțimea B include mulțimea A** (se notează B ⊃ A și se citește „mulțimea B include mulțimea A”) și **mulțimea A este o submulțime a mulțimii B** (figura 2).

OBSERVAȚII

1. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi (∅ ⊂ A, pentru oricare mulțime A).

2. Orice mulțime este inclusă în ea însăși (A ⊂ A, pentru oricare mulțime A).

EXEMPLU:

Submulțimile mulțimii A = {1, 2, 3} sunt: ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}.

Mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi X formează mulțimea părților mulțimii X și se notează $\mathscr{P}$(X).

EXEMPLU:

Dacă A = {1, 2, 3}, atunci $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

OBSERVAȚII

1. Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci A = B.

2. Dacă $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

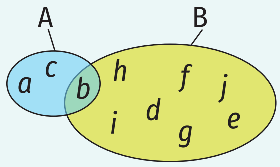


Figura 3
($A \not\subset B$, $B \not\supset A$)

Mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B (sau mulțimea A nu este o submulțime a mulțimii B) dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B. Se notează $A \not\subset B$ (se citește „mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B") sau $B \not\supset A$ (se citește „mulțimea B nu include mulțimea A") (figura 3).

Mulțimea A din figura 3 nu este o submulțime a mulțimii B (mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B/mulțimea B nu include mulțimea A) deoarece $a \in A$, $c \in A$, dar $a \notin B$, $c \notin B$.

Exerciții rezolvate

1. Fie C mulțimea numerelor naturale de o cifră și D = {n | n e număr natural, $n \leq 10$}. Demonstrează că $C \subset D$.

Rezolvare:

Scriind elementele celor două mulțimi, obținem C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} și D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, deci $C \subset D$.

2. Fie mulțimile A = {1, 3, 5, 7} și B = {1, 5, x, $2x + 1$}, unde x este număr natural. Determină valorile lui x pentru care A = B.

Rezolvare:

Observăm că 1 și 5 aparțin atât mulțimii A, cât și mulțimii B. Cum A = B, $3 \in A$ și $7 \in A$ rezultă că $3 \in B$ și $7 \in B$, deci $x = 3$ sau $x = 7$.

Pentru $x = 3$ obținem B = {1, 3, 5, 7}, ceea ce implică A = B.

Pentru $x = 7$ obținem B = {1, 5, 7, 15}, ceea ce implică $A \neq B$.

Deci $x = 3$ este singura soluție.

3. Fie A = {n | n e număr natural, $n < 11$}. Scrie o submulțime a mulțimii A formată din:

a) numere prime; c) puteri ale lui 2; e) divizori ai lui 12.

b) numere impare; d) multipli ai lui 3;

Rezolvare:

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

a) {2, 3, 5, 7} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

b) {1, 3, 5, 7, 9} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

c) {1, 2, 4, 8} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

d) {0, 3, 6, 9} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

e) {1, 2, 3, 4, 6} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

Aplic

OBSERVAȚIE

Pentru unele casete există două sau trei variante de completare.

1. Completează casetele cu unul dintre simbolurile $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$, $=$, $\neq$, pentru a obține propoziții adevărate:

a) $\{1, 2\} \square \{0, 1, 2, 3\}$;
b) $2 \square \{0, 1, 2, 3\}$;
c) $\{1, 2, 4\} \square \{1, 2, 3\}$;
d) $\{0, 1, 2\} \square \{1, 2\}$;
e) $\{1, 2\} \square \{1\}$;
f) $\{0\} \square \varnothing$;
g) $\{x, y, z, t\} \square \{t, x, y, z\}$;
h) $\{1, 2\} \square \{n \mid n$ e număr natural prim$\}$;
i) $\{2, 3\} \square \{n \mid n$ e număr natural prim$\}$;
j) $8 \square \{n \mid n$ e o putere a lui $2\}$;
k) $\varnothing \square \{1\}$;
l) $\{1\} \square \{0, 1, 2, 3\}$.

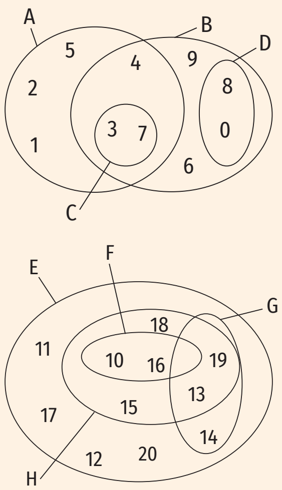


Figura 4

2. Se consideră diagramele Venn-Euler din figura 4.

i) Scrie mulțimile A, B, C, D, E, F, G și H prin enumerarea elementelor acestora.

ii) Scrie relațiile de incluziune existente între mulțimile A, B, C, D, E, F, G, H.

iii) Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $4 \in A$;
b) $\{3, 4\} \subset B$;
c) $13 \in H$;
d) $\{10, 13, 16\} \supset F$;
e) $\{2, 3, 6\} \subset A$;
f) $\{16\} \subset E$;
g) $\{10, 13, 15, 16, 18\} = H$;
h) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \supset A$;
i) $G \supset \{13, 14, 17, 19\}$;
j) $\{0\} \subset D$;
k) $D \subset \{0, 3, 7, 8\}$;
l) $\varnothing \subset G$.

3. Stabilește dacă mulțimile A și B sunt egale.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2^2, 2^0 + 2^1, 4^0, 2^1\}$;

b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x$ e număr natural, $x \leq 3\}$;

c) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \mid x$ e număr natural, x e multiplu al lui $2\}$;

d) A este mulțimea literelor cuvântului „maro”, B e mulțimea literelor cuvântului „aroma”.

4. Scrie mulțimea divizorilor, mulțimea divizorilor proprii și mulțimea multiplilor de două cifre ai numărului 18.

5. Determină mulțimea A cu proprietățile $\{2, 3\} \subset A$ și $A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Analizează toate cazurile posibile.

6. Determină toate mulțimile X care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 5\} \subset X$;
ii) $X \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

7. Fie M mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „lalea”. Scrie submulțimile mulțimii M.

8. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) Scrie toate submulțimile mulțimii A care au suma elementelor egală cu 9.

b) Scrie două submulțimi ale mulțimii A, X și Y, astfel încât $X \subset Y$.

9. Scrie elementele mulțimii A, știind că $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

10. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x$ este măsura unui unghi ascuțit$\}$, $O = \{x \mid x$ este măsura unui unghi obtuz$\}$, $B = \{30°, 10°, 89°, 72°\}$, $C = \{120°, 150°, 92°, 105°\}$, $D = \{20°, 90°, 80°, 45°\}$, $E = \{170°, 121°, 99°, 90°\}$, $F = \{1°, 2°, 3°, 4°, 5°\}$, $G = \{120°, 150°, 135°\}$ și $H = \{91°, 92°, 93°, 94°\}$.

a) Precizează care dintre mulțimile B, C, D, E, F, G, H sunt submulțimi ale mulțimii A.

b) Precizează care dintre mulțimile B, C, D, E, F, G, H sunt submulțimi ale mulțimii O.

11. Se consideră mulțimea A = {1, 2, 3, 4, 5}. Scrie o mulțime B astfel încât:

a) $B \supset A$; b) $A \subset B$; c) $B \not\subset A$; d) $A \supset B$; e) $A \neq B$; f) $A = B$.

12. Se consideră mulțimile $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{x, y, 5\}$, $C = \{z, 5, 2\}$, $D = \{x, y, 3\}$ și $E = \{8, y\}$. Determină numerele naturale x, y, z și t, știind că mulțimile B, C, D și E sunt submulțimi ale mulțimii A.

13. Se consideră mulțimea A = {1, 2, 3, 4, 5}. Scrie submulțimile mulțimii A:

a) care au un număr prim de elemente;

b) ale căror elemente sunt numere prime;

c) care nu conțin numerele 1 și 5;

d) care au 4 elemente;

e) ale căror elemente sunt numere compuse;

f) ale căror elemente sunt numere pare;

g) ale căror elemente sunt pătratele unor numere naturale.

14. Fie mulțimea A = {0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14}.

Scrie o submulțime a mulțimii A formată din:

a) multipli ai lui 3;

b) divizori ai lui 12;

c) pătrate ale unor numere naturale;

d) multipli ai lui 6;

e) multipli ai lui 2;

f) numere impare;

g) numere compuse.

15. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x = \overline{ab}$ și $\overline{1ab} + \overline{b1a} + \overline{ab1} = 888\}$.

a) Scrie elementele mulțimii A.

b) Scrie submulțimile mulțimii A ale căror elemente sunt numere impare.

16. Folosind toate elementele mulțimii {1, 3, 5, 7, 10}, scrie două submulțimi ale acesteia care îndeplinesc simultan condițiile:

a) nu au elemente comune;

b) suma elementelor acestora este aceeași.

17. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b\right.$ sunt numere naturale nenule și $\frac{a}{b}$ e fracție subunitară$\left.\right\}$.

a) Scrie trei elemente ale mulțimii A care au numitorul egal cu 5.

b) Scrie o submulțime a mulțimii A formată din 5 elemente.

c) Se dau mulțimile $B = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$, $C = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}\right\}$, $D = \left\{\frac{1}{9}, \frac{2}{7}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}\right\}$, $E = \left\{\frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$. Care dintre acestea e submulțime a mulțimii A?

18. Fie $A = \{x \mid x$ e număr natural, restul împărțirii lui x la 5 este $3\}$.

a) Arată că $38 \in A$ și $17 \notin A$.

b) Determină cel mai mic număr de două cifre care este element al mulțimii A.

c) Determină cel mai mare număr de două cifre care este element al mulțimii A.

d) Scrie o submulțime a mulțimii A formată din trei numere prime.

e) Scrie o submulțime a mulțimii A formată din patru numere pare.

f) Demonstrează că niciun element al mulțimii A nu este pătratul unui număr natural.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

Știți din clasa a V-a că dreptele, semidreptele și segmentele sunt mulțimi de puncte.

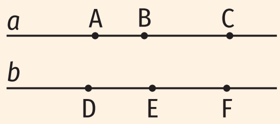


Figura 5

Folosind figura 5, precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții (în acest exercițiu, prin scrierea de forma AB am notat dreapta AB).

a) $\{B, D\} \subset b$;

b) $\{A, B, C\} \subset a$;

c) $\{D, E, C\} \subset b$;

d) $A \in a$;

e) $D \notin b$;

f) $\{D, A, B, C\} \subset a$;

g) $\{A, D, E, F\} \supset a$;

h) $\{A, B, C\} = a$;

i) $\{D, E, F\} \neq b$;

j) $AB = a$;

k) $b \supset DF$;

l) $b \subset a$;

m) $\{A, C\} \subset a$;

n) $B \in AC$;

o) $D \notin EF$;

p) $F \in ED$;

q) $A \in BC$;

r) $C \notin BA$;

s) $B \notin EF$.

3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale

Descopăr

Fie D_{12} mulțimea divizorilor naturali ai numărului 12 și M_{12} mulțimea multiplilor naturali ai numărului 12.

a) Reprezintă mulțimile D_{12} și M_{12} prin enumerarea elementelor.

b) Câte elemente are mulțimea D_{12}?

c) Ce poți spune despre mulțimea M_{12}?

Învăț

ȘTIAȚI CĂ...?

- Notația ℕ pentru mulțimea numerelor naturale provine din limba franceză, de la cuvântul *naturel* = *natural*.
- Noțiunea de cardinal al unei mulțimi a fost introdusă în 1879 de matematicianul Georg Cantor.
- Cardinalul unei mulțimi se mai numește și puterea acelei mulțimi.

Dacă totalul elementelor unei mulțimi se poate exprima printr-un număr natural, spunem că mulțimea este finită. Dacă o mulțime nu este finită, spunem că este infinită.

EXEMPLE:

1. Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este o mulțime finită pentru că are **10** elemente.
2. Mulțimea numerelor naturale este infinită.

Mulțimea numerelor naturale se notează cu ℕ.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Mulțimea numerelor naturale nenule se notează cu $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Cardinalul unei mulțimi finite reprezintă numărul de elemente ale acelei mulțimi.

Cardinalul unei mulțimi finite A se notează card A sau |A|.

EXEMPLU:

Mulțimea A = {a, b, c, d} are patru elemente. Scriem card A = 4 (sau |A| = 4).

OBSERVAȚII

1. De regulă, mulțimea divizorilor numărului natural nenul *p* se notează cu D_p, iar mulțimea multiplilor numărului natural nenul *p* se notează cu M_p.
De exemplu, $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
$M_{18} = \{0, 1 \cdot 18, 2 \cdot 18, 3 \cdot 18, 4 \cdot 18, 5 \cdot 18, ...\} = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, ...\}$.
2. Mulțimea divizorilor unui număr natural nenul este finită, iar mulțimea multiplilor unui număr natural nenul este infinită.

Exerciții rezolvate

1. Determină cardinalul mulțimii A.

a) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n < 17\}$; c) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \in M_3, n < 22\}$;

b) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 32\}$; d) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 10 < n < 40 \text{ și } n \,\vdots\, 7\}$.

Rezolvare:

a) $A = \{1, 2, 3, ..., 16\}$, deci card A = 16;

b) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, deci card A = 6;

c) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, deci card A = 7;

d) $A = \{14, 21, 28, 35\}$, deci card A = 4.

2. Precizează care dintre mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = \overline{ab}, a \neq b\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x$ e număr natural impar, $x \in M_6\}$, $D = \{x \mid x \in M_3, x \leq 100\}$, $E = \{x \mid x \in M_3, x > 100\}$ sunt finite și determină cardinalul acestora.

Rezolvare:

Cum mulțimea A este formată din numerele naturale de două cifre, care au cifrele diferite, $A = \{10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, ..., 98\}$. Dintre numerele naturale de două cifre, mulțimii A nu îi aparțin numerele naturale de două cifre care au cifrele egale (adică 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99). Așadar, mulțimea A este finită și card A = 90 − 9 = 81.

$B = \{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, ...\} \Rightarrow B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

Mulțimea B nu este finită.

$C = \varnothing$, deoarece mulțimea M_6 este formată numai din numere pare. Deci card C = 0.

$D = \{\underbrace{0}_{3\cdot 0}, \underbrace{3}_{3\cdot 1}, \underbrace{6}_{3\cdot 2}, \underbrace{9}_{3\cdot 3}, ..., \underbrace{99}_{3\cdot 33}\}$. Așadar, mulțimea D este finită și card D = 34.

$E = \{\underbrace{102}_{3\cdot 34}, \underbrace{105}_{3\cdot 35}, \underbrace{108}_{3\cdot 36}, \underbrace{111}_{3\cdot 37}, ...\} \Rightarrow$ Mulțimea E nu este finită.

Aplic

1. Scrie o mulțime care să aibă cardinalul egal cu:

a) 0; b) 1; c) 4; d) 10; e) 90; f) 100; g) 900; h) 1 000.

2. a) Precizează care dintre mulțimile D_6, M_5, M_{25}, D_{36}, M_{10}, D_{49}, D_{50}, D_{111} sunt finite.

b) Determină cardinalul mulțimilor finite identificate la punctul a).

3. Determină cardinalul mulțimii X.

a) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n < 50\}$;

b) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n < 50\}$;

c) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 23 < n \leq 50\}$;

d) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n^2 \leq 50\}$;

e) $X = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^{2023}\}$;

f) $X = \{1, 5, 9, 13, 17, ..., 101\}$;

g) $X = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, ..., \frac{1}{99}\right\}$;

h) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 3 \leq n < 23, n \,\vdots\, 3\}$;

i) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 4 \leq n < 35, 5 \mid n\}$;

j) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 2^{10} < n \leq 2^{11}\}$.

4. Scrie două mulțimi A și B astfel încât card A = 3, card B = 5 și $A \subset B$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

A. Estimați cardinalul următoarelor mulțimi:

a) mulțimea elevilor din școala voastră;

b) mulțimea elevilor din clasa a VI-a din școala voastră;

c) mulțimea notelor pe care le veți obține în acest an școlar;

d) mulțimea locuitorilor din comuna/orașul vostru;

e) mulțimea orașelor din România;

f) mulțimea comunelor din România.

B. Ce puteți spune despre cardinalele mulțimilor A și B? Răspundeți la întrebare asociind „unu la unu” elementele celor două mulțimi.

a) A este mulțimea cărților din biblioteca unei școli, iar B este mulțimea codurilor de înregistrare ale acestora.

b) A este mulțimea elevilor din clasa voastră, iar B este mulțimea codurilor numerice personale ale acestora.

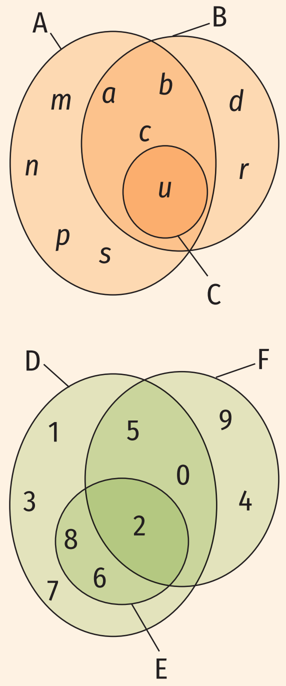


Figura 1

5. Determină cardinalul fiecăreia dintre mulțimile A, B, C, D, E și F, reprezentate cu ajutorul diagramelor din figura 1.

6. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \mid x\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 24\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 9\}$ și $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 11 \leq x\}$.

a) Precizează care dintre mulțimile A, B, C, D sunt finite. Calculează cardinalul fiecăreia dintre mulțimile finite identificate.

b) Scrie câte două exemple de submulțimi finite ale mulțimilor infinite de mai sus.

c) Adaugă o condiție suplimentară astfel încât mulțimea A să devină finită.

7. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2p - 1, p \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Scrie câte patru elemente din fiecare mulțime.

b) Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect:

A. Mulțimile A și B sunt finite.

B. Mulțimea A e finită și mulțimea B e infinită.

C. Mulțimea A e infinită și mulțimea B e finită.

D. Mulțimile A și B sunt infinite.

c) Adaugă o condiție suplimentară astfel încât:

i) mulțimea A să fie finită și card A = 10.

ii) mulțimea B să fie finită și card B = 25.

Portofoliu

Fie J mulțimea județelor din România, O mulțimea orașelor din România, C mulțimea comunelor din România, M mulțimea municipiilor din România, R mulțimea orașelor cu peste 300 000 de locuitori din România, V mulțimea țărilor cu care se învecinează România.

a) Scrie submulțimea mulțimii J formată din județele din Moldova.

b) Scrie submulțimea mulțimii O formată din orașele din județul Tulcea.

c) Scrie submulțimea mulțimii O formată din orașele din județul în care locuiești sau dintr-un județ vecin.

d) Scrie submulțimea mulțimii O formată din orașe cu peste 200 000 locuitori.

e) Scrie relația dintre mulțimile M și O folosind simbolurile matematice.

f) Scrie elementele mulțimilor R și V.

g) Determină cardinalul fiecăreia dintre mulțimile J, C, O, M, R, V.

Documentează-te pe https://ue.mae.ro/romania/137 și din alte surse pentru a rezolva sarcinile de lucru.

Urmărește etapele realizării unui portofoliu așa cum apar în anexa de la pagina 224.

4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență

Descopăr

În figura 1 sunt reprezentate mulțimile A = {1, 2, 3, 6} și B = {1, 2, 4, 8, 9} cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

a) Determină elementele care aparțin fie mulțimii A, fie mulțimii B. Hașurează suprafața ce conține aceste elemente.

b) Determină elementele comune mulțimilor A și B. Colorează cu roșu suprafața ce conține aceste elemente.

c) Determină elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B. Colorează cu albastru suprafața ce conține aceste elemente.

d) Determină elementele care aparțin mulțimii B și nu aparțin mulțimii A. Colorează cu galben suprafața ce conține aceste elemente.

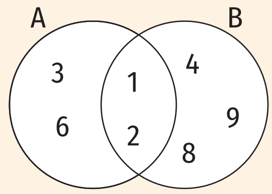


Figura 1

Învăț

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B. Se notează A ∪ B (figura 2).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

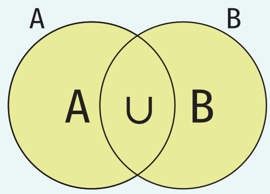


Figura 2

EXEMPLU:

Reuniunea mulțimilor A = {1, 2, 3, 6} și B = {1, 2, 4, 8, 9} este mulțimea A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9} (figura 3).

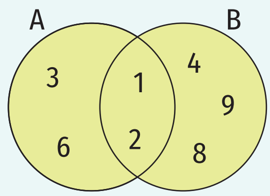


Figura 3

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B. Se notează A ∩ B (figura 4).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

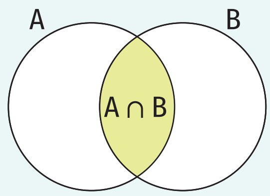


Figura 4

EXEMPLU:

Intersecția mulțimilor A = {1, 2, 3, 6} și B = {1, 2, 4, 8, 9} este mulțimea A ∩ B = {1, 2} (figura 5).

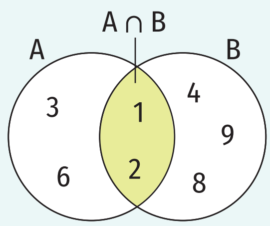


Figura 5

Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc mulțimi disjuncte.

EXEMPLU:

Mulțimile A = {1, 3, 5, 7} și B = {2, 4, 8} sunt disjuncte (A ∩ B = ∅).

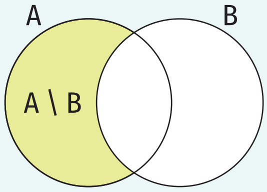


Figura 6

Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B. Se notează A \ B (figura 6).

$$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A} \text{ și } x \notin \mathrm{B}\}$$

EXEMPLE:

1. Diferența dintre mulțimea A = {1, 2, 3, 6} și mulțimea B = {1, 2, 4, 8, 9} este mulțimea A \ B = {3, 6} (figura 7).
2. Diferența dintre mulțimea B = {1, 2, 4, 8, 9} și mulțimea A = {1, 2, 3, 6} este mulțimea B \ A = {4, 8, 9} (figura 8).

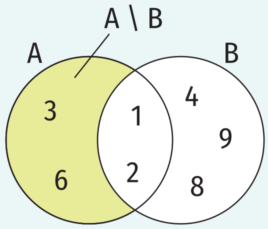


Figura 7

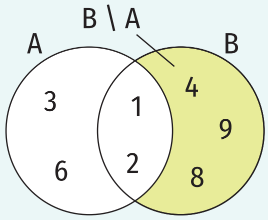


Figura 8

OBSERVAȚII

1. În general, A \ B ≠ B \ A.

2. Dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci:
card (A ∪ B) = card A + card B − card (A ∩ B) (principiul includerii și al excluderii).

Exerciții rezolvate

1. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
i) A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}; ii) A ∩ B = {2, 3}; iii) A \ B = {1, 5}.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2, 3\} \Rightarrow 2 \in \mathrm{A}, 3 \in \mathrm{A}, 2 \in \mathrm{B}, 3 \in \mathrm{B} \text{ (figura 9)} \\ \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{1, 5\} \Rightarrow 1 \in \mathrm{A}, 5 \in \mathrm{A}, 1 \notin \mathrm{B}, 5 \notin \mathrm{B} \text{ (figura 10)} \\ \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \notin \mathrm{A}, 4 \notin \mathrm{A}, 0 \in \mathrm{B}, 4 \in \mathrm{B} \text{ (figura 11)}$$

În concluzie, A = {1, 2, 3, 5} și B = {0, 2, 3, 4}.

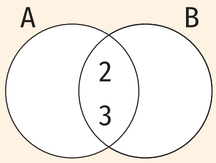


Figura 9

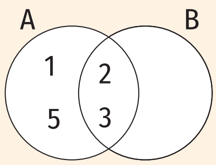


Figura 10

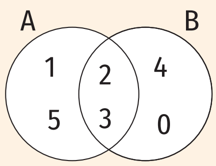


Figura 11

2. Fie mulțimile: $\mathrm{A} = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x < 6\}$, $\mathrm{B} = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbb{N}, x \le 4\}$ și $\mathrm{C} = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}, k \le 4\}$. Determină A ∪ B, B ∩ C, A ∪ C, A ∪ (B ∩ C), A \ C.

Rezolvare:

Determinăm elementele mulțimilor A, B și C:

$x \in \mathbb{N}^*, x < 6 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Deci A = {1, 2, 3, 4, 5}.

$x \le 4, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow x^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$. Deci B = {0, 1, 4, 9, 16}.

$k \in \mathbb{N},\ k \le 4 \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$k = 0 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1$ $\quad$ $k = 3 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$

$k = 1 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ $\quad$ $k = 4 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

$k = 2 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

Așadar, C = {1, 4, 7, 10, 13}.

A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 16}; B ∩ C = {1, 4}; A ∪ C = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 13};
A ∪ (B ∩ C) = A ∪ {1, 4} = {1, 2, 3, 4, 5}; A \ C = {2, 3, 5}.

3. Arată că mulțimile A = $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 5n + 3, n \in \mathbb{N}\}$ și B = $\{x \mid x \in \mathbb{N},$ x e pătratul unui număr natural$\}$ sunt disjuncte.

Rezolvare:

Dacă $x \in A$, atunci ultima cifră a lui x este 3 sau 8, deci x nu poate fi pătratul unui număr natural și, prin urmare, $x \notin B$ (ultima cifră a pătratului unui număr natural poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9).

Așadar, $A \cap B = \varnothing$.

4. Fiecare dintre cei 24 de elevi ai clasei a VI-a A vorbește fluent cel puțin una dintre limbile engleză și franceză. 18 elevi vorbesc fluent limba engleză și 12 elevi vorbesc fluent limba franceză.

a) Câți elevi vorbesc fluent ambele limbi?

b) Câți elevi vorbesc fluent numai limba franceză?

Rezolvare:

a) Fie A mulțimea elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent limba engleză și B mulțimea elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent limba franceză. Astfel, $A \cup B$ e mulțimea elevilor clasei a VI-a A și $A \cap B$ e mulțimea elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent ambele limbi.

În acest caz, card A = 18, card B = 12, card $(A \cup B)$ = 24.

card $(A \cup B)$ = card A + card B − card $(A \cap B) \Rightarrow 24 = 18 + 12 -$ card $(A \cap B) \Rightarrow$
card $(A \cap B) = 6$.

Numărul elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent ambele limbi este 6.

b) Numărul elevilor care vorbesc fluent numai limba franceză este 12 – 6 = 6.

Aplic

1. Se consideră mulțimile A = {0, 2, 4, 6, 8}, B = {1, 3, 5, 7, 9} și C = {2, 3, 5, 7}. Determină elementele mulțimilor: $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap C$, $C \setminus B$, $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, $(A \cap C) \cup (C \cap B)$.

INDICAȚIE: Pentru a determina elementele mulțimii $(A \cup B) \cap C$, determinăm întâi elementele mulțimii $A \cup B$.

2. În figura 12 sunt reprezentate mulțimile A, B, C și D cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

a) Scrie mulțimile A, B, C, D prin enumerarea elementelor.

b) Determină card A, card B, card C și card D.

c) Determină mulțimile: $A \cup B$, $C \cup D$, $(A \cup B) \cap (C \cup D)$, $(B \setminus C) \cup (C \setminus B)$, $(A \cap B) \cap (C \cap D)$.

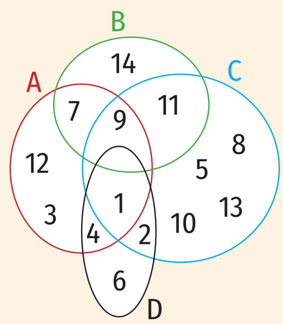


Figura 12

3. În figura 13 sunt reprezentate mulțimile A, B, C și D cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

a) Scrie mulțimile A, B, C, D prin enumerarea elementelor.

b) Scrie mulțimile F, G, H, I, M, P, S și T prin enumerarea elementelor.

F = $\{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$;

G = $\{x \mid x \in A$ și $x \in D\}$;

H = $\{x \mid x \in A, x \in B, x \in C$ și $x \in D\}$;

I = $\{x \mid x \in C$ și $x \notin D\}$;

M = $\{x \mid x \in A$ sau $x \in B$ sau $x \in C\}$;

P = $\{x \mid x \in D$ și $x \notin C\}$;

S = $\{x \mid x \in A$ și $x \notin D\}$;

T = $\{x \mid x \in C$ și $x \notin B\}$.

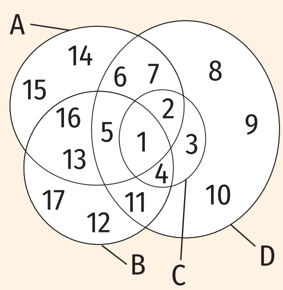


Figura 13

ȘTIAȚI CĂ...?

Folosirea figurilor pentru reprezentarea mulțimilor își are originea în vechime. Printre matematicienii care s-au preocupat de studierea mulțimilor și reprezentarea acestora cu ajutorul diagramelor, se află:

- Leonard Euler (matematician german, 1707-1783) a folosit figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii;
- John Venn (matematician englez, 1834-1923) a adus îmbunătățiri diagramelor lui Euler. De aceea, diagramele reprezentând mulțimi sunt numite *diagrame Venn-Euler;*
- Georg Cantor (matematician german, 1845-1918) a creat *teoria mulțimilor*, care a devenit o teorie fundamentală a matematicii.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) $a \parallel b \Rightarrow a \cap b = ...$

b) Dreptele a și b sunt concurente în punctul A. $\Rightarrow a \cap b = ...$

c) Dreptele a și b sunt confundate $\Rightarrow a \cap b = ...$

d) $a \cap b = \varnothing \Rightarrow a \ ... \ b$

4. Fie A mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „geografie”, B mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „geometrie”, C mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „istorie” și D mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „biologie”. Determină mulțimile: $C \cup D$, $A \cup D$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$, $(D \setminus C) \cup (C \setminus D)$, $(A \cap B) \cap (C \cap D)$.

5. Se consideră mulțimea $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Scrie două mulțimi disjuncte nevide, A și B, astfel încât $A \cup B = X$.

b) Scrie două mulțimi nevide, C și D, astfel încât $C \setminus D = X$.

c) Scrie două mulțimi, E și F, $E \neq F$, astfel încât $E \cap F = X$.

6. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; c) $A \cap B = \{4, 6\}$;

b) $A \cap \{8, 10, 12\} = \varnothing$; d) $\{0, 2\} \cap B = \varnothing$.

7. Determină mulțimile *A* și *B*, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$; b) $b \in A$; c) $A \cap B = \{a, c\}$.

8. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $A \cap B \supset \{3, 5, 7\}$; c) $B \setminus A = \{6, 8, 9\}$.

9. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = k(k + 1), k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \mid x = 2p + 1, p \in \mathbb{N}\}$. Calculează card $(A \cap B)$.

10. Fie L_x mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul x. Determină cardinalul următoarelor mulțimi: $L_{scund} \cap L_{înalt}$; $L_{prieten} \setminus L_{amic}$; $L_{morcov} \cap L_{leuștean}$; $L_{plin} \cup L_{gol}$; $L_{ilicit} \cap L_{legal}$; $L_{lumină} \setminus L_{întuneric}$; $L_{erou} \cap L_{laș}$; $L_{premiant} \cup L_{câștigător}$.

11. Fie A și B două mulțimi cu card A = 4 și card B = 8.

a) Determină card $(A \cup B)$, dacă card $(A \cap B) = 2$.

b) Determină card $(A \cap B)$, dacă card $(A \cup B) = 10$.

c) Determină card $(A \cup B)$, știind că $A \cap B = \varnothing$.

d) Determină card $(A \cap B)$, știind că $A \subset B$.

12. Într-o clasă sunt 24 de elevi. Dintre aceștia, 12 merg la cercul de matematică, 16 merg la cercul de lectură, iar 2 elevi nu merg la niciun cerc. Câți elevi din clasă merg numai la cercul de lectură?

13. Se consideră mulțimea $X = \{0, 1, 2, 3, ..., 51\}$.

a) Calculează suma elementelor mulțimii X.

b) Dă exemple de două submulțimi disjuncte ale mulțimii X, A și B, astfel încât suma elementelor mulțimii A să fie egală cu suma elementelor mulțimii B.

c) Dă exemple de două submulțimi disjuncte ale mulțimii X, C și D, care îndeplinesc simultan condițiile:

i) suma elementelor mulțimii C este egală cu suma elementelor mulțimii D;

ii) $C \cup D = X$.

14. Se consideră mulțimile $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 100, x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ și $Y = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y \leq 100$, restul împărțirii lui y la 6 este 1$\}$.

a) Determină: card X, card Y, card $(X \cap Y)$, card $(X \cup Y)$, card $(X \setminus Y)$.

b) Calculează suma elementelor mulțimii X.

c) Calculează suma elementelor mulțimii Y.

5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

Îmi amintesc

1. Se consideră mulțimile X = $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$, P = $\{p \mid p \in X, p$ e număr prim$\}$, C = $\{c \mid c \in X, c$ e număr compus$\}$ și A = $\{a \mid a \in X, a$ nu este număr prim și a nu este număr compus$\}$. Scrie mulțimile X, P, C și A prin enumerarea elementelor.
2. Scrie ca produs de numere prime următoarele numere compuse: 24, 30 și 32.

Învăț

Orice număr natural compus se poate scrie ca un produs de puteri de numere prime. Această scriere este unică, exceptând ordinea factorilor.

Pentru a scrie un număr natural ca produs de puteri de numere prime procedăm astfel: desenăm o linie verticală, în stânga acesteia scriem numărul pe care trebuie să-l descompunem și câturile obținute la împărțirile cu numerele prime, iar în dreapta liniei scriem numerele prime folosite.

EXEMPLE:

1.

168	2	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 168. Acesta este 2. Efectuăm împărțirea 168 : 2 = 84.
84	2	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 84. Acesta este 2. Efectuăm împărțirea 84 : 2 = 42.
42	2	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 42. Acesta este 2. Efectuăm împărțirea 42 : 2 = 21.
21	3	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 21. Acesta este 3. Efectuăm împărțirea 31 : 3 = 7.
7	7	7 este număr prim, deci singurul divizor prim al său este 7. Efectuăm împărțirea 7 : 7 = 1.
1		

Am obținut $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, deci scrierea numărului 168 ca produs de puteri de numere prime este $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

2.

360	$2 \cdot 5$	360 ⋮ 10. Cum $10 = 2 \cdot 5$ putem scrie în dreapta liniei verticale $2 \cdot 5$. Calculăm 360 : 10 = 36.
36	2	36 ⋮ 2. Efectuăm împărțirea 36 : 2 = 18.
18	2	18 ⋮ 2. Efectuăm împărțirea 18 : 2 = 9.
9	3	9 ⋮ 3. Efectuăm împărțirea 9 : 3 = 3.
3	3	3 e număr prim. Efectuăm împărțirea 3 : 3 = 1.
1		

Am obținut $360 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, deci scrierea numărului 360 ca produs de puteri de numere prime este $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

ȘTIAȚI CĂ...?

Putem afla numărul de divizori ai unui număr natural fără a scrie mulțimea divizorilor acestuia.

Dacă $n \in \mathbb{N}$ se scrie ca produs de puteri de numere prime $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot ... p_l^{k_l}$, unde $p_1, p_2, p_3, ..., p_l$ sunt numere prime, iar $k_1, k_2, k_3, ..., k_l \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul de divizori ai numărului n este: $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_l + 1)$.

Aplic

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dintre numerele 13, 34, 1, 202, 101, 0, 690, 2 043, 149, 11 001, 233, 344, 433, numere prime sunt: ...

b) Dintre numerele 103, 74, 11, 221, 211, 0, 960, 2 403, 903, 11 601, 233, 544, 107, numere compuse sunt: ...

2. Se consideră mulțimile X = {222, 35, 81, 360, 125, 900, 7 000, 1 024, 324, 55, 1 000, 72 000, 666, 1 230, 405, 504, 2 700, 402, 255, 210}, $X_2 = \{x \mid x \in X, x \vdots 2\}$, $X_3 = \{x \mid x \in X, x \vdots 3\}$, $X_5 = \{x \mid x \in X, x \vdots 5\}$, $X_9 = \{x \mid x \in X, x \vdots 9\}$, $X_{10} = \{x \mid x \in X, x \vdots 10\}$, $X_{100} = \{x \mid x \in X, x \vdots 10^2\}$ și $X_{1000} = \{x \mid x \in X, x \vdots 10^3\}$.

a) Scrie mulțimile $X_2, X_3, X_5, X_9, X_{10}, X_{100}, X_{1000}$ prin enumerarea elementelor.

b) Determină mulțimile: $X_5 \cap X_3$; $X_2 \cap X_5$; $X_5 \setminus X_{10}$; $X_3 \setminus X_9$; $X_5 \cup X_3$; $X_3 \cup X_9$; $(X_5 \setminus X_{10}) \cup (X_2 \setminus X_{10})$.

3. a) Scrie numerele 15, 18, 25, 38, 56, 81, 125, 49, 111, 63, 96 ca produs de puteri de numere prime.

b) Scrie mulțimile $D_{15}, D_{18}, D_{25}, D_{38}, D_{56}, D_{81}, D_{125}, D_{49}, D_{111}, D_{63}, D_{96}$ prin enumerarea elementelor.

c) Determină cardinalul fiecăreia dintre mulțimile: $D_{15}, D_{18}, D_{25}, D_{38}, D_{81}, D_{125}, D_{49}, D_{111}, D_{63}, D_{96}$.

4. Scrie ca produs de puteri de numere prime următoarele numere naturale: 780, 140, 88, 128, 1 024, 729, 20 400, 50 000, 6 300, 2 310, 540, 1 210, 2 890, 3 430, 375.

5. Scrie numerele naturale x și y ca produse de puteri de numere prime și identifică divizorii comuni:

a) $x = 42$ și $y = 76$; b) $x = 132$ și $y = 330$; c) $x = 52$ și $y = 78$.

6. Completează spațiile libere cu numere naturale pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $144 = 2^m \cdot 3^n$, atunci m = ... și n = ...

b) Dacă $2\,700 = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$, atunci m = ..., n = ... și p = ...

c) Dacă $7\,007 = 7^m \cdot 11^n \cdot 13^p$, atunci m = ..., n = ... și p = ...

d) Dacă $1\,575 = 3^m \cdot 5^n \cdot 7^p$, atunci m = ..., n = ... și p = ...

7. Descompune în produs de puteri de numere prime numerele x, y și z și scrie produsul $x \cdot y \cdot z$ sub formă de produs de puteri de numere prime.

a) $x = 72$, $y = 150$ și $z = 385$; c) $x = 315$, $y = 875$ și $z = 735$;

b) $x = 126$, $y = 280$ și $z = 112$; d) $x = 1\,024$, $y = 729$ și $z = 1\,250$.

6. Determinarea celui mai mare divizor comun şi a celui mai mic multiplu comun. Numere prime între ele

Descopăr

1. a) Scrie mulțimile D_{36} și D_{42} prin enumerarea elementelor și apoi determină cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 42.

b) Scrie ca produs de puteri de numere prime numerele 36, 42 și cel mai mare divizor comun al acestora. Ce observi?

2. a) Scrie cei mai mici patru multipli nenuli ai fiecăruia dintre numerele 45 și 30 și apoi determină cel mai mic multiplu comun al numerelor 45 și 30.

b) Scrie ca produs de puteri de numere prime numerele 45, 30 și cel mai mic multiplu comun al acestora. Ce observi?

D_n reprezintă mulțimea divizorilor numărului natural nenul *n*.

Învăț

Determinarea celui mai mare divizor comun

Cel mai mare divizor comun a două sau al mai multor numere naturale, nu toate nule, este cel mai mare număr natural care divide numerele date.

OBSERVAȚIE

Cel mai mare divizor comun a două sau al mai multor numere naturale este divizibil cu orice divizor comun al acestora.

Fie *a* și *b* două numere naturale nenule. Dacă $d = (a, b)$, atunci $D_a \cap D_b = D_d$.

Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale *a* și *b* se prescurtează „c.m.m.d.c.” și se notează (a, b).

Pentru a afla cel mai mare divizor comun a două sau al mai multor numere naturale procedăm astfel:

- **scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime;**
- **luăm, o singură dată, factorii primi comuni, cu exponenții cei mai mici cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.**

EXEMPLU:

Pentru a determina cel mai mare divizor comun al numerelor 264 și 252 procedăm astfel:

Scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime.

264	2	252	2
132	2	126	2
66	2	63	3
33	3	21	3
11	11	7	7
1		1	

$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$ $\quad 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Luăm, o singură dată, factorii primi comuni, cu exponenții cei mai mici cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.

$$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$$
$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$
$$(264, 252) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Două numere naturale se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Dacă numerele *a* și *b* sunt prime între ele, notăm $(a, b) = 1$.

EXEMPLE:

1. $(5, 7) = 1$; **2.** $(2, 15) = 1$; **3.** $(10, 9) = 1$.

Determinarea celui mai mic multiplu comun

Cel mai mic multiplu comun a două sau al mai multor numere naturale nenule este cel mai mic număr natural nenul care se divide cu numerele date.

OBSERVAȚIE

Cel mai mic multiplu comun a două sau al mai multor numere naturale divide orice multiplu comun al acestora.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale *a* și *b* se prescurtează „c.m.m.m.c” și se notează cu $[a, b]$.

Pentru a afla cel mai mic multiplu comun a două sau al mai multor numere naturale procedăm astfel:

- **scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime;**
- **luăm, o singură dată, factorii primi comuni și necomuni cu exponenții cei mai mari cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.**

EXEMPLU:

Pentru a determina cel mai mic multiplu comun al numerelor 360, 420 și 660 procedăm astfel:

Scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2\cdot 5 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2\cdot 5 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 630 & 2\cdot 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Luăm, o singură dată, factorii primi comuni și necomuni cu exponenții cei mai mari cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.

$$\begin{array}{l} 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ \hline [360, 420, 630] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520 \end{array}$$

OBSERVAȚIE

$\boldsymbol{a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]}$, pentru oricare numere naturale nenule *a* și *b*.

Exerciții rezolvate

1. Determină numerele naturale *a* și *b*, cu $a < b$, pentru fiecare dintre situațiile:

a) $(a, b) = 15$ și $a + b = 135$; b) $[a, b] = 90$ și $a \cdot b = 270$.

Rezolvare:

a) Dacă $(a, b) = 15$ și $a < b$, atunci $a = 15 \cdot k$ și $b = 15 \cdot t$, unde $(k, t) = 1$ și $k < t$.

$a + b = 135 \Rightarrow 15 \cdot k + 15 \cdot t = 135 \Rightarrow 15 \cdot (k + t) = 135 \Rightarrow k + t = 9$

$\left.\begin{array}{r} k + t = 9 \\ (k, t) = 1 \\ k < t \end{array}\right\} \Rightarrow k = 1$ și $t = 8$ sau $k = 2$ și $t = 7$ sau $k = 4$ și $t = 5$

Obținem $a = 15$ și $b = 120$ sau $a = 30$ și $b = 105$ sau $a = 60$ și $b = 75$.

b) $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b] \Rightarrow 270 = (a, b) \cdot 90 \Rightarrow (a, b) = 3$

Dacă $(a, b) = 3$ și $a < b$, atunci $a = 3 \cdot k$ și $b = 3 \cdot t$, unde $(k, t) = 1$ și $k < t$.

$a \cdot b = 270 \Rightarrow (3 \cdot k) \cdot (3 \cdot t) = 270 \Rightarrow 9 \cdot (k \cdot t) = 270 \Rightarrow k \cdot t = 30 \Rightarrow k = 1$ și $t = 30$ sau $k = 2$ și $t = 15$ sau $k = 3$ și $t = 10$ sau $k = 5$ și $t = 6$.

Obținem $a = 3$ și $b = 90$ sau $a = 6$ și $b = 45$ sau $a = 9$ și $b = 30$ sau $a = 15$ și $b = 18$.

2. Prin împărțirea numerelor 371, 463 și 393 la același număr natural nenul n se obțin resturile 11, 7 și, respectiv, 9. Determină valorile numărului natural n.

Rezolvare:

Deoarece prin împărțirea la numărul natural nenul n se obțin resturile 11, 7 și, respectiv, 9, obținem $n > 11$, $n > 7$ și $n > 9$, de unde rezultă $n > 11$.

$$\left.\begin{array}{l} 371 : n = c_1, \text{ rest } 11 \Rightarrow 371 = n \cdot c_1 + 11 \Rightarrow 360 = n \cdot c_1 \Rightarrow n \mid 360 \\ 463 : n = c_2, \text{ rest } 7 \Rightarrow 463 = n \cdot c_2 + 7 \Rightarrow 456 = n \cdot c_2 \Rightarrow n \mid 456 \\ 393 : n = c_3, \text{ rest } 9 \Rightarrow 393 = n \cdot c_3 + 9 \Rightarrow 384 = n \cdot c_3 \Rightarrow n \mid 384 \end{array}\right\} \Rightarrow n \mid (360, 456, 384)$$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$; $384 = 2^7 \cdot 3 \Rightarrow (360, 456, 384) = 2^3 \cdot 3 = 24$

Am obținut $n \mid 24$ și $n > 11$, de unde rezultă $n \in \{12, 24\}$.

3. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 18, 45 și 54, dă de fiecare dată restul 13 și câturi nenule.

Rezolvare:

Fie n numărul natural cerut.

$n : 18 = c_1$, rest $13 \Rightarrow n = 18 \cdot c_1 + 13 \Rightarrow n - 13 = 18c_1 \Rightarrow (n - 13) \vdots 18$

$n : 45 = c_2$, rest $13 \Rightarrow n = 45 \cdot c_2 + 13 \Rightarrow n - 13 = 45c_2 \Rightarrow (n - 13) \vdots 45$

$n : 54 = c_3$, rest $13 \Rightarrow n = 54 \cdot c_3 + 13 \Rightarrow n - 13 = 54c_3 \Rightarrow (n - 13) \vdots 54$

Din cele trei relații obținem $(n - 13) \vdots [18, 45, 54]$.

Descompunând numerele în produs de puteri de numere prime, obținem: $18 = 2 \cdot 3^2$, $45 = 3^2 \cdot 5$, $54 = 2 \cdot 3^3$ și $[18, 45, 54] = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$.

Cum n este cel mai mic număr natural cu proprietatea $(n - 13) \vdots [18, 45, 54]$, obținem că $n - 13$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 18, 45 și 54, adică $n - 13 = 270$. Rezultă $n = 283$.

4. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 18 dă restul 15, împărțit la 24 dă restul 21, iar împărțit la 30 dă restul 27.

Rezolvare:

Fie n numărul natural cerut.

$n : 18 = c_1$, rest $15 \Rightarrow n = 18 \cdot c_1 + 15 \Rightarrow n + 3 = 18 \cdot c_1 + 18 \Rightarrow n + 3 = 18 \cdot (c_1 + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (n + 3) \vdots 18$

$n : 24 = c_2$, rest $21 \Rightarrow n = 24 \cdot c_2 + 21 \Rightarrow n + 3 = 24 \cdot c_2 + 24 \Rightarrow n + 3 = 24 \cdot (c_2 + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (n + 3) \vdots 24$

Știm, din clasa a V-a, că, pentru oricare numere naturale a și b, cu $b \neq 0$, există și sunt unice numerele naturale c și r, numite cât și, respectiv, rest, astfel încât $a = b \cdot c + r$ și $r < b$.

$n : 30 = c_3$, rest $27 \Rightarrow n = 30 \cdot c_3 + 27 \Rightarrow n+3 = 30 \cdot c_3 + 30 \Rightarrow n+3 = 30 \cdot (c_3+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+3) \vdots 30$

Din cele trei relații rezultă $(n+3) \vdots [18, 24, 30]$

$18 = 2 \cdot 3^2$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow [18, 24, 30] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

n e cel mai mic număr natural pentru care $(n+3) \vdots 360 \Rightarrow n + 3 = 360 \Rightarrow n = 357$.

Aplic

1. Determină cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 24 și 36; d) 18, 36 și 48; g) 180, 216 și 288;

b) 45 și 54; e) 125, 200 și 375; h) 1200, 1800 și 2000;

c) 27 și 72; f) 144, 156 și 192; i) 150, 450 și 600.

2. Determină cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 24 și 18; d) 18, 36 și 48; g) 180, 576 și 288;

b) 36 și 54; e) 125, 225 și 275; h) 1200, 1800 și 2000;

c) 28 și 77; f) 140, 96 și 210; i) 510, 680 și 850.

3. Verifică relația $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$, pentru:

i) $a = 72$ și $b = 54$; ii) $a = 108$ și $b = 96$; iii) $a = 1001$ și $b = 1092$.

INDICAȚIE:

a) Elementele mulțimii $D_{24} \cap D_{18}$ sunt divizorii comuni ai numerelor 24 și 18. Aceștia sunt divizorii celui mai mare divizor comun al numerelor 24 și 18.

4. Determină mulțimile:

a) $D_{24} \cap D_{18}$; c) $D_{72} \cap D_{108}$; e) $D_{200} \cap D_{375} \cap D_{650}$; g) $D_{169} \cap D_{196}$.

b) $D_{20} \cap D_{36}$; d) $D_{240} \cap D_{108}$; f) $D_{126} \cap D_{162} \cap D_{270}$;

5. Determină cel mai mare număr natural care divide simultan numerele:

a) 441, 588, 735; d) 1515, 1818, 2121;

b) 1001, 1029, 1309; e) 121121, 143143, 187187.

c) 2145, 2431, 2717;

6. Determină cel mai mic număr natural nenul care este divizibil cu numerele:

a) 21, 35 și 49; c) 315, 420 și 630;

b) 77, 91 și 132; d) 1515, 1818 și 2121.

INDICAȚIE:

a) Elementele mulțimii $M_{24} \cap M_{18}$ sunt multiplii comuni ai numerelor 24 și 18. Aceștia sunt multiplii celui mai mic multiplu comun al numerelor 24 și 18.

7. Scrie cele mai mici 4 elemente ale mulțimii:

a) $M_{24} \cap M_{18}$; c) $M_{72} \cap M_{48}$; e) $M_{12} \cap M_{16} \cap M_{20}$; g) $M_{26} \cap M_{85}$.

b) $M_{20} \cap M_{36}$; d) $M_{24} \cap M_{36}$; f) $M_{6} \cap M_{21} \cap M_{27}$;

8. Verifică dacă numerele a și b sunt prime între ele.

a) $a = 121$ și $b = 144$; c) $a = 143$ și $b = 195$; e) $a = 150$ și $b = 157$;

b) $a = 54$ și $b = 77$; d) $a = 169$ și $b = 361$; f) $a = 233$ și $b = 333$.

9. Determină numerele naturale de două cifre de forma $\overline{ab}$ pentru care $(\overline{ab}, 48) = 16$.

10. Determină numerele naturale x pentru care $[x, 18] = 90$.

11. Determină numerele naturale de forma $\overline{2xy}$, știind că $(\overline{2xy}, 12) = 1$.

12. Determină numărul natural de forma $\overline{abcd}$, pentru care $(\overline{2ab}, \overline{9cd}) = 93$.

13. Determină numărul natural de forma $\overline{abab}$ $(a < b)$, pentru care $(\overline{abab}, \overline{baba}) = 606$.

14. Determină numerele naturale a și b, $a < b$, pentru care:

a) $(a, b) = 34$ și $a + b = 272$;
b) $(a, b) = 15$ și $a \cdot b = 1\,350$;
c) $(a, b) = 28$ și $a + b = 840$;
d) $(a, b) = 7$ și $a \cdot b = 735$.

15. Determină numerele naturale a și b, $a < b$, pentru care:

a) $[a, b] = 252$ și $a \cdot b = 504$;
b) $[a, b] = 72$ și $a \cdot b = 864$;
c) $[a, b] = 255$ și $a \cdot b = 4\,335$.

16. Elevii clasei a VI-a B au primit de la un sponsor 48 de pere, 72 de banane și 120 de mere. Fructele au fost distribuite în mod egal elevilor din clasă. Determină numărul elevilor din clasa a VI-a B, știind că este cel mai mare număr posibil.

17. Gelu are 40 de carioci și 26 de pixuri, pe care le împarte în mod egal prietenilor săi. Stabilește câți prieteni are Gelu, știind că îi rămân câte 5 obiecte din fiecare.

18. Prin împărțirea numerelor 348, 228 și 277 la același număr natural nenul n se obțin resturile 3, 21 și, respectiv, 1. Care sunt valorile numărului natural n?

19. Prin împărțirea numerelor 319, 213 și 387 la același număr natural nenul n se obțin resturile 4, 3 și, respectiv, 2. Care sunt valorile numărului natural n?

20. Prin împărțirea numerelor 15 022, 16 027 și 17 030 la același număr natural nenul n, se obțin resturile 7, 11 și, respectiv, 13. Determină valorile numărului natural n.

21. Împărțind numerele 373, 391 și 513 la același număr natural nenul, obținem resturile 13, 7 și, respectiv, 9. Determină împărțitorul.

22. Determină cel mai mare număr natural n cu proprietatea că, prin împărțirea numerelor 293, 397 și 366 la n se obțin resturile 5, 1 și, respectiv, 6.

23. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 20, 24 și 36, dă de fiecare dată restul 13 și câturi nenule.

24. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 210, 140 și 315, dă de fiecare dată restul 100 și câturi nenule.

25. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 42, dă restul 27, împărțit la 70 dă restul 55 și împărțit la 30 dă restul 15.

26. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 40, dă restul 12, împărțit la 36 dă restul 8 și împărțit la 54 dă restul 26.

27. Sorin are mai multe plăcuțe dreptunghiulare identice cu dimensiunile 12 cm și, respectiv, 8 cm. Care este numărul minim de plăcuțe de acest fel cu care Sorin poate forma un pătrat? Determină aria pătratului format.

28. Dacă elevii unei școli se așază în rânduri câte 12, 15 sau 18, nu rămân rânduri incomplete. Determină numărul de elevi ai școlii, știind că este cel mai mare număr natural de trei cifre cu această proprietate.

29. Maria aranjează cutii pe un raft. Dacă le grupează câte 2, 3, 4, 5 sau 6, rămâne o grupă cu o singură cutie. Dacă formează grupe de câte 7 cutii, nu rămân grupe incomplete. Stabilește numărul de cutii de pe raft, știind că este cel mai mic număr posibil.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

A. Determinați (225, 180):

a) prin scrierea mulțimilor divizorilor numerelor și identificarea celui mai mare dintre elementele comune acestor mulțimi;

b) prin scrierea numerelor ca produse de puteri de numere prime și înmulțirea factorilor primi comuni (luați o singură dată) cu exponenții cei mai mici.

Care dintre cele două metode e mai eficientă?

B. Determinați [225, 180]:

a) prin scrierea celor mai mici șase elemente ale mulțimilor multiplilor nenuli ai numerelor și identificarea celui mai mic dintre elementele comune acestor mulțimi;

b) prin scrierea numerelor ca produse de puteri de numere prime și înmulțirea factorilor primi comuni și necomuni (luați o singură dată) cu exponenții cei mai mari.

Care dintre cele două metode e mai eficientă?

7. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$

Descopăr

Completează casetele cu **A**, dacă enunțul este adevărat sau cu **F**, dacă este fals. În cazul enunțurilor false, scrie un exemplu prin care să ilustrezi acest lucru.

a) Suma a două numere naturale pare este un număr natural par. ☐

b) Suma a două numere naturale impare este un număr natural impar. ☐

c) Dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid (b + c)$, unde a, b și c sunt numere naturale. ☐

d) Dacă $a \mid (b + c)$, atunci $a \mid b$ și $a \mid c$, unde a, b și c sunt numere naturale. ☐

e) Dacă un număr natural se divide cu 5, atunci el se divide cu 15. ☐

f) Dacă un număr natural se divide cu 6, atunci el se divide cu 3. ☐

g) Dacă un număr natural se divide cu 3 și cu 6, atunci el se divide cu 18. ☐

Învăț

Ne amintim din clasa a V-a:

Numărul natural nenul b divide numărul natural a (sau numărul natural a este divizibil cu numărul natural nenul b) dacă există numărul natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Scriem $b \mid a$ și citim „b divide pe a” (sau $a \vdots b$ și citim „a e divizibil cu b”).

Proprietățile divizibilității în $\mathbb{N}$:

1. $\boldsymbol{a \mid a}$, pentru oricare număr natural a.

2. Dacă $\boldsymbol{a \mid b}$ și $\boldsymbol{b \mid c}$, atunci $\boldsymbol{a \mid c}$, unde a, b și c sunt numere naturale.

3. Dacă $\boldsymbol{a \mid b}$ și $\boldsymbol{a \mid c}$, atunci $\boldsymbol{a \mid (b + c)}$, unde a, b și c sunt numere naturale.

4. Dacă $\boldsymbol{a \mid b}$ și $\boldsymbol{a \mid c}$, atunci $\boldsymbol{a \mid (b - c)}$, unde a, b și c sunt numere naturale, $b \geq c$.

5. Dacă $\boldsymbol{a \mid b \cdot c}$ și $\boldsymbol{(a, b) = 1}$, atunci $\boldsymbol{a \mid c}$, unde a, b și c sunt numere naturale.

OBSERVAȚII

1. $1 \mid a$, pentru oricare număr natural a.
2. Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $a \mid b$ și $b \mid a$, atunci $a = b$.
3. Dacă $a \in \mathbb{N}$, $a \mid 1$, atunci $a = 1$.
4. Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, $a \mid b$, atunci $a \mid (k \cdot b)$ pentru oricare număr natural k.

Exerciții rezolvate

1. Stabilește dacă propozițiile sunt adevărate, fără a efectua operațiile:

a) $18 \mid (72 + 36)$;   b) $(34 + 16 \cdot 51) \vdots 17$.

Rezolvare:

a) Folosim proprietatea: $a \mid b$ și $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} 72 = 18 \cdot 4 \Rightarrow 18 \mid 72 \\ 36 = 18 \cdot 2 \Rightarrow 18 \mid 36 \end{array}\right\} \Rightarrow 18 \mid (72 + 36);$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 34 = 17 \cdot 2 \Rightarrow 17 \mid 34 \\ 51 = 17 \cdot 3 \Rightarrow 17 \mid 51 \Rightarrow 17 \mid 16 \cdot 51 \end{array}\right\} \Rightarrow 17 \mid (34 + 16 \cdot 51) \Rightarrow (34 + 16 \cdot 51) \vdots 17.$$

2. Determină elementele mulțimii A:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid (x + 6)\}$; b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid (3x + 8)\}$.

Rezolvare:

a) Folosim proprietatea: $a \mid b$ și $a \mid c \Rightarrow a \mid (b - c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}, b \geq c$.

$$\left.\begin{array}{r} x \mid x \\ x \mid (x+6) \end{array}\right\} \Rightarrow x \mid [(x+6) - x] \Rightarrow x \mid 6 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow A = \{1, 2, 3, 6\}.$$

b) Folosim proprietățile:

• $a \mid b$ și $a \mid c \Rightarrow a \mid (b - c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}, b \geq c$.

• $a, b \in \mathbb{N}, a \mid b \Rightarrow a \mid (k \cdot b)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{r} x \mid (3x+8) \\ x \mid x \Rightarrow x \mid 3x \end{array}\right\} \Rightarrow x \mid [(3x+8) - 3x] \Rightarrow x \mid 8 \Rightarrow x \in \{1, 2, 4, 8\} \Rightarrow A = \{1, 2, 4, 8\}.$$

3. Demonstrează că, dacă numerele naturale a și b verifică relația $7 \mid (3a + 4b)$, atunci $7 \mid (17a + 25b)$.

Rezolvare:

$17a + 25b = 14a + 3a + 21b + 4b = 14a + 21b + 3a + 4b = 7 \cdot (2a + 3b) + 3a + 4b$

$$\left.\begin{array}{r} 7 \mid (3a+4b) \\ 7 \mid 7 \cdot (2a+3b) \end{array}\right\} \Rightarrow 7 \mid [(3a+4b) + 7 \cdot (2a+3b)] \Rightarrow 7 \mid (17a + 25b)$$

4. Determină numerele naturale de forma $\overline{2x3y}$ divizibile cu 15.

Rezolvare:

$\overline{2x3y} \;\vdots\; 15 \Rightarrow \overline{2x3y} \;\vdots\; 5$ și $\overline{2x3y} \;\vdots\; 3$

$\overline{2x3y} \;\vdots\; 5 \Rightarrow y \in \{0, 5\}$

• $y = 0$ $\quad \overline{2x30} \;\vdots\; 3 \Rightarrow (2 + x + 3 + 0) \;\vdots\; 3 \Rightarrow (5 + x) \;\vdots\; 3 \Rightarrow x \in \{1, 4, 7\}$;

• $y = 5$ $\quad \overline{2x35} \;\vdots\; 3 \Rightarrow (2 + x + 3 + 5) \;\vdots\; 3 \Rightarrow (10 + x) \;\vdots\; 3 \Rightarrow x \in \{2, 5, 8\}$.

Numerele cerute sunt: 2 130, 2 430, 2 730, 2 235, 2 535 și 2 835.

5. Demonstrează că numerele $a = 7k + 10$ și $b = 5k + 7$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural k.

Rezolvare:

$$\text{Fie } d = (a, b) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} d \mid (7k+10) \Rightarrow d \mid 5 \cdot (7k+10) \Rightarrow d \mid (35k+50) \\ d \mid (5k+7) \Rightarrow d \mid 7 \cdot (5k+7) \Rightarrow d \mid (35k+49) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d \mid [(35k + 50) - (35k + 49)] \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Numerele $a = 7k + 10$ și $b = 5k + 7$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural k.

Aplic

1. Fără a efectua operațiile, arată că:

a) $12 \mid (72 + 36)$; c) $5 \mid (505 - 300)$; e) $11 \mid (22 \cdot 321)$; g) $9 \mid (108 + 306 \cdot 122)$.

b) $7 \mid (35 + 7 \cdot 111)$; d) $(48 + 16 \cdot 54) \;\vdots\; 16$; f) $(405 - 8 \cdot 54) \;\vdots\; 9$;

2. a) Determină numerele naturale de forma $\overline{aba}$ divizibile cu 15.

b) Determină numărul natural de forma $\overline{bab}$ divizibil cu 45.

c) Determină numărul natural de forma $\overline{a2a}$ divizibil cu 18.

d) Determină numerele naturale de forma $\overline{4x2y}$ divizibile cu 30.

3. a) Un număr natural nenul a este divizibil cu 24. Determină restul împărțirii numărului a la 8.

b) Un număr natural nenul a este divizibil cu 111. Determină restul împărțirii numărului a la 37.

c) Numărul natural a este divizibil cu 32, numărul natural b este divizibil cu 48 și $a > b$. Determină restul împărțirii numărului $(a - b)$ la 16.

4. Determină elementele mulțimilor A, B, C și D, unde $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid (x + 5)\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid (4x + 7)\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid (2x + 15)\}$, $D = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \mid (3n + 20)\}$.

5. a) Demonstrează că numărul $y = 5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ se divide cu 31, pentru oricare număr natural n.

b) Demonstrează că numărul $t = 3^{2n+3} - 9^{n+1} - 3^{2n+1}$ se divide cu 5, pentru oricare număr natural n.

6. Prin împărțirea numărului natural x la 45 se obține restul 30. Demonstrează că x este divizibil cu 15.

7. Fie y un număr natural cu proprietatea că, împărțit la 65, dă restul 26. Demonstrează că y este divizibil cu 13.

8. Demonstrează că, dacă un număr natural dă restul 21 prin împărțire la 28, atunci acesta este divizibil cu 7.

9. a) Demonstrează că, dacă $\overline{xy}$ este divizibil cu 8, atunci $2 \cdot x + y$ este divizibil cu 8. Probează afirmația prin trei exemple.

b) Demonstrează că, dacă $\overline{xyz}$ este divizibil cu 7, atunci $3 \cdot \overline{xy} + z$ este divizibil cu 7. Probează afirmația prin două exemple.

c) Demonstrează că, dacă $\overline{xyz}$ este divizibil cu 17, atunci $15 \cdot x + \overline{yz}$ este divizibil cu 17. Probează afirmația prin două exemple.

10. Determină valorile numărului natural n pentru care:

a) $\frac{n+6}{n} \in \mathbb{N}$; b) $\frac{n+24}{n} \in \mathbb{N}$; c) $\frac{5n+7}{n} \in \mathbb{N}$; d) $\frac{6n+9}{n} \in \mathbb{N}$; e) $\frac{8n+21}{n} \in \mathbb{N}$.

11. Demonstrează că numerele a și b sunt prime între ele.

a) $a = n$, $b = n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;
b) $a = 2n + 3$, $b = n + 2$, $n \in \mathbb{N}$;
c) $a = 5n + 16$, $b = n + 3$, $n \in \mathbb{N}$;
d) $a = 7n + 4$, $b = 5n + 3$, $n \in \mathbb{N}$;
e) $a = 2n + 3$, $b = 3n + 5$, $n \in \mathbb{N}$;
f) $a = 3n + 4$, $b = 4n + 5$, $n \in \mathbb{N}$.

Portofoliu

Rezolvă cerințele următoare pe o coală de hârtie și adaug-o la portofoliu.

Demonstrează, folosind proprietățile relației de divizibilitate:

1. Dacă $\overline{abc} \vdots 2$, atunci $c \vdots 2$.
2. Dacă $c \vdots 2$, atunci $\overline{abc} \vdots 2$.
3. Dacă $\overline{abc} \vdots 5$, atunci $c \vdots 5$.
4. Dacă $c \vdots 5$, atunci $\overline{abc} \vdots 5$.
5. Dacă $\overline{abc} \vdots 3$, atunci $(a + b + c) \vdots 3$.
6. Dacă $(a + b + c) \vdots 3$, atunci $\overline{abc} \vdots 3$.
7. Dacă $\overline{abc} \vdots 9$, atunci $(a + b + c) \vdots 9$.
8. Dacă $(a + b + c) \vdots 9$, atunci $\overline{abc} \vdots 9$.

Exerciții recapitulative

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 8\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ și $C = \{x \mid x = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$.

i) Scrie mulțimile A, B și C prin enumerarea elementelor.

ii) Completează casetele cu unul dintre simbolurile $\cup$, $\cap$, $\subset$, $\supset$, $\in$, $\notin$ pentru a obține propoziții adevărate:

a) A $\square$ B;	d) A $\square$ C = {1, 3, 9};	g) {0, 1, 2, 3} $\square$ B;
b) B $\square$ C;	e) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} $\square$ A;	h) A $\square$ C = B;
c) A $\square$ B = B;	f) 9 $\square$ A;	i) 9 $\square$ B $\cap$ C.

iii) Determină mulțimile $A \cap B$, $A \cup C$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \setminus A$.

2. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$;
c) $A \cap B = \{4, 8\}$;
b) $A \cap \{6, 10, 12\} = \varnothing$;
d) $\{0, 2\} \cap B = \varnothing$.

3. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x = 2n + 3, n \in \mathbb{N}, n < 13\}$, $B = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*, n < 13\}$, $C = \{x \mid x = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x \mid x$ e număr prim, $x < 20\}$. Determină card A, card B, card D, card $(A \cap B)$, card $(D \cap C)$, card $(A \cap B \cap C)$ și card $(A \setminus B)$.

4. Într-o școală sunt 245 de elevi. Dintre aceștia, 120 merg la cercul de matematică, 185 merg la cercul de lectură, iar 35 elevi nu merg la niciun cerc. Câți elevi din școală merg numai la cercul de lectură?

5. Descompune numerele x și y în produs de puteri de numere prime și calculează (x, y) și $[x, y]$.

a) $x = 28$ și $y = 35$;
b) $x = 81$ și $y = 108$;
c) $x = 225$ și $y = 375$.

6. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 21, 28 și 35, dă de fiecare dată restul 19 și câturi nenule.

7. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit la 48, dă restul 43, împărțit la 36 dă restul 31 și împărțit la 54 dă restul 49.

8. Vlad are mai multe paralelipipede dreptunghice identice, fiecare dintre acestea având dimensiunile 12 cm, 15 cm și, respectiv, 20 cm. Care este numărul minim de paralelipipede dreptunghice de acest fel cu care Vlad poate forma un cub? Calculează volumul acestui cub (în dm^3).

9. Prin împărțirea numerelor 212, 323 și 286 la numărul natural nenul n se obțin resturile 17, 11 și, respectiv, 13. Determină numărul n.

10. Determină numerele naturale a și b, $a < b$ pentru care:

a) $(a, b) = 30$ și $a + b = 330$;
c) $(a, b) = 13$ și $a + b = 52$;
b) $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 5\,040$;
d) $[a, b] = 420$ și $a \cdot b = 2\,940$.

11. Demonstrează că numerele a și b sunt prime între ele, pentru oricare număr natural k.

a) $a = 7k + 10$, $b = 5k + 7$;
b) $a = 3k + 1$, $b = 11k + 4$.

12. Determină elementele mulțimii A:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid (x + 13)\}$;
b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid (4x + 21)\}$.

13. Numerele naturale a, b și c verifică relațiile $11 \mid (5a + 7b + 4c)$ și $11 \mid (8a + 6b + 9c)$. Demonstrează că $11 \mid (a + b + c)$.

14. Determină numerele naturale de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{a7b} \vdots 6$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

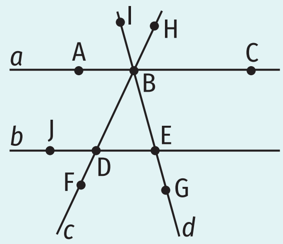


Figura 1

Pentru rezolvarea cerințelor de mai jos veți folosi figura 1.

A. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $a \cap b = \{A\}$;

b) $\{A, B, C\} \subset a$;

c) $\{E, C\} \subset b$;

d) $E \in b$;

e) $G \notin d$;

f) $\{I, B, E, G\} = d$;

g) $c \cap d = \{B\}$;

h) $B \in b$.

B. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) $a \cap c = \{...\}$;

b) $c \cap d = \{...\}$;

c) J ... c;

d) {J, E} ... b;

e) c ... {B, H, D};

f) $F \in ...$;

g) $\{G\} \subset ...$;

h) $\{D\} = ... \cap ...$.

Timp de lucru: 40 de minute **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I **60 puncte**

30 puncte	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*
(10 p.)	**A.** Fie A mulțimea cifrelor numărului 110 221. Cardinalul mulțimii A este: a) 6; b) 3; c) 1; d) 2.
(10 p.)	**B.** Dacă $x = (28, 35)$ și $y = [28, 35]$, atunci $y : x$ este egal cu: a) 940; b) 140; c) 7; d) 20.
(10 p.)	**C.** Dacă A = {1, 3, 8, 9} și B = {0, 2, 4, 6, 8}, atunci mulțimea A \ B este egală cu: a) {1, 3, 9}; b) {8}; c) {1, 2, 4, 6}; d) {1, 3}.
30 puncte	**2.** *Scrie pe foaie numai rezultatele.*
(10 p.)	**A.** Descompunerea în produs de puteri de numere prime a numărului 72 este ... .
(10 p.)	**B.** Cel mai mic număr natural care are exact 3 divizori este ... .
(10 p.)	**C.** Numerele naturale n care verifică relația $n \mid (2n + 16)$ sunt ... .

Subiectul al II-lea **30 puncte**

Scrie rezolvările complete.

10 puncte	**1.** Prin împărțirea numerelor 118, 178 și 148 la un număr natural nenul n se obține, de fiecare dată, restul 28. Determină numărul n.
10 puncte	**2.** Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile: **A.** A ∪ B = {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; **B.** A ∩ B = {0, 5, 7}; **C.** B \ A = {6, 8, 9}.
10 puncte	**3.** Determină numerele naturale de forma $\overline{xyxx}$ divizibile cu 6.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Pot să stabilesc relații între mulțimi și să efectuez operații cu mulțimi.					
Pot să determin c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două sau al mai multor numere naturale.					
Pot să aplic proprietățile divizibilității în ℕ pentru rezolvarea exercițiilor teoretice și practice.					

Unitatea 2

Rapoarte, proporţii

1. Rapoarte

Descopăr

În clasa a VI-a A sunt 24 elevi. Dintre aceștia, 6 sunt băieți.

a) De câte ori este mai mare numărul fetelor decât al băieților?

b) Cât la sută din numărul elevilor clasei a VI-a A sunt fete?

Învăț

Dacă a și b sunt numere raționale pozitive, atunci $\frac{a}{b}$ reprezintă raportul dintre numărul a și numărul b. În acest caz, numerele a și b reprezintă termenii raportului. Dacă $c = a : b$, atunci c se numește valoarea raportului.

EXEMPLU:

Raportul dintre numărul 18 și numărul 12 este $\frac{18}{12}$, termenii raportului sunt 18 și 12, iar valoarea raportului este 18 : 12 = 1,5.

OBSERVAȚII

1. Dacă a și b sunt două numere raționale pozitive distincte, atunci raportul dintre numărul a și numărul b este diferit de raportul dintre numărul b și numărul a, adică $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$.

   De exemplu, raportul dintre numărul 18 și numărul 12 este diferit de raportul dintre numărul 12 și numărul 18 $\left(\frac{18}{12} \neq \frac{12}{18}\right)$.

2. Valoarea unui raport nu se schimbă dacă ambii termeni ai raportului sunt înmulțiți/împărțiți cu același număr rațional pozitiv.

   Valoarea raportului $\frac{18}{12}$ este 1,5, iar valoarea raportului $\frac{18 : 6}{12 : 6}$ este tot 1,5.

În anumite cazuri, se înlocuiește raportul numerelor cu valoarea acestuia.

Un raport de forma $\frac{p}{100}$ (unde p este un număr rațional pozitiv sau $p = 0$) se numește raport procentual și se notează $p\%$ (se citește *„p la sută”* sau *„p procente”*).

EXEMPLU: 17% înseamnă $\frac{17}{100}$ și se citește „17 la sută” sau „17 procente”.

Aflarea unui procent dintr-un număr

Pentru a calcula $p\%$ din x efectuăm calculul $\frac{p}{100} \cdot x$.

De exemplu, pentru a calcula 20% din 80 efectuăm calculul $\frac{20}{100} \cdot 80 = \frac{1600}{100} = 16$.

În practică se folosesc diverse rapoarte ale anumitor mărimi fizice:

- Rapoarte ale mărimilor fizice de același fel: scara unei hărți, concentrația unei soluții, titlul unui aliaj etc.
- Rapoarte ale mărimilor fizice diferite: viteza, densitatea etc.

OBSERVAȚIE

Raportul a două mărimi exprimate cu aceeași unitate de măsură este raportul măsurilor lor.

Scara unei hărți este raportul dintre distanța măsurată pe hartă (desen) și distanța măsurată în teren (în realitate).

$$\text{Scara hărții} = \frac{\text{distanța măsurată pe hartă}}{\text{distanța măsurată în teren}}$$

EXEMPLU:

Scara unei hărți, realizată astfel încât unui segment cu lungimea de 1 cm îi corespunde în teren o distanță de 8 km, este $\frac{1\text{ cm}}{8\text{ km}} = \frac{1\text{ cm}}{800\,000\text{ cm}} = \frac{1}{800\,000}$.
Notăm, prin convenție, 1:800 000.

Concentrația unei soluții (c) este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

$$c = \frac{\text{masa substanței care se dizolvă}}{\text{masa soluției}} \text{ (se exprimă ca raport procentual)}$$

EXEMPLU:

Concentrația unui sirop preparat din 20 g de zahăr și 60 g de apă este $c = \frac{20}{20+60} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ (c = 25%).

Titlul unui aliaj (T) reprezintă raportul dintre masa metalului prețios (aur, platină, argint) și masa aliajului.

$$T = \frac{\text{masa metalului prețios}}{\text{masa aliajului}}$$

EXEMPLU:

Titlul unui aliaj ce conține 22 g aur și 228 g cupru este $\frac{22}{22+228} = \frac{22}{250} = 0{,}088$.

Viteza medie (v_m) a unui mobil reprezintă raportul dintre distanța parcursă (d) și durata mișcării (t). Se poate exprima în m/s (metri/secundă) sau km/h (kilometri/oră).

$$v_m = \frac{d}{t}$$

EXEMPLU:

Viteza de deplasare a unei persoane care parcurge 42 de metri în 28 de secunde este $v_m = \frac{42\text{ m}}{28\text{ s}} = 1{,}5$ m/s.

O **soluție** este un amestec omogen de două sau mai multe substanțe, una dintre acestea fiind de obicei lichidă.

ȘTIAȚI CĂ...?

Caratul este un indice pentru conținutul în aur al aliajelor acestuia.Cele mai cunoscute tipuri de carate la aur:

- *aur de 9k* – 9 din 24 de părți ale aliajului sunt aur. În țara noastră, bijuteriile cu mai puțin de 9 carate aur nu sunt recunoscute drept bijuterii de aur.
- *aur de 14k* – 14 din 24 de părți ale aliajului sunt aur. Este cel mai popular tip de aur.
- *aur de 18k* – 18 din 24 de părți ale aliajului sunt aur. Este tipul de aur cel mai frecvent utilizat pentru montarea pietrelor prețioase.
- *aur de 22k* – 22 din 24 de părți ale aliajului sunt aur. Este considerat prea moale pentru a fi utilizat în prelucrarea bijuteriilor.
- *aur de 24k* – aurul pur, cu puritate de 99,5 – 99,9%. Este cel sub forma căruia se comercializează lingourile de aur.

Aplic

1. Scrie raportul numerelor și calculează valoarea acestuia:

a) 4 și 8; b) 18 și 16; c) 201 și 200; d) 1 002 și 23; e) 3^2 și 2^3; f) $\frac{4}{5}$ și $\frac{8}{10}$; g) 2^{2022} și 2^{2021}.

2. Lungimea unui dreptunghi este egală cu 9 m, iar lățimea acestuia este egală cu 3 m. Care este valoarea raportului dintre lungime și lățime?

3. Lungimea unui dreptunghi este $\frac{5}{4}$ din lățime. Determină:

a) raportul dintre lungime și lățime;

b) raportul dintre dublul lățimii și lungime.

4. Raportul lungimilor laturilor a două pătrate este $\frac{4}{5}$. Determină raportul perimetrelor și raportul ariilor celor două pătrate.

5. Raportul lungimilor muchiilor a două cuburi este egal cu $\frac{1}{2}$. Care este valoarea raportului volumelor celor două cuburi?

6. Scrie sub forma p% rapoartele procentuale: $\frac{15}{100}$; $\frac{6}{100}$; $\frac{5}{100}$; $\frac{105}{100}$; $\frac{12,5}{100}$; $\frac{1,(3)}{100}$.

7. Scrie sub formă de rapoarte procentuale: 12%; 6%; 2,4%; 102%; 45%; 400%.

8. Calculează:

a) 7% din 300 kg; b) 25% din 12 m; c) 22% din 3 600 g; d) 60% din 120 lei.

9. Prețul unui televizor este 1 250 de lei. Determină prețul televizorului:

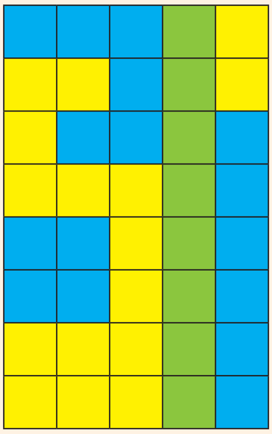
a) după o majorare cu 25%;

b) după o reducere cu 35%;

c) după o mărire cu 10% urmată de o micșorare cu 10%;

d) după două măriri consecutive cu 20%.

10. O sală de spectacol are 1 200 de locuri. La una dintre reprezentații au fost ocupate 98% dintre acestea. Câți spectatori au fost în sală?



11. Folosind figura alăturată calculează:

a) valoarea raportului dintre numărul pătrățelelor colorate cu verde și numărul pătrățelelor colorate cu albastru;

b) valoarea raportului dintre numărul pătrățelelor care nu sunt colorate cu verde și numărul total al pătrățelelor;

c) valoarea raportului dintre numărul pătrățelelor care nu sunt colorate cu galben și numărul pătrățelelor care nu sunt colorate cu albastru.

12. Într-o urnă sunt 60 de bile colorate în roșu, galben și albastru. 36 dintre bile nu sunt roșii, iar 45 de bile nu sunt albastre.

a) Calculează valoarea raportului dintre numărul bilelor roșii și numărul bilelor care nu sunt roșii.

b) Calculează valoarea raportului dintre numărul bilelor albastre și numărul bilelor din urnă.

c) Calculează $x + y + z$, unde x este valoarea raportului dintre numărul bilelor care nu sunt roșii și numărul bilelor din urnă, y este valoarea raportului dintre numărul bilelor care nu sunt albastre și numărul bilelor din urnă, iar z este valoarea raportului dintre numărul bilelor care nu sunt galbene și numărul bilelor din urnă.

INDICAȚIE:

Pentru a calcula numărul bilelor de fiecare culoare, folosește metoda figurativă.

13. Într-o urnă sunt 28 de bile colorate în roșu, galben și albastru. Bile roșii sunt de două ori mai multe decât cele galbene și cu 3 mai puține decât cele albastre.

a) Calculează valoarea raportului dintre numărul bilelor roșii și numărul bilelor galbene.

b) Calculează valoarea raportului dintre numărul bilelor albastre și numărul bilelor roșii.

c) Calculează valoarea raportului dintre x și y, unde x este raportul dintre numărul bilelor care nu sunt roșii și numărul bilelor din urnă, iar y este valoarea raportului dintre numărul bilelor care nu sunt albastre și numărul bilelor din urnă.

14. Fie $a = 1,(1) + 2,(2) + 3,(3)$; $b = 4,(4) + 5,(5)$ și $c = 3,(3) - 1,(1)$. Calculează $x + y + z$ și $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$, unde x este valoarea raportului dintre a și b, y este valoarea raportului dintre b și c, iar z este valoarea raportului dintre c și a.

15. Pe o hartă a României, realizată la scara 1:800 000, distanța dintre localitățile București și Suceava este un segment cu lungimea egală cu 55 cm.

a) Determină distanța pe teren dintre cele două localități.

b) În cât timp parcurge un automobil această distanță dacă se deplasează cu viteza de 75 km/h?

16. Scara unei hărți este 1:500 000. Calculează distanța (în km) dintre două localități, știind că pe hartă aceasta este egală cu 12 cm.

17. O machetă ce reprezintă Palatul Parlamentului, realizată la scara 1:500, are înălțimea egală cu 16,8 cm. Ce înălțime (în m) are Palatul Parlamentului?

18. Determină scara unei hărți știind că distanța de 75 km din teren este reprezentată pe hartă de un segment cu lungimea egală cu 2,5 cm.

19. În 420 g de apă distilată s-au dizolvat 60 g de sare. Care este concentrația soluției obținute?

20. Dacă dizolvăm 30 g de sare în 220 g de apă, care va fi concentrația soluției obținute?

21. Se topesc 315 g de aur și 45 g de aramă (cupru). Care este titlul aliajului obținut?

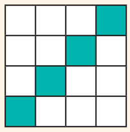
22. Care este titlul aliajului produs din 600 g de platină și 200 g de aramă?

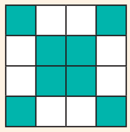
INDICAȚIE:

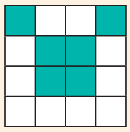
b) Calculează câți km parcurge automobilul într-un minut folosind metoda reducerii la unitate.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Exprimați, folosind rapoarte procentuale, raportul dintre suprafața colorată cu verde și suprafața totală:

a) 

b) 

c) 

Proiect

Ce vei face:

Pe o coală de hârtie, vei realiza o schiță a locuinței tale la scara 1:150.

De ce vei face:

Pentru a măsura lungimi ale unor obiecte din realitatea înconjurătoare (utilizând instrumente de măsurare adecvate), pentru a construi figuri geometrice cu dimensiuni date și pentru a realiza o schiță la o anumită scară.

Cum vei face:

- Identifică figurile geometrice învățate prin care poți reprezenta camerele locuinței.
- Măsoară, cu un instrument de măsură adecvat, dimensiunile podelei și notează aceste dimensiuni (în centimetri) într-un tabel.
- Completează în tabelul realizat anterior dimensiunile figurilor geometrice prin care vei reprezenta camerele locuinței în schița ta.
- Documentează-te despre modul în care se reprezintă ferestrele și ușile în schița unei încăperi.

Cum vei ști dacă ai reușit:

Prezintă în clasă proiectul tău și află de la profesor și de la colegi ce le-a plăcut și ce recomandări au.

2. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție

Descopăr

Radu și Mircea au primit salariul pentru luna precedentă. Mircea afirmă că la un salariu brut de 5 400 de lei a plătit un impozit de 540 de lei, iar Radu afirmă că la un salariu brut de 6 300 de lei a plătit un impozit de 630 de lei.

a) Care este raportul dintre impozitul reținut și salariul brut pentru Mircea? Dar pentru Radu?

b) Compară valorile celor două rapoarte aflate la punctul a).

Învăț

Pentru a reține mai ușor denumirea termenilor dintr-o proporție putem scrie astfel proporția:

extremi

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a : b = c : d.$

mezi

Pentru a scrie relația de mai sus, folosim semnul „⇔" și citim „echivalent cu" sau „dacă și numai dacă".

Egalitatea a două rapoarte se numește proporție.

Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde *a, b, c* și *d* sunt numere raționale pozitive. Numerele *a, b, c* și *d* se numesc termenii proporției. Termenii *a* și *d* se numesc extremi, iar termenii *b* și *c* se numesc mezi.

EXEMPLU:

$\frac{11}{2} = \frac{22}{4}$ reprezintă o proporție.

Termenii proporției $\frac{11}{2} = \frac{22}{4}$ sunt: 11, 2, 22 și 4. Extremii sunt 11 și 4, iar mezii sunt 2 și 22.

Produsul extremilor proporției $\frac{11}{2} = \frac{22}{4}$ este $11 \cdot 4 = 44$, iar produsul mezilor acesteia este $2 \cdot 22 = 44$. Așadar, produsul extremilor proporției $\frac{11}{2} = \frac{22}{4}$ este egal cu produsul mezilor acesteia.

Proprietatea fundamentală a proporției

În orice proporție, produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde *a, b, c* și *d* sunt numere raționale pozitive, atunci $a \cdot d = b \cdot c$.

Într-adevăr, dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $a : b = c : d = k$, unde k este un număr rațional pozitiv.

$$\left.\begin{aligned} a : b = k \Rightarrow a = k \cdot b \Rightarrow a \cdot d = (k \cdot b) \cdot d = k \cdot b \cdot d \\ c : d = k \Rightarrow c = k \cdot d \Rightarrow b \cdot c = b \cdot (k \cdot d) = k \cdot b \cdot d \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci $a = (b \cdot c) : d$, de unde rezultă $a = \frac{b \cdot c}{d}$.

Obținem $\frac{a}{b} = \frac{\frac{b \cdot c}{d}}{b} = \frac{b \cdot c}{d} : b = \frac{b \cdot c}{d} \cdot \frac{1}{b} = \frac{c}{d}$

Aceste rezultate pot fi formulate astfel:

Fie a, b, c și d numere raționale pozitive.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă și numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție

Fie proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde a, b, c și d sunt numere raționale pozitive.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b \cdot c}{d} \\ d = \frac{b \cdot c}{a} \\ b = \frac{a \cdot d}{c} \\ c = \frac{a \cdot d}{b} \end{cases}$$

un mez = $\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}$

un extrem = $\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}$

EXEMPLE:

1. $\frac{a}{12} = \frac{5}{15} \Leftrightarrow a \cdot 15 = 12 \cdot 5 \Leftrightarrow a = \frac{12 \cdot 5}{15} \Leftrightarrow a = 4$;
2. $\frac{3}{7} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow 3 \cdot x = 7 \cdot 12 \Leftrightarrow x = \frac{7 \cdot 12}{3} \Leftrightarrow x = 28$;
3. $\frac{4}{y} = \frac{5}{15} \Leftrightarrow 4 \cdot 15 = y \cdot 5 \Leftrightarrow y = \frac{4 \cdot 15}{5} \Leftrightarrow y = 12$;
4. $\frac{4}{20} = \frac{z}{15} \Leftrightarrow 4 \cdot 15 = 20 \cdot z \Leftrightarrow z = \frac{4 \cdot 15}{20} \Leftrightarrow z = 3$.

Exerciții rezolvate

1. Verifică dacă următoarele perechi de rapoarte pot forma proporții:

a) $\frac{10}{4}$ și $\frac{15}{6}$; b) $\frac{11}{2}$ și $\frac{16}{3}$.

Rezolvare:

a) $\left.\begin{array}{l} 10 \cdot 6 = 60 \\ 4 \cdot 15 = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{15}{6}$; b) $\left.\begin{array}{l} 11 \cdot 3 = 33 \\ 2 \cdot 16 = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{11}{2} \neq \frac{16}{3}$.

2. Scrie o proporție ai cărei termeni să fie 4, 5, 12 și 15.

Rezolvare:

Știm că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă și numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$. Trebuie, așadar, să găsim perechile de numere care au același produs.

Cum $4 \cdot 15 = 5 \cdot 12$ și înmulțirea numerelor raționale este comutativă, putem forma proporțiile: $\frac{4}{12} = \frac{5}{15}$, $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$, $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Aplic

1. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $\frac{7}{3} = \frac{28}{12}$; ☐
b) $\frac{21}{5} = \frac{80}{20}$; ☐
c) $\frac{17}{32} = \frac{34}{64}$; ☐
d) $\frac{2{,}5}{7} = \frac{1{,}25}{3{,}5}$; ☐
e) $\frac{25}{35} = \frac{6{,}25}{8{,}75}$; ☐
f) $\frac{1{,}02}{3{,}42} = \frac{8{,}16}{27{,}36}$; ☐
g) $\frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{\frac{7}{15}}{7}$; ☐
h) $\frac{101^0}{3} = \frac{0^{101}}{3}$; ☐
i) $\frac{3^{102}}{6^{50}} = \frac{6^{52}}{2^{102}}$. ☐

2. Scrie cel puțin două proporții distincte ai căror termeni să fie numerele:

a) 3; 6; 13; 26;
b) 2; 14; 7; 4;
c) 2; 6; 1,5; 4,5;
d) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{14}{15}$;
e) 2^{100}; 2^{50}; 6^{100}; $3^{50} \cdot 6^{50}$.

ȘTIAȚI CĂ...?

- Cuvântul egal provine din limba latină *æqualis, aequus* = *deopotrivă, egal*.
- Simbolul „=", utilizat în matematică pentru egalitate, a fost folosit pentru prima dată în anul 1557 de către matematicianul galez Robert Recorde în „The Whetstone of Witte". Acesta explică simbolul său ca fiind *gemowe lines* (linii gemene). În forma originală a simbolului, cele două linii paralele erau mult mai lungi decât în forma actuală.
- Simbolul „=" nu a fost utilizat imediat pe scară largă, ajungându-se la acest lucru abia după anul 1700.

3. Completează spațiile libere cu numere raționale pozitive pentru a obține proporții:

a) $\frac{\ldots}{9} = \frac{4}{12}$; c) $\frac{25}{4} = \frac{50}{\ldots}$; e) $\frac{6^5}{\ldots} = \frac{15^5}{5^5}$; g) $\frac{111}{555} = \frac{\ldots}{666}$;

b) $\frac{33}{22} = \frac{\ldots}{8}$; d) $\frac{16}{\ldots} = \frac{12}{3}$; f) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{25}{3}} = \frac{\frac{2}{5}}{\ldots}$; h) $\frac{0,5}{6,5} = \frac{\ldots}{13}$.

4. Determină numărul natural $\overline{xy}$, știind că 12, 15, 18, $\overline{xy}$ sunt termenii unei proporții.

5. Determină numărul rațional pozitiv x din proporțiile:

a) $\frac{24}{10} = \frac{12}{x}$; d) $\frac{x}{48 - 6 \cdot 7} = \frac{32 : 4}{2^3}$; g) $\frac{1,2}{x} = \frac{3,6}{12}$; j) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{1}{28}}$;

b) $\frac{9}{99} = \frac{x}{33}$; e) $\frac{2 \cdot 3,5}{7 : 2} = \frac{x}{10}$; h) $\frac{0,25}{0,5} = \frac{0,04}{x}$; k) $\frac{2^{10} + 2^{10}}{32} = \frac{x}{1^{100} + 100^0}$;

c) $\frac{32}{2^6} = \frac{15}{x}$; f) $\frac{x}{0,1} = \frac{1}{0,01}$; i) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{x}$; l) $\frac{3^{2023}}{x} = \frac{15^{2022}}{5^{2022}}$.

6. Raportul dintre prețul unui caiet și prețul unei cărți este $\frac{2}{15}$. Determină prețul caietului, știind că prețul cărții este de 30 de lei.

7. Raportul dintre înălțimea lui Vasile și înălțimea Mariei este $\frac{13}{11}$. Ce înălțime are Maria, dacă înălțimea lui Vasile este 182 cm?

8. Raportul a două numere naturale este $\frac{3}{7}$, iar cel mai mic dintre ele este 15. Care este celălalt număr?

9. Raportul a două numere naturale este $\frac{5}{13}$, iar cel mai mare dintre ele este 52. Determină celălalt număr.

10. Raportul a două numere raționale pozitive este $\frac{4}{3}$, iar unul dintre ele este 16. Determină celălalt număr.

11. Calculează $x \cdot y - 10$, știind că $\frac{3}{x} = \frac{y}{5}$.

12. Calculează $x \cdot y$, $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$ și $\frac{x \cdot y + 1}{5 - x \cdot y}$, știind că $\frac{x}{0,25} = \frac{16}{y}$.

13. Demonstrează că $x = 120 + \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ este pătratul unui număr natural știind că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde a, b, c și d sunt numere raționale pozitive.

14. Determină numerele naturale de două cifre cu proprietatea că raportul dintre diferența și suma cifrelor fiecăruia dintre ele este $\frac{1}{3}$.

15. O bijuterie este confecționată din 12 g aliaj de aur cu titlul 0,750. Ce cantitate de aur pur conține bijuteria?

16. Titlul unui aliaj de argint și cositor este 0,875. Ce cantitate de argint este într-o bucată de aliaj de 12 kilograme?

3. Proporții derivate

Descopăr

Se consideră proporția $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$. Verifică dacă se obține o proporție în fiecare dintre situațiile:

a) se schimbă mezii între ei;

b) se schimbă extremii între ei;

c) se răstoarnă rapoartele;

d) se înmulțesc ambii termeni ai unuia dintre rapoarte cu același număr nenul;

e) se împart ambii termeni ai unuia dintre rapoarte la același număr nenul;

f) se înmulțesc numărătorii rapoartelor cu același număr nenul;

g) se împart numitorii rapoartelor la același număr nenul.

Învăț

Orice proporție obținută dintr-o altă proporție se numește proporție derivată.

Proporțiile derivate pot fi:

- Proporții derivate cu aceiași termeni:

Proporția inițială		
Proporția inițială $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde a, b, c, d sunt numere raționale pozitive	schimbăm extremii între ei	$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
	schimbăm mezii între ei	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
	răsturnăm rapoartele	$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

- Proporții derivate cu alți termeni:

Proporția inițială		
Proporția inițială $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde a, b, c, d sunt numere raționale pozitive	înmulțim/împărțim ambii termeni ai unui raport cu un număr rațional pozitiv p	$\frac{a \cdot p}{b \cdot p} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c \cdot p}{d \cdot p}$ $\frac{a : p}{b : p} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c : p}{d : p}$
	înmulțim/împărțim ambii numărători/numitori cu un număr rațional pozitiv p	$\frac{a \cdot p}{b} = \frac{c \cdot p}{d}$, $\frac{a}{b \cdot p} = \frac{c}{d \cdot p}$ $\frac{a : p}{b} = \frac{c : p}{d}$, $\frac{a}{b : p} = \frac{c}{d : p}$
	adunăm/scădem numitorii la/din numărători	$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ $(a > b, c > d)$
	adunăm/scădem numărătorii la/din numitori	$\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$, $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$ $(b > a, d > c)$

EXEMPLE:

1. Proporțiile derivate cu aceiași termeni obținute din proporția $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$ sunt:

- $\frac{21}{7} = \frac{9}{3}$ (am schimbat extremii între ei);
- $\frac{3}{9} = \frac{7}{21}$ (am schimbat mezii între ei);
- $\frac{7}{3} = \frac{21}{9}$ (am răsturnat rapoartele).

2. Proporții derivate cu alți termeni obținute din proporția $\frac{15}{6} = \frac{20}{8}$:

$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{6 \cdot 7} = \frac{20}{8 \cdot 7} \Leftrightarrow \frac{15}{42} = \frac{20}{56}$;

$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{15 : 5}{6} = \frac{20 : 5}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$;

$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{15 \cdot 9}{6 \cdot 9} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{135}{54} = \frac{20}{8}$;

$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{6} = \frac{20 : 4}{8 : 4} \Leftrightarrow \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$.

$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{15 + 6}{6} = \frac{20 + 8}{8} \Leftrightarrow \frac{21}{6} = \frac{28}{8}$;

$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{15 - 6}{6} = \frac{20 - 8}{8} \Leftrightarrow \frac{9}{6} = \frac{12}{8}$;

$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{6 + 15} = \frac{20}{8 + 20} \Leftrightarrow \frac{15}{21} = \frac{20}{28}$.

OBSERVAȚIE

Putem obține proporții derivate schimbând în același fel fiecare raport. De exemplu, din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (a, b, c și d sunt numere raționale pozitive) obținem proporția $\frac{p \cdot a + m \cdot b}{n \cdot b} = \frac{p \cdot c + m \cdot d}{n \cdot d}$, unde m, n și p sunt numere raționale pozitive.

Exerciții rezolvate

1. Determină raportul $\frac{x}{y}$, știind că $x, y \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{2x + y}{y} = \frac{19}{11}$.

Rezolvare:

Metoda I. Folosim proporții derivate:

$$\frac{2x + y}{y} = \frac{19}{11} \Rightarrow \frac{(2x + y) - y}{y} = \frac{19 - 11}{11} \Rightarrow \frac{2x}{y} = \frac{8}{11} \Rightarrow \frac{(2x) : 2}{y} = \frac{8 : 2}{11} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{11}.$$

Metoda II. Folosim proprietatea fundamentală a proporției:

$$\frac{2x + y}{y} = \frac{19}{11} \Rightarrow 11 \cdot (2x + y) = 19 \cdot y \Rightarrow 22x + 11y = 19y \Rightarrow 22x = 8y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{8}{22} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{11}.$$

2. Scrie o proporție derivată obținută din proporția $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, care să aibă un termen egal cu 17.

Rezolvare:

Observăm că $17 = 3 \cdot 5 + 2$.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \Rightarrow \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{6}{3 \cdot 15} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{6}{45} \Rightarrow \frac{2}{15 + 2} = \frac{6}{45 + 6} \Rightarrow \frac{2}{17} = \frac{6}{51}.$$

3. Determină numărul rațional pozitiv x, știind că:

a) $\frac{x + 7}{x} = \frac{9}{4}$; b) $\frac{x}{8} = \frac{x + 3}{15}$.

Rezolvare:

a) $\frac{x + 7}{x} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{x + 7 - x}{x} = \frac{9 - 4}{4} \Rightarrow \frac{7}{x} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 4}{5} \Rightarrow x = \frac{28}{5}$.

b) $\frac{x}{8} = \frac{x + 3}{15} \Rightarrow \frac{x}{x + 3} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{x}{x + 3 - x} = \frac{8}{15 - 8} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{8}{7} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{7} \Rightarrow x = \frac{24}{7}$.

4. Se dă proporția $\frac{y}{x} = \frac{7}{5}$. Determină numerele raționale pozitive x și y, știind că:

a) $x + y = 24$; b) $3x + 5y = 25$.

Rezolvare:

a) $\frac{y}{x} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{y+x}{x} = \frac{7+5}{5} \Rightarrow \frac{24}{x} = \frac{12}{5} \Rightarrow x = \frac{24 \cdot 5}{12} \Rightarrow x = 10$

$\frac{y}{10} = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{10 \cdot 7}{5} \Rightarrow y = 14$

b) $\frac{y}{x} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{y}{3 \cdot x} = \frac{7}{3 \cdot 5} \Rightarrow \frac{y}{3x} = \frac{7}{15} \Rightarrow \frac{5 \cdot y}{3x} = \frac{5 \cdot 7}{15} \Rightarrow \frac{5y}{3x} = \frac{35}{15} \Rightarrow$

$\frac{5y + 3x}{3x} = \frac{35 + 15}{15} \Rightarrow \frac{25}{3x} = \frac{50}{15} \Rightarrow \frac{25}{3x : 3} = \frac{50}{15 : 3} \Rightarrow \frac{25}{x} = \frac{50}{5} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 5}{50} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$;

$\frac{y}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{\frac{5}{2} \cdot 7}{5} \Rightarrow y = \frac{\frac{35}{2}}{5} \Rightarrow y = \frac{35}{2} : 5 \Rightarrow y = \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{2}$.

5. Determină raportul $\frac{7x - 4y}{3y}$, știind că $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$.

Rezolvare:

$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{7x}{y} = \frac{7 \cdot 5}{3} \Rightarrow \frac{7x}{y} = \frac{35}{3} \Rightarrow \frac{7x}{4y} = \frac{35}{4 \cdot 3} \Rightarrow \frac{7x}{4y} = \frac{35}{12} \Rightarrow$

$\frac{7x - 4y}{4y} = \frac{35 - 12}{12} \Rightarrow \frac{7x - 4y}{4y} = \frac{23}{12} \Rightarrow \frac{7x - 4y}{4y : 4} = \frac{23}{12 : 4} \Rightarrow \frac{7x - 4y}{y} = \frac{23}{3} \Rightarrow$

$\frac{7x - 4y}{3y} = \frac{23}{3 \cdot 3} \Rightarrow \frac{7x - 4y}{3y} = \frac{23}{9}$.

Aplic

1. Scrie proporțiile derivate cu aceiași termeni obținute din proporțiile:

a) $\frac{15}{7} = \frac{30}{14}$; b) $\frac{2}{19} = \frac{6}{57}$; c) $\frac{8}{5} = \frac{24}{15}$; d) $\frac{6}{1} = \frac{36}{6}$; e) $\frac{25}{5} = \frac{5}{1}$.

2. Completează spațiile libere pentru a obține proporții derivate din proporția $\frac{a}{b} = \frac{9}{17}$.

a) $\frac{3a}{b} = \frac{\dots}{\dots}$; c) $\frac{2a}{7b} = \frac{\dots}{\dots}$; e) $\frac{a}{b-a} = \frac{\dots}{\dots}$;

b) $\frac{a}{5b} = \frac{\dots}{\dots}$; d) $\frac{a}{a+b} = \frac{\dots}{\dots}$; f) $\frac{a+b}{b-a} = \frac{\dots}{\dots}$.

3. Scrie proporțiile derivate din proporția $\frac{11}{3} = \frac{22}{6}$, obținute prin:

a) înmulțirea numitorilor cu 7;
b) împărțirea numărătorilor la 11;
c) înmulțirea termenilor primului raport cu 9;
d) împărțirea termenilor celui de-al doilea raport la 2;
e) adunarea numitorilor la numărători;
f) scăderea numitorilor din numărători;

4. a) Scrie o proporție derivată din $\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$ care să aibă un termen egal cu 16.

b) Scrie o proporție derivată din $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$ care să aibă un termen egal cu 8.

c) Scrie o proporție derivată din $\frac{21}{15} = \frac{7}{5}$ care să aibă un termen egal cu 24.

5. Dacă $\frac{x}{y} = \frac{11}{5}$, folosind proporțiile derivate, determină rapoartele:

a) $\frac{2x}{y}$; b) $\frac{x}{5y}$; c) $\frac{x+y}{y}$; d) $\frac{x-y}{y}$; e) $\frac{3x+y}{x-y}$; f) $\frac{x}{3x+2y}$.

6. Determină valoarea raportului $\frac{5x - y}{x + y}$, știind că raportul numerelor raționale pozitive x și y este $\frac{1}{3}$.

7. Știind că $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$, determină rapoartele:

a) $\frac{a + b}{2a}$; b) $\frac{a - b}{4b}$; c) $\frac{2a + 3b}{5b}$; d) $\frac{3a + b}{a - b}$; e) $\frac{3a - 2b}{5a + 4b}$; f) $\frac{5a + b}{4b}$.

8. Raportul a două numere naturale este $\frac{11}{7}$. Determină raportul dintre suma și diferența lor.

9. Raportul a două numere naturale este $\frac{13}{17}$. Determină raportul dintre triplul numărului mai mic și dublul numărului mai mare.

10. Aura a cumpărat o carte și un caiet pentru care a plătit 38 de lei. Determină prețul fiecăruia dintre cele două produse, știind că raportul dintre prețul caietului și prețul cărții este $\frac{3}{16}$.

11. Într-o clasă cu 30 de elevi, raportul dintre numărul elevilor care vorbesc fluent limba franceză și numărul elevilor care vorbesc fluent limba engleză este $\frac{7}{8}$, iar fiecare elev vorbește fluent numai una dintre cele două limbi. Câți elevi vorbesc fluent limba engleză?

12. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Determină raportul $\frac{m}{n}$, știind că:

a) $\frac{2m + n}{m + n} = \frac{8}{5}$; b) $\frac{5m}{m + n} = \frac{10}{7}$; c) $\frac{m}{10m - n} = \frac{2}{13}$; d) $\frac{2m + 5n}{4m - n} = \frac{5}{3}$.

13. Folosind proporții derivate, determină numărul rațional pozitiv x.

a) $\frac{x + 5}{x} = \frac{8}{3}$; b) $\frac{x}{x + 2} = \frac{7}{9}$; c) $\frac{x}{13} = \frac{x + 4}{29}$; d) $\frac{13}{x + 1} = \frac{12}{x}$.

14. Se dă proporția $\frac{y}{x} = \frac{7}{5}$. Determină numerele raționale pozitive x și y, știind că:

a) $x + y = 6$; b) $y - x = 6$; c) $2x + 3y = 62$.

15. Se dă proporția $\frac{32}{y} = \frac{40}{x}$. Determină numerele raționale pozitive x și y, știind că:

a) $x + y = 9$; b) $x - y = 3$; c) $x + 3y = 34$.

16. Ce cantitate de sare trebuie să adăugăm în 680 grame de apă distilată pentru a obține o soluție cu concentrația 15%?

Portofoliu

Rezolvă cerințele următoare pe o coală de hârtie și adaug-o la portofoliu.

1. Folosind numerele naturale nenule mai mici sau egale decât 20, formează mulțimi cu patru elemente, astfel încât cu cele patru elemente să poți forma proporții.
2. Scrie cât mai multe proporții, folosind mulțimile scrise la punctul 1.
3. Alege o proporție dintre cele scrise la punctul 2 și scrie 10 proporții derivate obținute din aceasta.

4. Șir de rapoarte egale

Descopăr

În tabelul de mai jos sunt înregistrate date privind achiziția de lapte dintr-o grădiniță pe parcursul unei săptămâni. Tabelul a fost pătat cu acuarele și nu se mai pot vedea unele date.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Total
Prețul (lei)	137,50	165,00	176	132		
Cantitatea (litri)	25	30	32		20	

1. Determină valoarea raportului dintre preț și cantitate pentru fiecare dintre zilele luni, marți și miercuri. Ce observi?

Știind că valoarea raportului dintre preț și cantitate este aceeași în fiecare zi, rezolvă sarcinile următoare:

2. Completează tabelul cu cantitatea de lapte care a fost achiziționată joi.

3. Completează tabelul cu prețul laptelui achiziționat vineri.

4. Determină cantitatea totală de lapte care a fost achiziționată și suma de bani care trebuie plătită.

5. Determină valoarea raportului dintre prețul total și întreaga cantitate de lapte. Cum este acesta față de valoarea raportului determinată la punctul 1?

Învăț

Trei sau mai multe rapoarte care au aceeași valoare formează un șir de rapoarte egale.

EXEMPLU:

$$\frac{15}{6} = 2{,}5;\ \frac{5}{2} = 2{,}5;\ \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5;\ \frac{17{,}5}{7} = 2{,}5 \Rightarrow \underbrace{\frac{15}{6} = \frac{5}{2} = \frac{12{,}5}{5} = \frac{17{,}5}{7}}_{\text{șir de rapoarte egale}}.$$

Așadar, dacă $\frac{a_1}{b_1} = k, \frac{a_2}{b_2} = k, \frac{a_3}{b_3} = k, ..., \frac{a_n}{b_n} = k$ ($a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, k$ sunt numere raționale pozitive), atunci cu aceste rapoarte se poate forma șirul de rapoarte egale $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

OBSERVAȚII

1. Oricare două rapoarte dintr-un șir de rapoarte egale formează o proporție.

EXEMPLU:

$\frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \frac{24}{32} \Rightarrow \frac{15}{20} = \frac{75}{100}, \frac{6}{8} = \frac{75}{100}, \frac{6}{8} = \frac{24}{32}$ sunt proporții.

2. Într-un șir de rapoarte egale, dacă înmulțim sau împărțim cu același număr nenul toți numărătorii sau numitorii, obținem tot un șir de rapoarte egale.

EXEMPLE:

$$\frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \frac{24}{32} \Rightarrow \frac{15}{20:4} = \frac{6}{8:4} = \frac{75}{100:4} = \frac{24}{32:4} \Rightarrow \frac{15}{5} = \frac{6}{2} = \frac{75}{25} = \frac{24}{8};$$

$$\frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \frac{24}{32} \Rightarrow \frac{15 \cdot 5}{20} = \frac{6 \cdot 5}{8} = \frac{75 \cdot 5}{100} = \frac{24 \cdot 5}{32} \Rightarrow \frac{75}{20} = \frac{30}{8} = \frac{375}{100} = \frac{120}{32}.$$

3. Dacă înmulțim sau împărțim ambii termeni ai unui raport sau ai mai multor rapoarte ale unui șir de rapoarte egale cu numere nenule, obținem tot un șir de rapoarte egale.

EXEMPLU:

Fie șirul de rapoarte egale $\frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \frac{24}{32}$. Dacă înmulțim termenii primului raport cu 4, termenii celui de-al doilea raport cu 5, iar termenii celui de-al treilea raport îi împărțim la 25, obținem șirul de rapoarte egale $\frac{60}{80} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = \frac{24}{32}$.

Proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale

În orice șir de rapoarte egale, raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor este egal cu fiecare dintre rapoartele șirului dat.

Dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, atunci $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt numere raționale pozitive.

Dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$ (k e număr rațional pozitiv), atunci:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{b_1} = k \Rightarrow a_1 = k \cdot b_1 \\ \frac{a_2}{b_2} = k \Rightarrow a_2 = k \cdot b_2 \\ \frac{a_3}{b_3} = k \Rightarrow a_3 = k \cdot b_3 \\ \quad \ldots \\ \frac{a_n}{b_n} = k \Rightarrow a_n = k \cdot b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{k \cdot b_1 + k \cdot b_2 + k \cdot b_3 + \ldots + k \cdot b_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{k \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = k.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k \\ \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}$$

EXEMPLU:

$\frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \frac{24}{32} = \frac{15 + 6 + 75 + 24}{20 + 8 + 100 + 32} \Rightarrow \frac{15}{20} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \frac{24}{32} = \frac{120}{160}$.

Exerciții rezolvate

1. Determină numerele raționale pozitive x, y și z, știind că $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9}$ și $x + y + z = 68$.

Rezolvare:

Folosim proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale:

$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} = \frac{x + y + z}{3 + 5 + 9} = \frac{68}{17} = 4 \Rightarrow \frac{x}{3} = 4 \Rightarrow x = 3 \cdot 4 \Rightarrow x = 12.$

Analog, obținem $y = 20$ și $z = 36$.

2. Determină numerele naturale a, b și c, știind că $\frac{a}{3} = \frac{b}{7}$, $\frac{a}{9} = \frac{c}{5}$ și $a + b + c = 245$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{a}{3} = \frac{b}{7} \Rightarrow \frac{a}{3 \cdot 3} = \frac{b}{7 \cdot 3} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{b}{21} \\ \frac{a}{9} = \frac{c}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{b}{21} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{b}{21} = \frac{c}{5} = \frac{a + b + c}{9 + 21 + 5} = \frac{245}{35} = 7$$

$\frac{a}{9} = 7 \Rightarrow a = 7 \cdot 9 = 63$, $\frac{b}{21} = 7 \Rightarrow b = 21 \cdot 7 = 147$, $\frac{c}{5} = 7 \Rightarrow c = 7 \cdot 5 = 35$.

3. Determină numerele naturale x, y și z, știind că $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$ și $2x + 3y + 4z = 138$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{5} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot 5} = \frac{2x}{10} \\ \frac{y}{4} = \frac{3 \cdot y}{3 \cdot 4} = \frac{3y}{12} \\ \frac{z}{6} = \frac{4 \cdot z}{4 \cdot 6} = \frac{4z}{24} \\ \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x}{10} = \frac{3y}{12} = \frac{4z}{24} \Rightarrow \frac{2x}{10} = \frac{3y}{12} = \frac{4z}{24} = \frac{2x + 3y + 4z}{10 + 12 + 24} = \frac{138}{46} = 3$$

$$\frac{x}{5} = 3 \Rightarrow x = 5 \cdot 3 = 15, \ \frac{y}{4} = 3 \Rightarrow y = 4 \cdot 3 = 12, \ \frac{z}{6} = 3 \Rightarrow z = 6 \cdot 3 = 18.$$

Aplic

1. Verifică dacă rapoartele $\frac{7}{2}, \frac{28}{8}, \frac{35}{10}, \frac{14}{4}, \frac{42}{12}$ pot forma un șir de rapoarte egale.

2. Determină numerele naturale a și b, știind că $\frac{3}{a} = \frac{b}{21} = \frac{4}{12}$.

3. Pentru prepararea prăjiturii Tiramisu se folosesc: 400 g de pișcoturi, 600 g de brânză dulce/mascarpone, 6 gălbenușuri, 200 g de zahăr, 300 g de frișcă, 4 ceșcuțe de cafea și 2 lingurițe de cacao. Ce cantitate din fiecare ingredient trebuie adăugată, dacă se face prăjitura după aceeași rețetă și se folosesc 450 g de frișcă?

4. Mortarul este un amestec de var, nisip, ciment și apă. Pentru a efectua zidăria unei case, Robert prepară în betonieră mortar din 16 kg de var, 48 kg de nisip, 8 kg de ciment și 16 l de apă. Pentru că nu este suficientă cantitatea pregătită, el prepară o a doua cantitate folosind 24 l de apă. Care vor fi cantitățile de var, nisip și ciment folosite pentru prepararea celei de a doua cantități dacă folosește aceeași rețetă?

5. Determină termenii necunoscuți din șirurile de rapoarte egale:

a) $\frac{x}{3} = \frac{6}{y} = \frac{10}{15} = \frac{14}{z}$; c) $\frac{1}{1,(3)} = \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{6,6}{c}$;

b) $\frac{2}{m} = \frac{n}{2,5} = \frac{p}{10} = \frac{0,5}{1,25}$; d) $\frac{7}{2} = \frac{3,5}{r} = \frac{10,5}{s} = \frac{t}{0,(6)}$.

6. Calculează $\frac{x + z}{y + t}$, știind că $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = \frac{t}{5} = 3$.

7. Calculează $1 - \frac{a + b + c + d}{x + y + z + t}$, știind că $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d} = 5$.

8. Determină numerele raționale pozitive x, y și z, știind că $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8}$ și $x + y + z = 63$.

9. Determină numerele naturale x, y și z, știind că $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$ și $x + y + z = 90$.

10. Calculează a, b, c și $\frac{2a + 2b + c}{c}$, știind că $\frac{a}{2} = \frac{b}{6} = \frac{c}{10}$ și $a + b + c = 180$.

11. Calculează a, b, c și $\frac{3a + 8b - c}{a + 2c}$, știind că $\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{9}$ și $a + b + c = 75$.

12. Determină numerele naturale a, b și c, știind că

i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}, \frac{a}{6} = \frac{c}{11}$ și $a + b + c = 50$; ii) $\frac{a}{2} = \frac{b}{5}, \frac{b}{c} = \frac{15}{9}$ și $a + b + c = 60$.

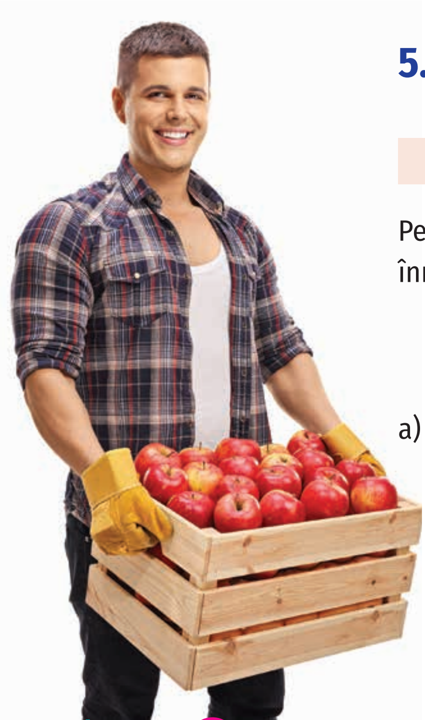
13. Determină numerele naturale x, y și z, știind că

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$ și $x + 2y + 3z = 261$; b) $\frac{x}{5} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$ și $3x + 4y + z = 140$.

INDICAȚIE:

i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{2 \cdot 3} = \frac{b}{2 \cdot 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{8}$



5. Mărimi direct proporționale

Descopăr

Pentru a-și ușura munca, un vânzător de fructe realizează tabelul de mai jos, în care înregistrează prețul pentru anumite cantități de mere.

Cantitatea (kg)	1	2	3	5	7
Prețul (lei)	4	8			

a) Completează datele lipsă din tabel.

b) Completează spațiile libere pentru a obține enunțuri adevărate:

- Dacă cantitatea de mere crește de un anumit număr de ori, atunci prețul aferent noii cantități de mere ... de același număr de ori.
- Dacă cantitatea de mere se micșorează de un anumit număr de ori, atunci prețul aferent noii cantități de mere se ... de același ... ...

Învăț

Completând tabelul de la problema propusă la secțiunea *Descopăr* obținem:

Cantitatea (kg)	1	2	3	5	7
Prețul (lei)	4	8	12	20	28

Datele din tabel se pot reprezenta grafic ca în figura 1.

Figura 1

Analizând aceste date, observăm că, dacă mărim/micșorăm cantitatea de mere de un anumit număr de ori, prețul aferent noii cantități se mărește/se micșorează de același număr de ori. În acest caz, putem spune că între cele două mărimi, cantitate și preț, există o relație de proporționalitate directă.

Două mărimi variabile, care depind una de alta, astfel încât dacă una se mărește (se micșorează) de un număr de ori, atunci și cealaltă se mărește (se micșorează) de același număr de ori, se numesc mărimi direct proporționale.

Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) numere raționale pozitive. Pentru a scrie o mulțime cu elementele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, în care ordinea elementelor este $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ și nu poate fi modificată, vom folosi notația $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) numere raționale pozitive. Între mulțimile $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ se stabilește o proporționalitate directă dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}$. Valoarea comună a acestor rapoarte se numește coeficient de proporționalitate.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = \underset{\uparrow}{k}$$

coeficient de proporționalitate

OBSERVAȚIE

De obicei, în probleme se folosește exprimarea „numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sunt direct proporționale cu numerele $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$”.

EXEMPLE:

1. Între mulțimile (1, 2, 3, 5, 7) și (4, 8, 12, 20, 28) se stabilește o proporționalitate directă pentru că $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20} = \frac{7}{28}$.
2. Între mulțimile (14, 18) și (3, 9) nu se stabilește o proporționalitate directă deoarece $\frac{14}{3} \neq \frac{18}{9}$ $(14 \cdot 9 \neq 3 \cdot 18)$.

Exerciții rezolvate

1. Din 12 m de stofă se confecționează 5 costume. Câți metri de stofă sunt necesari pentru a confecționa 24 de costume?

Rezolvare:

Notăm cu a cantitatea de stofă necesară confecționării a 24 de costume. Cantitatea de stofă și numărul de costume sunt mărimi direct proporționale. Obținem $\frac{12}{5} = \frac{a}{24}$, de unde rezultă $a = \frac{12 \cdot 24}{5}$, adică a = 57,6 m.

2. Împarte numărul 186 în părți direct proporționale cu numerele 0,5; 0,(3) și 0,2.

Rezolvare:

Fie a, b și c cele trei părți în care trebuie împărțit numărul 186.

$\frac{a}{0,5} = \frac{b}{0,(3)} = \frac{c}{0,2} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}}$. Folosind proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale obținem $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{186}{\frac{31}{30}} = 186 \cdot \frac{30}{31} = 180$.

$\frac{a}{\frac{1}{2}} = 180 \Rightarrow a = \frac{180}{2} \Rightarrow a = 90$, $\frac{b}{\frac{1}{3}} = 180 \Rightarrow b = \frac{180}{3} \Rightarrow b = 60$,

$\frac{c}{\frac{1}{5}} = 180 \Rightarrow c = \frac{180}{5} \Rightarrow c = 36$.

Cele trei părți direct proporționale cu numerele 0,5; 0,(3) și 0,2, în care a fost împărțit numărul 186, sunt: 90, 60 și 36.

Aplic

1. Stabilește care dintre următoarele mărimi sunt direct proporționale:

a) numărul de robinete cu același debit și cantitatea totală de apă care curge prin ele într-un interval de timp;

b) numărul de robinete de același debit și timpul necesar umplerii unui rezervor;

c) numărul de borcane de același fel și cantitatea de dulceață care se ambalează în ele;

d) timpul și distanța, dacă viteza este constantă;

e) cantitatea de lapte și cantitatea de unt care se obține din el;

f) viteza și timpul, dacă distanța este aceeași.

APLICAȚIE

Completează tabelele, ținând cont de faptul că între cele două mărimi din fiecare tabel există o proporționalitate directă.

A.

Cantitatea (kg)	Prețul (lei)
1	6,5
2	
2,5	
3	
4,2	
5	

B.

Timpul (ore)	Distanța parcursă (km)
1	80
2	
3	
5	
8	
12	

OBSERVAȚIE

Pentru completarea tabelului B, știm că viteza este constantă.

APLICAȚIE

Completează tabelele următoare și verifică, în fiecare caz, dacă între mulțimea valorilor lui y și mulțimea valorilor lui x se stabilește o proporționalitate directă. În caz afirmativ, determină coeficientul de proporționalitate.

A.

x	$y = 3x$
1	3
3	
4	
12	
65	
72	
102	

B.

x	$y = \frac{x}{5}$
1	0,2
5	
10	
12	
35	
80	
196	

2. Stabilește dacă între următoarele mulțimi este o proporționalitate directă.

a) (4; 20) și (3; 15);
c) (0,1; 0,(3); 1,2) și (0,3; 1; 3,6);
b) (4,5; 6) și (1,5; 2);
d) (1; 5; 7; 13; 21) și (3; 15; 21; 26; 63).

3. Pentru 5 zile de muncă, un salariat primește 650 de lei. Dacă într-o lună sunt 21 de zile lucrătoare, câți lei primește salariatul în acea lună?

4. Dacă 9 cămăși costă 585 de lei, câte cămăși de același fel se pot cumpăra cu 1 105 lei?

5. Un bunic are trei nepoți cu vârstele 7, 9 și 10 ani. El împarte 910 lei celor trei nepoți, direct proporțional cu vârstele lor. Ce sumă primește fiecare?

6. Abonamentul pentru 3 luni la rețeaua de internet costă 8,4 euro. Care este prețul abonamentului pentru un an?

7. 5 autocare pot transporta 175 de pasageri. De câte autocare este nevoie pentru a transporta 70 de pasageri?

8. Determină numerele naturale a și b, știind că sunt direct proporționale cu 2 și 5 și $a + b = 35$.

9. Determină numerele raționale pozitive a și b, știind că sunt direct proporționale cu 7 și 13, iar $b - a = 5$.

10. Determină numerele raționale pozitive a, b și c, știind că sunt direct proporționale cu 9, 11 și 15, iar $a + b + c = 245$.

11. Trei muncitori, care au lucrat 5, 9 și, respectiv, 7 zile, au primit pentru efectuarea unei lucrări 3 990 de lei. Ce sumă a primit fiecare, dacă plata se face proporțional cu numărul de zile lucrate?

12. Trei numere naturale sunt direct proporționale cu 5, 9 și 11. Știind că cel de-al treilea număr este 77, determină celelalte două numere.

13. Determină trei numere direct proporționale cu 2, 3 și 7, știind că diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre numere este egală cu 25.

14. Împarte numărul 357 în părți direct proporționale cu numerele 4, 7 și 10.

15. Numerele raționale pozitive x și y sunt direct proporționale cu 3 și 7. Calculează:

a) $\frac{5x}{2y}$; b) $\frac{5x + y}{8x - 2y}$; c) $\frac{x + y}{3x + 2y}$; d) $\frac{y}{2x + 3y}$; e) $\frac{x + y}{y - x}$.

16. Numerele raționale pozitive m, n și p sunt direct proporționale cu 1, 5 și 7. Calculează:

a) $\frac{m + n + p}{p + n - m}$; b) $\frac{3m + 2n + p}{2m + 4n + p}$; c) $\frac{10m - n + 2p}{m + p}$.

17. Determină numărul natural $\overline{abc}$, știind că media aritmetică a cifrelor sale este 5 și numerele $a + b$, $b + c$, $c + a$ sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, respectiv, 7.

18. Determină numerele naturale $\overline{ab}$, știind că numerele $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ sunt direct proporționale cu 4 și cu 7.

6. Mărimi invers proporționale

Descopăr

Pentru a umple cu apă un bazin dintr-un complex sportiv se pot folosi 12 robinete cu același debit. După cum observi în tabelul de mai jos, timpul de umplere a bazinului diferă în funcție de numărul de robinete folosite.

Numărul de robinete deschise	1	2	3	4	6	12
Timpul necesar umplerii (ore)	24	12				

a) Completează datele lipsă din tabel.

b) Completează spațiile libere pentru a obține enunțuri adevărate:

- Dacă numărul de robinete crește de un anumit număr de ori, atunci timpul necesar umplerii bazinului se ... de același ... ...
- Dacă se micșorează de un anumit număr de ori numărul de robinete, atunci timpul necesar pentru umplerea bazinului se ... de același ... ...

Învăț

Completând tabelul de la problema propusă la secțiunea *Descopăr* obținem:

Numărul de robinete deschise	1	2	3	4	6
Timpul necesar umplerii (ore)	24	12	8	6	4

Datele din tabel se pot reprezenta grafic ca în figura 1.

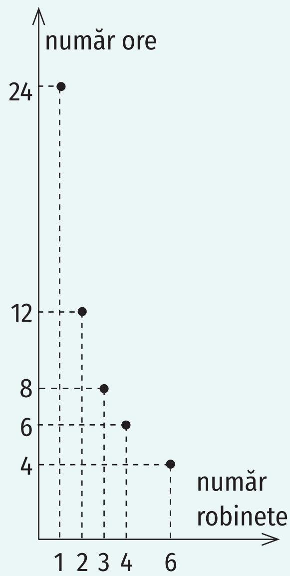


Figura 1

Analizând aceste datele, observăm că, dacă mărim/micșorăm numărul de robinete deschise de un anumit număr de ori, timpul necesar umplerii bazinului se micșorează/se mărește de același număr de ori. În acest caz, putem spune că între cele două mărimi există o relație de proporționalitate inversă.

Două mărimi variabile, care depind una de alta, astfel încât dacă una se mărește (se micșorează) de un număr de ori, atunci cealaltă se micșorează (se mărește) de același număr de ori, se numesc mărimi invers proporționale.

Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) numere raționale pozitive. Între mulțimile ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n$) și ($b_1, b_2, b_3, ..., b_n$) se stabilește o proporționalitate inversă dacă $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = ... = a_n \cdot b_n$.

EXEMPLE:

1. Între mulțimile (1, 2, 3, 4, 6) și (24, 12, 8, 6, 4) se stabilește o proporționalitate inversă pentru că $1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$.
2. Între mulțimile (10, 3) și (2, 7) nu se stabilește o proporționalitate inversă deoarece $10 \cdot 2 \neq 3 \cdot 7$.

De obicei, în probleme se folosește exprimarea „numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sunt invers proporționale cu numerele $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$".

OBSERVAȚIE

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = ... = a_n \cdot b_n \Leftrightarrow \frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}}.$$

Putem formula următorul rezultat:

Între mulțimile $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ se stabilește o proporționalitate inversă dacă și numai dacă între mulțimile $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ și $\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, ..., \frac{1}{b_n}\right)$ se stabilește o proporționalitate directă.

Exerciții rezolvate

1. Andrei parcurge cu bicicleta distanța dintre două localități în 40 de minute, mergând cu viteza constantă de 30 km/h. În cât timp va parcurge distanța la întoarcere dacă merge cu viteza constantă de 25 km/h?

Rezolvare:

Viteza și timpul în care este parcursă o anumită distanță sunt mărimi invers proporționale. Dacă t este timpul în care Andrei parcurge distanța dintre cele două localități la întoarcere, atunci $30 \cdot 40 = 25 \cdot t$, de unde rezultă: $t = \frac{30 \cdot 40}{25}$, adică $t = 48$ minute.

2. Determină numerele naturale invers proporționale cu numerele 3 și 7, a căror diferență este egală cu 12.

Rezolvare:

Fie a și b numerele căutate.

$$a \cdot 3 = b \cdot 7 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{\overbrace{a-b}^{12}}{b} = \frac{7-3}{3} \Rightarrow \frac{12}{b} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{12 \cdot 3}{4} \Rightarrow b = 9 \text{ și } a = 21.$$

3. Împarte numărul 240 în părți invers proporționale cu numerele 0,2; 0,(3); 0,125.

Rezolvare:

Fie a, b și c cele trei părți în care trebuie împărțit numărul 240.

$0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; $0{,}(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$.

Atunci, $a \cdot 0{,}2 = b \cdot 0{,}(3) = c \cdot 0{,}125 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{5} = b \cdot \frac{1}{3} = c \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{3} = \frac{c}{8} =$

$= \frac{\overbrace{a+b+c}^{240}}{5+3+8} = \frac{240}{16} = 15$. Deci $a = 5 \cdot 15 = 75$, $b = 3 \cdot 15 = 45$ și $c = 8 \cdot 15 = 120$.

Aplic

1. Stabilește care dintre următoarele perechi de mărimi sunt invers proporționale:

a) lungimea și lățimea unui dreptunghi atunci când aria este constantă;

b) numărul de robinete cu același debit și cantitatea de apă totală care curge prin ele;

c) numărul de robinete cu același debit și timpul necesar umplerii unui rezervor;

d) viteza și timpul, dacă distanța este aceeași;

e) cantitatea de lapte și cantitatea de brânză ce se obține din el;

f) distanța și viteza, dacă timpul rămâne constant.

2. Completează tabelele următoare:

a)

Numărul de robinete	8	1	5	12	24	40
Timpul în care se umple bazinul (minute)	40					

b)

Viteza (km/h)	80	60	90	100	120	75
Timpul (minute)	45					

3. Stabilește dacă între următoarele mulțimi este o proporționalitate inversă.

a) (4; 20) și (15; 3); c) (0,1; 3,(3); 2) și (7; 0,21; 3,5);

b) (4,5; 4) și (2; 2,25); d) (1; 8; 16; 24; 60) și (48; 6; 3; 2; 0,8);

4. Arată că numerele 1,5; 2 și 2,(6) sunt invers proporționale cu numerele 8; 6 și 4,5.

5. Dacă 12 muncitori termină o lucrare în 8 zile, în câte zile termină aceeași lucrare 8 muncitori? Dar un muncitor? Se presupune că toți muncitorii lucrează în același ritm.

6. Un automobil parcurge distanța dintre două localități în 90 de minute mergând cu viteza de 80 km/h. Cu ce viteză ar trebui să se deplaseze automobilul pentru a parcurge această distanță într-o oră?

7. Determină numerele raționale pozitive a și b, știind că sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{8}$, iar $a + b = 55$.

8. Determină numerele raționale pozitive a și b, știind că sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 0,(3), iar $5a + 4b = 88$.

9. Determină numerele naturale a și b, știind că sunt invers proporționale cu numerele 3 și 5, iar diferența dintre numărul mai mare și cel mai mic este 6.

10. Determină numerele raționale pozitive x, y și z, știind că sunt invers proporționale cu numerele 40 și 50 și 25, iar suma lor este 5,1.

11. Împarte numărul 888 în părți invers proporționale cu numerele 4, 5 și 6.

12. Determină numerele naturale a, b și c, știind că sunt invers proporționale cu numerele 3, 7 și 9, iar diferența dintre cel mai mare și cel mai mic este 28.

13. Mircea cumpără cadouri pentru cei patru prieteni ai lui. Știind că prețurile acestor cadouri, exprimate în lei, sunt numere naturale invers proporționale cu numerele 0,2; 0,(2); 0,22; 0,25, iar suma cheltuită de Mircea este 397 de lei, determină prețul fiecărui cadou.

14. Dacă x și y sunt numere raționale pozitive invers proporționale cu 0,25 și 0,(3), calculează:

a) $\frac{4x + 5y}{3x + y}$; b) $\frac{3x + 2y}{x - y}$; c) $\frac{2x + 5y}{2y - x}$; d) $\frac{y}{3x + y}$; e) $\frac{x}{2x - y}$.

15. Dacă a, b și c sunt numere raționale pozitive invers proporționale cu 0,2; 0,5 și 0,(3), calculează:

a) $\frac{a + b + c}{2c + b - a}$; b) $\frac{2a + b + 3c}{b + 4c + a}$; c) $\frac{a + 10b - c}{b + c}$.

7. Regula de trei simplă

Descopăr

1. Din 16,8 m de stofă se confecționează 7 costume. Câți metri de stofă sunt necesari pentru a confecționa 12 costume?

2. 8 muncitori termină o lucrare în 12 zile. Știind că toți muncitorii lucrează în același ritm, determină numărul de zile în care termină lucrarea 32 de muncitori.

Rezolvări:

1. Dacă numărul de costume confecționate crește, atunci și cantitatea de stofă necesară confecționării acestora crește. Așadar, numărul costumelor și cantitatea de stofă necesară confecționării lor sunt mărimi direct proporționale.

Dacă x este cantitatea de stofă necesară confecționării a 12 costume, atunci $\frac{7}{16{,}8} = \frac{12}{x}$, de unde rezultă $x = \frac{16{,}8 \cdot 12}{7} = 28{,}8$.

Atenție!

Pentru a calcula valoarea lui x, aranjăm datele problemei în felul următor:

7 costume .... 16,8 m

12 costume .... x m

$$x = \frac{12 \cdot 16{,}8}{7} \Rightarrow x = 28{,}8.$$

2. Dacă crește numărul de muncitori, atunci numărul de zile în care aceștia termină lucrarea se micșorează. Deci numărul de muncitori și numărul de zile sunt mărimi invers proporționale. Dacă x reprezintă numărul de zile în care termină lucrarea 32 de muncitori, atunci $8 \cdot 12 = 32 \cdot x$, de unde rezultă $x = \frac{8 \cdot 12}{32} = 3$.

Atenție!

Pentru a calcula valoarea lui x, aranjăm datele problemei în felul următor:

8 muncitori........................12 zile

32 muncitori........................ x zile

$$x = \frac{8 \cdot 12}{32} \Rightarrow x = 3.$$

Învăț

Regula de trei simplă este procedeul folosit pentru aflarea termenului necunoscut atunci când avem două mărimi direct sau invers proporționale și se cunosc două valori pentru una dintre mărimi și o valoare pentru cealaltă mărime.

Pentru a rezolva o problemă folosind regula de trei simplă procedăm astfel:

- înregistrăm valorile celor două mărimi;
- identificăm relația de proporționalitate;
- aflăm necunoscuta.

Aplic

1. Dacă 16 caiete costă 104 lei, câte caiete de același fel se pot cumpăra cu 286 de lei?

2. 20 de robinete pot umple un bazin în 27 de ore. În cât timp pot umple bazinul 18 robinete?

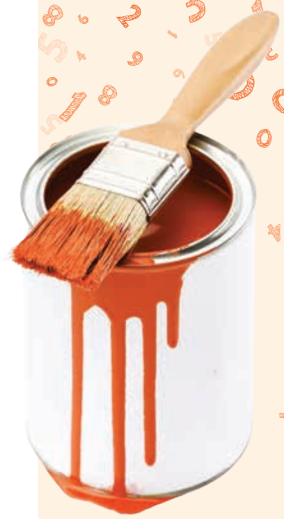
3. Corina a cumpărat 12 creioane, pentru care a plătit 30 de lei.

a) Câte creioane de același fel va cumpăra Radu cu 37,5 lei?

b) Sanda a achiziționat 9 creioane de același fel și a plătit cu o bancnotă de 50 de lei. Ce rest primește?

4. Pentru a fabrica săpun, la 180 g de grăsime se adaugă 60 g de sodă caustică. Câtă sodă caustică se adaugă la 33 kg de grăsime?

5. O sală de spectacole are 40 de rânduri, cu același număr de locuri pe fiecare rând. Determină numărul de locuri ale sălii, știind că pe 18 rânduri ocupate complet sunt 288 de spectatori.



6. Pentru a vopsi 5 fețe ale unui cub sunt necesare 215 g de vopsea. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi cubul?

7. Pentru a ambala o anumită cantitate de marfă sunt necesare 36 de cutii cu masa de 5 kg. În depozit sunt numai cutii de 3 kg. Câte cutii de 3 kg sunt necesare pentru a ambala întreaga marfă?

8. Andrei pleacă cu mașina de la București la Iași. El parcurge întreaga distanță în 5 ore, mergând cu viteza medie de 80 km/h. La întoarcere se deplasează cu o viteză medie de 120 km/h. În cât timp ajunge la București?

9. Din 15 kg de grâu se obțin 11,25 kg de făină. Din câte kilograme de grâu se obțin 90 kg de făină?

10. Un bazin în formă de cub se umple cu apă cu ajutorul unei pompe în 54 de minute. În cât timp se va umple cu ajutorul aceleiași pompe un bazin cu muchia de două ori mai mare? Dar un bazin cu muchia de 3 ori mai mică?

11. Lungimea pasului lui Remus este egală cu 75 cm. Pentru a parcurge distanța de acasă la școală el face 1040 de pași. Determină câți pași face pentru a parcurge aceeași distanță Elena, sora lui, știind că lungimea pasului acesteia este egală cu 65 cm.

12. Din 10 litri de lapte se obțin 1750 grame de smântână, iar din 350 grame de smântână se obțin 100 grame de unt. Câți litri de lapte sunt necesari pentru a obține 800 grame de unt?

13. Un robot realizează 108 piese în 2 ore și 24 de minute. Câte piese poate realiza în 160 de minute?

14. Din 15 kg de struguri se obțin 10,8 l de must. Ce cantitate de must se obține din 600 kg de struguri?

15. Pe o hartă realizată la scara 1:16 000, traseul între locuința lui Marian și sala de sport, unde acesta participă la antrenamentele pentru concursul de atletism, este 25 cm. În cât timp ajunge Marian de acasă la sala de sport dacă se deplasează cu viteza 4,8 km/h?

8. Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice

Îmi amintesc

Situația notelor elevilor clasei a VI-a A la testul inițial la matematică este următoarea: un elev a obținut nota 4, 3 elevi au obținut nota 5, 2 elevi au obținut nota 6, 6 elevi au obținut nota 7, 5 elevi au obținut nota 8, 4 elevi au obținut nota 9 și 4 elevi au obținut nota 10.

a) Organizează datele într-un tabel.

b) Ce frecvență are nota 7? Dar nota 4?

c) Determină valoarea minimă și valoarea maximă a acestui set de date.

d) Câți elevi au luat note mai mari sau egale decât 7?

e) Cât la sută din numărul de elevi au primit nota 10?

f) Care este media notelor?

Învăț

Organizarea datelor reprezintă o succesiune de operații prin care anumite informații sunt structurate în tabele, grafice sau diagrame.

Frecvența apariției unei proprietăți este numărul natural care arată de câte ori apare proprietatea respectivă în studiul realizat.

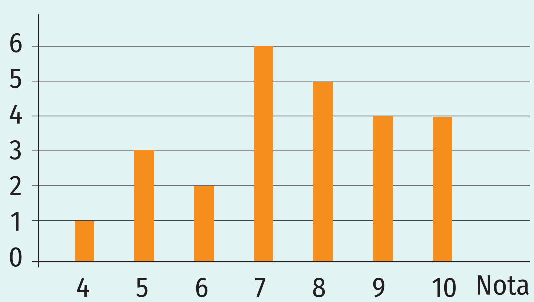
Media unui set de date statistice este media aritmetică a datelor respective.

De exemplu, informațiile din problema propusă spre rezolvare la secțiunea *Descopăr* pot fi structurate:

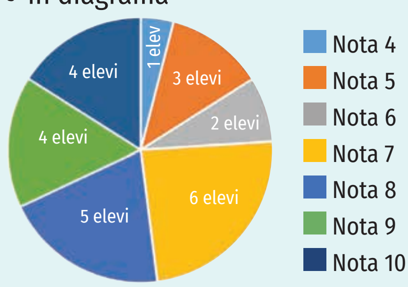
- în tabel

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	3	2	6	5	4	4

- în grafic



- în diagramă



Graficele și diagramele se pot realiza în Word sau Excel, selectând tipul de grafic dorit din bara de instrumente (Insert, apoi Chart), sau folosind diverse softuri specializate.

Frecvența apariției notei 7 este 6, valoarea minimă a setului de date este 1, valoarea maximă este 6, iar media setului de date este

$$m_a = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 10}{1 + 3 + 2 + 6 + 5 + 4 + 4} = \frac{189}{25} = 7{,}56$$

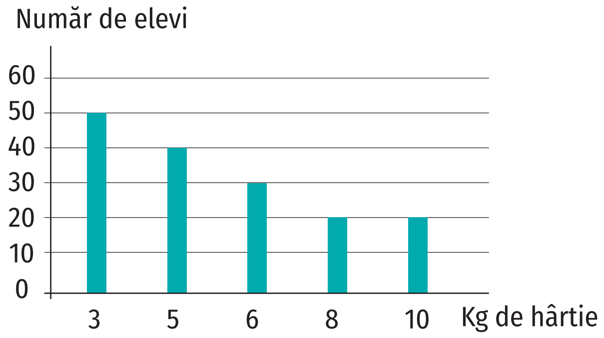
Aplic

1. În tabelul de mai jos este reprezentat numărul de elevi ai unei școli, care participă la un concurs.

Clasa	a V-a	a VI-a	a VII-a	a VIII-a
Număr de elevi	40	36	25	19

Cât la sută din numărul elevilor care participă la concurs reprezintă numărul elevilor de clasa a VI-a?

2. În graficul de mai jos este prezentată repartiția elevilor claselor a VI-a dintr-o școală după numărul kilogramelor de hârtie colectate pe parcursul unui an școlar.

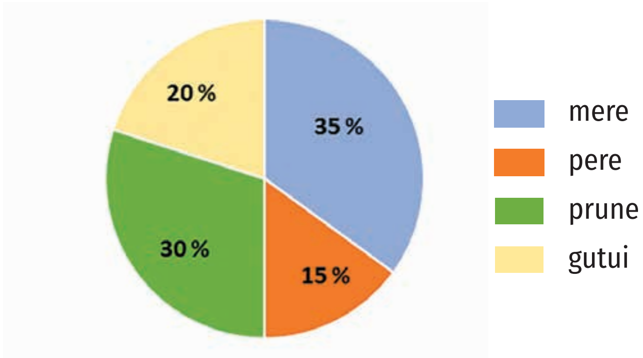


a) Câți elevi au colectat mai mult de 5 kg de hârtie?

b) Cât la sută din numărul elevilor de clasa a VI-a din acea școală au colectat 5 kg de hârtie?

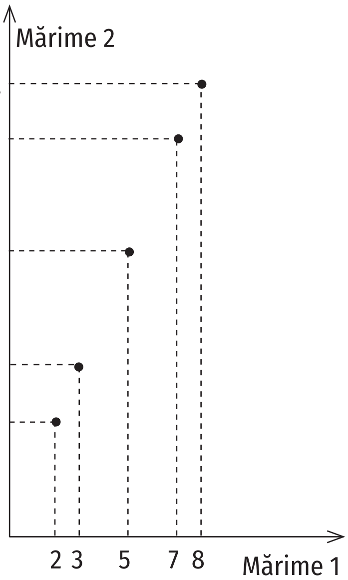
c) Câte kilograme de hârtie au colectat elevii?

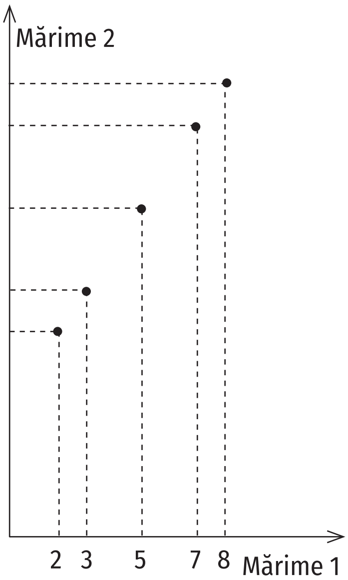
3. La un supermarket s-au adus 240 kg de fructe. Repartiția procentuală a tipurilor de fructe din supermarket este reprezentată în diagrama de mai jos. Determină câți lei s-au încasat pentru vânzarea întregii cantități de fructe, știind că un kilogram de mere costă 4,5 lei, un kilogram de pere costă 6,5 lei, un kilogram de prune costă 5,5 lei, iar un kilogram de gutui costă 8,4 lei.

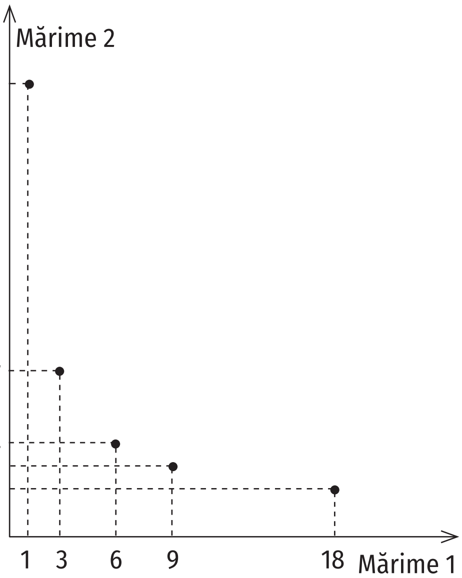


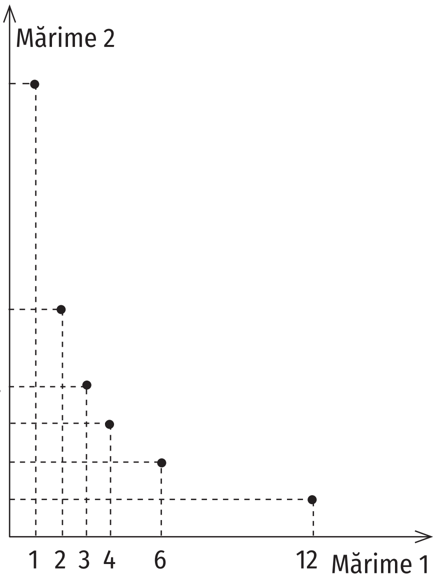
4. Elevii unei clase au fost verificați și evaluați în cursul unei săptămâni astfel: luni 14 elevi, marți 10 elevi, miercuri cât luni și marți la un loc, joi un număr de elevi egal cu media aritmetică a primelor trei zile, iar vineri cu 4 elevi mai puțin decât joi. Organizează informațiile oferite de textul problemei într-un tabel și într-un grafic cu bare, desenându-le sau folosind instrumente digitale (Word/Excel).

5. Precizează în care dintre graficele de mai jos sunt reprezentate mărimi direct sau invers proporționale.

a)


b)


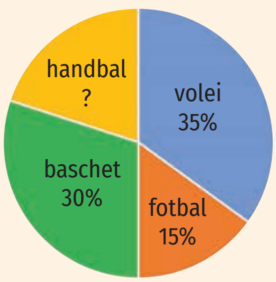
c)


d)


6. La un test, elevii clasei a VI-a B au obținut următoarele rezultate:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	2	4	6	5	4	3

a) Ce frecvență are nota 8? Dar nota 9?
b) Determină valoarea minimă și valoarea maximă a acestui set de date.
c) Cât la sută dintre elevi au obținut note mai mari decât 7?
d) Reprezintă datele din tabel prin diagrame, folosind softurile matematice.
e) Care este media notelor obținute la test?



7. În diagrama alăturată este reprezentată distribuția elevilor unui club sportiv în funcție de sportul practicat. Fiecare elev practică în cadrul clubului un singur sport. Știind, de asemenea, că 24 de elevi practică fotbal, câți elevi practică handbal?

8. Într-o școală sunt 90 de elevi în clasa a V-a, 80 de elevi în clasa a VI-a, 100 de elevi în clasa a VII-a și 85 de elevi în clasa a VIII-a. Reprezintă aceste date printr-o diagramă circulară, folosind softuri precum Word/Excel.

9. În tabelul de mai jos sunt notate temperaturile medii înregistrate la o stație meteorologică pe parcursul unei luni. Care este temperatura medie a acelei luni?

Numărul de zile	4	5	6	7	4	3	1
Temperatura (°C)	21	22	23	24	25	28	30

10. În tabelul de mai jos sunt înregistrate notele obținute la un test de elevii claselor a VIII-a ai unei școli.

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	3	3	6	30	33	21	27	15	12

a) Care este numărul de elevi de clasa a VIII-a ai școlii?

b) Câți elevi au obținut nota 8?

c) Care este media notelor obținute de elevii claselor a VIII-a la test?

d) Cât la sută dintre elevii școlii au obținut note mai mici decât 5?

e) Cât la sută dintre elevii școlii au obținut nota 7?

f) Reprezintă rezultatele elevilor exprimate în procente cu ajutorul unor softuri precum Word/Excel.

Investigație

Zahărul din alimente, consumat în cantități mari, este dăunător organismului. Cantitatea de zahăr recomandată unui copil cu vârsta cuprinsă între 9 și 13 ani este 20-23 g zilnic.

- Pentru a afla ce cantitate de zahăr consumi zilnic, completează un tabel după modelul celui de mai jos pentru fiecare zi a unei săptămâni.

Nr. crt.	Denumirea produsului	Cantitatea de zahăr la 100 g/ml produs	Cantitatea de produs consumată	Cantitatea de zahăr
1.	Coca Cola	10,6 g	250 ml (un pahar)	26,5 g
2.	etc.			
Total				

Atenție! La anumite produse, producătorii adesea „maschează” zahărul, numindu-l: dextroză, zaharoză (zahăr rafinat regulat), fructoză, glucoză (sirop de fructoză), lactoză (zahăr din lapte), zahăr inversat, melasa maltozei, maltoză, sirop.

- Pentru fiecare dintre produsele din tabele determină cantitatea care conține 20 g de zahăr.
- Alege două dintre produsele din tabele și determină ce cantități din acestea ar trebui să consumi într-o zi pentru a nu depăși cantitatea de zahăr recomandată.
- Realizează un sondaj în rândul elevilor clasei tale, parcurgând următoarele etape: culegerea datelor, organizarea datelor într-un tabel, reprezentarea datelor cu ajutorul graficelor sau diagramelor folosind softuri matematice, formularea concluziilor. Tema sondajului va fi consumul produselor care conțin zahăr. Sondajul va avea două întrebări cu mai multe variante de răspuns, din care respondenții pot alege o singură variantă.

DE EXEMPLU: Pe care dintre următoarele produse le consumi cel mai des: 1. dulciuri făcute în casă/ 2. dulciuri ambalate/ 3. fructe/ 4. sucuri naturale/ 5. sucuri acidulate/ 6. nu consum dulciuri.

- Documentează-te asupra problemelor de sănătate cauzate de consumul excesiv de zahăr.

9. Probabilități

Descopăr

Elevii formează grupe de câte doi. Unul dintre elevi aruncă o monedă de mai multe ori, iar celălalt numără de câte ori apare banul, respectiv, stema și completează tabelul alăturat. Se efectuează pe rând: 10 aruncări, apoi 20, 30 și 50 de aruncări.

numărul de aruncări (n)	10	20	30	50
numărul de aruncări în care apare stema (n_s)				
numărul de aruncări în care apare banul (n_b)				

Pentru fiecare caz determinați rapoartele $P_b = \frac{n_b}{n}$ și $P_s = \frac{n_s}{n}$. Ce observați?

Învăț

În cadrul unei experiențe ce constă în producerea unui fenomen întâmplător (aleator), care se poate repeta în condițiile date pentru realizarea unui eveniment așteptat, există:

- **un număr de evenimente posibile (*numite cazuri posibile*);**
- **un număr de evenimente în care se realizează evenimentul așteptat (*numite cazuri favorabile*).**

EXEMPLE:

1. Considerăm ca experiență aleatoare aruncarea unei monede. În cadrul acestei experiențe avem 2 cazuri posibile: cazul în care apare stema și cazul în care apare banul. Considerăm apariția stemei ca fiind evenimentul A. Există un singur caz favorabil evenimentului A.
2. Considerăm ca experiență aleatoare aruncarea unui zar. În cadrul acestei experiențe avem 6 cazuri posibile: cazul în care apare fața cu un punct, cazul în care apare fața cu două puncte, cazul în care apare fața cu trei puncte, cazul în care apare fața cu patru puncte, cazul în care apare fața cu cinci puncte și cazul în care apare fața cu șase puncte. Considerăm apariția feței cu trei puncte ca fiind evenimentul A și cazul în care apare o față cu un număr impar de puncte ca fiind evenimentul B. Există un singur caz favorabil evenimentului A și 3 cazuri favorabile evenimentului B (apariția uneia dintre fețele cu unu, trei sau cinci puncte).

Probabilitatea realizării unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor posibile.

$$P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}$$

OBSERVAȚII

P este un număr rațional pozitiv, $0 \leq P \leq 1$.

***Evenimentul imposibil* este evenimentul care nu se realizează în nici o efectuare a experimentului. Acesta are probabilitatea 0.**

***Evenimentul sigur* este evenimentul care se realizează cu certitudine. Acesta are probabilitatea 1.**

EXEMPLE:

1. Probabilitatea ca, la aruncarea unui zar, să apară o față pe care este scris numărul 7 este egală cu 0. Așadar, apariția unei fețe pe care este scris numărul 7, în cazul aruncării unui zar, este un eveniment imposibil.
2. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 12, 14, 28, 36\}$, acesta să fie număr par, este egală cu 1. Așadar, acesta e un eveniment sigur.

Exerciții rezolvate

1. Care este probabilitatea ca, aruncând un zar, să apară o față cu un număr par de puncte?

Rezolvare:

Pe fiecare dintre fețele unui zar sunt desenate unul, două, trei, patru, cinci sau șase puncte, deci sunt 6 cazuri posibile. Dintre acestea, pe trei fețe sunt desenate un număr par de puncte (2, 4 sau 6), deci sunt 3 cazuri favorabile. Probabilitatea ca, aruncând un zar, să apară o față cu un număr par de puncte este: $P = \frac{3^{(3}}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Laurențiu a scris divizorii numărului 24 pe cartonașe (fiecare divizor e scris o singură dată, pe un singur cartonaș). Care este probabilitatea ca, alegând un cartonaș, pe acesta să fie scris un număr prim?

Rezolvare:

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, deci sunt 8 cazuri posibile.

Divizori primi ai numărului 24 sunt 2 și 3, deci sunt 2 cazuri favorabile și $P = \frac{2^{(2}}{8} = \frac{1}{4}$.

Aplic

1. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să fie pătratul unui număr natural.

2. Într-un coș sunt 8 mere, 5 portocale și 14 banane.

a) Care e probabilitatea ca, alegând la întâmplare un fruct din coș, acesta să fie o banană?

b) Care e probabilitatea ca, alegând la întâmplare un fruct din coș, acesta să nu fie măr?

3. Într-o clasă sunt 26 de elevi, dintre care 14 sunt fete. Care e probabilitatea ca, alegând la întâmplare un elev, acesta să fie băiat?

4. Într-un coș sunt 6 pere, 5 portocale și 14 mere. Care e probabilitatea ca, alegând la întâmplare un fruct din coș, acesta să nu fie măr?

5. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea A, acesta să fie mai mare decât 5.

6. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x = \overline{ab},\ a < b\}$. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea A, acesta să fie impar.

7. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 4.

8. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să fie o putere cu exponent natural al lui 2.

9. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, acesta să fie multiplu al numărului 90.

10. Într-o urnă sunt bile identice numerotate de la 1 la 36.

a) Care este probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr care este multiplu al lui 5?

b) Care este probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr care este divizor al lui 24?

c) Care este probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr prim?

d) Care este probabilitatea ca, extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr care nu este multiplu de 3?

11. Într-o urnă sunt patru bile albe, cinci bile negre și șapte bile galbene, de aceeași mărime și masă.

a) Care este probabilitatea ca, extrăgând o bilă la întâmplare, aceasta să fie neagră?

b) Care este probabilitatea ca, extrăgând o bilă la întâmplare, aceasta să nu fie galbenă?

c) Care este probabilitatea ca, extrăgând o bilă la întâmplare, aceasta să fie albă sau galbenă?

12. Care este probabilitatea ca, aruncând două zaruri, numărul total de puncte de pe fețele apărute să fie mai mic decât 7?

13. Care este probabilitatea ca, aruncând două zaruri, să apară fețe cu același număr de puncte?

14. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor mai mică decât 4.

15. Se consideră mulțimea $A = \{2^{13}, 3^{99}, 5^{47}, 46^{64}, 2022^{0}, 0^{2022}, 7^{21}\}$. Calculează probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie număr par.

16. Într-un coș sunt 48 de mere, unele roșii și altele verzi. Probabilitatea ca, alegând un măr din coș, acesta să fie verde, este 0,(3). Determină numărul de mere de fiecare fel.

17. Într-o clasă sunt 25 de elevi. Probabilitatea ca, alegând un elev din clasă, acesta să fie băiat, este 0,4. Câte fete sunt în clasă?

18. Într-un coș se află 25 de fructe – mere, pere și gutui. Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un fruct, acesta să nu fie gutuie, este 0,4. Câte gutui sunt în coș?

Exerciții recapitulative

1. Calculează valoarea raportului dintre numerele:

a) 32 și 40; b) 5^{2022} și 5^{2023}; c) $\frac{4}{5}$ și $\frac{12}{5}$; d) 0,5 și 1,25; e) 1,1(6) și 1,(3).

2. Calculează:

a) 9% din 30; b) 12,5% din 24; c) 11% din 3 600; d) 125% din 120.

3. Prețul unei rochii este 650 de lei. Determină prețul rochiei după o majorare cu 20% urmată de o reducere cu 20%.

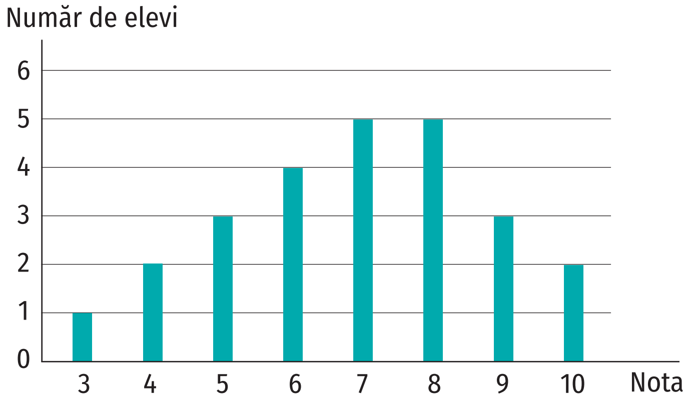
4. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor mai mică decât 3.

5. În graficul alăturat sunt reprezentate rezultatele obținute la un test de elevii clasei a VI-a A.

a) Care este numărul de elevi ai clasei a VI-a A?

b) Cât la sută din numărul de elevi au obținut note mai mari decât 4?

c) Care este media notelor obținute de elevii clasei a VI-a A la test?



6. Determină numărul rațional pozitiv x din proporțiile:

a) $\frac{2}{10} = \frac{5}{x}$; b) $\frac{4}{2^3} = \frac{15}{x}$; c) $\frac{7}{77} = \frac{x}{55}$; d) $\frac{x+2}{x} = \frac{7}{5}$; e) $\frac{x}{x-3} = \frac{8}{5}$; f) $\frac{x}{13} = \frac{x-4}{9}$.

7. Din 12 kg de făină se fabrică 30 de pâini. Câte kilograme de făină sunt necesare pentru fabricarea a 70 de pâini?

8. Lacul Ursu din Sovata este cel mai mare lac sărat helioterm din Europa. Din 15 litri de apă sărată din lacul Ursu se pot extrage 4,5 kg de sare. Câte kilograme de sare se pot extrage din 10 litri de apă sărată din lacul Ursu?

9. Raportul dintre prețul unui kilogram de mere și prețul unui kilogram de pere este $\frac{4}{5}$. Știind că prețul unui kilogram de mere este 3,6 lei, determină cât costă 7 kg de pere.

10. Știind că $\frac{a}{2} = \frac{b}{5}$, determină rapoartele: $\frac{a}{b}, \frac{2b}{3a}, \frac{3a+b}{a+b}, \frac{3a+2b}{5a+4b}, \frac{5a+b}{4a-b}$.

11. Raportul dintre prețul unui pix și prețul unui stilou este $\frac{2}{7}$. Știind că împreună costă 18 lei, determină prețul fiecăruia dintre cele două obiecte.

12. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Determină valoarea raportului $\frac{m}{n}$ știind că: a) $\frac{3m}{m+n} = \frac{9}{5}$; b) $\frac{2m+5n}{4m-n} = \frac{9}{7}$.

13. Se dă proporția $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$. Determină x și y știind că: a) $x + y = 180$; b) $3x + 2y = 26$.

14. Primii trei clasați la un concurs au primit împreună 1 000 000 euro. Ce sumă a primit fiecare, știind că sumele alocate locurilor I, II și III sunt direct proporționale cu numerele 12, 9 și, respectiv, 4?

15. Dacă 21 de muncitori termină o lucrare în 9 zile, în câte zile termină aceeași lucrare 27 de muncitori? Dar trei muncitori?

16. Împarte numărul 324 în părți direct proporționale cu numerele 2, 4, 5 și, respectiv, 7.

17. Împarte numărul 2 023 în părți invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ și, respectiv, $\frac{1}{7}$.

18. Dacă a, b și c sunt direct proporționale cu 0,25; 0,(3) și 0,5, calculează $\frac{2a+b+4c}{b+2c+a}$.

19. Andrei are două machete ale Turnului Eiffel, prima la scara 1:3 000, iar a doua la scara 1:2 000. Care este înălțimea primei machete, dacă a doua machetă are înălțimea de 16,2 cm?

Timp de lucru: 40 de minute **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I **40 puncte ore**

15 puncte	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*
(5 p.)	**A.** 12% din 60 este: a) 72; b) 12; c) 7,2; d) 720.
(5 p.)	**B.** Dacă $\frac{x}{12} = \frac{3}{4}$, atunci x este egal cu: a) 9; b) 6; c) 8; d) 10.
(5 p.)	**C.** Dacă $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, atunci $\frac{x+y}{y}$ este egal cu: a) $\frac{8}{3}$; b) 4; c) $\frac{10}{3}$; d) $\frac{10}{6}$.
20 puncte	**2.** *Scrie pe foaie numai rezultatele.*
(5 p.)	**A.** Dacă 8 robinete umplu un bazin în 12 ore, atunci 6 robinete, care au același debit cu primele, umplu același bazin în ... ore.
(5 p.)	**B.** Dacă x și 5 sunt direct proporționale cu 0,2 și 0,(3), atunci x este egal cu ... .
(5 p.)	**C.** Probabilitatea ca, alegând un număr natural de o cifră, acesta să fie divizor al lui 15 este ... .
(5 p.)	**D.** Dacă 28 de pixuri costă 98 de lei, atunci cu 210 lei se pot cumpăra ... pixuri de același fel.
5 puncte	**3.** *Scrie pe foaie litera corespunzătoare răspunsului corect.* Scara unei hărți este 1:800 000. Pe hartă, distanța dintre două localități este egală cu 6,5 cm. Alin afirmă „Distanța pe teren dintre cele două localități este egală cu 52 km.” Afirmația lui Alin este: a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea **50 puncte**

Scrie rezolvările complete.

15 puncte	**1.** Împarte numărul 2 024 în părți invers proporționale cu numerele $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ și, respectiv, $\frac{1}{9}$.
15 puncte	**2.** Raportul dintre prețul unui caiet și prețul unei cărți este $\frac{2}{13}$. Determină cât costă caietul, știind că o carte și un caiet costă 75 de lei.
20 puncte	**3.** Se dă proporția $\frac{15}{y} = \frac{25}{x}$. Determină numerele raționale pozitive x și y știind că $3x + y = 36$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Pot să determin un termen necunoscut dintr-o proporție.					
Pot să identific mărimi direct și invers proporționale.					
Pot să reprezint datele prin grafice sau diagrame.					

Unitatea

3

Mulțimea numerelor întregi

1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axa numerelor. Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi

Descopăr

Briana a înregistrat în tabelul următor temperaturile măsurate la aceeași oră pe parcursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (°C)	-5	-3	1	0	-2	2	3

a) Ce temperatură a fost înregistrată sâmbătă? Dar marți?

b) Care este cea mai mică temperatură înregistrată? Dar cea mai mare?

c) În figura 1 este reprezentată schița unui termometru pe care Briana a marcat temperaturile -5°C și 2°C. Care sunt zilele în care au fost înregistrate aceste temperaturi? Desenează, pe caiet, schița și marchează pe ea toate temperaturile înregistrate de Briana în tabel.

d) Cu ajutorul desenului realizat la punctul c), scrie în ordine crescătoare temperaturile înregistrate.

e) Care sunt zilele în care au fost înregistrate temperaturi negative? Cum sunt poziționate aceste temperaturi față de 0°C pe termometru?

f) Care este media temperaturilor pozitive înregistrate de Briana?

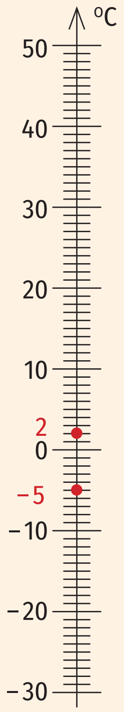


Figura 1

ȘTIAȚI CĂ...?

Pentru scrierea numerelor negative s-au folosit diferite notații:

- Hindușii puneau un punct sau un cerc deasupra sau dedesubtul numărului negativ:

  5 sau 5 pentru -5

- Chinezii foloseau culori: roșu, pentru numere pozitive și negru pentru numere negative.
- Matematicianul italian Girolamo Cardano (1501–1576) scria litera *m* înaintea unui număr pentru a arăta că acesta e negativ. Astfel, *m*5 însemna -5.

Învăț

Axa numerelor este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O, numit origine, o unitate de măsură și un sens pozitiv.

Pe axa numerelor, începând din punctul O, măsurăm spre dreapta (în sens pozitiv) una, două, trei unități de măsură. Obținem astfel puncte cărora le corespund numerele +1, +2, +3, pe care le vom numi **numere întregi pozitive** (figura 2).

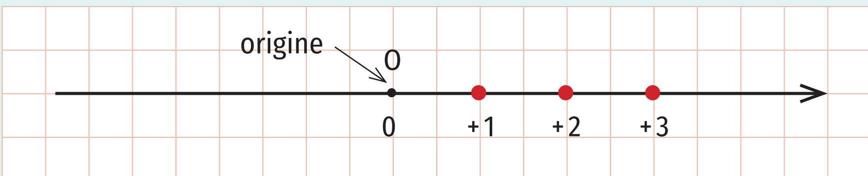


Figura 2

Începând din punctul O, măsurăm spre stânga (în sens opus sensului pozitiv) una, două, trei unități de măsură. Obținem astfel puncte cărora le corespund numerele −1, −2, −3, pe care le vom numi **numere întregi negative** (figura 3).

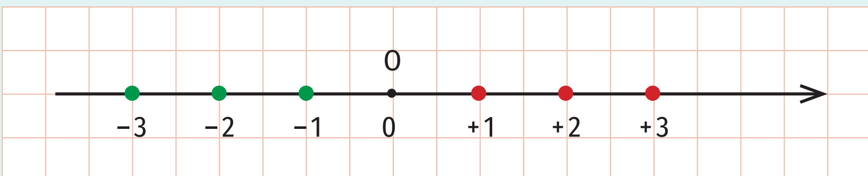


Figura 3

Mulțimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}.$$

Mulțimea numerelor întregi negative se notează cu $\mathbb{Z}_-$.

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 0\}.$$

Mulțimea numerelor întregi pozitive se notează cu $\mathbb{Z}_+$.

$$\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, +4, ...\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}.$$

Mulțimea numerelor întregi nenule se notează cu $\mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

OBSERVAȚII

1. Numărul 0 este număr întreg, dar nu este nici pozitiv, nici negativ.
2. $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
3. $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
4. Orice număr natural este număr întreg, așadar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Oricărui număr întreg îi corespunde pe axa numerelor un punct. Vom spune că numărul este coordonata punctului respectiv.

EXEMPLU:

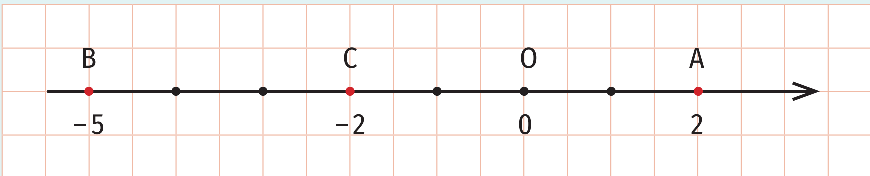


Figura 4

În figura 4, numărului 2 îi corespunde pe axa numerelor punctul A, numărului −5 îi corespunde punctul B, iar numărului −2 îi corespunde punctul C. Scriem A(2) și citim „punctul A de coordonată 2”, B(−5) și citim „punctul B de coordonată -5”, C(−2) și citim „punctul C de coordonată -2”.

Observăm că punctele A(2) și C(−2) sunt situate pe axa numerelor la aceeași distanță față de punctul O (sunt simetrice față de punctul O). În acest caz vom spune că numerele 2 și -2, coordonatele punctelor A și C, sunt **numere întregi opuse**.

Numerele întregi opuse se reprezintă pe axa numerelor prin puncte simetrice față de originea acesteia.

EXEMPLE:

1. Numerele întregi 6 și -6 sunt numere opuse.
2. Opusul numărului întreg 5 este -5.
3. Opusul numărului întreg -3 este 3.

OBSERVAȚII

1. Opusul numărului 0 este 0.
2. Dacă n este număr întreg nenul, atunci n și $-n$ sunt numere întregi opuse, opusul numărului întreg nenul n este $-n$, iar opusul numărului întreg $-n$ este n. Astfel, $-(-n) = n$, pentru oricare număr întreg nenul n.
   Exemplu: $-(-3) = 3$.

ȘTIAȚI CĂ...?

- Notația $\mathbb{Z}$ pentru mulțimea numerelor întregi provine din limba germană, de la cuvântul *die Zahle = număr*.
- Brahmagupta (sec. VI-VII e. n.) vorbește de cantități „afirmative” și cantități „negative” și formulează reguli de adunare și scădere a numerelor pozitive și negative.
- Hindușii foloseau numerele negative și pozitive pentru a calcula creditele și debitele. Ei asociau numerele negative cu datoria și numerele pozitive cu averea.

OBSERVAȚII

1. Dacă n este număr întreg, atunci

$$|n| = \begin{cases} -n, \text{ dacă } n < 0 \\ 0, \text{ dacă } n = 0 \\ n, \text{ dacă } n > 0 \end{cases}$$

2. Pentru oricare număr întreg n, $|n| \geq 0$.

3. Pentru oricare număr întreg nenul n, $|n| = |-n|$.

$$\left.\begin{array}{r} 7 > 0 \\ 10 > 0 \\ |7| < |10| \end{array}\right\} \Rightarrow 7 < 10$$

$$\left.\begin{array}{r} -4 < 0 \\ -8 < 0 \\ |-4| < |-8| \end{array}\right\} \Rightarrow -4 > -8$$

$$\left.\begin{array}{r} -5 < 0 \\ 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -5 < 4$$

Distanța de la originea axei numerelor la punctul prin care este reprezentat un număr întreg *n* pe axa numerelor se numește modulul (sau valoarea absolută) numărului întreg *n* și se notează |*n*|.

EXEMPLU:

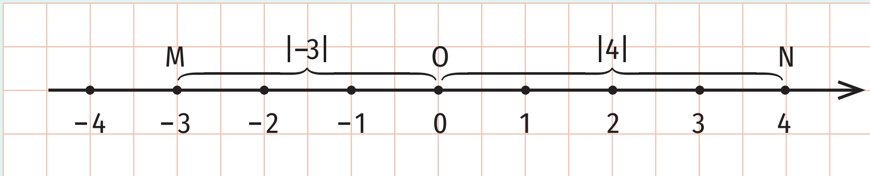


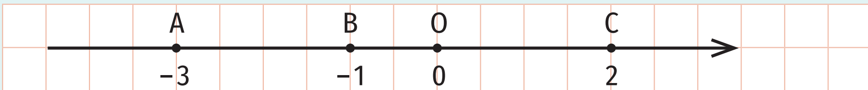
Figura 5

Pe axa numerelor considerăm punctele M(−3) și N(4) (figura 5).

Modulul numărului −3 este egal cu distanța de la punctul O la punctul M(−3), deci $|-3| = 3$. Modulul numărului 4 este egal cu distanța de la punctul O la punctul N(4), deci $|4| = 4$.

Dintre două numere întregi diferite mai mare este cel care este reprezentat pe axa numerelor în dreapta celuilalt.

EXEMPLE:



$-3 < -1$ (Punctul B(−1) se află pe axa numerelor în dreapta punctului A(−3).)

$-1 < 2$ (Punctul C(2) se află pe axa numerelor în dreapta punctului B(−1).)

OBSERVAȚII

1. Dintre două numere întregi pozitive este mai mare cel care are modulul mai mare.

2. Dintre două numere întregi negative este mai mare cel care are modulul mai mic.

3. Oricare număr întreg negativ este mai mic decât oricare număr întreg pozitiv.

Exercițiu rezolvat

Determină elementele mulțimilor $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, -3 \leq x < 7\}$, $B = \{x \mid x \in A, |x| = x\}$, $C = \{x \mid x \in A, |x| = -x\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \in A\}$, $E = \{x \mid x \in A, |x| \in A\}$, $F = \{y \mid y = |x|, x \in A\}$.

Rezolvare:

$A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Numerele întregi x din mulțimea A pentru care $|x| = x$ sunt 1, 2, 3, 4, 5 și 6, așadar, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Numerele întregi x din mulțimea A pentru care $|x| = -x$ sunt −3, −2 și −1, așadar, $C = \{-3, -2, -1\}$.

Dacă $|x| \in$ A, atunci $|x|$ poate fi 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 și x poate fi −6, −5, −4, −3, −2, −1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, deci D = {−6, −5, −4, −3, −2, −1, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Numerele întregi din mulțimea A al căror modul aparține mulțimii A sunt: −3, −2, −1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, așadar E = A.

Calculând $y = |x|$, unde $x \in$ A, obținem F = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ($|-3| = 3$, $|-2| = 2$ etc.).

Aplic

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
a) Opusul numărului întreg −11 este ... .
b) Opusul numărului întreg ... este −5.
c) Modulul numărului întreg 3 este ... .
d) Dacă $|n| = 7$, atunci numărul întreg negativ n este egal cu ... .
e) Dacă $|m| = 0$, atunci numărul întreg m este egal cu ... .

2. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos.
a) Dintre numerele −8, −9, −11, −4, cel mai mare este:
A. −8; B. −9; C. −11; D. −4.
b) Dintre seturile următoare de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
A. −1, 2, −5, 7; B. −9, −8, 5, 2; C. −8, −5, 2, 3; D. 5, 2, 0, −1.
c) Dintre seturile următoare de numere, cel scris în ordine descrescătoare este:
A. 1, −2, −5, 7; B. −10, −8, −4, 0; C. −3, −5, −8, −9; D. 3, −2, 0, 5.

3. Transcrie și completează tabelul următor:

Numărul	5	−15	8	−3					
Opusul					−6	4	10	−1	
Modulul									0

4. a) Scrie cinci numere întregi mai mari decât −8.
b) Scrie patru numere întregi mai mici decât 2.
c) Determină cinci numere întregi consecutive, astfel încât unul dintre ele să fie −3. Scrie toate variantele posibile.

5. Completează casetele cu unul dintre semnele <, =, > pentru a obține propoziții adevărate:
a) −1254 □ −1200; d) 123 □ 1 203; g) $|-1240|$ □ $|1204|$;
b) −325 □ 62; e) $|15|$ □ $|-15|$; h) $|-23|$ □ $|23|$;
c) −65 231 □ −6 523; f) $|100|$ □ $|-235|$; i) $|1|$ □ $|0|$.

6. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține seturi de numere ordonate crescător.
a) −18, □, □, □, −14, □, □, −8, □, □, 3; b) −6, □, □, □, −2, □, 0, □, □, □, 8.

7. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține seturi de numere ordonate descrescător.
a) 9, □, □, 5, □, 2, □, □, □, −3, □; b) 16, □, □, 12, □, 3, □, □, □, −8, □.

8. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține propoziții adevărate:
a) 38 < □; c) −23 > □; e) $|18|$ = □; g) □ < $|-36|$;
b) −26 < □; d) □ > −15; f) $|25|$ < □; h) □ < −3.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Fiecare dintre cei doi elevi spune un număr întreg negativ, iar celălalt spune modulul și opusul acestuia, un număr întreg mai mare și un număr întreg mai mic decât numărul spus de coleg.

INDICAȚIE:

Un set de numere întregi este **ordonat crescător** dacă numerele sunt aranjate de la cel mai mic la cel mai mare.

Un set de numere întregi este **ordonat descrescător** dacă numerele sunt aranjate de la cel mai mare la cel mai mic.

9. Scrie 4 numere din mulțimea:

a) $\mathbb{N}$; b) $\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Z}_+$; d) $\mathbb{Z}^*$; e) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

10. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $-9 \in \mathbb{Z}$; ☐ d) $0 \in \mathbb{Z}_+$; ☐ g) $|-13| \in \mathbb{Z}_-$; ☐ j) $\frac{1}{4} \in \mathbb{Z}$; ☐

b) $10 \notin \mathbb{Z}$; ☐ e) $-7 \notin \mathbb{N}$; ☐ h) $15 \in \mathbb{Z}$; ☐ k) $0 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; ☐

c) $0 \notin \mathbb{Z}$; ☐ f) $|25| \in \mathbb{Z}_+$; ☐ i) $23 \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$; ☐ l) $1{,}25 \in \mathbb{Z}$. ☐

11. Reprezintă pe axa numerelor:

a) numerele întregi $-6, -2, -1, 2, 3, 8, 10$;

b) numerele întregi mai mari decât -9, dar mai mici decât 5;

c) numerele care au modulul egal cu 3;

d) numerele întregi al căror modul este mai mic decât 4;

e) opusele numerelor întregi $-5, -3, 2, 4$.

12. Punctele A(a), B(b), C(c) și D(d) sunt poziționate pe axa numerelor ca în figura 6. Ordonează descrescător numerele întregi a, b, c și d.

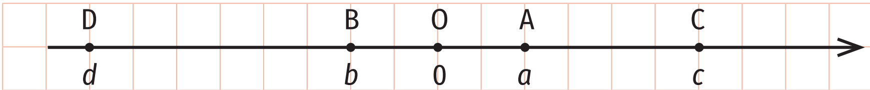


Figura 6

13. Punctele distincte E(-4), F(m), G(-1), H(n) și I(3), unde m și n sunt numere întregi, sunt poziționate pe axa numerelor în această ordine. Determină valorile numerelor m și n.

14. a) Determină coordonatele punctelor A, B, C, D și E, poziționate pe axa numerelor ca în figura 7.

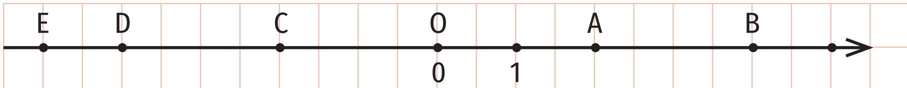


Figura 7

b) Determină valorile numărului întreg m pentru care punctul M(m) se află pe axa numerelor între punctele D și A.

c) Desenează axa numerelor pe caiet și reprezintă punctele N(-7) și P(6).

15. a) Folosind reprezentarea pe axa numerelor, ordonează crescător elementele mulțimilor $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x \leq 2\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\}$.

b) Folosind reprezentarea pe axa numerelor, ordonează descrescător elementele mulțimilor $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 2\}$ și $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq |x| < 5\}$.

16. Se consideră mulțimile $A = \{-5, -3, -2, 1, 2, 4, 7\}$, $B = \{x \mid x \in A, x \leq 0\}$, $C = \{x \mid x \in A, |x| = x\}$, $D = \{x \mid x \in A, |x| = -x\}$, $E = \{x \mid x \in A, |x| < 3\}$, $F = \{x \mid x \in A, |x| > 1\}$.

a) Determină elementele mulțimilor $A \cap \mathbb{N}$, $A \setminus \mathbb{N}$ și $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$.

b) Reprezintă pe axa numerelor elementele mulțimii A.

c) Ordonează descrescător elementele mulțimii $A \cap \mathbb{Z}_-$.

d) Determină elementele mulțimilor B, C, D, E și F.

17. Determină cardinalul mulțimilor: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 5\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 0\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}_+, -3 < x < 7\}$, $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| = 0\}$, $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| = -5\}$, $G = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| = 8\}$.

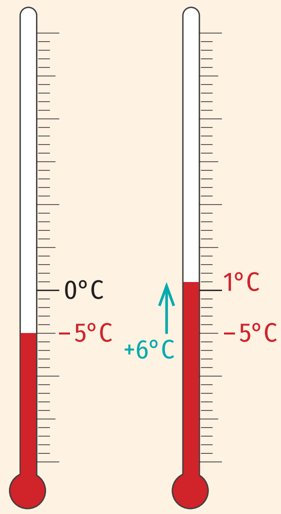
2. Adunarea numerelor întregi. Proprietăți

Descopăr

Într-o dimineață, temperatura aerului era −5° C. Până la ora 15, temperatura a crescut cu 6°.

a) Ce temperatură a fost înregistrată în acea zi la ora 15?

b) Calculează (−5) + 6, folosind axa numerelor.



Rezolvare:

b) Reprezentăm numerele întregi −5 și 6 pe axa numerelor, apoi le punem în evidență prin săgeți care pornesc din dreptul punctului O și au vârfurile în dreptul punctelor de pe axă prin care se reprezintă numerele −5 și, respectiv, 6. O săgeată identică cu cea care indică numărul 6 se așază începând din vârful săgeții care indică numărul −5. Vârful acesteia va fi în dreptul punctului prin care e reprezentat pe axa numerelor numărul întreg 1. Vom spune că numărul întreg 1 s-a obținut prin adunarea numerelor întregi −5 și 6. Așadar, (−5) + 6 = 1 (figura 1).

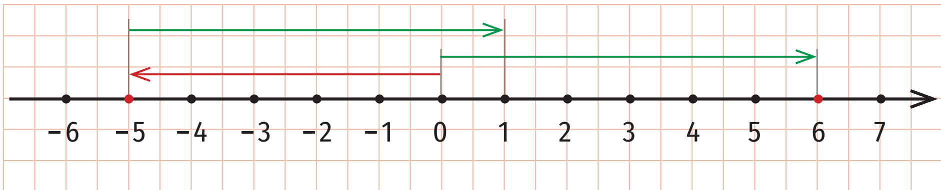


Figura 1

Învăț

Prin adunarea numerelor întregi *a* și *b* se obține un număr întreg, notat *a* + *b*, numit suma numerelor *a* și *b*. Numerele *a* și *b* se numesc termenii sumei.

- **Pentru a aduna două numere întregi, ambele pozitive sau ambele negative, procedăm astfel: adunăm modulele celor două numere, iar la rezultat punem semnul comun al celor două numere.**

EXEMPLE:

1. (+3) + (+5) = + (|+3| + |+5|) = + (3 + 5) = + 8 = 8.

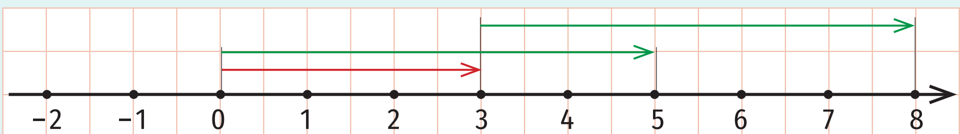


Figura 2

2. (−4) + (−2) = − (|−4| + |−2|) = −(4 + 2) = −6.

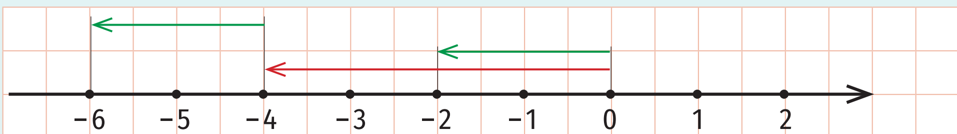


Figura 3

- **Pentru a aduna două numere întregi, unul pozitiv și unul negativ, procedăm astfel:**
  - **calculăm modulele celor două numere;**
  - **din modulul mai mare scădem modulul mai mic;**
  - **la rezultat punem semnul numărului al cărui modul este mai mare.**

EXEMPLE:

1. $(-3) + (+2) = -(|-3| - |+2|) = -(3 - 2) = -1$.

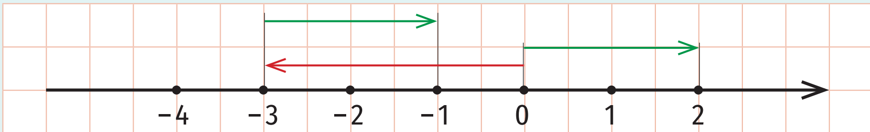


Figura 4

EXPLICAȚIE:
$|-3| = 3$, $|+2| = 2$, deci $|-3| > |+2|$. Suma $(-3) + (+2)$ va avea semnul numărului întreg -3 (adică $-$).

2. $(-2) + (+3) = +(|+3| - |-2|) = +(3 - 2) = +1 = 1$.

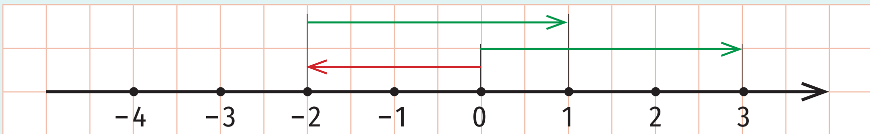


Figura 5

EXPLICAȚIE:
$|-2| = 2$, $|+3| = 3$, deci $|+3| > |-2|$. Suma $(-2) + (+3)$ va avea semnul numărului întreg $+3$ (adică $+$).

Proprietățile adunării numerelor întregi

- **Adunarea numerelor întregi este comutativă** (suma a două numere întregi nu se modifică dacă schimbăm locul termenilor):

  $\boldsymbol{a + b = b + a}$, pentru oricare numere întregi a și b.

EXEMPLU:
$(-5) + (+7) = (+7) + (-5)$

- **Adunarea numerelor întregi este asociativă** (suma a trei numere întregi nu se modifică dacă grupăm termenii în moduri diferite):

  $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$, pentru oricare numere întregi a, b și c.

EXEMPLU:

$$\underbrace{(-6) + \underbrace{[(+5) + (-1)]}_{4}}_{-2} = \underbrace{\underbrace{[(-6) + (+5)]}_{-1} + (-1)}_{-2}$$

- **Numărul 0 este element neutru:**

  $\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a}$, pentru oricare număr întreg a.

EXEMPLU:
$(-4) + 0 = 0 + (-4) = -4$

- **Suma dintre un număr întreg și opusul său este egală cu 0.**

  $\boldsymbol{a + (-a) = (-a) + a = 0}$, pentru oricare număr întreg a.

EXEMPLU:
$(+8) + (-8) = (-8) + (+8) = 0$

Exercițiu rezolvat

Calculează (−31) + (+12) + (+35) + (−18) + (−3).

Rezolvare:

Metoda I. Efectuăm calculele în ordinea în care sunt scrise:

$$\underbrace{(-31)+(+12)}_{-19}+(+35)+(-18)+(-3)=\underbrace{(-19)+(+35)}_{+16}+(-18)+(-3)$$
$$=\underbrace{(+16)+(-18)}_{-2}+(-3)$$
$$=(-2)+(-3)$$
$$=-5.$$

Metoda II. Efectuăm calculele grupând termenii (negativi și pozitivi):

$$(-31)+(+12)+(+35)+(-18)+(-3)=\underbrace{(-31)+(-18)+(-3)}_{-52}+\underbrace{(+12)+(+35)}_{47}$$
$$=(-52)+47$$
$$=-5.$$

Aplic

1. Calculează:

a) (−5) + (−10); e) (+15) + (−10); i) (−8) + (+13); m) (−5) + (+5);
b) (−8) + (−3); f) (+8) + (−2); j) (−15) + (+3); n) (−9) + 0;
c) (−9) + (−5); g) (+4) + (−8); k) (−2) + (+6); o) (+4) + (−4);
d) (−4) + (−14); h) (+2) + (−6); l) (−7) + (+1); p) 0 + (+3).

2. Transcrie și completează tabelele:

a	b	c	a + b	(a + b) + c	b + c	(|a| + b) + c	|a| + a	|b| + (a + c)
−4	−3	−5						
−2	+6	−10						
+5	−3	−1						
−8	0	−9						
−2	−2	+2						

x	8	−6	−8	7	0	−1
y	10	1	−2	−7	−5	−9
$\|x + y\|$						
$\|x\| + \|y\|$						
$x + \|y\|$						
$\|x\| + y$						

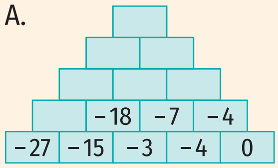
3. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține propoziții adevărate.

a) (−2) + □ = 3 + (−2);
b) □ + (−7) = 0;
c) (−7) + [(−3) + □] = [(−7) + □] + (−4);
d) (−6) + (−8) > (−6) + □;
e) (−5) + (−9) < □ + (−9);
f) (−8) + □ < □ + 3.

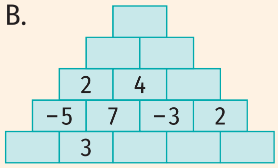
JOC

Găsește regula și completează!

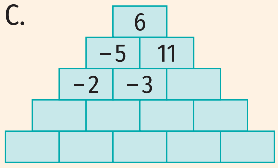
A.



B.



C.



4. Fără a efectua calculele, completează casetele cu unul dintre semnele <, >, pentru a obține propoziții adevărate:

a) $(-16) + 25 \square 25 + (-9)$;
b) $(-31) + (-14) \square (-30) + (-12)$;
c) $(-12) + 30 \square (+21) + (-16)$;
d) $(-5) + (-8) \square (-3) + (-7)$.

5. Calculează, folosind proprietățile adunării numerelor întregi:

a) $(-8) + (-5) + (+11)$;
b) $(+7) + (-10) + (-4)$;
c) $(-18) + (-10) + (-12)$;
d) $(+14) + (+24) + (-40)$;
e) $(-15) + (-12) + (+20) + (-8)$;
f) $(-214) + (-104) + (+100) + (+200)$;
g) $(+32) + (-15) + (+118) + (-35)$;
h) $(+86) + (+11) + (-16) + (-141)$.

6. a) Calculează $y + x$, știind că x și y sunt numere întregi și $x + y = -24$.

b) Calculează $x + 5 + y$, știind că x și y sunt numere întregi și $x + y = -15$.

c) Calculează $x + (-21) + y + 12$, știind că x și y sunt numere întregi și $x + y = 2$.

d) Calculează $x + y + 10 + z$, știind că x, y și z sunt numere întregi, $x = -18$ și $y + z = -25$.

7. a) Calculează suma a cinci numere întregi consecutive, știind că unul dintre ele este -4. Scrie toate variantele posibile.

b) Calculează suma a șase numere întregi consecutive, știind că unul dintre ele este 1. Scrie toate variantele posibile.

8. Scrie numărul 5 ca:

a) suma a două numere întregi pozitive;

b) suma a două numere întregi, unul dintre ele fiind negativ.

9. Scrie numărul -7 ca:

a) suma a două numere întregi negative;

b) suma a două numere întregi, unul dintre ele fiind pozitiv.

10. Calculează suma elementelor mulțimii $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 2\}$.

11. Calculează suma elementelor mulțimii $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}_-, -5 < x \leq 4\}$.

12. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 5\}$. Calculează suma elementelor mulțimii A.

13. a) Calculează $x + y$, știind că x și y sunt numere întregi, $|x| = 4$ și $|y| = 13$. Scrie toate variantele posibile.

b) Calculează $x + y$, știind că x și y sunt numere întregi, $|x| = 5$ și $|y| < 3$. Scrie toate variantele posibile.

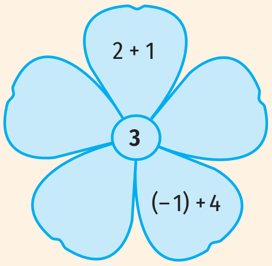
14. Se consideră mulțimea $A = \{-7, -3, -1, 1, 2, 5\}$.

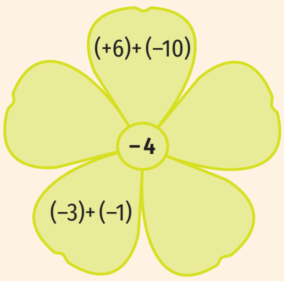
a) Scrie trei submulțimi cu două elemente ale mulțimii A, astfel încât suma elementelor fiecăreia dintre acestea să fie un număr întreg negativ.

b) Scrie două submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A, astfel încât suma elementelor fiecăreia dintre acestea să fie un număr întreg pozitiv.

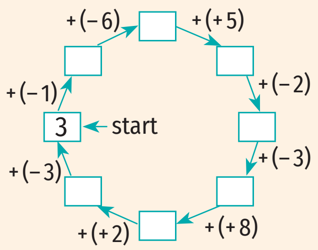
JOC

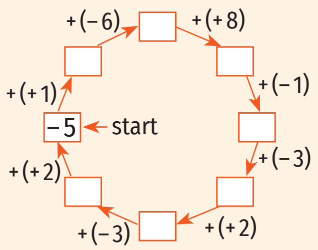
A. Completează corespunzător petalele florilor!





B. Completează casetele:





3. Scăderea numerelor întregi

Descopăr

Orașul Amsterdam, capitala Țărilor de Jos, este situat la 12 m sub nivelul mării, iar orașul Roșiorii de Vede din România este situat la 32 m deasupra nivelului mării. Care este diferența de altitudine între orașul Roșiorii de Vede și orașul Amsterdam?

Observație

Analizând figura 1, observăm că 32 − (−12) = 32 + 12 = 44.

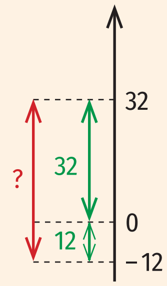


Figura 1

Învăț

Diferența numerelor întregi *a* și *b* este egală cu suma dintre numărul întreg *a* și opusul numărului întreg *b*.

EXEMPLE:

1. (+5) − (+8) = (+5) + (−8) = −3;
2. (+10) − (+6) = (+10) + (−6)= +4 = 4;
3. (−9) − (+3) = (−9) + (−3) = −12;
4. (−7) − (−2) = (−7) + (+2) = −5.

OBSERVAȚII

1. Dacă a și b sunt două numere întregi, $b \neq 0$, atunci $a - b = a + (-b)$.
2. Diferența a două numere întregi este un număr întreg.

Aplic

1. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) (+2) − (+4) = 2; ☐ d) (−2) − (−5) = 7; ☐ g) (+5) − (−4) = 9; ☐

b) (+7) − (+1) = 6; ☐ e) (−7) − 1 = −6; ☐ h) (+1) − 2 = 3; ☐

c) (+3) − (+4) = 1; ☐ f) (−3) − (−5) = −8; ☐ i) (−2) − (−4) = 2. ☐

2. Asociază fiecărei litere din coloana A numărul corespunzător rezultatului corect din coloana B. *Exemplu: a) a-2.*

a)

A.	B.
a. (+3) − (+5)	1. 8
b. (−3) − (−5)	2. −2
c. (+3) − (−5)	3. 2
d. (−3) − (+5)	4. 3
e. 0 − (−3)	5. −5
f. 0 − (+5)	6. 5
	7. −8

b)

A.	B.
a. (−5) − (−1)	1. 11
b. (+2) − (+7)	2. −10
c. (+8) − (−3)	3. −3
d. (−3) − (−6)	4. −9
e. (−1) − (+9)	5. −5
f. (−5) − (+4)	6. −4
	7. 3

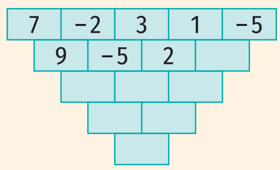
3. Compară numerele întregi a și b.

a) $a = (-2) - (-3)$, $b = (-3) - (+4)$;
b) $a = (-5) - (+7)$, $b = (-7) - (-5)$;
c) $a = (-10) - (-10)$, $b = (+10) - (-10)$;
d) $a = (-1) - (+3)$, $b = (+2) - (-2)$;
e) $a = (-5) - (-2)$, $b = (+5) - (-2)$;
f) $a = (-3) + (-2)$, $b = (-3) - (+2)$.

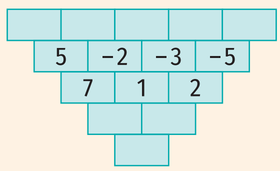
JOC

Găsește regula și completează!

A.



B.



4. Transcrie și completează tabelul:

a	b	c	a - b	a - c	c - b	c - |a|	|a| - a	|b| - |c|
-8	-3	+7						
-2	+15	-11						
+6	-4	-2						
-19	+21	-2						
-3	+3	-2						

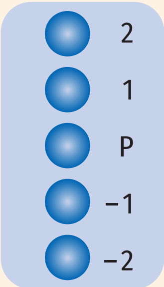


Figura 2

5. Un centru comercial are două niveluri de parcare subterană, parter și două niveluri supraterane. Butoanele liftului sunt marcate ca în figura 2.

a) Dacă urcăm de la nivelul -2 la nivelul 1, câte niveluri am urcat?

b) Dacă suntem la nivelul 2 și coborâm 3 niveluri, la ce nivel vom ajunge?

c) Câte niveluri trebuie să coborâm de la etajul 2 la etajul -2?

6. În tabelul următor sunt înregistrate temperaturile măsurate la aceeași oră pe parcursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	-4°C	-2°C	-5°C	0°C	3°C	1°C	-5°C

Completează:

a) Temperatura înregistrată luni este cu ...°C mai ... decât temperatura înregistrată vineri.

b) Temperatura înregistrată marți este cu ...°C mai ... decât temperatura înregistrată duminică.

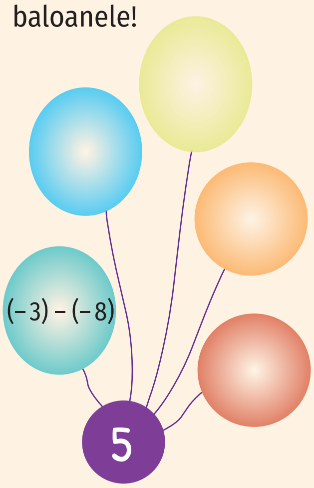
c) Temperatura înregistrată joi este cu ...°C mai ... decât temperatura înregistrată miercuri.

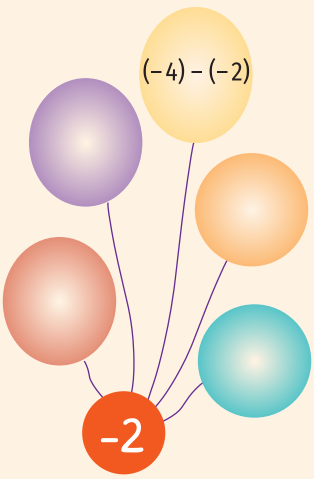
d) Diferența dintre temperatura înregistrată miercuri și temperatura înregistrată sâmbătă este egală cu ... °C.

e) Diferența dintre cea mai mare temperatură și cea mai mică temperatură înregistrate este egală cu ... °C.

JOC

Completează baloanele!





7. Scrie numărul 4 ca:

a) diferența a două numere întregi pozitive;

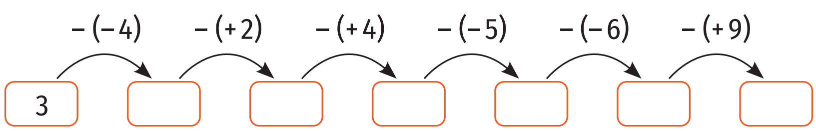
b) diferența a două numere, unul dintre ele fiind negativ.

8. Scrie numărul −9 ca:

a) diferența a două numere întregi negative;

b) diferența a două numere întregi, unul dintre ele fiind negativ.

9. Completează casetele!



4. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți

Descopăr

Alin a împrumutat câte 3 lei de la cei doi prieteni ai săi, Matei și Vlad. Ce datorie are Alin?

Rezolvare:

Pentru a afla ce datorie are Alin trebuie să înmulțim numărul prietenilor de la care a împrumutat bani cu suma luată de la fiecare. Vom obține 2 · 3 lei = 6 lei. Așadar, Alin are o datorie de 6 lei.

OBSERVAȚIE

Știm că, pentru a nota o datorie, putem folosi semnul „–”.
Deducem că $2 \cdot (-3) = -6$.

Învăț

Prin înmulțirea numerelor întregi *a* și *b* se obține un număr întreg, notat *a* · *b*, numit produsul numerelor *a* și *b*. Numerele *a* și *b* se numesc factorii produsului.

- **Produsul a două numere întregi, ambele pozitive sau ambele negative, este egal cu produsul modulelor acestora.**

EXEMPLE:

1. $(+5) \cdot (+4) = |+5| \cdot |+4| = 5 \cdot 4 = 20$;
2. $(-6) \cdot (-3) = |-6| \cdot |-3| = 6 \cdot 3 = 18$.

- **Pentru a calcula produsul a două numere întregi, unul pozitiv și unul negativ, înmulțim modulele acestora și punem „–” la rezultat.**

EXEMPLE:

1. $(-10) \cdot (+2) = -(|-10| \cdot |+2|) = -(10 \cdot 2) = -20$;
2. $(+3) \cdot (-4) = -(|+3| \cdot |-4|) = -(3 \cdot 4) = -12$.

OBSERVAȚII

1. Produsul numerelor întregi nenule a și b este egal cu $|a| \cdot |b|$, dacă a și b au același semn sau $-|a| \cdot |b|$, dacă a și b au semne diferite.
2. Produsul a două numere întregi este pozitiv dacă numerele au același semn și este negativ dacă numerele au semne diferite.
3. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, pentru oricare număr întreg a.

Semnul numărului *a*	Semnul numărului *b*	Semnul numărului *a* · *b*
+	+	+
–	–	+
–	+	–
+	–	–

Proprietățile înmulțirii numerelor întregi

1. **Înmulțirea numerelor întregi este comutativă** (produsul a două numere întregi nu se modifică dacă schimbăm locul factorilor):

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}, \text{ pentru oricare numere întregi } a \text{ și } b.$$

EXEMPLU: $(-2) \cdot (+5) = (+5) \cdot (-2)$

2. **Înmulțirea numerelor întregi este asociativă** (produsul a trei numere întregi nu se modifică dacă grupăm factorii în moduri diferite):

$$\boldsymbol{a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c}, \text{ pentru oricare numere întregi } a, b \text{ și } c.$$

EXEMPLU: $\underbrace{(-3) \cdot \underbrace{[(-6) \cdot (+2)]}_{-12}}_{36} = \underbrace{\underbrace{[(-3) \cdot (-6)]}_{18} \cdot (+2)}_{36}$

3. **Numărul 1 este element neutru**:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \text{ pentru oricare număr întreg } a.$$

EXEMPLU: $(-5) \cdot 1 = 1 \cdot (-5) = -5$

4. **Înmulțirea numerelor întregi este distributivă față de adunare și de scădere**:

$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$, pentru oricare numere întregi a, b și c;

$\boldsymbol{(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a}$, pentru oricare numere întregi a, b și c;

$\boldsymbol{a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c}$, pentru oricare numere întregi a, b și c;

$\boldsymbol{(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a}$, pentru oricare numere întregi a, b și c.

EXEMPLE:

1. $\underbrace{(-2) \cdot \underbrace{[(+4) + (-3)]}_{1}}_{-2} = \underbrace{\underbrace{(-2) \cdot (+4)}_{-8} + \underbrace{(-2) \cdot (-3)}_{6}}_{-2}$;

2. $\underbrace{\underbrace{[(+3) + (-5)]}_{-2} \cdot (+2)}_{-4} = \underbrace{\underbrace{(+3) \cdot (+2)}_{+6} + \underbrace{(-5) \cdot (+2)}_{-10}}_{-4}$;

3. $\underbrace{(+4) \cdot \underbrace{[(-3) - (-2)]}_{-1}}_{-4} = \underbrace{\underbrace{(+4) \cdot (-3)}_{-12} - \underbrace{(+4) \cdot (-2)}_{-8}}_{-4}$;

4. $\underbrace{\underbrace{[(-5) - (-2)]}_{-3} \cdot (-3)}_{9} = \underbrace{\underbrace{(-5) \cdot (-3)}_{+15} - \underbrace{(-2) \cdot (-3)}_{6}}_{9}$.

OBSERVAȚIE

Dacă a, b, c sunt numere întregi, prin produsul $a \cdot b \cdot c$ vom înțelege $a \cdot (b \cdot c)$ sau $(a \cdot b) \cdot c$.

De exemplu, pentru a calcula $2 \cdot 3 \cdot (-4)$, efectuăm:

$2 \cdot [3 \cdot (-4)] = 2 \cdot (-12) = -24$

sau

$(2 \cdot 3) \cdot (-4) = 6 \cdot (-4) = -24$.

Aplic

1. Calculează:

a) $(+5) \cdot (+2)$; b) $(+10) \cdot (+3)$; c) $(+6) \cdot (+4)$; d) $(-2) \cdot (-20)$; e) $(-6) \cdot (-3)$; f) $(-4) \cdot (-5)$; g) $(+3) \cdot (-4)$; h) $(+5) \cdot (-3)$; i) $(+2) \cdot (-10)$; j) $(-6) \cdot (+5)$; k) $(-9) \cdot (+3)$; l) $(-3) \cdot (+2)$.

2. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $(-2) \cdot (+4) = (+2) \cdot (-4)$; $\square$

b) $(-7) \cdot 0 = -7$; $\square$

c) $(+3) \cdot (-4) < (-3) \cdot (-4)$; $\square$

d) $(-10) \cdot (+4) > 40$; $\square$

e) $(+3) \cdot (-2) < (+3) + (-2)$; $\square$

f) $(+8) \cdot (-5) > (-5) - (+8)$; $\square$

g) $6 \cdot (-4) < (-6) \cdot (+4)$; $\square$

h) $(-2) \cdot 0 > 2 \cdot 0$. $\square$

3. Completează casetele cu numere întregi astfel încât să obții enunțuri adevărate:

a) $(-10) \cdot \square = 0$;

b) $\square \cdot (-15) = -15$;

c) $23 \cdot (-4) = (-4) \cdot \square$;

d) $(-9) \cdot [8 + (-5)] = (-9) \cdot 8 + \square \cdot (-5)$;

e) $10 \cdot [\square - (-6)] = \square \cdot (-3) - \square \cdot (-6)$;

f) $[(-6) - \square] \cdot (-2) = \square \cdot \square - \square \cdot \square$.

4. Completează casetele cu unul dintre semnele <, >, pentru a obține propoziții adevărate:

a) $2 \cdot (-5) \square 4 \cdot (-5)$;

b) $(-4) \cdot 8 \square (-4) \cdot 3$;

c) $(-3) \cdot (-6) \square (-3) \cdot (-8)$;

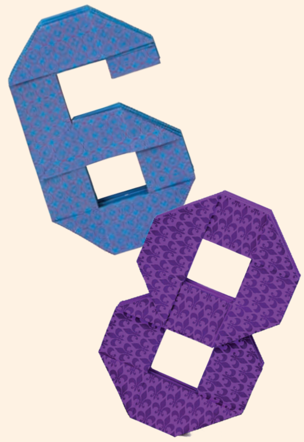
d) $7 \cdot 5 \square 7 \cdot 3$;

e) $(-2) \cdot 5 \square (-5) \cdot 3$;

f) $4 \cdot 5 \square (-4) \cdot (-6)$.

5. Transcrie și completează tabelul.

a	b	c	a · b	a · (b + c)	(b − c) · a	|a| · c	a · (b · c)	a · (|b| − c)
−5	−2	+8						
−6	+10	−12						
+7	−9	−5						
−20	+14	−13						
−4	+4	−8						



6. Efectuează, grupând convenabil factorii:

a) (+5) · (−25) · (−2) · (−10) · (+4);
c) (+25) · (+15) · (+8) · (−20);
b) (+4) · (−8) · (−6) · (+25) · (−5);
d) (−12) · (−4) · (−20) · (+ 5).

7. Calculează, scriind convenabil unul dintre factori și folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere:

a) (−99) · 54;
c) (−18) · (−99);
e) 1 001 · (−17);
b) 23 · (−101);
d) (−999) · 16;
f) (−101) · (−15).

INDICAȚIE:

a) (−99) · 54 =
(1 − 100) · 54 =
1 · 54 − 100 · 54 =
54 − 5 400 = − 5 346.

8. a) Calculează $a \cdot (b \cdot c)$, știind că a, b, c sunt numere întregi, $a \cdot b = -27$ și $c = -15$.

b) Calculează $(-2) \cdot a \cdot (5 \cdot b \cdot c)$, știind că a, b, c sunt numere întregi, $c \cdot a = 125$ și $b = -8$.

9. Calculează:

a) $(-5) \cdot a + (-5) \cdot b$, știind că a și b sunt numere întregi și $a + b = -30$;

b) $12 \cdot a - 12 \cdot b$, știind că a și b sunt numere întregi și $a - b = -50$;

c) Calculează $a \cdot b + a \cdot c$, știind că a, b, c sunt numere întregi, $a = -4$ și $b + c = 25$;

d) Calculează $a \cdot b - a \cdot c$, știind că a, b, c sunt numere întregi, $a = -16$ și $b - c = -16$;

e) $15 \cdot a - 9 \cdot b + 8$, știind că a și b sunt numere întregi și $5 \cdot a - 3 \cdot b = -15$.

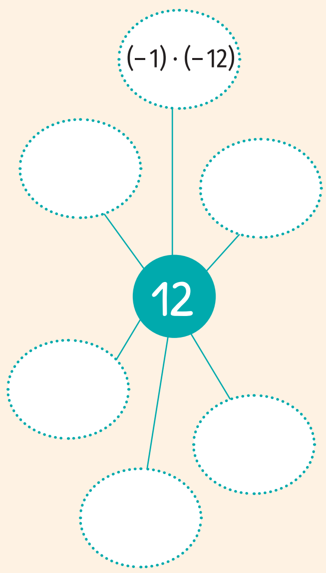
10. a) Produsul a două numere întregi este 10. Care sunt aceste numere? Scrie toate variantele!

b) Produsul a două numere întregi este 8. Care este cea mai mică și care este cea mai mare valoare pe care o poate lua suma acestor numere?

c) Produsul a trei numere întregi este −15. Care sunt aceste numere? Scrie toate variantele!

JOC

Completează!



11. Determină suma a trei numere întregi consecutive al căror produs este egal cu 0. Analizează toate cazurile.

12. Calculează produsul elementelor mulțimii $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$.

13. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 < |x| \le 2\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \le x \le 1\}$. Determină cardinalul mulțimii $C = \{x \mid x = a \cdot b, a \in A \text{ și } b \in B\}$.

14. Se consideră mulțimea $A = \{-5, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

a) Scrie două submulțimi cu două elemente ale mulțimii A, cu proprietatea că produsul elementelor fiecăreia este număr întreg negativ.

b) Scrie două submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A, cu proprietatea că produsul elementelor fiecăreia este număr întreg pozitiv.

c) Scrie două submulțimi cu cel puțin două elemente ale mulțimii A, cu proprietatea că produsul elementelor fiecăreia este egal cu 0.

5. Împărțirea numerelor întregi

Descopăr

1. Calculează:

a) $4 \cdot 10$; b) $(-4) \cdot 10$; c) $4 \cdot (-10)$; d) $(-4) \cdot (-10)$.

2. Folosind înmulțirile de la exercițiul 1, completează casetele cu numere întregi pentru a obține propoziții adevărate:

a) $40 : 4 = \square$; $40 : 10 = \square$; c) $(-40) : (-10) = \square$; $(-40) : 4 = \square$;

b) $(-40) : (-4) = \square$; $(-40) : 10 = \square$; d) $40 : (-4) = \square$; $40 : (-10) = \square$.

Formulează o concluzie privind semnul câtului împărțirii a două numere întregi.

Învăț

Fie *a* și *b* două numere întregi astfel încât $b \neq 0$ și $|a| \,\vdots\, |b|$. Câtul împărțirii numărului *a* la numărul *b* este numărul întreg *c* pentru care $a = b \cdot c$. În acest caz, *a* se numește deîmpărțit, iar *b* se numește împărțitor.

- **Dacă *a* și *b* sunt ambele pozitive sau ambele negative, atunci $a : b = |a| : |b|$.**

EXEMPLE:

1. $(+35) : (+7) = |+35| : |+7| = 35 : 7 = 5$; 2. $(-10) : (-2) = |-10| : |-2| = 10 : 2 = 5$;

- **Dacă *a* și *b* sunt unul pozitiv, și unul negativ, atunci $a : b = -(|a| : |b|)$.**

EXEMPLE:

1. $(+28) : (-4) = -(|+28| : |-4|) = -(28 : 4) = -7$;
2. $(-25) : (+5) = -(|-25| : |+5|) = -(25 : 5) = -5$.

ATENȚIE!

- $0 : a = 0$, pentru oricare număr întreg nenul *a*.
- Împărțirea la 0 nu are sens.

OBSERVAȚIE

Dacă *a* și *b* sunt două numere întregi, astfel încât $b \neq 0$ și $|a| \,\vdots\, |b|$, atunci câtul împărțirii numărului *a* la numărul *b* este:

– un număr întreg pozitiv, dacă *a* și *b* au același semn,

– 0, dacă $a = 0$,

– un număr întreg negativ, dacă *a* și *b* au semne diferite.

Semnul numărului *a*	Semnul numărului *b*	Semnul numărului *a* : *b*
+	+	+
–	–	+
–	+	–
+	–	–

Aplic

1. Fără a efectua calculele, scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $(-56) : (+2) < 0$; □ d) $(-36) : 4 > 0$; □ g) $(-38) : (-2) < 0$; □

b) $0 : (-7) > 0$; □ e) $(-8) : (-1) > 0$; □ h) $(-2) : 1 < 0$; □

c) $35 : (-5) > 0$; □ f) $56 : (-4) < 0$; □ i) $(-2) : (-2) > 0$. □

2. Calculează:

a) (−24) : (+4); e) (−57) : (−19); i) 55 : (−5); m) (+63) : (+9);
b) (−27) : 3; f) (−36) : (−18); j) 49 : (−7); n) (+81) : (+27);
c) (−60) : (+12); g) (−64) : (−4); k) 42 : (−14); o) 126 : (+9);
d) (−50) : 10; h) (−63) : (−7); l) 72 : (−18); p) 512 : 16.

3. Completează casetele cu unul dintre semnele <, =, >, pentru a obține propoziții adevărate:

a) (−160) : 40 ☐ (−250) : (−5);
b) (−324) : (−9) ☐ (−245) : (−7);
c) (−126) : 3 ☐ (+252) : (−6);
d) (−68) : 17 ☐ 145 : (−29);
e) 480 : (−12) ☐ (−3 600) : (+9);
f) (−95) : (−5) ☐ 19 : (+1).

4. Transcrie tabelele și completează-le.

a	−20	−15	−18	−45	27	30	+80	63	0
b	5	3	−6	−9	−3	−6	+10	7	−10
|a| : |b|									
a : b									
|a : b|									

x	−16	32	−30	−24	72	100	−100	63	0
y	−4	−8	6	+4	−6	−5	−10	−1	15
x · y									
x : y									

m	−96	16	−300			56	−60		
n	−2			5	−6			−15	21
m · n		−64	600	−125	72				
m : n						−4	20	7	−3

5. Calculează $x : y$.

a) $x = (-20) : (-10)$, $y = 18 : (-9)$;
b) $x = (-17) + (-2) + (-1)$, $y = (-8) + (+2) + (+2)$;
c) $x = 17 + (-16)$, $y = (-15) + (-14) + |-18|$;
d) $x = (-20) : (-5)$, $y = |5| + (-3) + |-2|$.

6. Completează casetele.

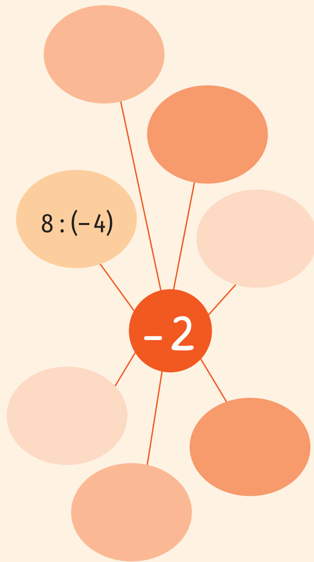
a) $\boxed{24} \xrightarrow{:(-3)} \boxed{} \xrightarrow{+4} \boxed{} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{:(-1)} \boxed{}$;

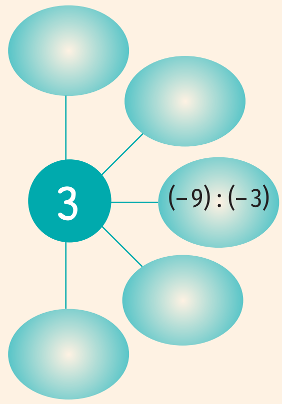
b) $\boxed{-18} \xrightarrow{:\boxed{}} \boxed{-9} \xrightarrow{:(-3)} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 5} \boxed{} \xrightarrow{+(-12)} \boxed{} \xrightarrow{:1} \boxed{}$;

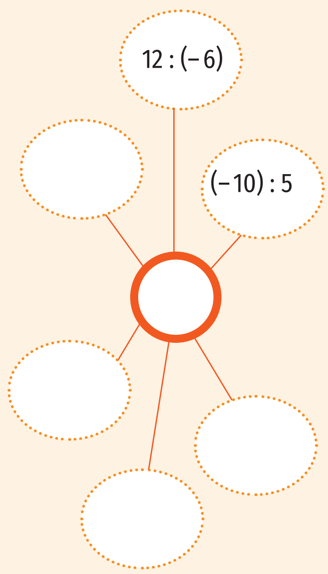
c) $\boxed{128} \xrightarrow{:(-4)} \boxed{} \xrightarrow{:(-2)} \boxed{} \xrightarrow{:4} \boxed{} \xrightarrow{:(-2)} \boxed{} \xrightarrow{:\boxed{}} \boxed{-1}$.

JOC

Completează!







6. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri

Îmi amintesc

1. Calculează:

a) 3^4; b) 5^2; c) 0^3; d) 1^5; e) 2^0.

2. Scrie sub forma unei puteri:

a) $3^2 \cdot 3^5$; b) $5^9 : 5^7$; c) $(3^2)^4$; d) $4^5 \cdot 3^5$; e) $15^8 : 5^8$.

Învăț

Dacă a este un număr întreg și n este un număr natural, $n > 1$, atunci $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ se notează a^n (se citește „a la puterea n") și reprezintă puterea a n-a a numărului întreg a.

În acest caz, a se numește **bază**, iar n se numește **exponent**.

a^n

exponentul puterii

puterea

baza puterii

Prin convenție, $\mathbf{a^0 = 1}$, pentru oricare număr întreg nenul a,
$\mathbf{a^1 = a}$, pentru oricare număr întreg a.

Nu se definește 0^0.

EXEMPLE:

1. $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$;
2. $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$;
3. $(+5)^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$;
4. $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;
5. $(-4)^0 = 1$;
6. $(-7)^1 = -7$.

OBSERVAȚII

1. Dacă a este un număr întreg negativ, atunci $a^n > 0$, pentru oricare număr natural par n.

2. Dacă a este un număr întreg negativ, atunci $a^n < 0$, pentru oricare număr natural impar n.

Reguli de calcul cu puteri

Dacă a și b sunt numere întregi nenule, atunci:

$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$, pentru oricare numere naturale m și n;

$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$, pentru oricare numere naturale m și n, $m \geq n$;

$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$, pentru oricare numere naturale m și n;

$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$, pentru oricare număr natural n.

Dacă a și b sunt numere întregi nenule, și $|a| \vdots |b|$, atunci

$\mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n}$, pentru oricare număr natural n.

EXEMPLE:

1. $(-3)^6 \cdot (-3)^3 = (-3)^{6+3} = (-3)^9$;
2. $(-2)^9 : (-2)^7 = (-2)^{9-7} = (-2)^2$;
3. $[(-2)^3]^4 = (-2)^{3 \cdot 4} = (-2)^{12}$;
4. $(-2)^4 \cdot (-5)^4 = [(-2) \cdot (-5)]^4 = 10^4$;
5. $(-3)^2 \cdot 4^2 = [(-3) \cdot 4]^2 = (-12)^2$;
6. $(-8)^3 : (-4)^3 = [(-8) : (-4)]^3 = 2^3$;
7. $(-10)^5 : 5^5 = [(-10) : 5]^5 = (-2)^5$.

Exerciții rezolvate

1. Calculează a + b + c + d, știind că $a = (-5)^2$, $b = (-2)^3$, $c = (-3)^0$, $d = (-4)^1$.

Rezolvare:

$a = (-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$, $c = (-3)^0 = 1$,

$b = (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, $d = (-4)^1 = -4$.

$a + b + c + d = 25 + (-8) + 1 + (-4) = 14$.

2. Scrie ca putere cu baza −3 următoarele numere: 1, −27, 81, −3, −243, 3^4, -3^7, $(-3^2)^{20}$.

Rezolvare:

$1 = (-3)^0$, $81 = (-3)^4$, $-243 = (-3)^5$, $-3^7 = (-3)^7$,

$-27 = (-3)^3$, $-3 = (-3)^1$, $3^4 = (-3)^4$,

$(-3^2)^{20} = [(-1) \cdot 3^2]^{20} = (-1)^{20} \cdot (3^2)^{20} = 1 \cdot 3^{2 \cdot 20} = 3^{40} = (-3)^{40}$.

3. Scrie sub forma unei puteri folosind regulile de calcul cu puteri:

a) $(-3)^4 \cdot (-3)^6 \cdot (-3)^5$; b) $25^{10} \cdot (-5)^{30}$; c) $(-27)^7 : (-3)^{19}$; d) $[(-8)^5]^3 : (-4)^{20}$.

Rezolvare:

a) $(-3)^4 \cdot (-3)^6 \cdot (-3)^5 = (-3)^{4+6+5} = (-3)^{15}$;

b) Scriem $25 = 5^2$ și obținem $25^{10} = (5^2)^{10} = 5^{2 \cdot 10} = 5^{20}$.

Cum $25^{10} = 5^{20}$ și $(-5)^{30} = 5^{30}$, rezultă $25^{10} \cdot (-5)^{30} = 5^{20} \cdot 5^{30} = 5^{20+30} = 5^{50}$.

c) Scriem $-27 = (-3)^3$ și obținem $(-27)^7 = [(-3)^3]^7 = (-3)^{3 \cdot 7} = (-3)^{21}$.

Așadar, $(-27)^7 : (-3)^{19} = (-3)^{21} : (-3)^{19} = (-3)^{21-19} = (-3)^2$.

d) $[(-8)^5]^3 = (-8)^{5 \cdot 3} = (-8)^{15} = [(-2)^3]^{15} = (-2)^{3 \cdot 15} = (-2)^{45}$,

$(-4)^{20} = [(-1) \cdot 4]^{20} = (-1)^{20} \cdot 4^{20} = 1 \cdot 4^{20} = 4^{20} = [(-2)^2]^{20} = (-2)^{2 \cdot 20} = (-2)^{40}$.

Astfel, $[(-8)^5]^3 : (-4)^{20} = (-2)^{45} : (-2)^{40} = (-2)^{45-40} = (-2)^5$.

Aplic

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $(-3)^x = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, atunci x este egal cu ...

b) Rezultatul calculului $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ este egal cu ...

c) Dacă $[(-3)^a]^2 = 1$, atunci a este egal cu ...

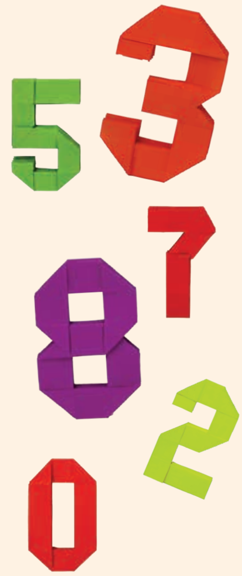
d) Dacă $a = (-20)^4$ și $b = 10^4$, atunci a : b este egal cu ...

2. Transcrie și completează tabelul de mai jos:

a	−4	−5	10	−6	−1	+5	−2	3	−6	−10
n	2	3	4	3	20	4	8	3	4	1
a^n										
$(-a)^n$										
$-a^n$										

3. a) Calculează și apoi ordonează crescător numerele: −33, 75, $-(-3)^2$, $(-4)^0$, $(2^3)^2$, $[(-3)^2]^2$, $(-2)^5$, 0.

b) Calculează și apoi ordonează descrescător numerele: −1, $(-800)^1$, $-(-9)^3$, $(-3)^4$, $(2^5)^2$, $[(-1)^2]^{20}$, $(-3)^5$, 1 000.



ATENȚIE!

$-n^2 \neq (-n)^2$, pentru oricare număr întreg pozitiv n.

De exemplu,

$-5^2 \neq (-5)^2$

$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

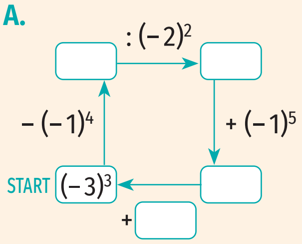
ȘTIAȚI CĂ...?

- Notația actuală a exponenților întregi pozitivi a fost utilizată pentru prima oară în anul 1637 de matematicianul francez René Descartes în „La Geometrie", carte în care autorul a stabilit echivalenţe între operaţiile algebrice şi construcţiile geometrice.

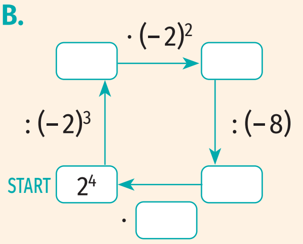
JOC

Completează!

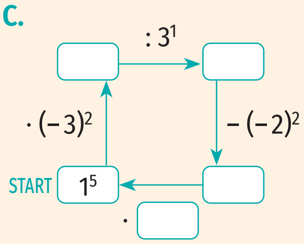
A.



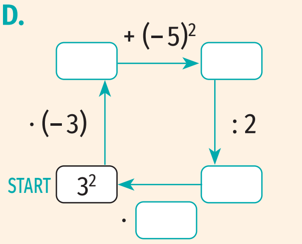
B.



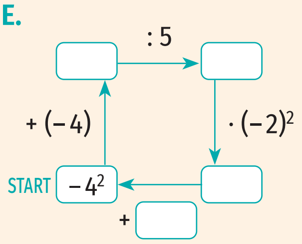
C.



D.



E.



4. Calculează a și b și scrie în casetă numărul mai mare:

a) $a = (-3)^4$, $b = (-3)^3$; ☐
b) $a = 2^4$, $b = (-2)^5$; ☐
c) $a = (-5)^2$, $b = (-5)^4$; ☐
d) $a = (-6)^0$, $b = (-6)^1$; ☐
e) $a = (-1)^{2023}$, $b = 0^{2023}$; ☐
f) $a = -10^2$, $b = (-10)^2$. ☐

5. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $3^7 \cdot 3^5$;
b) $(-2)^2 \cdot (-2)^6$;
c) $(-5)^3 \cdot (-5)^4 \cdot (-5)^5$;
d) $(-7) \cdot (-7)^3 \cdot (-7)^5$;
e) $8^{10} : 8^8$;
f) $(-5)^9 : (-5)^7$;
g) $(-6)^{15} : (-6)^{10}$;
h) $(-10)^4 : (-10)$;
i) $(2^3)^4$;
j) $[(-3)^2]^5$;
k) $[(-4)^2]^0$;
l) $[(-5)^3]^6$.

6. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $2^3 \cdot 5^3$;
b) $(-10)^4 \cdot (-3)^4$;
c) $(-4)^3 \cdot 6^3$;
d) $7^5 \cdot (-2)^5$;
e) $100^3 : 25^3$;
f) $(-125)^4 : (-5)^4$;
g) $(-3\,000)^7 : 50^7$;
h) $729^{10} : (-27)^{10}$.

7. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $(-3)^7 < 0$; ☐
b) $(-5)^{10} > 0$; ☐
c) $(-3)^7 = 3^7$; ☐
d) $2^6 = (-2)^6$; ☐
e) $(-2)^8 = -4^4$; ☐
f) $(-3)^6 = (-27)^2$; ☐
g) $(-25)^3 = (-125)^2$; ☐
h) $(-16)^6 = (-32)^{12}$. ☐

8. Scrie ca putere cu baza −2 numerele: $1, 4, -8, -128, -2, 64, 2^{10}, -2^5, (-2^3)^{10}, (-2^3)^3$.

9. Scrie ca putere cu baza 5 următoarele numere: $1, 125, (-5)^4, (5^2)^3, [(-5)^2]^5, 5, [(-5)^3]^4$.

10. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $2^5 \cdot 4^6$;
b) $(-2)^7 \cdot (-8)^5$;
c) $(-3)^8 \cdot 9^3$;
d) $5^4 \cdot (-25)^6$;
e) $81^2 \cdot (-3)^5$;
f) $27^5 \cdot (-3)^6$;
g) $(-5)^7 \cdot (-125)^3$;
h) $2^{13} \cdot (-16)^6$;
i) $5^{20} : 25^8$;
j) $(-7)^8 : (-49)^2$;
k) $(-125)^{10} : (-5)^4$;
l) $64^3 : (-4)^6$;
m) $(-32)^7 : (-2)^{33}$;
n) $(-100)^8 : 10^{12}$;
o) $(-32)^{15} : (-2)^{59}$.

11. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $8^5 \cdot 4^{10}$;
b) $(-27)^{10} \cdot 9^5$;
c) $(-8)^{20} \cdot 16^{10}$;
d) $81^4 \cdot (-27)^{10}$;
e) $(-125)^{15} \cdot (-625)^8$;
f) $5^4 \cdot [(-25)^2]^3 \cdot (-125)^5$;
g) $1000^{10} : 100^{15}$;
h) $(-100)^4 \cdot (-1\,000)^2 \cdot 1\,000\,000$;
i) $(-128)^4 : 2^{19}$;
j) $64^{15} : (-16)^{20}$;
k) $(-256)^{15} : (-64)^{19}$;
l) $(-625)^{10} : (-125)^{12}$;
m) $243^4 : (-9)^8$;
n) $(-64)^{20} : (-32)^{14}$.

7. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Descopăr

Calculează:

a) $3\cdot 2^4-12\cdot 15-246:41+10$; b) $3\cdot[(2^4-12\cdot 15-246):41+10]$.

Învăț

- Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I, înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul II, iar ridicarea la putere este operație de ordinul III.
- Dacă într-un calcul aritmetic fără paranteze se întâlnesc numai operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise.

EXEMPLE:

1. $\underbrace{321-(-462)}_{783}+147=783+147=930$;
2. $\underbrace{108-205}_{-97}-24=(-97)-24=-121$;
3. $\underbrace{(-240):6}_{-40}\cdot(-4)=(-40)\cdot(-4)=160$;
4. $\underbrace{1120:(-40)}_{-28}:7=(-28):7=-4$.

- Dacă într-un calcul aritmetic fără paranteze se întâlnesc operații de ordine diferite, se efectuează întâi operațiile de ordinul III, apoi operațiile de ordinul II și, după acestea, operațiile de ordinul I.

EXEMPLU:

$156:(-12)+3\cdot\underbrace{(-2)^4}_{16}-40=\underbrace{156:(-12)}_{-13}+\underbrace{3\cdot 16}_{48}-40=\underbrace{(-13)+48}_{35}-40=35-40=-5.$

- Dacă într-un calcul aritmetic se întâlnesc paranteze rotunde, paranteze drepte și acolade, se efectuează întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele drepte și apoi operațiile din acolade. După efectuarea calculelor din parantezele rotunde, acoladele devin paranteze drepte, iar parantezele drepte devin paranteze rotunde.

EXEMPLU:

$27^2:(-3)^4-\{35+2\cdot[5-(\underbrace{2^3}_{8}\cdot 5+10)]\}=27^2:(-3)^4-\{35+2\cdot[5-(\underbrace{8\cdot 5+10}_{50})]\}=$

$=27^2:(-3)^4-[35+2\cdot(\underbrace{5-50}_{-45})]=27^2:(-3)^4-[35+\underbrace{2\cdot(-45)}_{-90}]=27^2:(-3)^4-[\underbrace{35+(-90)}_{-55}]=$

$=\underbrace{27^2}_{(3^3)^2}:\underbrace{(-3)^4}_{3^4}-(-55)=\underbrace{(3^3)^2}_{3^6}:3^4-(-55)=\underbrace{3^6:3^4}_{3^2}-(-55)=3^2-(-55)=9-(-55)=9+55=64.$

Aplic

1. Calculează:

a) $(-31)+21-23$;
b) $53+17-74$;
c) $(-45)+56-102-15$;
d) $12-10+13$;
e) $(-17)-43+22-10$;
f) $38-43+15$;
g) $(-7)-10-13+22$;
h) $18-20-2+25-30$;
i) $(-12)-(-2)-10+(-9)$.

2. Efectuează calculele:

a) $120:12:(-2)$;
b) $(-72):(-9):2$;
c) $32:(-8)\cdot 4$;
d) $(-63):(-9)\cdot(-7)$;
e) $15\cdot(-3):9$;
f) $(-95)\cdot(-2):(-10)$.

ȘTIAȚI CĂ...?

Simbolurile folosite pentru redarea operațiilor aritmetice au uniformizat limbajul științific.

- Cartea în care apar tipărite pentru prima oară simbolurile „+" și „–" este „Mercantile Arithmetic" („Aritmetica comercială"), publicată în anul 1489. Cele două simboluri nu se refereau la adunare și scădere, nici nu marcau numerele negative și pozitive, ci erau folosite pentru a exprima surplusul și deficitul în probleme economice.
- Cel care a impus utilizarea simbolurilor „+" și „–" pentru a marca operațiile de adunare și scădere a fost matematicianul francez François Viète.
- Punctul „·" a fost propus în 1631 de Harriot Thomas, dar a fost impus ca simbol pentru înmulțire de matematicianul german Gottfried Wilhelm Leibniz.
- Simbolul „:" pentru împărțire a fost propus în anul 1684 de Gottfried Wilhelm Leibniz în revista științifică „Acta Eruditorum" („Jurnalul savanților").

3. Calculează:

a) $17 + (-324) : 36 - 32 \cdot (-5)$;
b) $(-64) \cdot (-3) : 16 - 15 + 32$;
c) $729 : (-27) : (-3) + (-125) : (-5)$;
d) $(-34) + (-2) \cdot 16 - 144 : (-12)$;
e) $(-14) \cdot (-2) - (-16) : (-8) - 27$;
f) $(-240) : 12 \cdot 3 - 216 : (-6) + 14$.

4. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $54 - (25 + 32) = 54 - 25 + 32$; ☐
b) $(-390) : (10 \cdot 3) = (-390) : 10 : 3$; ☐
c) $75 - 20 + 125 = 75 - (20 - 125)$; ☐
d) $5 \cdot (-16) : 8 = 5 \cdot [(-16) : 8]$. ☐

5. Calculează:

a) $12 \cdot (-15) + 5 \cdot 12$;
b) $(-5) + (-5) \cdot 9 + (-5) \cdot 12$;
c) $22 \cdot (-26) + 24 \cdot (-26) - 44 \cdot (-26)$;
d) $10 \cdot 21 - 21 - 21 \cdot 30$;
e) $4 \cdot (-15) - 4 \cdot 20 + 4 \cdot (-22)$;
f) $(-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 - 3 \cdot 6$.

6. Transcrie și completează tabelul următor:

a	b	$a - 2b$	$3a + 2b$	$a^2 - (a - b)$	$a^2 - a - b$	$b^2 - 2a - b$
-5	12					
3	10					
9	-9					
-4	-8					

7. Compară numerele a și b:

a) $a = (-2)^4 - 3^3 + (-4)^1$ și $b = 11^2 - (-12)^2$;
b) $a = (5 - 8)^4 - (13 - 6)^2$ și $b = 5 \cdot (-2)^0 + 4^3 \cdot (3^2 - 3^1) + (-3)^3$;
c) $a = 3 \cdot (-2)^4 - (-2) \cdot 3^3 - 10^2$ și $b = (2^2)^3 \cdot (-4) + 3^4 \cdot 10 : (-18) - (-300)^1$.

8. Calculează:

a) $(125 : 5 - 140 : 2) : (-9) + (-324) : (-18)$;
b) $[13 \cdot (-15) - (22 - 9 \cdot 3)] \cdot (-5) - 900$;
c) $50 + 2 \cdot \{40 - 8 \cdot [30 + 3 \cdot (10 - 45 : 3)]\}$;
d) $12 + \{[(8^2 - 10^2) : 6 - (7 \cdot 15 - 50 \cdot 3)] \cdot 3\} : (-13)$;
e) $[(-2)^4 - 2 \cdot (-5)^2 + 3 \cdot (10 : 2 - 9)] \cdot 5$;
f) $[3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^{10} : 3^{12} - 2^{10} \cdot 2^{16} : 2^{23}] : 5$;
g) $8^{19} : [4^{15} \cdot (-2)^{20} + (2^8 : 2^3)^{10}] : [(-2^0) - 2 - 2^2 - 2^3 - 1]$;
h) $(-5)^{100} : \{[(-5)^4]^5 \cdot (-5)^{38} \cdot (5^{20})^2 - 2 \cdot (-5)^{85} : 5^{30} \cdot 5^{44} + (-6) \cdot (15^{49} : 3^{7^2})^2\}$.

8. Ecuații în mulțimea numerelor întregi

Descopăr

1. Ce număr întreg din mulțimea A = {−2, −1, 0, 1, 2} poate fi pus în casetă pentru a obține o propoziție adevărată?

$$2 \cdot \square - 5 = -3.$$

2. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține propoziții adevărate.

a) $\square + 5 = 10$; c) $\square - 5 = 3$; e) $(-4) \cdot \square = 8$;

b) $(-3) + \square = -5$; d) $8 - \square = 2$; f) $\square : (-3) = 5$.

Învăț

Ecuația este o egalitate între două expresii care conțin una sau mai multe necunoscute și care este adevărată numai atunci când necunoscuta/necunoscutele sunt înlocuite cu anumite numere numite soluții.

OBSERVAȚII

1. Într-o ecuație, semnul „=" apare o singură dată.

2. În scrierea unei ecuații se precizează mulțimea în care necunoscuta/necunoscutele iau valori.

EXEMPLE:

1. $x + 5 = 9, x \in \mathbb{N}$; **2.** $3 \cdot x + 5 = 1, x \in \mathbb{Z}$; **3.** $2 \cdot x - 3 \cdot y = 4, x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\overbrace{3 \cdot x + 5}^{\text{membrul stâng}} = \overbrace{1}^{\text{membrul drept}}, x \in \mathbb{Z}$$

necunoscuta

mulțimea în care necunoscuta ia valori

O soluție a unei ecuații cu o necunoscută este un număr din mulțimea în care necunoscuta ia valori pentru care egalitatea este adevărată.

A rezolva o ecuație în mulțimea numerelor întregi înseamnă a determina soluțiile întregi ale acesteia.

Două ecuații care au aceeași mulțime a soluțiilor se numesc ecuații echivalente.

OBSERVAȚII

- Dacă adunăm, scădem sau înmulțim ambii membri ai unei ecuații cu un număr întreg nenul, obținem o ecuație echivalentă cu cea inițială. Pentru a scrie relația dintre cele două ecuații vom folosi semnul „⇔".

  EXEMPLE:

  1. $3 \cdot x - 4 = -1 \mid +4 \Leftrightarrow 3 \cdot x - 4 + 4 = (-1) + 4 \Leftrightarrow 3 \cdot x = 3$.

  Ecuația $3 \cdot x = 3, x \in \mathbb{Z}$ are soluția $x = 1$. Înlocuind x cu 1 în ecuația $3 \cdot x - 4 = -1$, obținem $3 \cdot 1 - 4 = -1$, ceea ce este adevărat. De aici rezultă că 1 este soluția ecuației $3 \cdot x - 4 = -1$.

  Așadar, ecuațiile $3 \cdot x - 4 = -1$ și $3 \cdot x = 3$ au aceeași soluție, deci sunt echivalente. Ecuația $3 \cdot x = 3$ a fost obținută din ecuația $3 \cdot x - 4 = -1$ prin adunarea cu 4 a ambilor membri ai acesteia.

  2. $5 \cdot x + 1 = 6 \mid -1 \Leftrightarrow 5 \cdot x + 1 - 1 = 6 - 1 \Leftrightarrow 5 \cdot x = 5$;

  3. $x : (-2) = -3 \mid \cdot (-2) \Leftrightarrow x : (-2) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) \Leftrightarrow x = 6$.

- Dacă împărțim ambii membri ai unei ecuații de tipul $ax = b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ la un număr întreg nenul c, cu proprietatea că $|c|$ este un divizor comun al numerelor $|a|$ și $|b|$, obținem o ecuație echivalentă cu cea inițială.

  EXEMPLU: $(-3) \cdot x = 12 \mid : (-3) \Leftrightarrow (-3) \cdot x : (-3) = 12 : (-3) \Leftrightarrow x = -4$.

Exerciții rezolvate

1. Verifică dacă -1 este soluție a ecuațiilor $5\cdot x-3=-8$, $x\in\mathbb{Z}$ și $4-2\cdot x=-6$, $x\in\mathbb{Z}$.

Rezolvare:

Înlocuim necunoscuta x cu -1 în cele două ecuații. Vom obține $5\cdot(-1)-3=-8$, ceea ce este adevărat și $4-2\cdot(-1)=-6$, ceea ce este fals.

Așadar, -1 este soluția ecuației $5\cdot x-3=-8$, dar nu este soluția ecuației $4-2\cdot x=-6$.

2. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $x+10=13$; c) $(-5)\cdot x+6=21$; e) $3\cdot(x-1)+6=-9$.

b) $(-18):x=-2$; d) $2x+3=x-4$;

Rezolvare:

a) $x+10=13 \mid -10 \Leftrightarrow x+10-10=13-10 \Leftrightarrow x=3$.

Cum $3\in\mathbb{Z}$, validăm soluția ecuației înlocuind x cu 3 în ecuație. Obținem $3+10=13$, ceea ce este adevărat. Așadar, soluția ecuației este 3. Vom scrie $S=\{3\}$ (S reprezintă mulțimea soluțiilor ecuației).

b) $(-18):x=-2 \Leftrightarrow x=(-18):(-2) \Leftrightarrow x=9$

Cum $9\in\mathbb{Z}$, validăm soluția ecuației înlocuind x cu 9 în ecuație. Obținem $(-18):9=-2$, ceea ce este adevărat. Așadar, $S=\{9\}$.

c) $(-5)\cdot x+6=21 \mid -6 \Leftrightarrow (-5)\cdot x+6-6=21-6 \Leftrightarrow (-5)\cdot x=15 \mid :(-5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-5)\cdot x:(-5)=15:(-5) \Leftrightarrow x=-3$

Cum $-3\in\mathbb{Z}$, validăm soluția ecuației înlocuind x cu -3 în ecuație. Obținem $(-5)\cdot(-3)+6=21$, ceea ce este adevărat. Așadar, $S=\{-3\}$.

d) $2x+3=x-4 \mid -3 \Leftrightarrow 2x+3-3=x-4-3 \Leftrightarrow 2x=x-7 \mid -x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-x=x-7-x \Leftrightarrow x=-7$

Cum $-7\in\mathbb{Z}$, validăm soluția ecuației înlocuind x cu -7 în ecuație. Obținem $2\cdot(-7)+3=(-7)-4$, ceea ce este adevărat. Așadar, $S=\{-7\}$.

e) $3\cdot(x-1)+6=-9 \mid -6 \Leftrightarrow 3\cdot(x-1)+6-6=(-9)-6 \Leftrightarrow 3\cdot(x-1)=-15 \mid :3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot(x-1):3=(-15):3 \Leftrightarrow x-1=-5 \mid +1 \Leftrightarrow x-1+1=(-5)+1 \Leftrightarrow x=-4$

Cum $-4\in\mathbb{Z}$, validăm soluția ecuației înlocuind x cu -4 în ecuație. Obținem $3\cdot[(-4)-1]+6=-9$, ceea ce este adevărat. Așadar, $S=\{-4\}$.

Ecuația se mai poate rezolva și astfel:

$\underbrace{3\cdot(x-1)}_{3\cdot x-3\cdot 1}+6=-9 \Leftrightarrow 3x-3+6=-9 \mid -6 \Leftrightarrow 3x-3+6-6=(-9)-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-3=-15 \mid +3 \Leftrightarrow 3x-3+3=(-15)+3 \Leftrightarrow 3x=-12 \mid :3 \Leftrightarrow 3x:3=(-12):3 \Leftrightarrow$

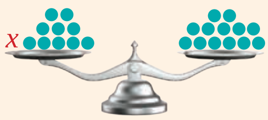
$\Leftrightarrow x=-4$

3. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

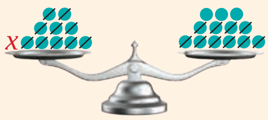
a) $|x|=5$; b) $1+|2x+1|=4$; c) $|x-4|=-3$.

Rezolvare:

a) Știm că $|x|$ reprezintă distanța de la originea axei numerelor la punctul $M(x)$. Dacă $|x|=5$, atunci $OM=5$, adică punctul M are coordonatele 5 sau -5. Așadar, $S=\{-5, 5\}$.



$x+10=13$



$x+10-10=13-10$

$x=3$

ȘTIAȚI CĂ...?

- Termenul „ecuație” a fost folosit pentru prima dată în anul 1202 de către matematicianul italian Leonardo Fibonacci.
- Noțiunea de „necunoscută” a fost introdusă de matematicianul grec Diophantus (sec. III).
- Părintele matematicii din Grecia Antică, Pitagora, folosea mici pietricele cu ajutorul cărora reprezenta și rezolva ecuațiile.

b) Dacă $1 + |2x + 1| = 4$, atunci $|2x + 1| = 3$, de unde rezultă $2x + 1 = -3$ sau $2x + 1 = 3$.

$2x + 1 = -3 \Leftrightarrow 2x = (-3) - 1 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = (-4) : 2 \Leftrightarrow x = -2$

$2x + 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 - 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 2 : 2 \Leftrightarrow x = 1$

$S = \{-2, 1\}$

c) Știm că $|n| \geq 0$, oricare ar fi numărul întreg n. Așadar, $|x - 4| \geq 0$, oricare ar fi numărul întreg x. (Dacă x e număr întreg, atunci $x - 4$ e număr întreg.)

$$\left.\begin{array}{l} |x - 4| \geq 0, \text{ pentru oricare număr întreg } x \\ -3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ecuația } |x - 4| = -3 \text{ nu are soluții.} \Rightarrow S = \varnothing$$

4. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $[7(3x - 1) + 5] : 2 - 6 = 14$;
c) $3x - 1 = x + 4$;
b) $x - 2 = 2x + 4 - x - 6$;
d) $x - 1 + x = 3x + 2 - x$.

Rezolvare:

a) $[7(3x - 1) + 5] : 2 - \mathbf{6} = 14 \Leftrightarrow [7(3x - 1) + 5] : 2 = 14 + \mathbf{6} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [7(3x - 1) + 5] : \mathbf{2} = 20 \Leftrightarrow 7(3x - 1) + 5 = 20 \cdot \mathbf{2} \Leftrightarrow 7(3x - 1) + \mathbf{5} = 40 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7(3x - 1) = 40 - \mathbf{5} \Leftrightarrow \mathbf{7} \cdot (3x - 1) = 35 \Leftrightarrow 3x - 1 = 35 : \mathbf{7} \Leftrightarrow 3x - \mathbf{1} = 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = 5 + \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{3} \cdot x = 6 \Leftrightarrow x = 6 : \mathbf{3} \Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

b) $x - 2 = 2x + 4 - x - 6 \Leftrightarrow x - 2 = 2x - x + 4 - 6 \Leftrightarrow x - 2 = x - 2$, ceea ce este adevărat pentru oricare număr întreg x. Așadar, $S = \mathbb{Z}$.

c) $3x - 1 = x + 4 \mid +1 \Leftrightarrow 3x - 1 + 1 = x + 4 + 1 \Leftrightarrow 3x = x + 5 \Leftrightarrow 3x - x = 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 5 : 2 \Leftrightarrow x = 2{,}5$

$2{,}5 \notin Z \Rightarrow$ Ecuația $3x - 1 = x + 4$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi. $\Rightarrow$
$\Rightarrow S = \varnothing$

d) $x - 1 + x = 3x + 2 - x \Leftrightarrow 2x - 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow -1 = 2$, ceea ce este fals. Așadar, ecuația $x - 1 + x = 3x + 2 - x$ nu are soluții. $\Rightarrow S = \varnothing$.

5. Determină numerele întregi x și y pentru care $(x - 2)(y + 5) = -4$.

Rezolvare:

Dacă x și y sunt numere întregi, atunci $x - 2$ și $y + 5$ sunt numere întregi.

Deoarece $-4 = 1 \cdot (-4) = (-4) \cdot 1 = (-1) \cdot 4 = 4 \cdot (-1) = 2 \cdot (-2) = (-2) \cdot 2$, sunt posibile cazurile:

- $x - 2 = 1$ și $y + 5 = -4$, cu soluția $x = 3$ și $y = -9$;
- $x - 2 = -4$ și $y + 5 = 1$, cu soluția $x = -2$ și $y = -4$;
- $x - 2 = -1$ și $y + 5 = 4$, cu soluția $x = 1$ și $y = -1$;
- $x - 2 = 4$ și $y + 5 = -1$, cu soluția $x = 6$ și $y = -6$;
- $x - 2 = 2$ și $y + 5 = -2$, cu soluția $x = 4$ și $y = -7$;
- $x - 2 = -2$ și $y + 5 = 2$, cu soluția $x = 0$ și $y = -3$.

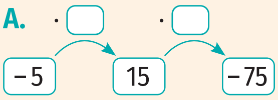
Așadar, $x = 3$ și $y = -9$ sau $x = -2$ și $y = -4$ sau $x = 1$ și $y = -1$ sau
$x = 6$ și $y = -6$ sau $x = 4$ și $y = -7$ sau $x = 0$ și $y = -3$.

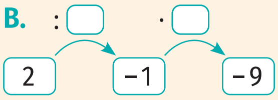
ȘTIAȚI CĂ...?

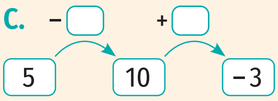
O ecuație pentru care mulțimea soluțiilor coincide cu mulțimea în care necunoscuta ia valori se numește identitate.

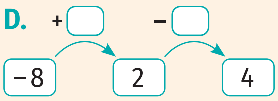
JOC

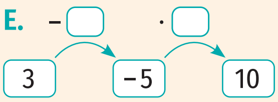
Completează casetele!

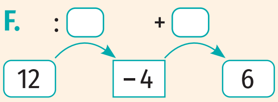
A.


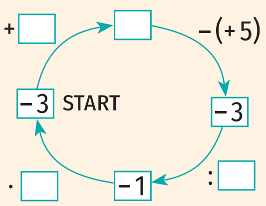
B.


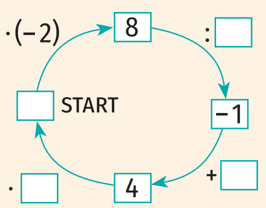
C.


D.


E.


F.


G.


H.


Aplic

1. Fără a rezolva ecuația, precizează dacă soluția acesteia aparține mulțimii A specificată în fiecare caz, scriind *Da* sau *Nu* în casetă.

a) $(-5) \cdot x = 10, x \in \mathbb{Z}, A = \mathbb{Z}_+$ ☐;
b) $6 + x = 4, x \in \mathbb{Z}, A = \mathbb{Z}_-$ ☐;
c) $(-5) : x = 1, x \in \mathbb{Z}, A = \mathbb{Z}_-$ ☐;
d) $9 - x = 1, x \in \mathbb{Z}, A = \mathbb{N}$ ☐;
e) $(-5) - x = 0, x \in \mathbb{Z}, A = \{-5, 5\}$ ☐;
f) $x - 4 = 1, x \in \mathbb{Z}, A = \{-5, -4, -3\}$ ☐.

2. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos.

a) Dintre numerele −14, −2, 2, 14, soluția ecuației $(-6) + x = -8, x \in \mathbb{Z}$ este:

A. −14; B. −2; C. 2; D. 14.

b) Numărul întreg 3 este soluția ecuației:

A. $6 + x = 3, x \in \mathbb{Z}$;
B. $2 \cdot x = -6, x \in \mathbb{Z}$;
C. $(-15) : x = 5, x \in \mathbb{Z}$;
D. $6 - x = 3, x \in \mathbb{Z}$.

c) Soluția ecuației $x : 4 = -2, x \in \mathbb{Z}$ este:

A. −8; B. −2; C. 2; D. 8.

3. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) Soluția ecuației $10 : x = -2, x \in \mathbb{Z}$ este −5. ☐
b) Soluția ecuației $-8 - x = -1, x \in \mathbb{Z}$ este 7. ☐
c) Soluția ecuației $(-3) \cdot x = 18, x \in \mathbb{Z}$ aparține mulțimii $A = \{-54, -6, 6\}$. ☐

4. Verifică dacă −3 este soluție a ecuației:

a) $(-2) \cdot x + 1 = 7, x \in \mathbb{Z}$; b) $10 + 4 \cdot x = 2, x \in \mathbb{Z}$; c) $5 + x : 3 = -6, x \in \mathbb{Z}$.

5. Stabilește care dintre numerele întregi din mulțimea $A = \{-8, -4, 2, 4\}$ este soluție a ecuației:

a) $3 \cdot x - 1 = x + 3, x \in \mathbb{Z}$; b) $2 \cdot (x + 2) - 8 = 4, x \in \mathbb{Z}$; c) $(-8) : x = 2, x \in \mathbb{Z}$.

6. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

I. a) $x + 15 = 20$; b) $x + 13 = -7$; c) $x + (-18) = -3$; d) $x + (-5) = 8$; e) $11 + x = 6$; f) $3 + x = -9$; g) $(-13) + x = -3$; h) $(-1) + x = 7$; i) $10 - x = 6$; j) $4 - x = -3$; k) $(-5) - x = 2$; l) $(-7) - x = -4$; m) $x - 3 = 8$; n) $x - 7 = -5$; o) $x - (-3) = 6$; p) $x - (-8) = -2$.

II. a) $x \cdot 3 = 15$; b) $x \cdot (-4) = 12$; c) $x \cdot 5 = -20$; d) $x \cdot (-2) = -10$; e) $(-3) \cdot x = -9$; f) $(-4) \cdot x = 16$; g) $7x = 8$; h) $6x = -12$.

III. a) $x : 4 = -2$; b) $x : 5 = 4$; c) $x : (-6) = 3$; d) $x : (-2) = -4$; e) $6 : x = 2$; f) $9 : x = -3$; g) $(-10) : x = 5$; h) $(-20) : x = -4$.

7. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $2x + 3 = -13$; b) $1 + 3x = 7$; c) $5x - 6 = 4$; d) $4x - 8 = -2$; e) $3x + (-9) = 0$; f) $6x + (-5) = 7$; g) $8x - (-3) = 13$; h) $(-3) + 5x = 12$; i) $4 - 2x = 6$; j) $(-5) - 4x = -13$; k) $6 - 8x = -10$; l) $(-2) - 3x = 7$.

8. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $2 - 3x = 2x + 7$; d) $(-3) - 2x = 9 - 5x$; g) $(-2) + 3(x - 2) = 4 - 3x$;

b) $3x + 4 = 4x - 5$; e) $2(x - 1) = 4x + 5$; h) $(-3) + 3(2 - x) = 6 - 2(x + 5)$;

c) $(-6) + 3x = 1 - 4x$; f) $5(x - 1) = 4(x + 2)$; i) $1 - 2(x + 3) = 5 - 3(x - 1)$.

9. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $(3x - 2) : 5 + 3 = 2$; e) $3 \cdot [(2x + 4) \cdot 2 - 5] + 7 = -20$;

b) $[2 + 3(x - 1)] - 8 = -3$; f) $2 - [5 \cdot (x + 1) + 3] : 2 = 13$;

c) $10 - 3 \cdot [1 - 2(x - 7)] = -5$; g) $(-6) \cdot [1 - 3 \cdot (x + 2)] - 4 = 26$;

d) $[8 + 3(1 - x)] \cdot (-2) + 1 = -3$; h) $[9 - 4 \cdot (x + 1) + 3] : (-3) - (-1) = -7$.

10. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $|x| = 3$; c) $|x - 6| = -5$; e) $|1 - 2x| = 7$; g) $|x - 2| + 4 = 6$;

b) $|x + 5| = 4$; d) $|4 - x| = 9$; f) $1 + |x| = 9$; h) $-2 - |3 - x| = -3$.

11. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $(-3) + 5x = 7\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $x : (-2) = -1\}$. Demonstrează că A = B.

12. Se consideră mulțimile $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 4 - 3(x + 2) = -5\}$. Determină elementele mulțimii A \ B.

13. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |2x - 3| = 5\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, [2(3x + 1) - 3] : 7 - 2 = -3\}$. Demonstrează că $B \subset A$.

14. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 4 - 2x + 6 = 2(x - 1)\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 7 + 4x = 1 - 2x\}$. Determină $A \cap B$.

15. Mulțimea M este formată din elementele: a, $a + 1$, $2a + 1$, $3a$, unde $a \in \mathbb{N}$.

a) Pentru $a = 3$, scrie mulțimea M prin enumerarea elementelor sale.

b) Determină numărul natural a pentru care card M = 2.

c) Determină numărul natural a pentru care card M = 3.

16. Se consideră mulțimile $A = \{-2, 3, 7, 9\}$ și $B = \{-2, 2x - 3, x + 6, 7\}$, unde x este număr natural. Determină numărul natural x pentru care B = A.

17. Determină elementele mulțimii A:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x + 7) \mid 7\}$; c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, (2x - 1) \mid 15\}$;

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 12 \vdots (x + 2)\}$; d) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (3x + 1) \mid 50\}$.

18. Determină elementele mulțimii A:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x + 2) \mid (2x + 11)\}$; d) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (2x + 1) \mid (4x + 7)\}$;

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x + 3) \mid (2x + 9)\}$; e) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, (2x + 1) \mid (5x - 2)\}$;

c) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, (2n + 1) \mid (3n + 4)\}$; f) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, (5x - 2) \mid (8x + 4)\}$.

19. Determină numerele întregi x și y pentru care :

a) $(x + 3)(2y + 8) = 0$; b) $(5 - x)(y - 4) = -6$; c) $(x + 6)(y + 8) = 12$.

ȘTIAȚI CĂ...?

- Mult timp, algebra – una dintre ramurile matematicii – a fost echivalentă cu studiul ecuațiilor.
- Denumirea „algebră” provine de la termenul „al-jabr”, din titlul unei celebre lucrări a matematicianului de origine arabă Al-Horezmi (sec. VIII-IX). În această lucrare, Al-Horezmi abordează aplicat calculele cu necunoscute, arătându-le utilitatea în domeniul practic al schimburilor comerciale, al împărțirii moștenirilor sau al măsurării terenurilor. Toate acestea sunt prezentate fără a folosi o scriere simbolică (semne matematice).

9. Inecuații în mulțimea numerelor întregi

Descopăr

1. Ce numere întregi din mulțimea A = {−3, −2, −1, 0, 1, 2} pot fi puse în casetă pentru a obține o propoziție adevărată?

$$3 \cdot \square - 4 < -3.$$

2. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține propoziții adevărate. Găsește cât mai multe variante.

a) $\square + 2 < 4$; c) $\square - 4 \leq 2$; e) $(-2) \cdot \square > 6$;

b) $(-1) + \square > 3$; d) $5 - \square \geq 4$; f) $\square : (-4) \leq 2$.

Învăț

Inecuația este o inegalitate care conține una sau mai multe mărimi necunoscute și care este adevărată numai atunci când necunoscuta/necunoscutele sunt înlocuite cu anumite numere numite soluții.

OBSERVAȚIE

În scrierea unei inecuații se folosește unul dintre semnele <, >, ≤, ≥ (care indică sensul inegalității) și se precizează mulțimea în care necunoscuta/necunoscutele iau valori.

EXEMPLE: **1.** $x + 4 < 9, x \in \mathbb{N}$; **2.** $2 \cdot x - 6 \geq -8, x \in \mathbb{Z}$; **3.** $2 \cdot x > 10, x \in \mathbb{Z}$.

$$\overbrace{2 \cdot x - 6}^{\text{membrul stâng}} \geq \overbrace{-8}^{\text{membrul drept}}, x \in \mathbb{Z}$$

necunoscuta

mulțimea în care necunoscuta ia valori

O soluție a unei inecuații cu o necunoscută este un număr din mulțimea în care necunoscuta ia valori pentru care inegalitatea este adevărată.

A rezolva o inecuație în mulțimea numerelor întregi înseamnă a determina soluțiile întregi ale acesteia.

Două inecuații care au aceeași mulțime a soluțiilor se numesc inecuații echivalente.

OBSERVAȚII

- Dacă se adună la ambii membri ai unei inecuații un număr întreg și se păstrează sensul inegalității, se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

  EXEMPLU: $(-4) \cdot x - 2 > -6 \mid +2 \Leftrightarrow (-4) \cdot x - 2 + 2 > (-6) + 2 \Leftrightarrow (-4) \cdot x > -4$

- Dacă se scade din ambii membri ai unei inecuații un număr întreg și se păstrează sensul inegalității, se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

  EXEMPLU: $3 \cdot x + 1 \leq -5 \mid -1 \Leftrightarrow 3 \cdot x + 1 - 1 \leq (-5) - 1 \Leftrightarrow 3 \cdot x \leq -6$

- Dacă se înmulțesc ambii membri ai unei inecuații cu un număr întreg pozitiv și se păstrează sensul inegalității, se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

  EXEMPLU: $x : 10 > -2 \mid \cdot 10 \Leftrightarrow x : 10 \cdot 10 > (-2) \cdot 10 \Leftrightarrow x > -20$

- Dacă se înmulțesc ambii membri ai unei inecuații cu un număr întreg negativ și se schimbă sensul inegalității (< devine >, ≤ devine ≥, > devine <, ≥ devine ≤), se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

  EXEMPLU: $x : (-2) < -8 \mid \cdot (-2) \Leftrightarrow x : (-2) \cdot (-2) > (-8) \cdot (-2) \Leftrightarrow x > 16$

- Dacă se împart ambii membri ai unei inecuații de tipul $ax > b$, $ax \leq b$, $ax < b$ sau $ax \geq b$ (unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$) la un număr întreg pozitiv c cu proprietatea că c este un divizor comun al numerelor $|a|$ și $|b|$ și se păstrează sensul inegalității, se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

  EXEMPLU: $3 \cdot x \leq -6 \mid :3 \Leftrightarrow 3 \cdot x : 3 \leq (-6) : 3 \Leftrightarrow x \leq -2$

- Dacă se împart ambii membri ai unei inecuații de tipul $ax > b$, $ax \leq b$, $ax < b$ sau $ax \geq b$ (unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$) la un număr întreg negativ c cu proprietatea că $|c|$ este un divizor comun al numerelor $|a|$ și $|b|$ și se schimbă sensul inegalității ($<$ devine $>$, $\leq$ devine $\geq$, $>$ devine $<$, $\geq$ devine $\leq$), se obține o inecuație echivalentă cu cea inițială.

  EXEMPLU: $(-4) \cdot x > -4 \mid :(-4) \Leftrightarrow (-4) \cdot x : (-4) < (-4) : (-4) \Leftrightarrow x < 1$

Exerciții rezolvate

1. Verifică dacă 3 este soluție a inecuației $4 \cdot x - 7 > 1$, $x \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

Înlocuim necunoscuta x cu 3 în inecuație. Vom obține $4 \cdot 3 - 7 > 1$, ceea ce este adevărat. Așadar, 3 este soluție a inecuației.

2. Stabilește care dintre numerele întregi din mulțimea $A = \{-2, -1, 0\}$ este soluție a inecuației $3 \cdot x - 1 \leq -4$, $x \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

Înlocuim necunoscuta x în inecuație cu fiecare dintre elementele mulțimii A. Vom obține inegalitățile: $3 \cdot (-2) - 1 \leq -4$ (adevărată), $3 \cdot (-1) - 1 \leq -4$ (adevărată) și $3 \cdot 0 - 1 \leq -4$ (falsă). Așadar, -2 și -1 sunt soluții ale inecuației.

3. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $x + 3 \leq -3$; c) $(-5) \cdot x < -10$; e) $|x| < 3$.

b) $(-4) - x > 3$; d) $(-2) \cdot x + 3 > 9$;

Rezolvare:

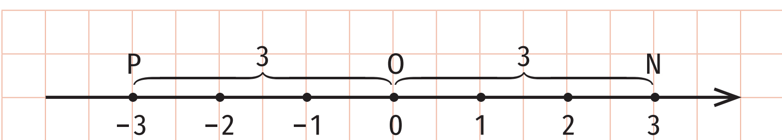
a) $x + 3 \leq -3 \mid -3 \Leftrightarrow x + 3 - 3 \leq (-3) - 3 \Leftrightarrow x \leq -6$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x \in \{..., -7, -6\}$. Așadar, $S = \{..., -7, -6\}$.

b) $(-4) - x > 3 \mid +4 \Leftrightarrow (-4) - x + 4 > 3 + 4 \Leftrightarrow -x > 7 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) < 7 \cdot (-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < -7$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x \in \{..., -9, -8\}$. Așadar, $S = \{..., -9, -8\}$.

c) $(-5) \cdot x < -10 \mid :(-5) \Leftrightarrow (-5) \cdot x : (-5) > (-10) : (-5) \Leftrightarrow x > 2$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x \in \{3, 4, 5, ...\}$. Așadar, $S = \{3, 4, 5, ...\}$.

d) $(-2) \cdot x + 3 > 9 \mid -3 \Leftrightarrow (-2) \cdot x + 3 - 3 > 9 - 3 \Leftrightarrow (-2) \cdot x > 6 \mid :(-2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-2) \cdot x : (-2) < 6 : (-2) \Leftrightarrow x < -3$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x \in \{..., -6, -5, -4\}$. Așadar, $S = \{..., -6, -5, -4\}$.

e) Știm că $|x|$ reprezintă distanța de la originea axei numerelor la punctul $M(x)$. Dacă $|x| < 3$, atunci $OM < 3$. Deducem că, pe axa numerelor, punctul $M(x)$ se află între punctele $P(-3)$ și $N(3)$ (pentru că $ON = OP = 3$ și $OM < 3$). Așadar, $x > -3$ și $x < 3$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Așadar, $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



Aplic

1. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) Numărul întreg 9 este soluție a inecuației $18 : x < -2, x \in \mathbb{Z}$. ☐

b) Mulțimea soluțiilor inecuației $-x > 0, x \in \mathbb{Z}$ este $A = \{...,-3, -2, -1\}$. ☐

c) Mulțimea soluțiilor inecuației $(-2) \cdot x \geq 4, x \in \mathbb{Z}$ este $A = \{...,-5, -4, -3\}$. ☐

2 Verifică dacă -2 este soluție a inecuațiilor:

a) $(-3) \cdot x - 2 < 7, x \in \mathbb{Z}$; b) $5 + 2 \cdot x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$; c) $5 + x : 2 \leq -4, x \in \mathbb{Z}$.

3. Stabilește care dintre numerele întregi din mulțimea $A = \{-5, -4, -3, 2\}$ sunt soluții ale inecuațiilor:

a) $2 \cdot x - 5 > -3, x \in \mathbb{Z}$; b) $3 \cdot (x - 1) - 4 < 5, x \in \mathbb{Z}$; c) $x : (-1) \leq 4, x \in \mathbb{Z}$.

4. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

I. a) $x + 3 > 8$; e) $5 + x > 4$; i) $7 - x < 8$; m) $x - 4 \geq 4$;
b) $x + 2 \leq -2$; f) $2 + x \leq -3$; j) $3 - x \geq -6$; n) $x - 6 < -2$;
c) $x + (-5) < -1$; g) $(-4) + x \geq -2$; k) $(-2) - x > 3$; o) $x - (-2) \leq 4$;
d) $x + (-8) \geq 6$ h) $(-3) + x < 5$; l) $(-4) - x \leq -2$; p) $x - (-7) > -1$.

II. a) $x \cdot 2 > 8$; c) $x \cdot 4 < -20$; e) $(-6) \cdot x \geq -6$; g) $8x < 8$;
b) $x \cdot (-3) \leq 9$; d) $x \cdot (-5) > -30$; f) $(-2) \cdot x \leq 8$; h) $9x > 27$.

5. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $2x + 1 > -9$; d) $5x - 7 \geq -2$; g) $7x - (-2) \leq 16$; j) $(-5) - 4x \geq -13$;
b) $4 + 3x < 10$; e) $3x + (-6) \leq 0$; h) $(-4) + 8x > 12$; k) $1 - x > -8$;
c) $4x - 5 \leq 3$; f) $6x + (-9) > 3$; i) $7 - 2x < 1$; l) $(-5) - 3x < 7$.

6. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $(-1) - 2x \geq 3x + 4$; d) $(-1) - 3x > (-6) \cdot x + 8$; g) $(-2) + 3(x + 1) < 6 - 2x$;
b) $5x + 4 < 7x - 6$; e) $2(x - 2) < 5x + 5$; h) $(-4) + 4(1 - x) > (-2) \cdot (x + 5)$;
c) $(-2) + 2x \leq 8 - 3x$; f) $3(x - 4) \geq 2(x + 3)$; i) $9 - 2(x + 2) \leq 8 - 3(x - 2)$.

7. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $2 + [3 - 2(x + 4)] < 17$; c) $6 - 2 \cdot [4 - 3(x + 1)] \geq -8$;
b) $2 + (4x - 1) : 5 - 6 > -9$; d) $[6 + 2(2 - x)] \cdot (-3) + 4 < -20$.

8. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $|x| \leq 3$; c) $|x| \leq -4$; e) $1 - |x| \geq -2$; g) $|x| + 2 < 5$;
b) $|x| < 2$; d) $|x| + 3 < 4$; f) $-4 - |x| \geq 9$; h) $-3 - |x| > -6$.

10. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi

Descopăr

Sandu are o sumă de bani. După ce primește de la bunici 250 de lei, cumpără un hanorac care costă 108 lei și, cu jumătate din suma rămasă, cumpără o cămașă care costă 165 de lei. Câți lei a avut Sandu inițial?

Rezolvare:

I. Reprezentăm schematic datele problemei (figura 1).

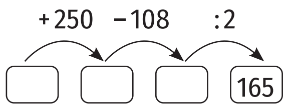


Figura 1

Folosim metoda mersului invers:

$165 \cdot 2 = 330$; $330 + 108 = 438$; $438 - 250 = 188$.

Sandu a avut inițial 188 de lei.

II. Notăm cu x suma de bani pe care a avut-o Sandu inițial. Scriem și rezolvăm ecuația asociată problemei:

$[(x + 250) - 108] : 2 = 165 \Leftrightarrow (x + 250) - 108 = 165 \cdot 2 \Leftrightarrow (x + 250) - 108 = 330 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 250 = 330 + 108 \Leftrightarrow x + 250 = 438 \Leftrightarrow x = 438 - 250 \Leftrightarrow x = 188$

Verificăm soluția obținută în forma inițială a problemei:

$188 + 250 = 338$; $338 - 108 = 230$; $230 : 2 = 165$.

Sandu a avut inițial 188 de lei.

Învăț

Etapele rezolvării unei probleme cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor sunt:

- citirea și înțelegerea problemei;
- stabilirea necunoscutei problemei;
- transcrierea și exprimarea elementelor din enunțul problemei în limbaj matematic (formarea ecuației sau a inecuației);
- rezolvarea ecuației sau a inecuației obținute;
- interpretarea soluției/soluțiilor obținute;
- verificarea soluției/soluțiilor obținute în forma inițială a problemei.

ȘTIAȚI CĂ...?

În Marea Britanie, la British Museum, se găsește un papirus vechi de 3600 de ani, cunoscut sub numele de „Papirusul Rhind”, care conține probleme rezolvate cu ajutorul ecuațiilor.

Exerciții rezolvate

1. Suma a trei numere pare consecutive este egală cu 576. Care sunt numerele?

Rezolvare:

Stabilirea necunoscutei problemei →	Notăm cu x cel mai mic dintre cele trei numere.
Transcrierea și exprimarea elementelor din enunțul problemei în limbaj matematic →	Cele trei numere naturale pare consecutive sunt: x, $x + 2$ și $x + 4$. $x + (x + 2) + (x + 4) = 576$
Rezolvarea ecuației obținute →	$x + (x + 2) + (x + 4) = 576 \Leftrightarrow 3x + 6 = 576 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x = 576 - 6 \Leftrightarrow 3x = 570 \Leftrightarrow x = 570 : 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 190$
Interpretarea soluției obținute →	Cele trei numere căutate sunt 190, 192 și 194.
Verificarea soluției obținute →	190, 192 și 194 sunt numere pare consecutive și $190 + 192 + 194 = 576$

2. Într-un bazin sunt 100 l de apă, iar în altul sunt 360 l de apă. În fiecare minut, cele două bazine acumulează fiecare câte 10 l de apă. Peste câte minute în cel de-al doilea bazin va fi o cantitate de apă de 3 ori mai mare decât în primul bazin?

Rezolvare:

Notăm cu x numărul de minute care vor trece până când în cel de-al doilea bazin va fi o cantitate de apă de 3 ori mai mare decât în primul bazin. În x minute, în fiecare bazin se acumulează $10 \cdot x$ litri de apă. Peste x minute, în primul bazin vor fi $100 + 10x$ litri de apă, iar în al doilea bazin vor fi $360 + 10x$ litri de apă.

Cum în cel de-al doilea bazin va fi o cantitate de apă de 3 ori mai mare decât în primul bazin, obținem ecuația: $3 \cdot (100 + 10x) = 360 + 10x$.

$3 \cdot (100 + 10x) = 360 + 10x \Leftrightarrow 300 + 30x = 360 + 10x \Leftrightarrow 30x - 10x = 360 - 300 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 20x = 60 \Leftrightarrow x = 60 : 20 \Leftrightarrow x = 3$

Peste 3 minute în cel de-al doilea bazin va fi o cantitate de apă de 3 ori mai mare decât în primul bazin.

Verificarea soluției obținute în forma inițială a problemei:

Peste 3 minute, în primul bazin vor fi $100 + 3 \cdot 10 = 130$ l, iar în cel de-al doilea vor fi $360 + 3 \cdot 10 = 390$ l. Cum $130 \cdot 3 = 390$, ipoteza problemei este verificată.

3. Dacă mărim un număr întreg de două ori, iar din rezultat scădem 14, obținem un număr întreg mai mic decât 20. Ce valori poate avea numărul care verifică condiția?

Rezolvare:

Notând cu x numărul întreg căutat, obținem inecuația $2 \cdot x - 14 < 20$.

$2 \cdot x - 14 < 20 \Leftrightarrow 2 \cdot x < 20 + 14 \Leftrightarrow 2 \cdot x < 34 \Leftrightarrow x < 34 : 2 \Leftrightarrow x < 17$.

Așadar, $x \in \{..., 14, 15, 16\}$.

Aplic

1. Suma dintre un număr întreg și dublul său este egală cu 276. Determină numărul.
2. Determină numărul natural mai mic cu 24 decât triplul său.
3. Diferența dintre triplul unui număr întreg și numărul respectiv este egală cu 60. Determină numărul.
4. Suma dintre un număr întreg și 12 este egală cu −9. Determină numărul.
5. Suma dintre un număr întreg și 25 este mai mică decât 3. Ce valori poate avea acel număr?
6. Produsul dintre un număr întreg și −5 este mai mare decât 15. Ce valori poate avea acel număr?
7. Ce numere întregi putem scădea din 2 023 pentru a obține un număr întreg mai mic sau egal decât 2 000?
8. Determină cele trei numere naturale consecutive a căror sumă este egală cu 438.
9. Suma a două numere naturale pare consecutive este egală cu 494. Care sunt numerele?
10. Determină cele patru numere naturale impare consecutive a căror sumă este egală cu 504.
11. Suma a trei numere naturale consecutive este mai mică decât 18. Care sunt numerele?
12. Determină cinci numere naturale consecutive, știind că suma dintre cel mai mic și cel mai mare este egală cu 70.
13. Adunând un număr întreg cu 246 obținem același rezultat ca atunci când îl înmulțim cu 3. Determină numărul.
14. Determină un număr întreg, știind că înmulțindu-l cu 5 obținem același rezultat ca atunci când scădem 40 din el.
15. Determină un număr întreg, știind că împărțindu-l la 8 obținem media aritmetică a numerelor 25 și 17.
16. Diferența a două numere întregi este egală cu 20, iar unul dintre numere este 4. Care este celălalt număr? Studiază toate cazurile posibile.
17. Diferența dintre un număr întreg și 10 este mai mare decât suma dintre dublul numărului și 4. Ce valori are numărul întreg?
18. Determină măsura unui unghi, știind că:
    a) este de cinci ori mai mică decât măsura complementului său;
    b) este de patru ori mai mare decât măsura suplementului său;
    c) este cu 30° mai mare decât măsura complementului său;
    d) suma dintre măsura complementului și măsura suplementului său este egală cu 160°;
    e) diferența dintre măsura unghiului și măsura complementului acestuia este egală cu 24°.
19. Pe două rafturi sunt așezate același număr de cărți. Dacă am muta 12 cărți de pe primul raft pe al doilea raft, atunci, pe acesta din urmă ar fi de trei ori mai multe cărți decât pe celălalt raft. Determină numărul de cărți de pe fiecare raft.

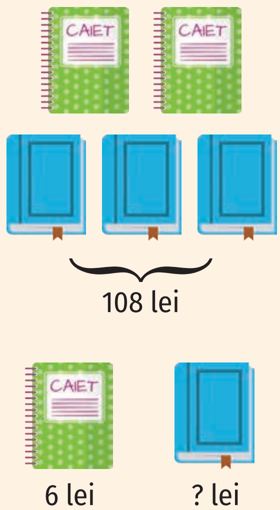
PORTOFOLIU

Compune și rezolvă probleme cu ajutorul ecuațiilor pe baza schemelor de mai jos!

Păstrează problemele rezolvate în portofoliul tău.

A.

B.



20. Într-un sac sunt de trei ori mai mulți cartofi decât în alt sac. După ce se vând 12 kg de cartofi din primul sac și 2 kg din al doilea sac, în cei doi saci rămân cantități egale de cartofi. Câte kilograme de cartofi au fost la început în fiecare dintre saci?

21. La o festivitate de premiere, un copil a primit 4 cărți, iar fiecare dintre ceilalți a primit 5 cărți. Dacă s-au dat 99 de cărți, câți copii au fost premiați?

22. Andra a organizat o excursie. Pentru închirierea unui autocar a plătit 300 de euro, iar cazarea pentru fiecare persoană a fost 70 de euro. Câte persoane au fost în excursie, dacă Andra a plătit 3 100 de euro?

23. La o cantină au fost aduse 40 de lăzi cu fructe, care cântăresc împreună 1 000 kg. Știind că o ladă goală cântărește 2 kg și toate lăzile conțin aceeași cantitate de fructe, determină câte kg de fructe sunt într-o ladă.

24. Alin are 12 ani, iar tatăl lui are 40 de ani. Peste câți ani vârsta tatălui va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului?

25. Bogdana are 17 ani, iar mama ei are 47 de ani. Cu câți ani în urmă vârsta mamei era de patru ori mai mare decât vârsta fiicei?

26. Tatăl, mama și fiul au împreună 89 de ani. Peste câți ani vor avea împreună 101 ani?

27. Un tată cu vârsta de 40 de ani are trei copii cu vârstele de 8, 11 și 13 ani. Peste câți ani vârsta tatălui va fi egală cu suma vârstelor copiilor săi?

28. După ce a cumpărat o carte cu 25 de lei și două caiete de același tip, Anei i-au rămas 16 lei. Știind că Ana a avut 53 de lei, determină prețul plătit de Ana pentru un caiet.

29. M-am gândit la un număr, l-am adunat cu 20, am înmulțit rezultatul cu 2, din noul rezultat am scăzut 18 și apoi am împărțit la 5. Am obținut rezultatul 12. La ce număr m-am gândit?

30. M-am gândit la un număr. Din el am scăzut 4, rezultatul l-am înmulțit cu 3, din noul rezultat am scăzut 2 și am obținut numărul la care m-am gândit. La ce număr m-am gândit?

31. La prima stație a unui autobuz au coborât 3 călători și au urcat 12, la a doua stație au coborât 4 și au urcat 8, iar la a treia stație au coborât 5 și au urcat 9 călători. Determină numărul de călători care au urcat în autobuz la stația de plecare, știind că, la plecarea din cea de-a treia stație, în autobuz erau 24 de călători.

32. La un concurs s-au propus spre rezolvare 30 de probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare problemă nerezolvată sau rezolvată incorect se scad 2 puncte. Câte probleme a rezolvat corect un concurent care a obținut 129 de puncte?

INDICAȚIE:

Se notează cu x numărul problemelor rezolvate corect. Astfel, numărul problemelor rezolvate incorect sau nerezolvate este $30 - x$.

33. Participând la un concurs de tras la țintă, Andrei a realizat 25 de lovituri. Pentru fiecare lovitură reușită se obțin 8 puncte, iar pentru fiecare ratare se pierd 3 puncte. Câte lovituri trebuie să reușească Andrei pentru a obține minim 167 de puncte?

34. Compune o problemă care să se rezolve prin ecuația:

a) $2x + 6 = 78$; b) $[(x + 5) - 2] : 3 = 7$.

Exerciții recapitulative

1. Calculează $a + b$, $(a + b) - c$, $a + c + d$, $e - f + d$, $e - (f + d)$, $a - (b + d)$, știind că:
$a = 8 - (-13) + 5$, $b = (-6) - 3 + 7$, $c = (-16) + 4 - (-4)$, $d = |-8| - |5| - 2$,
$e = (-|-2|) + 3 - (-|-7|)$, $f = (-2) - (-1 - 2 - 3) + 5$.

2. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține propoziții adevărate:

a) $(-6)^4 \cdot (-6)^{10} \cdot (-6)^2 = (-6)^{\square} = 6^{\square}$;
b) $10^{10} \cdot 10^3 : 10^{12} = 10^{\square}$;
c) $(-9)^{20} \cdot (-3)^{12} \cdot (-27)^2 = 3^{\square}$;
d) $(-8)^{10} \cdot (-4)^{13} \cdot (-32)^3 = 2^{\square}$;
e) $3^7 \cdot (-3)^6 \cdot (-9)^2 = 3^{\square}$;
f) $25^4 \cdot (-5)^4 : (-125)^3 = (-5)^{\square}$;
g) $(-36)^6 \cdot (-6)^4 \cdot (-6)^2 = 6^{\square}$;
h) $(2^5)^6 : (2^3)^9 \cdot (4^2)^3 = 2^{\square}$.

3. Ordonează descrescător numerele a, b, c, d și e, unde:

$a = (8 - 15) - [23 - (13 - 16)] - (14 - 20)$,
$b = 9 - \{2 - [1 - (3 - 5)]\}$,
$c = [(-15) + 27] \cdot 2 + \{32 - [(10 - 12) : (-2)] - [(-5) + 1] \cdot 3\}$,
$d = \{13 + [(-7) + (2 - 3) \cdot (-5)] : (-2)\} - \{(-5) + [16 + (12 - 18) : (-3)] \cdot (-1)\}$,
$e = 2 \cdot \{(-1) - [(-2) + 10 : (-2)] : 7\} + [(-1) + 3] \cdot (-2)$.

4. Reprezintă pe axa numerelor numerele întregi a, b, c, d, e, unde:

$a = (-2)^3 : [(-1)^{13} + (-2)^2 + 2^0]$,
$b = [(-7)^5 : (-7)^3 - 2 \cdot (-5)^2]^7 - (-2)^3$,
$c = [(-3)^7]^3 : (-27)^6 - [(-4)^3]^3 : (-8)^4 : 2$,
$d = \{(-2)^4 - [(-2)^{10} \cdot (-4)^8] : (-2)^{19}\} : (-12^2)$,
$e = [(-9)^{14} \cdot (-3)^7 \cdot (-27)^{13}] : (-3)^{71} + (125^4 \cdot 25^3) : 5^{16} - 1$.

5. Se consideră mulțimile $A = \{-7, -2, -1, 3, 4, 8, 10\}$, $B = \{x \mid x \in A, x \leq 0\}$, $C = \{x \mid x \in A, |x| = x\}$, $D = \{x \mid x \in A, |x| = -x\}$, $E = \{x \mid x \in A, |x| < 3\}$, $F = \{x \mid x \in A, |x| > 4\}$. Determină elementele mulțimilor B, C, D, E, și F.

6. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $2 - x = 2x - 7$;
b) $2x + 5 = 6x - 11$;
c) $4(3 - x) + 3(x - 5) = -5$;
d) $2 \cdot (x + 4) - 5(2 + x) = 3 + 2x$;
e) $3 - 4 \cdot [3 + 2 \cdot (5 - x)] = -41$;
f) $(-3) \cdot [7 - 5(1 + x)] + 23 = -13$.

7. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $1 + x < 2x - 3$;
b) $4x + 2 \geq x - 7$;
c) $2(2 + x) - (x - 3) > -2$;
d) $(-1) + x - 3(1 + 2x) < 3 + 2x$;
e) $2 - 3 \cdot [1 - 2 \cdot (2 + 2x)] > -1$;
f) $(-2) \cdot [4 - (1 + 3x)] - 5 \leq -17$.

8. Adunând un număr cu -9 obținem același rezultat ca atunci când îl înmulțim cu 4. Determină numărul.

9. După ce a cumpărat un stilou cu 42 de lei și patru pixuri de același tip, Mariei i-au rămas 22 de lei. Știind că Maria a avut 100 de lei, determină prețul unui pix cumpărat de aceasta.

10. Aura are 12 ani. Peste doi ani, vârsta mamei ei va fi de trei ori mai mare decât vârsta Aurei.

a) Determină vârsta actuală a mamei Aurei.

b) Peste câți ani vârsta Aurei va fi de două ori mai mică decât vârsta mamei?

c) Cu câți ani în urmă vârsta mamei era de cinci ori mai mare decât vârsta Aurei?

11. La un magazin s-au adus mere și piersici în cantități egale. După ce s-au vândut 96 kg de mere și 78 kg de piersici, cantitatea de piersici rămasă este de două ori mai mare decât cantitatea de mere rămasă. Câte kilograme de mere s-au adus?

12. La o papetărie s-au adus 215 pixuri și 327 de stilouri. În prima zi s-a vândut același număr de pixuri și de stilouri și au rămas de trei ori mai puține pixuri decât stilouri. Câte stilouri s-au vândut în prima zi?

13. Dan trebuie să citească o carte de 256 de pagini. Determină numărul de pagini citite de Dan, știind că numărul paginilor rămase este de trei ori mai mare decât numărul paginilor citite.

Timp de lucru: 40 de minute **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I **40 puncte**

15 puncte	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*
(5 p.)	**A.** Suma numerelor întregi -5 și 8 este: a) -13; b) -3; c) 13; d) 3.
(5 p.)	**B.** Dintre numerele $-7, -8, -3, -5$, mai mare este: a) -7; b) -8; c) -3; d) -5.
(5 p.)	**C.** Soluția ecuației $(-2) \cdot x = 18$, $x \in \mathbb{Z}$ este: a) 20; b) -9; c) 9; d) 16.
20 puncte	**2.** *Scrie pe foaie numai rezultatele.*
(5 p.)	**A.** Dacă $a = 5$, atunci $\|a\|$ este egal cu ... .
(5 p.)	**B.** Rezultatul calculului $2 \cdot 3^2$ este ... .
(5 p.)	**C.** Dintre numerele întregi $a = (-2)^3$ și $b = (-2)^5$, mai mic este ... .
(5 p.)	**D.** Mulțimea soluțiilor inecuației $2 - x < -5$, $x \in \mathbb{Z}$, este ... .
5 puncte	**3.** *Scrie pe foaie litera corespunzătoare răspunsului corect.* Afirmația „Diferența oricăror două numere naturale este număr natural.” este: a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea **50 puncte**

Scrie rezolvările complete.

10 puncte	**1.** Calculează $\{[(-2) \cdot 3 - (-4) \cdot 5] : (-7)\}^3 \cdot 3 + 20$.
10 puncte	**2.** Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuația $2 \cdot [(2x - 4) : 3 - 1] + 5 = -1$.
10 puncte	**3.** Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuația $3(2 - x) - (x + 1) > -2x - 3$.
20 puncte	**4.** Aura are 17 ani. Peste trei ani, suma vârstelor Aurei și mamei sale va fi egală cu 69 de ani.
(10 p.)	**A.** Determină vârsta actuală a mamei Aurei.
(10 p.)	**B.** Peste câți ani vârsta mamei va fi de două ori mai mare decât vârsta Aurei?

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Pot să efectuez calcule cu numere întregi.					
Pot să aplic regulile de calcul cu puteri în $\mathbb{Z}$.					
Pot să formulez și să rezolv probleme folosind ecuații cu numere întregi.					

Unitatea 4

Mulțimea numerelor raționale

1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale

Descopăr

1. Cum se numesc numerele 2, $\frac{6}{5}$ și 2,3?
2. Marchează pe axa numerelor punctele A(2), B$\left(\frac{6}{5}\right)$ și C(2,3).
3. Marchează pe axa numerelor, în stânga punctului O, punctele M, N și P astfel încât OM = OA, ON = OB și OP = OC. Care sunt coordonatele punctelor M, N și P?
4. Folosind reprezentarea pe axa numerelor realizată la punctele 2 și 3, ordonează crescător coordonatele punctelor A, B, C, M, N și P.

Învăț

Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale

Pe axa numerelor, începând de la origine, spre stânga și spre dreapta acesteia, împărțim în cinci părți de aceeași lungime segmente consecutive egale cu unitatea de măsură. Dacă numărăm, începând de la origine spre dreapta (în sens pozitiv), șase dintre acestea, obținem punctul prin care se reprezintă **numărul rațional pozitiv** $\frac{6}{5}$, iar dacă numărăm, începând de la origine spre stânga (în sens negativ), șase dintre acestea, obținem punctul prin care se reprezintă numărul $-\frac{6}{5}$, pe care îl vom numi **număr rațional negativ** (figura 1).

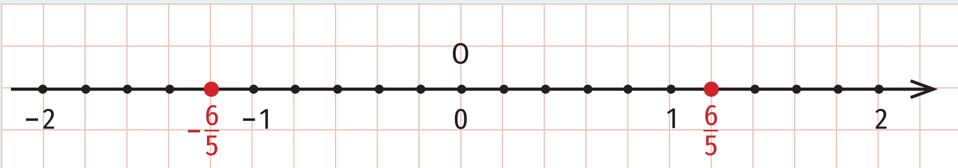


Figura 1

ATENȚIE!

Numărul rațional $\frac{9}{2}$ poate fi scris sub forma 4,5, iar numărul rațional $-\frac{9}{2}$ poate fi scris sub forma −4,5.

Astfel, am asociat unui număr rațional pozitiv un număr rațional negativ, care se reprezintă pe axa numerelor printr-un punct aflat în stânga originii acesteia, la aceeași distanță față de origine ca și punctul prin care se reprezintă numărul rațional pozitiv.

Cum $\frac{6}{5}$ și 1,2 reprezintă forme diferite de scriere ale aceluiași număr rațional pozitiv ($\frac{6}{5}$ = 1,2), $-\frac{6}{5}$ și −1,2 reprezintă forme diferite de scriere ale aceluiași număr rațional negativ (figura 2).

$\frac{10}{8}, \frac{20}{16}, \frac{50}{40}$ reprezintă numărul rațional $\frac{5}{4}$, iar $-\frac{10}{8}, -\frac{20}{16}, -\frac{50}{40}$ reprezintă numărul rațional $-\frac{5}{4}$.

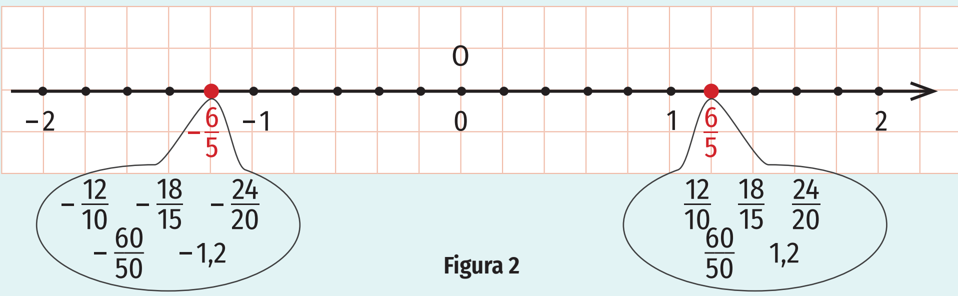
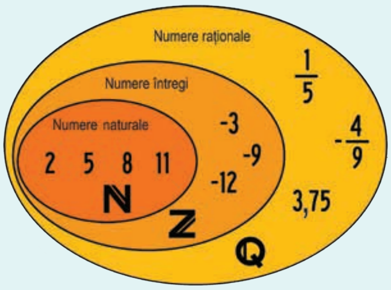


Figura 2

Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$.

Mulțimea numerelor raționale negative se notează cu $\mathbb{Q}_-$, iar mulțimea numerelor raționale pozitive se notează cu $\mathbb{Q}_+$.

Mulțimea numerelor raționale nenule se notează cu $\mathbb{Q}^*$.



OBSERVAȚII

1. 0 este număr rațional, dar nu este nici pozitiv, nici negativ.

2. Orice număr întreg este număr rațional ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

Exemple de numere raționale: $\frac{3}{4}; -\frac{5}{2}; 0; -9; 7; 1{,}2; 0{,}(2); -9{,}2(5); -8{,}45; 2{,}32(456)$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

$\mathbb{Q}_- = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < 0\}$

$\mathbb{Q}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} = \mathbb{Q}$

ȘTIAȚI CĂ...?

Notația $\mathbb{Q}$ pentru mulțimea numerelor raționale provine din limba franceză, de la cuvântul *quotient* = *cât* (rezultat al unui raport).

Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor

Oricărui număr rațional îi corespunde pe axa numerelor un punct. Vom spune că numărul este coordonata punctului respectiv.

EXEMPLE:

1. În figura 3, punctul M are coordonata $-\frac{2}{5}$, iar punctul N are coordonata $\frac{7}{5}$. Scriem $M\left(-\frac{2}{5}\right)$, $N\left(\frac{7}{5}\right)$.

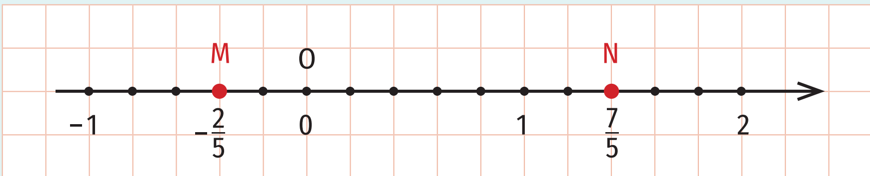


Figura 3

2. În figura 4, punctul P are coordonata −1,4, iar punctul S are coordonata 1,7. Scriem P(−1,4), S(1,7).

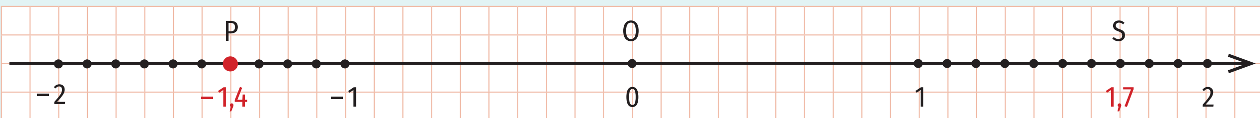


Figura 4

Opusul unui număr rațional

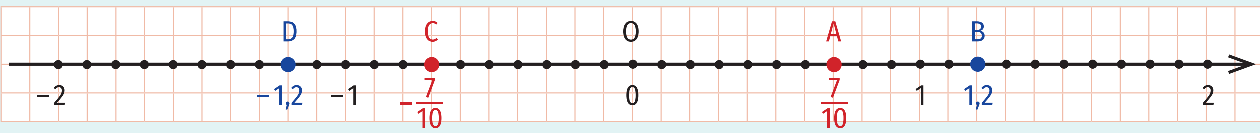


Figura 5

Punctele $A\left(\frac{7}{10}\right)$ și $C\left(-\frac{7}{10}\right)$, respectiv, B(1,2) și D(−1,2) din figura 5 sunt simetrice față de origine. În acest caz, spunem că numerele $\frac{7}{10}$ și $-\frac{7}{10}$, respectiv 1,2 și −1,2 sunt **numere raționale opuse**.

Numerele raționale opuse se reprezintă pe axa numerelor prin puncte simetrice față de originea acesteia.

EXEMPLE:

1. Numerele raționale $\frac{9}{4}$ și $-\frac{9}{4}$ sunt numere opuse.
2. Numerele raționale 6,25 și −6,25 sunt numere opuse.
3. Opusul numărului rațional 5,1(2) este −5,1(2).
4. Opusul numărului rațional −3,(6) este 3,(6).
5. Opusul numărului rațional $-\frac{7}{5}$ este $\frac{7}{5}$.

OBSERVAȚIE

Dacă x este număr rațional nenul, atunci x și $-x$ sunt numere raționale opuse, opusul numărului rațional nenul x este $-x$, iar opusul numărului rațional $-x$ este x. Astfel, $-(-x) = x$, pentru oricare număr rațional nenul x.

EXEMPLE:

1. $-(-3{,}54) = 3{,}54$;
2. $-\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}$.

Modulul unui număr rațional

Distanța de la originea axei numerelor la punctul prin care este reprezentat un număr rațional x pe axa numerelor se numește modulul numărului rațional x. Se notează $|x|$.

EXEMPLE:

1. Modulul numărului $-\frac{2}{3}$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul $M\left(-\frac{2}{3}\right)$, deci $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ (figura 6).
2. Modulul numărului $\frac{4}{3}$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul $N\left(\frac{4}{3}\right)$, deci $\left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ (figura 6).

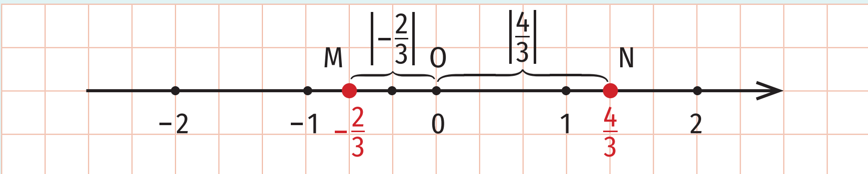


Figura 6

3. $|4{,}2| = 4{,}2$;
4. $|-0{,}25| = 0{,}25$;
5. $\left|\frac{9}{7}\right| = \frac{9}{7}$;
6. $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$.

OBSERVAȚII

1. Modulul unui număr rațional pozitiv este egal cu acel număr, iar modulul unui număr rațional negativ este egal cu opusul acelui număr.
2. Modulul oricărui număr rațional nenul este număr rațional pozitiv.

   $|x| > 0$, pentru oricare număr rațional nenul x
3. Numerele opuse au același modul.

   $|x| = |-x|$, pentru oricare număr rațional nenul x

Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci

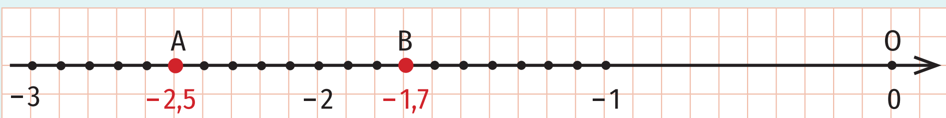
$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Compararea numerelor raționale

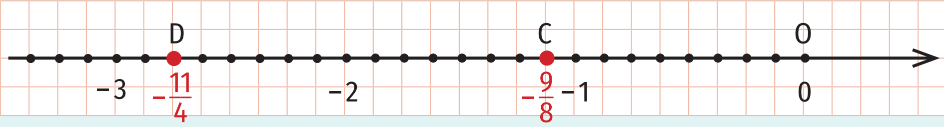
Pe axa numerelor, dintre două numere raționale diferite, cel mai mare este reprezentat în dreapta celui mai mic.

EXEMPLE:

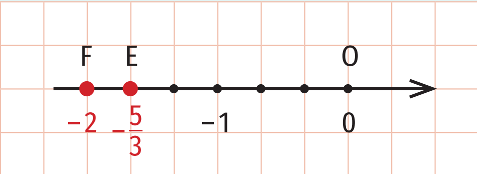
1. $-2{,}5 < -1{,}7$ (Punctul B(−1,7) se află pe axa numerelor în dreapta punctului A(−2,5).)



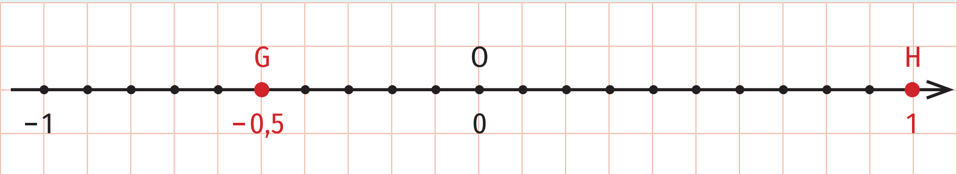
2. $-\frac{9}{8} > -\frac{11}{4}$ (Punctul $C\left(-\frac{9}{8}\right)$ se află pe axa numerelor în dreapta punctului $D\left(-\frac{11}{4}\right)$.)



3. $-\frac{5}{3} > -2$ (Punctul $E\left(-\frac{5}{3}\right)$ se află pe axa numerelor în dreapta punctului F(−2).)



4. −0,5 < 1 (Punctul H(1) se află pe axa numerelor în dreapta punctului G(−0,5).)



OBSERVAȚII

1. Dintre două numere raționale pozitive este mai mare cel care are modulul mai mare.

EXEMPLE:

1. $\left.\begin{array}{l} 1{,}7 > 0 \\ 1{,}74 > 0 \\ |1{,}7| < |1{,}74| \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}7 < 1{,}74;$

$1{,}7 < 1{,}74$
$\uparrow$
$1{,}70 < 1{,}74$
$\uparrow$
$1 = 1,\ 7 = 7,\ 0 < 4$

2. $\left.\begin{array}{l} \frac{5}{7} > 0 \\ \frac{2}{3} > 0 \\ \left|\frac{5}{7}\right| > \left|\frac{2}{3}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$

$^{3)}\frac{5}{7} > {}^{7)}\frac{2}{3}$
$\uparrow$
$\frac{15}{21} > \frac{14}{21}$
$\uparrow$
$15 > 14$

2. Dintre două numere raționale negative este mai mare cel care are modulul mai mic.

EXEMPLE:

1. $\left.\begin{array}{l} -2{,}8 < 0 \\ -1{,}2 < 0 \\ |-2{,}8| > |-1{,}2| \end{array}\right\} \Rightarrow -2{,}8 < -1{,}2;$

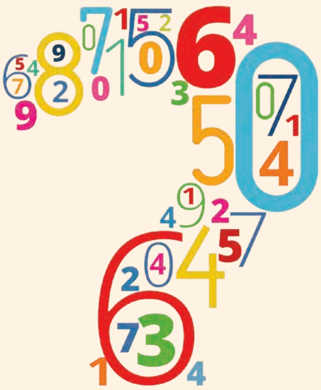
$-2{,}8 < -1{,}2$
$\uparrow \longleftarrow$ schimbăm sensul inegalității
$|-2{,}8| > |-1{,}2|$
$\uparrow$
$2{,}8 > 1{,}2$
$\uparrow$
$2 > 1$

2. $\left.\begin{array}{l} -\frac{7}{3} < 0 \\ -\frac{11}{6} < 0 \\ \left|-\frac{7}{3}\right| > \left|-\frac{11}{6}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{7}{3} < -\frac{11}{6}$

$-\frac{7}{3} < -\frac{11}{6}$
$\uparrow \longleftarrow$ schimbăm sensul inegalității
$\left|-\frac{7}{3}\right| > \left|-\frac{11}{6}\right|$
$\uparrow$
$\frac{7}{3} > \frac{11}{6}$
$\uparrow$
$\frac{14}{6} > \frac{11}{6}$
$\uparrow$
$14 > 11$

3. Orice număr rațional negativ este mai mic decât orice număr rațional pozitiv.

EXEMPLU: $\left.\begin{array}{l} -2{,}5 < 0 \\ 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2{,}5 < 1$



ȘTIAȚI CĂ...?

- Scrierea unei fracții prin utilizarea unei linii orizontale între numărător și numitor a fost utilizată pentru prima oară în lumea arabă.
- Ideea de a da unei fracții zecimale o reprezentare cu virgulă aparține matematicianului persan Al-Kashi. În 1427, Al-Kashi definește în lucrarea sa, *Cheia secolului*, fracțiile zecimale și propune o notație pentru acestea, stabilind regulile de calcul.

Exerciții rezolvate

1. Se consideră mulțimea $A = \left\{-1{,}5;\ 2;\ 0{,}3;\ 1{,}7; \frac{3}{2}; -2; -\frac{3}{10}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{5}\right\}$. Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Q}_-$, $A \cap \mathbb{Q}_+$, $A \setminus \mathbb{N}$, $A \setminus \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

$A \cap \mathbb{Z} = \{2; -2\}$,

$A \cap \mathbb{N} = \{2\}$,

$A \cap \mathbb{Q}_- = \left\{-1{,}5\,;\ -2\,;\ -\frac{3}{10}\,;\ -\frac{1}{5}\right\}$,

$A \cap \mathbb{Q}_+ = \left\{2; 0{,}3; 1{,}7; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$,

$A \setminus \mathbb{N} = \left\{-1{,}5; 0{,}3; 1{,}7; \frac{3}{2}; -2\,; -\frac{3}{10}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{5}\right\}$,

$A \setminus \mathbb{Z} = \left\{-1{,}5;\ 0{,}3;\ 1{,}7; \frac{3}{2}; -\frac{3}{10}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{5}\right\}$.

2. Compară numerele raționale $-\frac{17}{20}$ și $-0{,}8$.

Rezolvare:

Metoda 1

$$\left.\begin{array}{l}\frac{17}{20} = 0{,}85\\ 0{,}85 > 0{,}8\end{array}\right| \Rightarrow \frac{17}{20} > 0{,}8 \Rightarrow -\frac{17}{20} < -0{,}8$$

Metoda 2

$$\left.\begin{array}{l}0{,}8 = {}^{2)}\frac{8}{10} = \frac{16}{20}\\ \frac{17}{20} > \frac{16}{20}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{17}{20} > 0{,}8 \Rightarrow -\frac{17}{20} < -0{,}8$$

3. Scrie numerele raționale $-1{,}5$; $-3,(5)$ și $-0{,}1(6)$ sub forma $-\frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{m}{n}$ este fracție ordinară ireductibilă.

Rezolvare:

Numerele raționale $-1{,}5$; $-3,(5)$; $-0{,}1(6)$ sunt opusele numerelor raționale pozitive $1{,}5$; $3,(5)$; $0{,}1(6)$.

Cum $1{,}5 = {}^{(5}\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, $3,(5) = \frac{35-3}{9} = \frac{32}{9}$, $0{,}1(6) = \frac{16-1}{90} = {}^{(15}\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$, obținem $-1{,}5 = -\frac{3}{2}$, $-3,(5) = -\frac{32}{9}$, $-0{,}1(6) = -\frac{1}{6}$.

4. Determină valorile numărului natural n pentru care:

a) $\frac{12}{n+4} \in \mathbb{N}$; b) $\frac{n+5}{n+2} \in \mathbb{N}$; c) $\frac{8n+4}{5n+2} \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

a) $\frac{12}{n+4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n+4) \mid 12$

Cum n este număr natural, $n + 4 \geq 4$. Divizorii lui 12 mai mari sau egali decât 4 sunt: 4, 6 și 12. Obținem $n + 4 \in \{4, 6, 12\}$. Rezolvând în $\mathbb{N}$ ecuațiile $n + 4 = 4$, $n + 4 = 6$ și $n + 4 = 12$, obținem $n \in \{0, 2, 8\}$.

b) $\frac{n+5}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n+2) \mid (n+5)$.

Deoarece $(n + 2) \mid (n + 2)$, pentru oricare număr natural n, obținem $(n + 2) \mid [(n + 5) - (n + 2)]$, ceea ce e echivalent cu $(n + 2) \mid 3$.

Cum n este număr natural, $n + 2 \geq 2$. Singurul divizor al lui 3 mai mare sau egal decât 2 este 3. Obținem $n + 2 = 3$, deci $n = 1$.

c) $\frac{8n+4}{5n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (5n+2) \mid (8n+4)$.

Deoarece $(5n + 2) \mid (5n + 2)$, pentru oricare număr natural n, obținem $(5n + 2) \mid [5(8n + 4) - 8(5n + 2)]$, ceea ce e echivalent cu $(5n + 2) \mid 4$.

Cum n este număr natural, $5n + 2 \geq 2$. Divizorii lui 4 mai mari sau egali decât 2 sunt 2 și 4. Obținem $5n + 2 \in \{2, 4\}$. Rezolvând în $\mathbb{N}$ ecuațiile $5n + 2 = 2$ și $5n + 2 = 4$, obținem $n = 0$.

Aplic

1. Tabelul de mai jos cuprinde temperaturile medii lunare înregistrate pe parcursul unui an.

Luna	Ianuarie	Februarie	Martie	Aprilie	Mai	Iunie	Iulie	August	Septembrie	Octombrie	Noiembrie	Decembrie
Temperatura (°C)	-8,02	-6,5	-0,2	15,5	19	25,8	28,5	29,91	22,3	15	10,15	-2,1

a) În ce lună a anului a fost înregistrată cea mai mică temperatură medie? Dar cea mai mare?

b) Care sunt lunile în care au fost înregistrate temperaturi medii mai mici decât -5°C?

c) Scrie lunile anului în ordinea descrescătoare a temperaturilor medii înregistrate.

2. Scrie două numere:

a) naturale; c) raționale, dar nu întregi; e) întregi negative;

b) întregi; d) raționale pozitive; f) raționale, dar nu naturale.

3. Transcrie și completează tabelul de mai jos.

Numărul	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	0,15	-1,3	-5	-1,5(23)						
Opusul							$-\frac{1}{10}$	$\frac{5}{3}$	-0,9	1,8	2	2,(3)
Modulul												

4. Scrie trei elemente din fiecare mulțime:

a) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; e) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$;

b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$; d) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$; f) $\mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$.

5. Determină coordonatele punctelor A, B, C, D, E, F, G și H din figura 7:

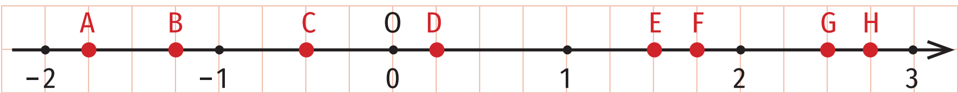


Figura 7

6. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $-9 \in \mathbb{Q}$; ☐

b) $10 \notin \mathbb{Q}$; ☐

c) $0 \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; ☐

d) $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$; ☐

e) $\frac{10}{5} \notin \mathbb{N}$; ☐

f) $\left|-\frac{4}{3}\right| \in \mathbb{Q}_+$; ☐

g) $|-13| \in \mathbb{Q}$; ☐

h) $-\frac{12}{4} \in \mathbb{Z}$; ☐

i) $1{,}23 \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$; ☐

j) $|-1{,}3| \in \mathbb{Z}$; ☐

k) $0 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; ☐

l) $1{,}2(5) \in \mathbb{Q}$. ☐

ȘTIAȚI CĂ...?

- Cel care a introdus fracțiile zecimale în Europa (sec. XVI) și a subliniat importanța practică a utilizării acestora a fost matematicianul și inginerul flamand Simon Stevin. Notația utilizată de Stevin este greoaie – în locul virgulei, acesta folosea un zero încercuit, iar fiecare zecimală era numerotată. În scrierea sa, fracția zecimală 12,761 este 12⓪7①6②1③
- În țările în care limba oficială este engleza (Anglia, SUA, Canada etc.), în scrierea fracțiilor zecimale, în loc de *virgulă* se folosește *punct*.

7. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{9}{4}; -\frac{2}{3}; 0,(3); \frac{21}{7}; 0; -5; -\frac{18}{3}; 1,4; -8; 10,2; -\frac{4}{7}\right\}$. Determină mulțimile:

a) $A \cap \mathbb{N}$; d) $A \cap \mathbb{Q}^*$; g) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$;
b) $A \cap \mathbb{Z}$; e) $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$; h) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})$;
c) $A \cap \mathbb{Q}$; f) $A \cap \mathbb{Q}_+$; i) $A \cap \mathbb{Q}_-$.

8 Completează casetele cu unul dintre semnele < sau >, pentru a obține propoziții adevărate:

a) 1,2 ☐ 2,1; e) 0 ☐ − 1,4; i) |−1,24| ☐ − 1,3;
b) −2,3 ☐ − 2,51; f) −1 ☐ − 1,32; j) |−2| ☐ |−2,5|;
c) −3,431 ☐ 3,4; g) −1,7 ☐ − 2; k) |−1,52| ☐ |−1,51|;
d) −2,5 ☐ − 2,51; h) −0,2 ☐ − 1; l) |−1| ☐ 1,2.

9. Scrie ca fracții ordinare ireductibile următoarele fracții zecimale:

a) 0,25; 3,4; 1,232; b) 1,(6); 1,(36); 0,(225); c) 1,1(6); 0,8(63); 2,33(63); 1,02(6).

10. Scrie numerele raționale −2,225; −0,4(21); −1,6(2); −1,5(72); −6,(5); −0,(02) și −3,07(3) sub forma $-\frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{m}{n}$ este fracție ordinară ireductibilă.

11. Scrie câte trei reprezentanți pentru fiecare dintre numerele raționale:
$\frac{3}{4}$; −1,2; $-\frac{4}{9}$; 2,(3); $-\frac{7}{10}$; 0,2(4); −1,1(23); 2,75; −0,(56); −0,00(8).

12. Compară numerele raționale:

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{3}$; e) $\frac{2}{5}$ și $\frac{7}{10}$; i) $\frac{3}{4}$ și $\frac{4}{5}$;
b) $-\frac{5}{9}$ și $-\frac{7}{9}$; f) $-\frac{5}{14}$ și $-\frac{2}{7}$; j) $-\frac{4}{7}$ și $-\frac{5}{8}$;
c) $\frac{8}{5}$ și $\frac{8}{7}$; g) $-\frac{2}{15}$ și $-\frac{7}{25}$; k) $\left|-\frac{17}{5}\right|$ și $\left|\frac{17}{5}\right|$;
d) $-\frac{7}{5}$ și $-\frac{8}{5}$; h) $-\frac{7}{12}$ și $-\frac{8}{15}$; l) $\left|\frac{1}{3}\right|$ și $-\frac{1}{3}$.

13. Completează casetele cu numere întregi consecutive pentru a obține propoziții adevărate:

a) ☐ < 2,4 < ☐; c) ☐ < −0,2(5) < ☐; e) ☐ < $-\frac{8}{3}$ < ☐;
b) ☐ < −5,2 < ☐; d) ☐ < $\frac{1}{2}$ < ☐; f) ☐ < $-\frac{10}{7}$ < ☐.

14. Scrie în casetă numărul mai mare:

a) $\frac{1}{8}$ și 0,1 ; ☐ c) $-\frac{1}{2}$ și −1,2 ; ☐ e) $1\frac{1}{3}$ și 1,25 ; ☐
b) $-\frac{2}{5}$ și −0,5 ; ☐ d) −1,3 și $-\frac{10}{8}$; ☐ f) −0,(3) și $-\frac{7}{8}$. ☐

15. a) Scrie două numere raționale cuprinse între 4 și 5.
b) Scrie două numere raționale cuprinse între −3 și −2.
c) Scrie numerele raționale care au modulul egal cu $\frac{7}{8}$.
d) Scrie două numere raționale care au modulul mai mic decât 1,5.
e) Scrie două numere raționale negative care au modulul mai mare decât $\frac{3}{4}$.

16. Reprezintă pe axa numerelor:

a) $-1,5; -2; 1,2; -0,4; -1,7; 0,6; 1; -1,8; -0,3$;

b) $-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; -2; \frac{6}{3}$;

c) $\frac{10}{4}; -0,8; -\frac{9}{5}; 1,6; \frac{3}{2}; 1; -\frac{14}{20}; -\frac{75}{50}; -1,1$;

d) $\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; 1; -\frac{5}{6}; \frac{10}{8}; -\frac{5}{12}; \frac{8}{24}; -\frac{8}{3}; \frac{9}{36}$.

17. Ordonează crescător următoarele seturi de numere raționale:

a) $-\frac{5}{14}; -\frac{2}{7}; -\frac{8}{21}; -\frac{1}{2}$;

b) $\frac{2}{5}; -\frac{9}{20}; -\frac{17}{40}; \frac{8}{10}$;

c) $0,1; 0,(1); 0,11; 0,111; 0,011$;

d) $-2,5; -2,(51); -2,(5); -2,5(1); -2,51$.

18. Ordonează descrescător următoarele seturi de numere raționale:

a) $-\frac{1}{8}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{10}{16}$;

b) $\frac{1}{2}; \frac{7}{12}; -\frac{1}{4}; \frac{5}{6}; -\frac{1}{3}$;

c) $-3,4; -3,(4); -3,44; -3,444; -3$;

d) $-2,(3); 2,(32); -2,32; -2,3(2); 2,3$.

19. Se consideră mulțimea $A = \left\{-11; -3; \frac{22}{5}; \frac{16}{3}; -5,6; 6; -6,(2); -0,3; -\frac{6}{5}; 2; \frac{25}{8}; \frac{49}{5}\right\}$.
Determină mulțimile $B = \{x \mid x \in A \cap \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x \in A, |x| = x\}$, $D = \{x \mid x \in A, |x| < 5\}$, $E = \{x \mid x \in A, 2 < |x| \le 4\}$.

20. a) Determină a 2023-a zecimală a numărului $\frac{23}{7}$.

b) Calculează suma primelor 100 de zecimale ale numărului $\frac{73}{330}$.

21. Determină valorile numărului natural n pentru care:

a) $\frac{6}{n} \in \mathbb{N}$;

b) $\frac{15}{n+1} \in \mathbb{N}$;

c) $\frac{18}{2n+3} \in \mathbb{N}$;

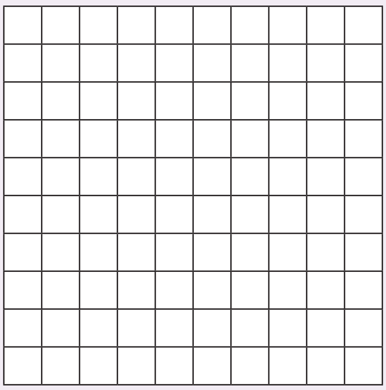
d) $\frac{24}{2n-1} \in \mathbb{N}^*$;

e) $\frac{n+2}{n+1} \in \mathbb{N}$;

f) $\frac{6n+4}{2n-3} \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$;

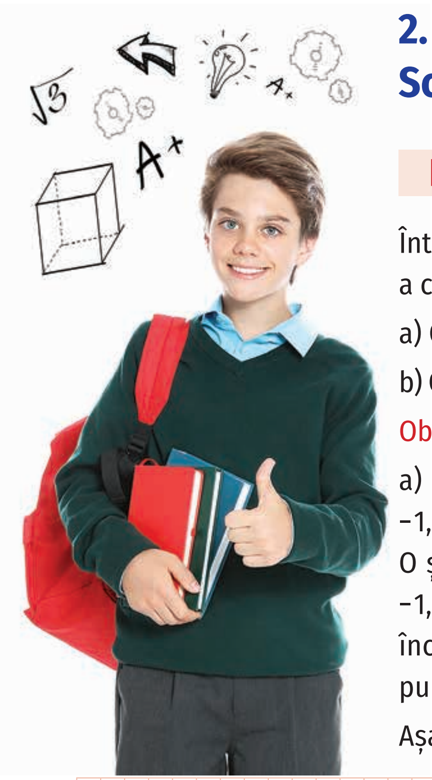
g) $\frac{5n-2}{2n+1} \in \mathbb{N}^*$.

Portofoliu



1. Reprodu pe o foaie de matematică pătratul alăturat (inclusiv liniile din interior).
2. În pătratul desenat de tine realizează un desen, folosind numai linii verticale și orizontale care se suprapun pe liniatura acestuia.
3. Colorează desenul realizat în cel puțin patru culori diferite.
4. Pentru fiecare culoare pe care ai folosit-o scrie o fracție care arată ce parte din întreg reprezintă suprafața colorată cu aceasta (întregul este pătratul inițial).
5. Pentru fiecare dintre numerele raționale scrise la punctul 4 scrie încă trei reprezentanți și precizează cum i-ai obținut.
6. Scrie opusele numerelor raționale scrise la punctul 4 și ordonează-le crescător.

Adaugă totul la portofoliul tău.



2. Adunarea numerelor raționale. Proprietăți. Scăderea numerelor raționale

Descopăr

Într-o zi, temperatura aerului la ora 7 a fost −1,3°C. Până la ora 16, temperatura a crescut cu 2,7°C, iar de la ora 16 până la ora 23 a scăzut cu 2,6°C.

a) Ce temperatură a fost înregistrată la ora 16 în acea zi? Dar la ora 23?

b) Cu câte grade este mai mare temperatura de la ora 23 decât temperatura de la ora 7?

Observație

a) Pentru a calcula (−1,3) + 2,7 reprezentăm pe axa numerelor numerele raționale −1,3 și 2,7, apoi le punem în evidență prin săgeți care pornesc din dreptul punctului O și au vârfurile în dreptul punctelor de pe axă prin care se reprezintă numerele −1,3 și, respectiv, 2,7. O săgeată identică cu săgeata care indică numărul 2,7 se așază începând din vârful săgeții care indică numărul −1,3. Vârful acesteia va fi în dreptul punctului prin care e reprezentat pe axa numerelor numărul 1,4.

Așadar, (−1,3) + 2,7 = 1,4 (figura 1).

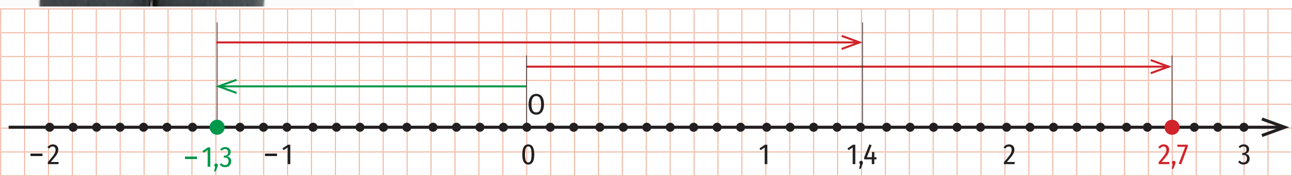


Figura 1

Învăț

Adunarea numerelor raționale

Prin adunarea numerelor raționale *a* și *b* se obține un număr rațional, notat *a* + *b*, numit suma numerelor raționale *a* și *b*. Numerele *a* și *b* se numesc termenii sumei.

- **Pentru a aduna două numere raționale, ambele pozitive sau ambele negative, adunăm modulele celor două numere, iar la rezultat punem semnul comun al celor două numere.**

EXEMPLE:

1. $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\left|\frac{3}{4}\right|+\left|\frac{1}{8}\right|={}^{2)}\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$;

2. $\left(-\frac{3}{10}\right)+\left(-\frac{2}{25}\right)=-\left(\left|-\frac{3}{10}\right|+\left|-\frac{2}{25}\right|\right)=-\left({}^{5)}\frac{3}{10}+{}^{2)}\frac{2}{25}\right)=-\left(\frac{15}{50}+\frac{4}{50}\right)=-\frac{19}{50}$;

3. (−1,8) + (−3,25) = −(|−1,8| + |−3,25|) = −(1,8 + 3,25) = −5,05;

4. $(-2{,}5)+\left(-\frac{1}{6}\right)=-\left(|-2{,}5|+\left|-\frac{1}{6}\right|\right)=-\left(2{,}5+\frac{1}{6}\right)=-\left(\frac{25^{(5}}{10}+\frac{1}{6}\right)=-\left({}^{3)}\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\right)=-\left(\frac{15}{6}+\frac{1}{6}\right)=-\frac{16^{(2}}{6}=-\frac{8}{3}$.

- **Pentru a aduna două numere raționale, unul pozitiv și unul negativ, procedăm astfel:**

– calculăm modulele celor două numere;

– din modulul mai mare scădem modulul mai mic;

– la rezultat punem semnul numărului al cărui modul este mai mare.

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{4}{15}$

Cum $\left|-\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$, $\left|\frac{4}{15}\right| = \frac{4}{15}$ și $\frac{5}{6} > \frac{4}{15}$ $\left(\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ și $\frac{4}{15} = \frac{8}{30}\right)$, suma $\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{4}{15}$ va avea semnul „–".

Așadar, $\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{4}{15} = -\left(\left|-\frac{5}{6}\right| - \left|\frac{4}{15}\right|\right) = -\left({}^{5)}\frac{5}{6} - {}^{2)}\frac{4}{15}\right) = -\left(\frac{25}{30} - \frac{8}{30}\right) = -\frac{17}{30}$.

2. 3,24 + (−1,6)

Cum |3,24| = 3,24; |−1,6| = 1,6 și 3,24 > 1,6, suma 3,24 + (−1,6) va avea semnul „+".

Așadar, 3,24 + (−1,6) = |3,24| − |−1,6| = 3,24 − 1,6 = 1,64.

3. $2,(6) + \left(-\frac{25}{12}\right)$

Cum $|2,(6)| = 2,(6) = \frac{26-2}{9} = \frac{24^{(3}}{9} = \frac{8}{3}$, $\left|-\frac{25}{12}\right| = \frac{25}{12}$ și $\frac{8}{3} > \frac{25}{12}$ $\left(\frac{8}{3} = \frac{32}{12}\right)$, suma $2,(6) + \left(-\frac{25}{12}\right)$ va avea semnul „+".

$2,(6) + \left(-\frac{25}{12}\right) = |2,(6)| - \left|-\frac{25}{12}\right| = 2,(6) - \frac{25}{12} = \frac{8}{3} - \frac{25}{12} = \frac{32}{12} - \frac{25}{12} = \frac{7}{12}$.

OBSERVAȚIE

Suma a două numere raționale scrise sub forma $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$ se poate face și astfel: se aduc termenii la același numitor și se adună numărătorii folosind regulile de adunare a numerelor întregi. Numitorul sumei este numitorul comun al celor două fracții.

EXEMPLE:

1. ${}^{6)}\frac{2}{15} + \left(-{}^{5)}\frac{7}{18}\right) = \frac{12}{90} + \left(-\frac{35}{90}\right) = \frac{12 + (-35)}{90} = -\frac{23}{90}$;

2. $\left(-{}^{4)}\frac{6}{11}\right) + \left(-{}^{11)}\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{24}{44}\right) + \left(-\frac{33}{44}\right) = \frac{(-24) + (-33)}{44} = -\frac{57}{44}$.

Proprietățile adunării numerelor raționale

- **Adunarea numerelor raționale este comutativă** (suma a două numere raționale nu se modifică dacă schimbăm locul termenilor):

  a* + *b* = *b* + *a, pentru oricare numere raționale *a* și *b*.

EXEMPLE:

1. $\frac{5}{4} + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{5}{4}$;

2. (−1,5) + 2,4 = 2,4 + (−1,5).

- **Adunarea numerelor raționale este asociativă** (suma a trei numere raționale nu se modifică dacă grupăm termenii în moduri diferite):

  (*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*), pentru oricare numere raționale *a*, *b* și *c*.

EXEMPLE:

1. $\underbrace{\frac{1}{2} + \underbrace{\left[\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\right]}_{-\frac{2}{15}}}_{\frac{11}{30}} = \underbrace{\underbrace{\left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)\right]}_{\frac{1}{6}} + \frac{1}{5}}_{\frac{11}{30}}$;

2. $\underbrace{(-0,2) + \underbrace{[1 + (-2,5)]}_{-1,5}}_{-1,7} = \underbrace{\underbrace{[(-0,2) + 1]}_{0,8} + (-2,5)}_{-1,7}$.

- **Numărul 0 este element neutru:**

  a* + 0 = 0 + *a* = *a, pentru oricare număr rațional *a*.

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$;

2. (−4,1) + 0 = 0 + (−4,1) = −4,1.

- **Pentru oricare număr rațional nenul *a* există un număr rațional nenul, notat −*a* și numit opusul lui *a*, astfel încât $a + (-a) = (-a) + a = 0$.**

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \left(-\frac{4}{9}\right) = 0;$

2. $3{,}11 + (-3{,}11) = (-3{,}11) + 3{,}11 = 0.$

Scăderea numerelor raționale

Diferența dintre numărul rațional *a* și numărul rațional *b* este egală cu suma dintre numărul rațional *a* și opusul numărului rațional *b*.

EXEMPLE:

1. $5{,}21 - 8 = 5{,}21 + (-8) = -(8 - 5{,}21) = -2{,}79;$

2. $(-1{,}45) - 2{,}4 = (-1{,}45) + (-2{,}4) = -(1{,}45 + 2{,}4) = -3{,}85;$

3. $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{9}{4}\right) = \left(-{}^{4)}\frac{2}{3}\right) + {}^{3)}\frac{9}{4} = \left(-\frac{8}{12}\right) + \frac{27}{12} = \frac{(-8) + 27}{12} = \frac{19}{12};$

4. $\frac{5}{4} - \left(-\frac{3}{10}\right) = {}^{5)}\frac{5}{4} + {}^{2)}\frac{3}{10} = \frac{25}{20} + \frac{6}{20} = \frac{25 + 6}{20} = \frac{31}{20}.$

OBSERVAȚII

1. Dacă *a* și *b* sunt două numere raționale, $b \neq 0$, atunci $a - b = a + (-b)$.

2. Diferența a două numere raționale este un număr rațional.

Aplic

1. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}; \square$

b) $\frac{9}{10} + \left(-\frac{4}{10}\right) = -\frac{5}{10}; \square$

c) $\left(-\frac{15}{4}\right) + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{28}{4}; \square$

d) $\left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}; \square$

e) $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{2}{8}; \square$

f) $\left(-\frac{11}{6}\right) - \frac{7}{6} = -\frac{18}{6}; \square$

g) $\left(-\frac{15}{11}\right) - \left(-\frac{9}{11}\right) = \frac{8}{11}; \square$

h) $\frac{13}{7} - \left(-\frac{11}{7}\right) = \frac{2}{7}. \square$

2. Calculează:

a) $\frac{3}{7} + \left(-\frac{2}{21}\right);$

b) $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{7}{15}\right);$

c) $\left(-\frac{5}{6}\right) + \left(+\frac{19}{24}\right);$

d) $\frac{2}{15} + \left(-\frac{7}{18}\right);$

e) $\frac{4}{7} - \left(-\frac{15}{28}\right);$

f) $\left(-\frac{13}{12}\right) - \left(-\frac{7}{15}\right);$

g) $\left(-\frac{3}{10}\right) - \frac{7}{6};$

h) $\frac{11}{18} - \frac{16}{27};$

i) $(-2) + \left(-\frac{3}{2}\right);$

j) $\frac{4}{7} + (-1);$

k) $\left(-\frac{5}{7}\right) - (-3);$

l) $\left(-\frac{7}{3}\right) - 2.$

3. Efectuează:

a) $2{,}5 + (-1{,}7);$

b) $(-3{,}15) + (-1{,}25);$

c) $(-0{,}1) + (+0{,}25);$

d) $1{,}2 + (-1{,}3);$

e) $1{,}4 - (-1{,}6);$

f) $(-2{,}9) - (-1{,}9);$

g) $(-4{,}5) - 3{,}6;$

h) $7{,}5 - 8{,}92;$

i) $(-2) + (-1{,}9);$

j) $3{,}5 + (-2);$

k) $(-1{,}82) - (-2);$

l) $(-9{,}8) - 8.$

4. Alina are înălțimea 1,62 m, Delia este mai înaltă decât ea cu 0,13 m, iar Bianca este mai scundă decât Delia cu 0,05 m.

a) Fără a efectua calculele, scrie numele celor trei fete în ordinea descrescătoare a înălțimilor lor. Justifică ordonarea făcută!

b) Calculează înălțimile Deliei și Biancăi și apoi scrie numele celor trei fete în ordinea descrescătoare a înălțimilor lor. Ai obținut aceeași ordonare ca și la punctul a)?

5. Aurel a cumpărat o carte, un penar și un stilou. Cartea a costat 24,99 lei, penarul a costat 43,99 lei, iar stiloul a costat 39,99 lei.

a) Estimează suma de bani cheltuită de Aurel și precizează dacă îi ajung 100 de lei pentru a plăti cumpărăturile.

b) Calculează suma de bani pe care a folosit-o Aurel pentru a plăti cartea, penarul și stiloul. Ai obținut aceeași sumă ca cea estimată? Dacă nu, argumentează de ce sunt diferite și calculează diferența dintre cele două sume.

6. În tabelul următor sunt prezentate încasările (Î) și plățile (P) unei societăți comerciale într-o săptămână, exprimate în mii de lei.

	Luni		Marți		Miercuri		Joi		Vineri	
	Î	P	Î	P	Î	P	Î	P	Î	P
	1,3	1,8	1,21	1,52	3,2	2,96	3,7	4,2	4,32	4,23
Sold	−0,5									

Soldul unei zile este diferența dintre încasările și plățile din acea zi.

a) Fără a efectua calculele, precizează zilele în care soldul este negativ.

b) Calculează soldul fiecărei zile.

7. Într-o zi, temperatura aerului la ora 6 era −8,2°C. Până la ora 12, temperatura a crescut cu 3,4°C, iar de la ora 12 până la ora 22, a scăzut cu 6,4°C.

a) Ce temperatură a fost înregistrată la ora 22?

b) Cu câte grade e mai mică temperatura înregistrată la ora 22 decât temperatura înregistrată la ora 6?

8. Calculează $a + b$ și $a - b$:

a) $a = -3{,}8(3)$, $b = -3,(6)$; c) $a = -2{,}1(6)$, $b = 1{,}06$; e) $a = -\frac{5}{2}$, $b = -1{,}3$;

b) $a = 3{,}24$, $b = -1,(3)$; d) $a = 2{,}25$, $b = \frac{17}{4}$; f) $a = \frac{11}{6}$, $b = -1,(3)$.

9. Transcrie și completează tabelele:

a	b	c	$a + b$	$(a + b) + c$	$b + c$	$(\lvert a\rvert + b) + c$	$a + \lvert a\rvert$
$\frac{5}{9}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{6}$					
$-\frac{1}{10}$	0,2	−1,4					
1,(3)	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{3}$					
−1,5	$-\frac{7}{10}$	2					
−3	−0,1	1,25					
$-\frac{7}{9}$	$-\frac{8}{15}$	$\frac{3}{12}$					

APLICAȚIE

În coșul de cumpărături al Arianei se află:

28,5 lei

75,99 lei

68,25 lei

49 lei

Estimează costul cumpărăturilor Arianei și precizează dacă îi ajung 200 de lei pentru a le achita.

x	8	-6	$-\frac{5}{12}$	$-1,(6)$	$\frac{13}{20}$	$-1,2$	$\frac{3}{20}$
y	$-1,25$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{16}{15}$	$-0,(5)$	$-0,25$
$x - y$							
$\lvert x\rvert - \lvert y\rvert$							
$x - \lvert y\rvert$							
$\lvert x\rvert - y$							

10. a) Calculează $b + a$, știind că a și b sunt numere raționale și $a + b = -2,4$.

b) Calculează $a + \frac{1}{3} + b$, știind că a și b sunt numere raționale și $b + a = -1,5$.

c) Calculează $x + \left(-\frac{1}{16}\right) + y$, știind că x și y sunt numere raționale și $x + y = \frac{5}{12}$.

d) Calculează $(x + y) + z$, știind că x, y și z sunt numere raționale, $x = -1,8$ și $y + z = -2,(5)$.

11. Calculează $x + y$, știind că x și y sunt numere raționale, $\lvert x\rvert = \frac{5}{6}$ și $\lvert y\rvert = 0,25$. Scrie toate variantele posibile.

12. Calculează, folosind proprietățile adunării numerelor raționale:

a) $\frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{5}$;

b) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{5}{14}\right) + \frac{1}{21}$;

c) $\left(-\frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{11}{6}\right) + \frac{7}{12}$;

d) $\frac{6}{5} + \left(-\frac{7}{15}\right) + \left(-\frac{9}{10}\right)$;

e) $\left(-\frac{7}{9}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{17}{90}\right)$;

f) $\frac{7}{18} + \left(-\frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{16}{9}\right)$;

g) $\left(-\frac{3}{11}\right) + \left(-\frac{8}{4}\right) + \left(-\frac{7}{22}\right)$;

h) $\frac{5}{4} + \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{2}$.

13. Calculează $x + y + z$, știind că:

a) $x = -1,15$; $y = 3,54$; $z = -1,25$;

b) $x = 0,25$; $y = -\frac{3}{2}$; $z = 0,(3)$;

c) $x = -\frac{13}{18}$; $y = -\frac{7}{72}$; $z = 0,(3)$;

d) $x = -2,1(6)$; $y = -\frac{31}{18}$; $z = -3,2$.

Portofoliu

Rezolvă cerințele următoare pe o coală de hârtie și adaug-o la portofoliu.

1. Înregistrează într-un tabel înălțimea (exprimată în metri) și masa (exprimată în kilograme) pentru fiecare dintre membrii familiei tale.
2. Scrie numele membrilor familiei în ordinea crescătoare a înălțimilor acestora.
3. Scrie numele membrilor familiei în ordinea descrescătoare a maselor acestora.
4. Determină cea mai mare diferență dintre înălțimile a doi membri ai familiei tale.

3. Înmulțirea numerelor raționale. Proprietăți

Îmi amintesc

Amalia are 133,5 lei. Cu 0,2 din sumă cumpără un pix, iar cu $\frac{2}{3}$ din sumă cumpără o carte. Cât costă fiecare dintre cele două obiecte cumpărate de Amalia?

Învăț

Prin înmulțirea numerelor raționale *a* și *b* se obține un număr rațional, notat $a \cdot b$, numit produsul numerelor *a* și *b*. Numerele *a* și *b* se numesc factorii produsului.

- **Produsul a două numere raționale, ambele pozitive sau ambele negative, este egal cu produsul modulelor acestora.**

EXEMPLE:

1. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 9} = \frac{8}{27}$;
2. $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \left|-\frac{5}{6}\right| \cdot \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{5}{\cancelto{2}{6}} \cdot \frac{\cancelto{1}{3}}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$;
3. $(-1000) \cdot (-1{,}25) = |-1000| \cdot |-1{,}25| = 1\underbrace{\boxed{000}}_{\text{3 zerouri}} \cdot 1{,}\underset{\text{3 cifre}}{\overrightarrow{25}} = 1250$;
4. $[-1{,}2(4)] \cdot \left(-\frac{9}{40}\right) = |-1{,}2(4)| \cdot \left|-\frac{9}{40}\right| = 1{,}2(4) \cdot \frac{9}{40} = \frac{124-12}{90} \cdot \frac{9}{40} = \frac{\cancelto{14}{112}}{\cancelto{10}{90}} \cdot \frac{\cancelto{1}{9}}{\cancelto{5}{40}} = \frac{\cancelto{7}{14}}{\cancelto{5}{10}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7 \cdot 1}{5 \cdot 5} = \frac{7}{25}$.

- **Pentru a calcula produsul a două numere raționale, unul pozitiv și unul negativ, înmulțim modulele acestora și punem „–” la rezultat.**

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \frac{21}{20} = -\left(\left|-\frac{8}{9}\right| \cdot \left|\frac{21}{20}\right|\right) = -\left(\frac{\cancelto{2}{8}}{\cancelto{3}{9}} \cdot \frac{\cancelto{7}{21}}{\cancelto{5}{20}}\right) = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}\right) = -\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = -\frac{14}{15}$;
2. $0{,}2 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) = -\left(|0{,}2| \cdot \left|-\frac{4}{7}\right|\right) = -\left(0{,}2 \cdot \frac{4}{7}\right) = -\left(\frac{2}{\cancelto{5}{10}} \cdot \frac{\cancelto{2}{4}}{7}\right) = -\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7}\right) = -\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 7} = -\frac{4}{35}$;
3. $(-1{,}6) \cdot 2{,}45 = -(|-1{,}6| \cdot |2{,}45|) = -(1{,}6 \cdot 2{,}45) = -3{,}92$.

$$\begin{array}{rl} 1{,}6\ \cdot & \longleftarrow \text{o zecimală} \\ 2{,}45 & \longleftarrow \text{două zecimale} \\ \hline 80 & \\ 64 & \\ 32 & \\ \hline 3{,}920 & \longleftarrow \text{trei zecimale} \end{array}$$

OBSERVAȚII

1. Dacă *a* și *b* sunt numere raționale, atunci $|a|$ și $|b|$ sunt numere raționale pozitive și, pentru a le înmulți, folosim regulile învățate în clasa a V-a.
2. Dacă $a, b \in \mathbb{Q}^*$, atunci
$$a \cdot b = \begin{cases} |a| \cdot |b|, \text{ dacă } a \text{ și } b \text{ au același semn} \\ -(|a| \cdot |b|), \text{ dacă } a \text{ și } b \text{ au semne diferite} \end{cases}.$$
3. Produsul a două numere raționale este pozitiv dacă numerele au același semn și este negativ dacă numerele au semne diferite.
4. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, pentru oricare număr rațional *a*.

Semnul numărului *a*	Semnul numărului *b*	Semnul numărului $a \cdot b$
+	+	+
–	–	+
–	+	–
+	–	–

Proprietățile înmulțirii numerelor raționale

EXEMPLU:
$(-2{,}5)\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\cdot(-2{,}5)$

- **Înmulțirea numerelor raționale este comutativă** (produsul a două numere raționale nu se modifică dacă schimbăm locul factorilor):

$$\boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}, \text{ pentru oricare numere raționale } a \text{ și } b.$$

- **Înmulțirea numerelor raționale este asociativă** (produsul a trei numere raționale nu se modifică dacă grupăm factorii în moduri diferite):

$$\boldsymbol{a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c}, \text{ pentru oricare numere raționale } a, b \text{ și } c.$$

EXEMPLU:

$$\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\Bigg[\underbrace{\left(-\frac{10}{9}\right)\cdot\frac{18}{5}}_{-4}\Bigg]}_{\frac{8}{5}}=\underbrace{\Bigg[\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{10}{9}\right)}_{\frac{4}{9}}\Bigg]\cdot\frac{18}{5}}_{\frac{8}{5}}$$

EXEMPLE:

1. $(-4{,}35)\cdot 1=$
   $=1\cdot(-4{,}35)=-4{,}35;$
2. $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1=1\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=$
   $=-\frac{2}{5}.$

- **Numărul 1 este element neutru:**

$$\boldsymbol{a\cdot 1=1\cdot a=a}, \text{ pentru oricare număr rațional } a.$$

- **Pentru orice număr rațional nenul a, există un număr rațional nenul, notat $\frac{1}{a}$ și numit inversul lui a, astfel încât $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$.**

EXEMPLE:

a	2	-5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{8}$
Inversul lui a $\left(\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	3	-8	$\frac{7}{2}$	$-\frac{8}{3}$

OBSERVAȚIE

Dacă a, b, c sunt numere raționale, prin produsul $a\cdot b\cdot c$ vom înțelege $a\cdot(b\cdot c)$ sau $(a\cdot b)\cdot c$.

De exemplu, pentru a calcula $2\cdot 3{,}2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$, efectuăm:

$2\cdot\left[3{,}2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]=$

$=2\cdot\left[\frac{32}{10}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]=$

$=2\cdot\left(-\frac{32}{25}\right)=-\frac{64}{25}$

sau $(2\cdot 3{,}2)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=$

$=6{,}4\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=$

$=\frac{64}{10}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{64}{25}.$

- **Înmulțirea numerelor raționale este distributivă față de adunare și scădere:**

$$\boldsymbol{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}, \text{ pentru oricare numere raționale } a, b \text{ și } c;$$
$$\boldsymbol{(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a}, \text{ pentru oricare numere raționale } a, b \text{ și } c;$$
$$\boldsymbol{a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c}, \text{ pentru oricare numere raționale } a, b \text{ și } c;$$
$$\boldsymbol{(b-c)\cdot a=b\cdot a-c\cdot a}, \text{ pentru oricare numere raționale } a, b \text{ și } c.$$

EXEMPLE:

1. $\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\Bigg[\underbrace{\frac{8}{5}+\left(-\frac{6}{5}\right)}_{\frac{2}{5}}\Bigg]}_{-\frac{4}{15}}=\underbrace{\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{8}{5}}_{-\frac{16}{15}}+\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)}_{\frac{12}{15}}}_{-\frac{4}{15}};$

2. $\underbrace{\underbrace{[2{,}1+(-5)]}_{-2{,}9}\cdot 0{,}2}_{-0{,}58}=\underbrace{\underbrace{2{,}1\cdot 0{,}2}_{0{,}42}+\underbrace{(-5)\cdot 0{,}2}_{-1}}_{-0{,}58};$

3. $\underbrace{3{,}2\cdot[\underbrace{(-12{,}5)-(-2{,}5)}_{-10}]}_{-32}=\underbrace{\underbrace{3{,}2\cdot(-12{,}5)}_{-40}-\underbrace{3{,}2\cdot(-2{,}5)}_{-8}}_{-32};$

4. $\underbrace{\Bigg[\underbrace{(-5{,}25)-\left(-\frac{5}{2}\right)}_{-2{,}75}\Bigg]\cdot 3}_{-8{,}25}=\underbrace{\underbrace{(-5{,}25)\cdot 3}_{-15{,}75}-\underbrace{\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 3}_{-7{,}5}}_{-8{,}25}.$

Aplic

1. Calculează:

a) $2,3 \cdot 10$; d) $(-0,3) \cdot (-100)$; g) $10 \cdot (-0,001)$;
b) $(-4,2) \cdot 100$; e) $(-1,25) \cdot 10$; h) $(-100) \cdot (-1,002)$;
c) $3,1 \cdot (-1000)$; f) $(-0,01) \cdot (-100)$ i) $(-100) \cdot (-1,1121)$.

2. Completează casetele cu numere întregi astfel încât să obții propoziții adevărate:

a) $(-1,5) \cdot \square = 0$; d) $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left[\frac{4}{5} + (-5)\right] = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} + \square \cdot \square$;

b) $\square \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{7}{5}$; e) $(-6) \cdot [\square - (-1,35)] = \square \cdot (-3) - \square \cdot (-1,35)$;

c) $\frac{6}{11} \cdot (-4) = (-4) \cdot \square$; f) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right) - \square\right] \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \square - \square \cdot \square$.

3. Calculează $a \cdot b$, știind că:

a) $a = -1,7$; $b = -2,01$; c) $a = -2,3$; $b = -2,3$; e) $a = -0,1$; $b = 1,01$;
b) $a = -0,5$; $b = 0,01$; d) $a = -11$; $b = -5,2$; f) $a = -3,2$; $b = -1,2$.

4. Calculează și scrie rezultatele astfel încât modulele acestora să fie fracții ordinare ireductibile:

a) $\left(-\frac{7}{18}\right) \cdot \frac{8}{21}$; d) $\frac{45}{26} \cdot \left(-\frac{39}{27}\right)$; g) $\left(-\frac{27}{7}\right) \cdot \left(-\frac{28}{15}\right)$; j) $\frac{7}{16} \cdot (-12)$;

b) $\left(-\frac{15}{4}\right) \cdot \frac{6}{25}$; e) $\frac{15}{2} \cdot \left(-\frac{14}{3}\right)$; h) $\left(-\frac{7}{6}\right) \cdot \left(-\frac{30}{14}\right)$; k) $20 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$;

c) $\left(-\frac{35}{9}\right) \cdot \frac{6}{14}$; f) $\frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right)$; i) $\left(-\frac{5}{44}\right) \cdot \left(-\frac{33}{20}\right)$; l) $(-4) \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)$.

5. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $(-2) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; $\square$ e) $1,25 \cdot (-3) < 1,25 + (-3)$; $\square$

b) $\left(-\frac{3}{10}\right) \cdot 0 = -\frac{3}{10}$; $\square$ f) $1,(2) \cdot (-2) > 1,(2) - (-2)$; $\square$

c) $\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) < \left(-\frac{4}{15}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$; $\square$ g) $3,5 \cdot (-4) < (-3,5) \cdot 4$; $\square$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = 0$; $\square$ h) $(-2,1) \cdot 0 > 2,1 \cdot 0$. $\square$

6. Determină numărul rațional a și scrie în casetă cel mai mare număr întreg mai mic decât a:

a) $a = 2,(3) \cdot (-1,2)$; $\square$ d) $a = (-0,24) \cdot [-0,(4)]$; $\square$
b) $a = 0,25 \cdot [-1,0(6)]$; $\square$ e) $a = (-0,32) \cdot 0,41(6)$; $\square$
c) $a = (-1,1) \cdot [-1,(1)]$; $\square$ f) $a = [-0,9(3)] \cdot [-0,458(3)]$. $\square$

7. a) Calculează $a \cdot (b \cdot c)$, știind că $a \cdot b = -\frac{9}{4}$ și $c = -\frac{28}{27}$.

b) Calculează $a \cdot b \cdot c$, știind că $a \cdot c = -1,2(5)$ și $b = \frac{67}{113}$.

8. Calculează $a \cdot (b + c)$ în două moduri, știind că:

a) $a = \frac{5}{11}$; $b = 2$; $c = -1,(4)$; b) $a = -7$; $b = 0,5$; $c = -\frac{1}{2}$.

9. Calculează $a \cdot (b - c)$ în două moduri, știind că:

a) $a = 1\frac{1}{5}$; $b = -\frac{1}{8}$; $c = -\frac{28}{12}$; b) $a = 3\frac{2}{3}$; $b = -0,9(3)$; $c = 0,(24)$.

10. Calculează $a \cdot (b + c)$, știind că:

a) $a \cdot b = -\frac{5}{16}$ și $a \cdot c = \frac{24}{25}$; b) $a \cdot b = -0{,}26$ și $a \cdot c = 2\frac{1}{2}$.

11. Calculează $a \cdot (b - c)$, știind că:

a) $a \cdot b = -\frac{15}{72}$ și $a \cdot c = -\frac{15}{48}$; b) $a \cdot b = 0{,}8(3)$ și $a \cdot c = 3{,}1(6)$.

12. Transcrie și completează tabelul:

a	b	c	$a \cdot b$	$a \cdot (b + c)$	$(b - c) \cdot a$	$\|a\| \cdot c$	$a \cdot (b \cdot c)$	$a \cdot (\|b\| - c)$
1,5	−2	8						
$-\frac{6}{7}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{8}{5}$						
0,1	−2,25	100						
$-\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$	−0,8(3)						
−1,2	−2,25	−1,(6)						

13. Calculează $a \cdot b \cdot c$ folosind proprietățile înmulțirii numerelor raționale:

a) $a = 2\frac{1}{4}$; $b = -\frac{5}{6}$; $c = \frac{48}{90}$;

b) $a = -\frac{5}{9}$; $b = -\frac{27}{24}$; $c = -\frac{16}{15}$;

c) $a = \frac{7}{13}$; $b = \frac{39}{21}$; $c = \left(-\frac{12}{16}\right)$;

d) $a = \frac{9}{7}$; $b = -2{,}45$; $c = 1\frac{1}{9}$;

e) $a = 0{,}5$; $b = -1{,}2$; $c = -0{,}01$;

f) $a = -0{,}(5)$; $b = 6$; $c = -\frac{7}{5}$.

Proiect

Elevii vor fi împărțiți în șapte grupe. Fiecare grupă va alege unul dintre orașele: Brașov, București, Constanța, Craiova, Iași, Timișoara, Târgu-Mureș și va realiza planul și bugetul aferent unei excursii de patru zile cu clasa în orașul ales.

Ce veți face:

Fiecare grupă va realiza, folosind Google Slides sau Microsoft PowerPoint, o prezentare care să cuprindă:

- descrierea orașului și a zonei din care face parte;
- enumerarea obiectivelor turistice din orașul ales și din zona din care acesta face parte;
- prezentarea a cel puțin patru obiective turistice din zonă pe care ar dori să le viziteze și argumentarea alegerii acestora;
- calculul bugetului aferent excursiei pentru fiecare dintre participanți și pentru întreg grupul (se vor avea în vedere costurile pentru transport, cazare, masă, vizite, dar și cheltuielile neprevăzute).

De ce veți face:

Veți afla informații despre țara noastră și veți învăța să planificați o călătorie.

Cum veți face:

Veți căuta pe internet sau în diverse publicații informații despre orașul și zona în care se află acesta.

Cum veți ști dacă ați reușit:

Veți prezenta în clasă proiectul și veți întreba profesorul și colegii ce le-a plăcut și ce recomandări au.

4. Împărțirea numerelor raționale

Îmi amintesc

Cornel a cumpărat 2 kg de mere pentru care a plătit 9,98 lei și 1,5 kg de piersici pentru care a plătit 9,45 lei. Determină câți lei ar fi plătit Cornel dacă ar fi cumpărat un kilogram de mere și un kilogram de piersici.

Învăț

Câtul împărțirii numărului rațional *a* la numărul rațional nenul *b*, notat prin *a* : *b* sau $\frac{a}{b}$, este numărul rațional *c* pentru care *a* = *b* · *c*. În acest caz, *a* se numește deîmpărțit, iar *b* se numește împărțitor.

- **Câtul împărțirii a două numere raționale, ambele pozitive sau ambele negative, este egal cu câtul împărțirii modulelor acestora.**

EXEMPLE:

1. $\frac{16}{15} : \frac{24}{25} = \left|\frac{16}{15}\right| : \left|\frac{24}{25}\right| = \frac{16}{15} : \frac{24}{25} = \frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{15}_{3}} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{24}_{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$;

2. $\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{4}{15}\right) = \left|-\frac{2}{3}\right| : \left|-\frac{4}{15}\right| = \frac{2}{3} : \frac{4}{15} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{5}{2}$;

3. $(-5{,}67) : (-0{,}7) = |-5{,}67| : |-0{,}7| = 5{,}67 : 0{,}7 = 56{,}7 : 7 = 8{,}1$.

- **Pentru a calcula câtul împărțirii a două numere raționale, unul pozitiv și unul negativ, calculăm câtul împărțirii modulelor acestora și punem „–” la rezultat.**

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{63}{26}\right) : \frac{49}{65} = -\left(\left|-\frac{63}{26}\right| : \left|\frac{49}{65}\right|\right) = -\left(\frac{63}{26} : \frac{49}{65}\right) = -\left(\frac{\cancel{63}^{9}}{\cancel{26}_{2}} \cdot \frac{\cancel{65}^{5}}{\cancel{49}_{7}}\right) = -\left(\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{7}\right) = -\frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 7} = -\frac{45}{14}$;

2. $32{,}4 : (-1{,}8) = -(|32{,}4| : |-1{,}8|) = -(32{,}4 : 1{,}8) = -(324 : 18) = -18$;

3. $(-4{,}5) : 1{,}(3) = -(|-4{,}5| : |1{,}(3)|) = -(4{,}5 : 1{,}(3)) = -\left(\frac{45}{10} : \frac{13-1}{9}\right) = -\left(\frac{45^{(5}}{10} : \frac{12^{(3}}{9}\right) = -\left(\frac{9}{2} : \frac{4}{3}\right) = -\left(\frac{9}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{8}$.

ATENȚIE!

Pentru a efectua împărțirea a două numere raționale scrise sub forma $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}^*$), înmulțim primul număr cu inversul celui de-al doilea.

De exemplu, $\frac{7}{2} : \left(-\frac{3}{10}\right) = \frac{7}{\cancel{2}_{1}} \cdot \left(-\frac{\cancel{10}^{5}}{3}\right) = \frac{7}{1} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{7 \cdot (-5)}{1 \cdot 3} = -\frac{35}{3}$.

OBSERVAȚII

1. Dacă *a* și *b* sunt numere raționale nenule, atunci $|a|$ și $|b|$ sunt numere raționale pozitive și, pentru a le împărți, folosim regulile învățate în clasa a V-a.
2. Dacă $a, b \in \mathbb{Q}^*$, atunci
$$a : b = \begin{cases} |a| : |b|, \text{ dacă } a \text{ și } b \text{ au același semn} \\ -(|a| : |b|), \text{ dacă } a \text{ și } b \text{ au semne diferite} \end{cases}$$
3. Câtul împărțirii a două numere raționale nenule este pozitiv dacă numerele au același semn și este negativ dacă numerele au semne diferite.
4. **0 : *a* = 0, pentru oricare număr rațional nenul *a*.**

Exercițiu rezolvat

Calculează: a) $\dfrac{-2\frac{1}{3}}{\frac{5}{21}}$; b) $\dfrac{-2}{\frac{6}{35}}$; c) $\dfrac{\frac{30}{28}}{-15}$.

Rezolvare:

a) $\dfrac{-2\frac{1}{3}}{\frac{5}{21}} = \left(-2\frac{1}{3}\right) : \frac{5}{21} = \left(-\frac{2\cdot 3+1}{3}\right) : \frac{5}{21} = \left(-\frac{7}{3}\right) : \frac{5}{21} = \left(-\frac{7}{\cancel{3}_{1}}\right) \cdot \frac{\cancel{21}^{7}}{5} = \left(-\frac{7}{1}\right) \cdot \frac{7}{5} = -\frac{49}{5}$;

b) $\dfrac{-2}{\frac{6}{35}} = (-2) : \frac{6}{35} = (-\cancel{2}^{1}) \cdot \frac{35}{\cancel{6}_{3}} = (-1) \cdot \frac{35}{3} = -\frac{35}{3}$;

c) $\dfrac{\frac{30}{28}}{-15} = \frac{30}{28} : (-15) = \frac{\cancel{30}^{2}}{28} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{15}_{1}}\right) = \frac{2}{28} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{2}{28}^{(2} = -\frac{1}{14}$.

Aplic

1. Calculează:

a) $5{,}25 : 10$; b) $(-2{,}3) : 100$; c) $3{,}1 : (-10)$; d) $(-24{,}3) : (-100)$; e) $(-1{,}205) : 10$; f) $(-0{,}01) : (-10)$; g) $(-0{,}1) : 10$; h) $(-325) : (-100)$.

2. Calculează $a : b$ și $b : a$:

a) $a = -0{,}75$; $b = -0{,}5$; b) $a = -2{,}25$; $b = 0{,}15$; c) $a = -0{,}04$; $b = -0{,}4$; d) $a = -21$; $b = -3{,}5$; e) $a = -245$; $b = 0{,}7$; f) $a = -4{,}5$; $b = -0{,}03$.

3. Calculează și scrie rezultatele astfel încât modulele acestora să fie fracții ordinare ireductibile:

a) $\left(-\frac{4}{9}\right) : \frac{8}{45}$; b) $\left(-\frac{9}{5}\right) : \frac{18}{25}$; c) $\left(-\frac{17}{49}\right) : \frac{17}{7}$; d) $\frac{2}{33} : \left(-\frac{8}{55}\right)$; e) $\frac{16}{21} : \left(-\frac{4}{7}\right)$; f) $\frac{2}{9} : \left(-\frac{16}{45}\right)$; g) $\left(-\frac{25}{8}\right) : \left(-\frac{15}{32}\right)$; h) $\left(-\frac{7}{4}\right) : \left(-\frac{49}{20}\right)$; i) $\left(-\frac{7}{80}\right) : \left(-\frac{11}{41}\right)$; j) $\frac{9}{26} : (-27)$; k) $20 : \left(-\frac{8}{7}\right)$; l) $(-8) : \left(-\frac{40}{3}\right)$.

4. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $(-8) : \frac{1}{2} = 8 : \left(-\frac{1}{2}\right)$; ☐ b) $0 : \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{3}{10}$; ☐ c) $\frac{3}{4} : \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$; ☐ d) $\left(-\frac{4}{3}\right) : \frac{5}{6} = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{5}{6}$; ☐ e) $(-5) : \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$; ☐ f) $3{,}5 : (-1) = (-3{,}5) : 1$; ☐ g) $\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3} = 0$; ☐ h) $0 : (-2{,}1) = 0$; ☐ i) $\frac{6}{5} : 1{,}2 = 1$. ☐

5. Determină numărul rațional a și scrie în casetă cel mai mic număr întreg mai mare decât a:

a) $a = 0,(4) : (-0{,}4)$; ☐ b) $a = 1{,}2(7) : [-0,(46)]$; ☐ c) $a = (-1{,}5) : 0{,}6$; ☐ d) $a = (-0{,}2) : 0{,}11(6)$; ☐ e) $a = [-0{,}9(2)] : 2{,}1$; ☐ f) $a = [-0{,}9(3)] : (-1{,}12)$. ☐

6. Calculează:

a) $\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{5}}$; b) $\dfrac{21}{3\frac{1}{2}}$; c) $\dfrac{-\frac{5}{6}}{-\frac{18}{42}}$; d) $\dfrac{\frac{21}{25}}{-\frac{14}{15}}$; e) $\dfrac{-3\frac{1}{7}}{1\frac{1}{21}}$; f) $\dfrac{2}{\frac{6}{21}}$; g) $\dfrac{-\frac{30}{7}}{-18}$.

5. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri

Îmi amintesc

1. Calculează: a) 2^5 ; b) $(-4)^2$; c) $(-3)^3$; d) 1^7; e) 0^4; f) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; g) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

2. Scrie rezultatul ca o putere a lui 2: a) $2^3 \cdot 2^4$; b) $2^{10} : 2^3$; c) $(2^3)^2$.

Învăț

Fie a un număr rațional și n un număr natural, $n > 1$. Puterea a n-a a numărului rațional a este $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$. Numărul rațional a se numește baza puterii, iar numărul natural n se numește exponentul puterii.

Prin convenție, $\mathbf{a^0 = 1}$, pentru oricare număr rațional nenul a,

$\mathbf{a^1 = a}$, pentru oricare număr rațional a.

Nu se definește 0^0.

Am învățat, printre proprietățile înmulțirii numerelor raționale, că, pentru oricare număr rațional nenul a există numărul rațional $\frac{1}{a}$, astfel încât $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. Vom nota numărul rațional $\frac{1}{a}$ cu a^{-1}. Așadar, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, pentru oricare număr rațional nenul a.

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$;

2. $(0,3)^3 = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$.

Pentru numărul rațional nenul a și numărul natural nenul n se definește $\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.

EXEMPLU:

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

2. $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$;

3. $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$;

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = 1 : \frac{8}{27} = 1 \cdot \frac{27}{8} = \frac{27}{8}$.

OBSERVAȚIE

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{Z}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

EXEMPLE:

1. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;

2. $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}$.

Dacă a și b sunt numere raționale nenule, atunci:

$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$, pentru oricare numere întregi m și n;

$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$, pentru oricare numere întregi m și n;

$\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$, pentru oricare numere întregi m și n;

$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$, pentru oricare număr întreg n;

$\mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n}$, pentru oricare număr întreg n.

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(-4)+7} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$;

2. $(-0,2)^5 : (-0,2)^3 = (-0,2)^{5-3} = (-0,2)^2$;

3. $\left[\left(\frac{5}{8}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{5}{8}\right)^{2 \cdot 4} = \left(\frac{5}{8}\right)^8$;

4. $\left(\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^5 = \left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\right)^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4$;

5. $(-3)^2 : (0,1)^2 = [(-3) : 0,1]^2 = (-30)^2$.

Exerciții rezolvate

1. a) Scrie ca putere cu baza 3 următoarele numere: 81, $\frac{1}{27}$, $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2$, $\left(\frac{1}{9}\right)^2$, $\frac{1}{27^4}$.

b) Scrie ca putere cu baza $\frac{1}{5}$ numerele: 1, $\frac{1}{25}$, 125, 25^2, $\left(-\frac{1}{25}\right)^4$.

c) Scrie ca putere cu baza $\frac{4}{3}$ numerele: $\frac{4}{3}$, 1, $\frac{64}{27}$, $\frac{3}{4}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\frac{9}{16}$.

Rezolvare:

a) $81 = 3^4$, $\quad \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{9^2} = 9^{-2} = (3^2)^{-2} = 3^{2\cdot(-2)} = 3^{-4}$,

$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$, $\quad \frac{1}{27^4} = 27^{-4} = (3^3)^{-4} = 3^{3\cdot(-4)} = 3^{-12}$.

$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{(-3)\cdot 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-6} = 3^6$,

b) $1 = \left(\frac{1}{5}\right)^0$,

$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$,

$125 = 5^3 = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right]^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{(-1)\cdot 3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$,

$25^2 = (5^2)^2 = 5^{2\cdot 2} = 5^4 = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right]^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{(-1)\cdot 4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$,

$\left(-\frac{1}{25}\right)^4 = \left(\frac{1}{25}\right)^4 = \left(\frac{1}{5^2}\right)^4 = \frac{1}{(5^2)^4} = \frac{1}{5^8} = \left(\frac{1}{5}\right)^8$.

c) $\frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1$, $\quad \frac{64}{27} = \frac{4^3}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$, $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$,

$1 = \left(\frac{4}{3}\right)^0$, $\quad \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$, $\quad \frac{9}{16} = \frac{3^2}{4^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$.

2. Scrie sub forma unei puteri:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4$; b) $\left(\frac{25}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5$; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^3 : 4^{-2}$; d) $\left[\left(\frac{9}{25}\right)^2\right]^5 : \left(\frac{125}{27}\right)^6$.

Rezolvare:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{2+(-5)+4} = \left(-\frac{2}{5}\right)^1$;

b) Scriem $\frac{25}{4} = \frac{5^2}{2^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ și obținem $\left(\frac{25}{4}\right)^2 = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^{2\cdot 2} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$.

Astfel, $\left(\frac{25}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^{4+5} = \left(\frac{5}{2}\right)^9$.

c) Scriem $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$, și $4^{-2} = (2^2)^{-2} = 2^{2\cdot(-2)} = 2^{-4}$.

Așadar, $\left(\frac{1}{8}\right)^3 : 4^{-2} = 2^{-3} : 2^{-4} = 2^{(-3)-(-4)} = 2^1$.

d) $\left[\left(\frac{9}{25}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{9}{25}\right)^{2\cdot 5} = \left(\frac{9}{25}\right)^{10} = \left(\frac{3^2}{5^2}\right)^{10} = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2\cdot 10} = \left(\frac{3}{5}\right)^{20}$,

$\left(\frac{125}{27}\right)^6 = \left(\frac{5^3}{3^3}\right)^6 = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^3\right]^6 = \left(\frac{5}{3}\right)^{3\cdot 6} = \left(\frac{5}{3}\right)^{18} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-18}$.

Deci $\left[\left(\frac{9}{25}\right)^2\right]^5 : \left(\frac{125}{27}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{20} : \left(\frac{3}{5}\right)^{-18} = \left(\frac{3}{5}\right)^{20-(-18)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{38}$.

Aplic

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $\left(-\frac{2}{3}\right)^x = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$, atunci x este egal cu ...

b) Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ este egal cu ...

c) Dacă $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^a\right]^2 = 1$, atunci a este egal cu ...

d) Dacă $a = \left(-\frac{7}{2}\right)^2$ și $b = \left(\frac{8}{14}\right)^2$, atunci $a \cdot b$ este egal cu ...

2. Transcrie și completează tabelul de mai jos:

a	$\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2	1	-4	2	$0{,}1$	$-1{,}3$	$-0{,}2$
n	3	2	-2	-1	2	-3	-2	-3	3	-4	-3	2	-2
a^n													
$(-a)^n$													
$-a^n$													

3. Calculează a și b și scrie în casetă numărul mai mic:

a) $a = \left(-\frac{5}{2}\right)^2$, $b = \left(-\frac{5}{2}\right)^3$; $\square$

b) $a = 2{,}1^3$, $b = (-2{,}1)^2$; $\square$

c) $a = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$, $b = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$; $\square$

d) $a = \left(-\frac{7}{6}\right)^0$, $b = \left(-\frac{7}{6}\right)^1$; $\square$

e) $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, $b = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $\square$

f) $a = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$, $b = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$. $\square$

4. Ordonează crescător seturile de numere:

a) $2^{-5}, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^0, 2^{-2}$;

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}, \left(\frac{5}{4}\right)^2, \left(\frac{4}{5}\right)^0, \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}, \left(\frac{5}{4}\right)^4$.

5. Ordonează descrescător seturile de numere:

a) $\frac{3}{2}, \left(-\frac{3}{2}\right)^2, \left(-\frac{3}{2}\right)^0, \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right]^2, \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^2, \left(-\frac{3}{2}\right)^5$;

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3; -\frac{1}{3}, [(-3)^3]^{-2}, (-3)^{-2}, \left(-\frac{1}{3}\right)^5, \left(\frac{1}{3}\right)^0, \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$.

6. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$;

b) $\left(-\frac{1}{7}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^7$;

c) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^5$;

d) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-7} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$;

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^6 : \left(\frac{2}{7}\right)^4$;

f) $\left(-\frac{4}{5}\right)^8 : \left(-\frac{4}{5}\right)^5$;

g) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$;

h) $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-2} : \left(-\frac{1}{7}\right)^{-3}$;

i) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5$;

j) $\left[\left(-\frac{9}{2}\right)^3\right]^4$;

k) $\left[\left(-\frac{4}{7}\right)^2\right]^{-2}$;

l) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-4}$.

7. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $(0,9)^2 \cdot (0,9)^5$;
b) $(-1,2)^3 \cdot (-1,2)^{10}$;
c) $(1,4)^{-2} \cdot (1,4)^{-5}$;
d) $(-2,5)^{-6} \cdot (-2,5)^2$;
e) $(3,4)^2 : (3,4)^5$;
f) $(-5,2)^6 : (-5,2)^3$;
g) $(1,7)^3 : (1,7)^{-9}$;
h) $(-0,2)^{-4} : (-0,2)$;
i) $[(1,4)^2]^{-1}$;
j) $[(-0,3)^2]^4$;
k) $[(-1,6)^{-3}]^{-2}$;
l) $[(-0,5)^{-2}]^4$.

8. Completează casetele cu numere întregi pentru a obține propoziții adevărate:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\square} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\square}$;

b) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{7} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^{-10} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^{6} = \left(-\frac{5}{9}\right)^{\square} = \left(-\frac{9}{5}\right)^{\square}$;

c) $0,5 \cdot (0,5)^{-2} \cdot (0,5)^3 = (0,5)^{\square} = 2^{\square}$;

d) $[-0,(1)]^{-10} \cdot [-0,(1)]^8 \cdot [-0,(1)]^{-2} = [-0,(1)]^{\square} = (-9)^{\square}$.

9. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 3^3$;
b) $(-3)^4 \cdot (-0,2)^4$;
c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$;
d) $(-6)^{-4} \cdot (-0,1)^{-4}$;
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 : 4^8$;
f) $(-2,5)^4 : (-5)^4$;
g) $(-1,5)^{-7} : \left(\frac{3}{8}\right)^{-7}$;
h) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-8} : \left(\frac{2}{9}\right)^{-8}$;
i) $(-12,5)^3 : (-5)^3$.

10. a) Scrie ca putere cu baza 2 numerele: 1, 4, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$, 16, $(-2)^8$, $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-4}$, $(-2^2)^{10}$, $(-2^3)^{-2}$, $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{3}$.

b) Scrie ca putere cu baza $\frac{1}{3}$ numerele: 1, $\frac{1}{9}$, 27, $\frac{1}{81}$, 27^4, $\left(-\frac{1}{9}\right)^2$, $[(-3)^{-1}]^{-4}$, $\frac{1}{9^4}$, $\frac{1}{3}$.

c) Scrie ca putere cu baza $\frac{2}{3}$ numerele: $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{8}{27}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^5$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^6$, $(-1,5)^4$, $(1,5)^{10}$.

11. Scrie numerele *a* și *b* ca puteri cu aceeași bază:

a) $a = \frac{1}{27}$, $b = 3^{-4}$;
b) $a = \left(\frac{1}{4}\right)^3$, $b = 8^7$;
c) $a = \left(\frac{4}{9}\right)^2$, $b = \left(\frac{3}{2}\right)^3$;
d) $a = \left(\frac{8}{27}\right)^5$, $b = \left(\frac{4}{9}\right)^7$;
e) $a = \left(\frac{25}{36}\right)^4$, $b = \left(\frac{216}{125}\right)^{-3}$;
f) $a = [-0,(6)]^{-6}$, $b = \frac{81}{16}$.

12. Folosind regulile de calcul cu puteri, efectuează înmulțirile și împărțirile de mai jos și scrie rezultatele sub forma unei puteri.

a) $2^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$;
b) $\left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 32^{-5}$;
c) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 27^{-3}$;
d) $\left(\frac{25}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{64}{125}\right)^{-2}$;
e) $\left(\frac{1000}{27}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{9}{100}\right)^4$;
f) $3^{-10} : \left(\frac{1}{27}\right)^{-3}$;
g) $\left(\frac{5}{4}\right)^3 : \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$;
h) $\left(\frac{16}{81}\right)^5 : \left(\frac{32}{243}\right)^3$;
i) $\left(\frac{27}{64}\right)^3 : \left(\frac{16}{9}\right)^{-2}$;
j) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 : \left(\frac{32}{243}\right)^4$.

13. Compară numerele *a* și *b*, știind că $a = 0,5 \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^3 \cdot (0,5)^4 \cdot \ldots \cdot (0,5)^{10}$ și $b = 32^{-10}$.

6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Descopăr

Calculează:

a) $\frac{1}{3}\cdot 3^2 - 2{,}5\cdot 10 + \frac{3}{4} : \frac{8}{9}$;   b) $\frac{1}{3}\cdot\left[(3^2 - 2{,}5)\cdot 10 + \frac{3}{4}\right] : \frac{8}{9}$.

Învăț

- Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I, înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul II, iar ridicarea la putere este operație de ordinul III.
- Dacă într-un calcul aritmetic fără paranteze se întâlnesc numai operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, aplicând proprietățile acestora, dacă este cazul.

EXEMPLE:

1. $^{6)}\frac{1}{2} - {}^{4)}\frac{2}{3} - {}^{3)}\frac{3}{4} = \frac{6}{12} - \frac{8}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{11}{12}$;

2. $\left(-\frac{3}{20}\right) : \frac{14}{15} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = \underbrace{\left(-\frac{3}{\cancel{20}_{4}}\right)\cdot\frac{\cancel{15}^{3}}{14}}_{-\frac{9}{56}} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = \left(-\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{56}_{8}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\right) = \left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{8}$.

- Dacă într-un calcul aritmetic fără paranteze se întâlnesc operații de ordine diferite, se efectuează întâi operațiile de ordinul III, apoi operațiile de ordinul II și, după acestea, operațiile de ordinul I.

EXEMPLE:

1. $\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{10}_{2}}\cdot\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{56}_{8}} = \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} = \left(-{}^{8)}\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{16} = \left(-\frac{24}{16}\right) + \frac{3}{16} = -\frac{21}{16}$;

2. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right) : \left(-\frac{12}{25}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{4}{9} + \left(-\frac{6}{5}\right) : \left(-\frac{12}{25}\right) - \frac{2}{3}$

$= \frac{4}{9} + \left(-\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{12}_{2}}\right) - \frac{2}{3}$

$= {}^{2)}\frac{4}{9} + {}^{9)}\frac{5}{2} - {}^{6)}\frac{2}{3} = \frac{8}{18} + \frac{45}{18} - \frac{12}{18} = \frac{41}{18}$.

- Dacă într-un calcul aritmetic se întâlnesc paranteze rotunde, paranteze drepte, acolade, se efectuează întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele drepte și apoi operațiile din acolade. După efectuarea calculelor din parantezele rotunde, acoladele devin paranteze drepte, iar parantezele drepte devin paranteze rotunde.

EXEMPLU:

$$\left\{\left[\underbrace{\frac{18}{7} : \left(-\frac{24}{35}\right)}_{-\frac{15}{4}} - \underbrace{\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{9}{50}\right)}_{-\frac{3}{20}}\right]\cdot\frac{5}{32} - \left(-\frac{13}{16}\right)\right\} : 4^{-2} = \left\{\left[\underbrace{\left(-\frac{15}{4}\right) - \left(-\frac{3}{20}\right)}_{-\frac{18}{5}}\right]\cdot\frac{5}{32} - \left(-\frac{13}{16}\right)\right\} : 4^{-2} =$$

$$= \left[\underbrace{\left(-\frac{18}{5}\right)\cdot\frac{5}{32}}_{-\frac{9}{16}} - \left(-\frac{13}{16}\right)\right] : 4^{-2} = \left[\underbrace{\left(-\frac{9}{16}\right) - \left(-\frac{13}{16}\right)}_{\frac{4}{16}}\right] : 4^{-2} = \frac{4}{16} : 4^{-2} = \frac{1}{4} : 4^{-2} = 4^{-1} : 4^{-2} = 4.$$

Aplic

1. Calculează:

I. a) $\frac{1}{4}-\frac{7}{6}+\left(-\frac{5}{2}\right)$;

b) $\left(-\frac{5}{3}\right)-\frac{7}{12}-\frac{11}{18}$;

c) $\frac{7}{4}+\frac{5}{20}-\left(-\frac{9}{2}\right)-\frac{11}{5}$;

d) $\frac{8}{9}:\left(-\frac{50}{27}\right):\left(-\frac{8}{5}\right)$;

e) $\frac{7}{9}\cdot\frac{24}{15}:\left(-\frac{21}{10}\right)$;

f) $\left(-\frac{17}{24}\right):\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(-\frac{30}{34}\right):\frac{9}{4}$.

II. a) $(-0,3)-1,5+(-2,7)$;

b) $1,25-3,4-2,5$;

c) $0,12+1,2-(-2,4)-3,11$;

d) $0,125:(-2,5):(-0,5)$;

e) $3,24\cdot 0,1:(-1,8)$;

f) $(-100):(-2,5)\cdot(-10):8$.

2. Calculează:

a) $\frac{11}{8}-\frac{13}{24}-\left(\frac{1}{12}-\frac{13}{2}\right)$;

b) $\frac{1}{6}+\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{3}+\frac{11}{2}\right)$;

c) $(-48)\cdot\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right)$;

d) $-\frac{4}{7}-\left(-\frac{5}{2}+\frac{9}{4}\right):\left(-\frac{1}{16}\right)$;

e) $(0,16-1,4)-0,1-(-2)$;

f) $2,3-(-1,5)-(0,12-1,2-2+3,25)$;

g) $(-0,84):(0,3-2,5+0,1)$;

h) $(-1,4+2,3-5,6)\cdot(-10):2$.

3. Determină $|a|$:

a) $a=3^{-2}+3^{-3}-1$;

b) $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

c) $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2}-\frac{2}{3}$;

d) $a=\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$.

4. Compară numerele a și b și scrie în casetă numărul mai mare:

a) $a=\left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)^{2}$ și $b=\frac{2^2-1}{2}+\frac{3^2-2^2}{6}$; $\square$

b) $a=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(\frac{5}{9}-1\frac{2}{3}\right)$ și $b=\left(-2\frac{7}{12}+1\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)$. $\square$

5. Efectuează calculele:

a) $\left(-\frac{7}{19}\right)\cdot\left[\left(-\frac{2}{7}\right)-\left(\frac{5}{16}-\frac{7}{12}\right):\left(-\frac{7}{16}\right)\right]$;

b) $\left[\frac{7}{20}-\frac{3}{20}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}\right]\cdot\frac{3}{4}-2^{-3}$;

c) $\frac{19}{20}:\left[1\frac{1}{4}-\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]$;

d) $\left\{\left[\left(-\frac{2}{15}+\frac{3}{10}\right)-\left(\frac{37}{30}-\frac{3}{2}\right)+\left(-1-\frac{5}{6}+\frac{12}{5}\right)\right]-2\right\}:(-5)$;

e) $\left\{\frac{5}{13}\cdot\left[\frac{2}{7}-\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{15}\right):\frac{7}{6}\right]\right\}^{-1}-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+1:\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{3}{14}\right]\cdot(-22)$.

6. Scrie în casetă cel mai mare număr întreg mai mic decât a.

a) $a=\dfrac{\frac{12}{11}\cdot\left(2\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{3}{4}-1\right):\frac{1}{4}}+\frac{3}{2}$; $\square$

b) $a=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{10}{3}\right):\frac{17}{10}\cdot 0,4}{\left(\frac{2}{5}-0,3\right)\cdot(-10)}$; $\square$

c) $a=\dfrac{\left(-2,2+\frac{1}{5}\right)\cdot 0,1}{(7,4-2,5):\left(-\frac{7}{10}\right)}+\frac{1}{7}$; $\square$

d) $a=\dfrac{[-1,(1)-0,(6)]\cdot 4,5}{(-1,5)^2-4,1+\left(-\frac{3}{2}\right)}$. $\square$

7. Ecuații de tipul $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale

Îmi amintesc

Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $(-2) - x = 8$; b) $x - (-2) = 8$; c) $(-2) \cdot x = 8$; d) $x : (-2) = 8$.

Învăț

A rezolva o ecuație în mulțimea numerelor raționale înseamnă a determina soluțiile raționale ale acesteia.

Prin adunarea, scăderea, înmulțirea sau împărțirea ambilor membri ai unei ecuații la același număr rațional nenul se obține o ecuație echivalentă cu ecuația dată.

EXEMPLU: $2x - 7 = 10 \Leftrightarrow 2x = 10 + 7 \Leftrightarrow 2x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}$.

Exercițiu rezolvat

Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $5x + 2 = -9$; b) $\frac{1}{3}x - 7,6 = -6$.

Rezolvare:

a) $5x + 2 = -9 \Leftrightarrow 5x = (-9) - 2 \Leftrightarrow 5x = -11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{5}$. $S = \left\{-\frac{11}{5}\right\}$.

b) $\frac{1}{3}x - 7,6 = -6 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = (-6) + 7,6 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = 1,6 \Leftrightarrow x = 1,6 : \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{10} : \frac{1}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{16}{10} \cdot 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \cdot 3 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5}$. $S = \left\{\frac{24}{5}\right\}$.

Ecuația se mai poate rezolva și astfel:

$\frac{1}{3}x - 7,6 = -6 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{76}{10} = -6 \Leftrightarrow {}^{5)}\frac{1}{3}x - {}^{3)}\frac{38}{5} = -{}^{15)}\frac{6}{1} \Leftrightarrow \frac{5}{15}x - \frac{114}{15} = -\frac{90}{15} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{5x - 114}{15} = -\frac{90}{15} \Leftrightarrow 5x - 114 = -90 \Leftrightarrow 5x = (-90) + 114 \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5}$.
$S = \left\{\frac{24}{5}\right\}$.

Aplic

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos.

a) Dintre numerele $-1,6$; $-0,4$; $0,6$; $0,4$, soluția ecuației $(-0,6) + x = -1$, $x \in \mathbb{Q}$ este:

A. $-1,6$; B. $-0,4$; C. $0,6$; D. $0,4$.

b) Numărul rațional $\frac{1}{3}$ este soluția ecuației:

A. $\frac{1}{3}x = 1$, $x \in \mathbb{Q}$; B. $x : \frac{1}{3} = 1$, $x \in \mathbb{Q}$; C. $\frac{1}{3} : x = 3$, $x \in \mathbb{Q}$; D. $\frac{1}{3} - x = \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{Q}$.

c) Soluția ecuației $(-4) \cdot x = -2$, $x \in \mathbb{Q}$ este:

A. -6; B. 2; C. $\frac{1}{2}$; D. 8.

2. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) Soluția ecuației $x : 0{,}1 = -\frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{Q}$ este -5. ☐

b) Soluția ecuației $(-1{,}8) - x = -1$, $x \in \mathbb{Q}$ este $0{,}8$. ☐

c) Soluția ecuației $(-0{,}3) \cdot x = 18$, $x \in \mathbb{Q}$ aparține mulțimii $A = \{-60; 21{,}3; 17{,}7; -6{,}6\}$. ☐

3. Verifică dacă $-\frac{1}{4}$ este soluție a ecuației:

a) $(-2) \cdot x + 1 = \frac{3}{2}$, $x \in \mathbb{Q}$; b) $\frac{5}{3} + x : 3 = -\frac{19}{12}$, $x \in \mathbb{Q}$.

4. Stabilește care dintre numerele raționale din mulțimea $A = \left\{1;\ 9;\ \frac{1}{9}; 2{,}1\right\}$ este soluție a ecuației:

a) $\frac{1}{4} \cdot x - 1 = \frac{5}{4}$, $x \in \mathbb{Q}$; b) $x : 0{,}5 = 4{,}2$, $x \in \mathbb{Q}$; c) $x : \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{Q}$.

5. Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

I. a) $x + 2{,}5 = 8$; b) $x + 3{,}12 = -2{,}1$; c) $x + (-0{,}4) = -5$; d) $x + (-1{,}25) = 4{,}25$; e) $1{,}5 + x = 2{,}4$; f) $3 + x = -5{,}2$; g) $(-1{,}3) + x = -3$; h) $(-1) + x = 7{,}24$; i) $x + 4{,}2 = -2{,}6$; j) $x + (-2{,}81) = -1{,}16$; k) $(-1{,}2) + x = -1{,}2$; l) $5{,}4 + x = 1$.

II. a) $x + \frac{5}{4} = \frac{2}{3}$; b) $x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$; c) $x + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$; d) $x + \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{6}$; e) $\frac{3}{5} + x = \frac{5}{3}$; f) $\frac{6}{7} + x = -\frac{2}{35}$; g) $\left(-\frac{2}{9}\right) + x = -\frac{5}{12}$; h) $\left(-\frac{1}{4}\right) + x = \frac{2}{7}$; i) $\left(-\frac{2}{7}\right) + x = -\frac{5}{21}$; j) $\frac{3}{12} + x = \frac{1}{8}$; k) $x + \left(-\frac{2}{15}\right) = -\frac{7}{24}$; l) $x + \frac{9}{4} = -\frac{3}{14}$.

III. a) $x + 1{,}5 = \frac{3}{4}$; b) $x + \frac{1}{2} = -2{,}1$; c) $x + (-0{,}4) = -\frac{7}{20}$; d) $x + \left(-\frac{2}{3}\right) = 4{,}5$; e) $0{,}5 + x = \frac{2}{5}$; f) $\frac{2}{15} + x = -1{,}2$; g) $(-1{,}3) + x = -\frac{1}{6}$; h) $\left(-\frac{3}{25}\right) + x = 1{,}25$; i) $1{,}(3) + x = 1{,}5$; j) $x + \frac{7}{15} = 1{,}0(2)$; k) $x + (-0{,}4) = -\frac{5}{4}$; l) $x + \left(-\frac{11}{6}\right) = 1{,}2$.

6. Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

I. a) $1{,}2 - x = 3$; b) $4 - x = -3{,}25$; c) $(-5{,}1) - x = 2{,}4$; d) $(-7{,}02) - x = -4{,}3$; e) $x - 3{,}4 = 8{,}42$; f) $x - 7 = -5{,}13$; g) $x - (-3{,}24) = 6{,}45$; h) $x - (-8{,}424) = -2{,}32$; i) $x - 2{,}6 = -1{,}2$; j) $x - (-1{,}8) = 2{,}23$; k) $(-1{,}25) - x = -1{,}48$; l) $2{,}54 - x = 1{,}27$.

II. a) $\frac{7}{9} - x = \frac{4}{3}$; b) $\frac{4}{15} - x = -\frac{5}{12}$; c) $\left(-\frac{2}{3}\right) - x = 2\frac{1}{2}$; d) $\left(-1\frac{2}{3}\right) - x = -\frac{5}{6}$; e) $x - \frac{7}{12} = \frac{3}{20}$; f) $x - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$; g) $x - \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{7}{10}$; h) $x - \left(-\frac{11}{12}\right) = -\frac{13}{8}$; i) $\frac{10}{27} - x = -\frac{4}{24}$; j) $\left(-\frac{5}{16}\right) - x = -\frac{1}{20}$; k) $x - \left(-\frac{8}{21}\right) = -\frac{23}{49}$; l) $x - \frac{24}{35} = -\frac{17}{15}$.

III. a) $0{,}2 - x = \frac{4}{10}$; e) $x - 1{,}25 = \frac{21}{20}$; i) $x - 0{,}(3) = \frac{5}{12}$;

b) $\frac{7}{15} - x = -0{,}3$; f) $x - \frac{1}{9} = -0{,}1$; j) $x - \frac{23}{22} = 3{,}(24)$;

c) $\left(-\frac{2}{7}\right) - x = 0{,}1$; g) $x - (-1{,}2) = \frac{7}{5}$; k) $x - 1{,}2(5) = -\frac{23}{30}$;

d) $(-1{,}2) - x = -\frac{5}{6}$; h) $x - \left(-\frac{9}{10}\right) = -1{,}01$; l) $x - \frac{13}{9} = 2{,}(3)$.

7. Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

I. a) $x \cdot 3 = -1{,}4$; d) $x \cdot \frac{9}{10} = -\frac{27}{2}$; g) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot x = -1{,}25$;

b) $x \cdot (-4{,}5) = 14{,}4$; e) $x \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) = -4{,}5$; h) $(-2) \cdot x = 1{,}(6)$;

c) $(-3) \cdot x = -1{,}2$; f) $(-4) \cdot x = \frac{2}{5}$; i) $(-0{,}4) \cdot x = 0{,}(16)$.

II. a) $x : 4 = -2{,}3$; d) $x : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{2}{15}$; g) $x : \left(-\frac{7}{6}\right) = -0{,}1(6)$;

b) $x : \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$; e) $x : \frac{3}{2} = 2{,}5$; h) $x : 9 = -3{,}(3)$;

c) $x : 5 = \frac{1}{4}$; f) $x : (-10) = 1{,}5$; i) $x : (-20) = -\frac{7}{15}$.

8. Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2x + 3 = -8$; e) $\frac{3}{2}x + (-2) = 0$; i) $1{,}24 - \frac{3}{5}x = 0{,}6$;

b) $1 + 3x = 5$; f) $3x + (-5) = \frac{1}{4}$; j) $\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}x = -\frac{5}{6}$;

c) $4x - 6 = 7$; g) $\frac{2}{5}x - \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$; k) $\frac{1}{2} - \frac{7}{3}x = -1{,}5$;

d) $7x - 8 = -1$; h) $\left(-\frac{1}{5}\right) + 5x = 0{,}4$; l) $(-2) - \frac{5}{6}x = \frac{3}{2}$.

9. Determină numărul rațional a pentru care ecuațiile următoare au soluțiile indicate:

a) $2x - a = 5$, $x = -\frac{3}{2}$; c) $-x - 3a = 1{,}(2)$, $x = -\frac{2}{3}$;

b) $\left(-\frac{2}{7}\right)x + a = \frac{4}{5}$, $x = -2$; d) $2{,}25x - \frac{3}{10}a = -0{,}1$, $x = -\frac{1}{4}$.

10. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 2 - 3x = 7\}$ și $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x : \frac{5}{6} = -2\right\}$. Demonstrează că A = B.

11. Se consideră mulțimile $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{15}, \frac{4}{7}\right\}$ și $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q}, \left(-\frac{1}{5}\right) + 3x = 0{,}2\right\}$. Determină elementele mulțimii $A \cap B$.

12. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x - \left(-\frac{3}{4}\right) = -2{,}25\right\}$ și $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x - 1{,}1(6) = -\frac{3}{2}\right\}$. Determină $A \cup B$.

13. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{4}{25} - x = -\frac{1}{15}\right\}$ și $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{3}{2} \cdot x - \frac{4}{9} = \frac{2}{36}\right\}$.
Demonstrează că mulțimile A și B sunt disjuncte.

8. Probleme care se rezolvă folosind ecuațiile

Îmi amintesc

a) Compune o problemă folosind reprezentarea alăturată.

b) Rezolvă problema compusă de tine folosind ecuațiile.

Exerciții rezolvate

1. Pentru a cumpăra un ceas, Eugen a folosit $\frac{3}{4}$ din economiile sale. Dacă prețul ceasului cumpărat de Eugen este 225 de lei, determină câți lei a economisit acesta.

Rezolvare:

Stabilirea necunoscutei problemei	Notăm cu x suma de bani economisită de Eugen.
Transcrierea și exprimarea elementelor din enunțul problemei în limbaj matematic	$\frac{3}{4} \cdot x = 225$
Rezolvarea ecuației obținute	$\frac{3}{4} \cdot x = 225 \Leftrightarrow x = 225 : \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 225 \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 300$
Interpretarea soluției obținute	Eugen a economisit 300 de lei.
Verificarea soluției obținute	$\frac{3}{\cancel{4}_{1}} \cdot \cancel{300}^{75} = 3 \cdot 75 = 225$

2. Un colet ce conține 24 de cărți de același fel cântărește 13,12 kg. Știind că ambalajul cântărește 0,4 kg, determină masa unei cărți.

Rezolvare:

Notăm cu x masa unei cărți. Scriem și rezolvăm ecuația asociată problemei:

$24 \cdot x + 0{,}4 = 13{,}12 \Leftrightarrow 24 \cdot x = 13{,}12 - 0{,}4 \Leftrightarrow 24 \cdot x = 12{,}72 \Leftrightarrow x = 12{,}72 : 24 \Leftrightarrow x = 0{,}53$.

Verificăm soluția obținută în forma inițială a problemei:

$24 \cdot 0{,}53 + 0{,}4 = 12{,}72 + 0{,}4 = 13{,}12$

Masa unei cărți este 0,53 kg.

APLICAȚIE

- Compune și rezolvă o problemă pe baza ecuației:

a) $2 \cdot x = 7$;

b) $1{,}5 \cdot x + 3 = 10$;

c) $120 - 4{,}2 \cdot x = 76{,}74$;

d) $x : 7 = 20{,}5$.

Aplic

1. Suma dintre dublul unui număr rațional și 12 este egală cu −9,78. Determină numărul.

2. Produsul dintre un număr rațional și −5,5 este egal cu 15. Determină numărul.

3. Dublul unui număr rațional este cu 3,4 mai mic decât $\frac{1}{5}$. Care este numărul?

4. Determină numărul rațional care împărțit la 5 dă un cât egal cu media aritmetică a numerelor 32 și 7.

5. Diferența a două numere raționale este egală cu 6, iar unul dintre numere este 1,2. Care este celălalt număr? Studiază toate cazurile posibile.

6. Pentru un pix și patru caiete de același fel Ana a plătit 30,85 lei. Știind că pixul costă 3,45 lei, determină prețul unui caiet cumpărat de Ana.

7. Denisa a cumpărat un kilogram de mere cu 2,5 lei kilogramul și piersici cu 4,2 lei kilogramul, plătind 15,1 lei. Câte kilograme de piersici a cumpărat Denisa?

8. Toni a organizat o petrecere. Pentru închirierea unui restaurant a plătit 255 de euro, iar mâncarea pentru fiecare persoană a fost 32,5 euro. Câte persoane au participat la petrecere, dacă Toni a plătit 872,5 euro?

9. Sonia are 8 ani, vârsta ei reprezentând $\frac{2}{9}$ din vârsta mamei ei.

a) Câți ani are mama Soniei?

b) Peste câți ani vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta Soniei?

10. După ce a cumpărat o carte cu 36,5 lei și șase caiete de același tip, Anei i-au rămas 27,7 lei. Determină prețul unui caiet, știind că Ana a avut inițial 96 de lei.

11. Marius a remarcat că familia lui a plătit 131,6 lei pentru apa consumată în luna iunie. Știind că pentru un metru cub de apă a plătit 8,14 lei, iar pentru pierderile din rețea a plătit 9,5 lei, determină câți metri cubi de apă a consumat familia lui Marius în luna iunie.

12. Suma de 4 000 de lei este depusă la bancă. După un an în depozit se află suma de 4 208 de lei. Determină procentul corespunzător dobânzii acordate.

13. 23% dintre cărțile din biblioteca Aurei, adică 115 cărți, sunt cărți în limbi străine. Câte cărți conține biblioteca Aurei?

14. Un elev a rezolvat într-o zi 9 probleme, ceea ce reprezintă 75% din totalul problemelor pe care le avea de rezolvat. Câte probleme avea de rezolvat elevul?

15. În perioada reducerilor, prețul unui produs s-a micșorat cu 21 de lei. Determină prețul inițial al produsului, știind că reducerea aplicată a fost de 20%.

16. Un produs s-a scumpit cu 25%, adică cu 16,4 lei.

a) Cât costa produsul înainte de scumpire?

b) Care este prețul produsului după scumpire?

c) Cu cât la sută trebuie redus prețul pentru a ajunge la prețul inițial?

17. După o reducere cu 20%, prețul unui ceas s-a micșorat cu 84,15 lei.

a) Determină prețul inițial al ceasului.

b) Cu cât la sută trebuie mărit prețul după reducere pentru a ajunge la prețul inițial?

18. La un magazin se vinde într-o zi $\frac{1}{3}$ din cantitatea de cartofi avută în depozit și încă 4,75 kg, adică 97,5 kg. Ce cantitate de cartofi a fost în depozit?

PORTOFOLIU

Compune și rezolvă probleme cu ajutorul ecuațiilor pe baza reprezentărilor grafice. Păstrează problemele rezolvate în portofoliul tău.

A.

24,5 lei ? lei

B.

3 200 lei 2 800 lei

C.

1,5 kg 2,3 kg

22,45 lei

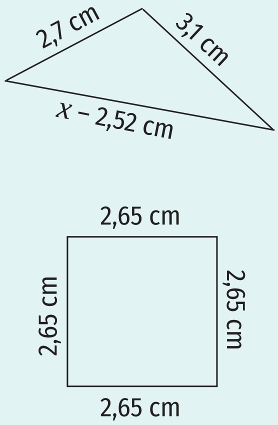
1 kg 1 kg

5 lei ? lei

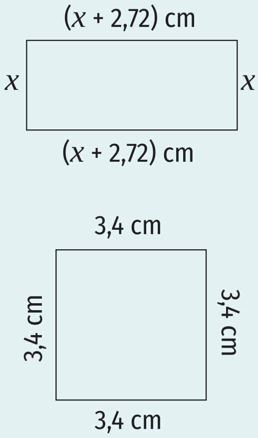
Exerciții recapitulative

• Determină numărul rațional x, știind că figurile geometrice de mai jos au același perimetru.

a)



b)



1. Reprezintă pe axa numerelor următoarele numere raționale:

a) $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2}, -1$;

b) $-\frac{3}{2}, -1, \frac{4}{3}, 1\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$;

c) 0,2; −1,5; 1,3; 0,8; −0,4; −0,1;

d) −1,2; $-\frac{1}{2}$; 2; 1,2; −0,8; $-\frac{3}{2}$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{-3; -\frac{5}{2}; 1\frac{1}{2}; 1{,}2; -\frac{3}{2}; 1{,}(3); 2; 0{,}5; 0; -\frac{1}{6}\right\}$.

a) Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Q}_-$, $A \cap \mathbb{Q}_+$, $A \setminus \mathbb{N}$, $A \setminus \mathbb{Z}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$.

b) Reprezintă pe axa numerelor elementele mulțimii A.

c) Ordonează descrescător elementele mulțimii A.

d) Determină elementele mulțimilor B, C, D și E, unde $B = \{y \mid y \in \mathbb{Q}, y$ este opusul numărului rațional $x, x \in A\}$, $C = \{y \mid y = |x|, x \in A\}$, $D = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$, $E = \{y \mid y = x^{-1}, x \in A, x \neq 0\}$.

3. a) Determină coordonatele punctelor A, B, C, D și E reprezentate pe axa numerelor din figura 1:

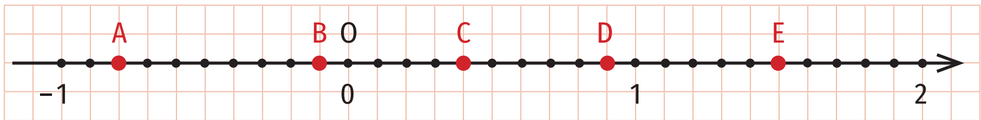


Figura 1

b) Reprezintă pe axa numerelor din figura 2 numerele raționale 0, 1, −1, $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{2}$.

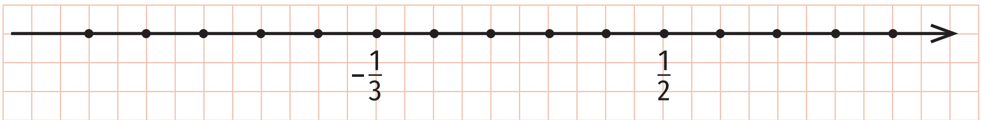


Figura 2

4. Scrie ca fracții zecimale următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{211}{10}, \frac{57}{100}, \frac{2352}{1000}$; b) $\frac{21}{5}, \frac{17}{2}, \frac{31}{50}$; c) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{7}$; d) $\frac{1}{15}, \frac{3}{14}, \frac{5}{22}$.

5. Scrie ca fracții ordinare ireductibile următoarele fracții zecimale:

a) 2,21; 4,3; 7,253; 0,2;

b) 1,(6); 3,(15); 4,(161); 0,(4);

c) 1,2(3); 2,21(3); 1,2(90); 0,31(21).

6. Calculează:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$;

b) $\frac{2}{15} - \frac{5}{3} + \frac{7}{10}$;

c) $7{,}(01) - 8{,}(03) + 0{,}(3)$;

d) $3{,}(25) + \frac{1}{4} - 3{,}7(1)$;

e) $\frac{5}{16} \cdot \left(-\frac{64}{10}\right)$;

f) $\frac{26}{15} \cdot \left(-\frac{7}{13}\right) \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$;

g) $2\frac{1}{3} : \left(-\frac{7}{3}\right)$;

h) $(-15) : \left(-\frac{13}{5}\right)$.

7. Compară numerele raționale *a* și *b*:

a) $a = \left(-\frac{11}{35}\right) + \left(-\frac{15}{14}\right) - \frac{11}{10} - \left(-\frac{7}{5}\right) - \frac{1}{70}$, $b = \left(-2\frac{1}{24}\right) \cdot \left(-\frac{15}{14}\right) + \left(-\frac{15}{8}\right) - \frac{11}{12} : \left(-\frac{44}{9}\right)$;

b) $a = \left[2{,}(1) - \frac{28}{18} : 3{,}5\right] : [-3{,}(8)]$, $b = 3\frac{1}{4} - 2{,}75 - 4{,}5 - \left(-3\frac{1}{8}\right) + (-2{,}25)$;

c) $a = \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^6 : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 \right\}^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $b = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{4}{7} \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]$.

8. Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $x + \frac{8}{11} = \frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{6}x - \frac{11}{9} = -\frac{2}{3}$; e) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = 2,(3)$;

b) $2 - x = \frac{1}{5}$; d) $\frac{2}{3}x + 3,(1) = \frac{5}{6}$; f) $(-2) \cdot x + 6,5 = \frac{3}{2}$.

9. Diferența dintre dublul unui număr rațional și 3,21 este egală cu 4,88. Determină numărul.

10. Suma dintre triplul unui număr rațional și $\frac{2}{15}$ este egală cu $\frac{5}{6}$. Care este numărul?

11. Produsul dintre un număr rațional și $-\frac{4}{15}$ este egal cu $-0,8$. Determină numărul.

12. Dublul unui număr rațional este cu $\frac{1}{6}$ mai mic decât $\frac{4}{9}$. Care este numărul?

13. Determină un număr rațional, știind că împărțindu-l la 0,5 obținem câtul 4.

14. Diferența a două numere raționale este egală cu 1,(6), iar unul dintre numere este $\frac{1}{4}$. Care este celălalt număr? Studiază toate cazurile posibile.

15. După ce a parcurs 15 km, un turist a constatat că a parcurs $\frac{2}{3}$ din traseu. Determină lungimea traseului.

16. Alina citește, într-o zi, 84 de pagini dintr-o carte, adică $\frac{2}{7}$ din numărul de pagini ale cărții. Determină numărul de pagini ale cărții pe care o citește Alina.

17. Pentru două pixuri și trei stilouri, Dinu a plătit 70,68 lei. Dacă un pix costă 5,49 lei, determină prețul unui stilou.

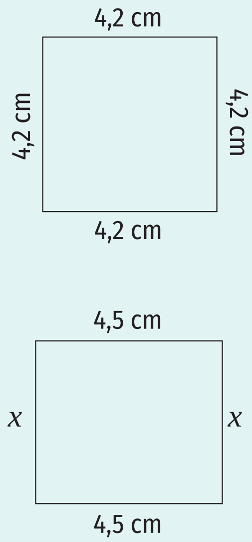
18. Un produs s-a ieftinit cu 25%, adică cu 30,1 lei.

a) Cât costa produsul înainte de ieftinire?

b) Care este prețul produsului după ieftinire?

c) Cu cât la sută trebuie mărit prețul pentru ca produsul să coste 108,36 lei?

- Determină numărul rațional x, știind că suprafețele delimitate de figurile geometrice de mai jos au aceeași arie.



Investigație

1. Calculează cheltuielile familiei tale pe baza bonurilor fiscale aferente cumpărăturilor familiei și plăților facturilor pe parcursul unei luni calendaristice.
2. Organizează datele într-un tabel. Cheltuielile vor fi grupate în următoarele categorii: alimente, vestimentație, sănătate, sport, cultură și educație, înfrumusețare, cheltuieli cu casa (apă, gaze, curent electric, căldură, reparații etc), internet și telefon, rate, alte cheltuieli.
3. Identifică categoriile care implică cele mai mari cheltuieli.
4. Scrie trei metode de reducere a cheltuielilor.

Timp de lucru: 40 de minute **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I **40 puncte**

15 puncte	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*
(5 p.)	**A.** Suma numerelor raționale $-\frac{1}{5}$ și $\frac{3}{2}$ este: a) $\frac{2}{7}$; b) $-\frac{4}{7}$; c) $-\frac{17}{10}$; d) $\frac{13}{10}$.
(5 p.)	**B.** Dintre numerele 1,(21); 1,212; 1,2(1); 1,21 mai mare este: a) 1,(21); b) 1,212; c) 1,2(1); d) 1,21.
(5 p.)	**C.** Soluția ecuației $\frac{1}{5} \cdot x = 1$, $x \in \mathbb{Q}$ este: a) $\frac{1}{5}$; b) $-\frac{1}{5}$; c) 5; d) $\frac{4}{5}$.
20 puncte	**2.** *Scrie pe foaie numai rezultatele.*
(5 p.)	**A.** Inversul numărului rațional $-\frac{5}{4}$ este ... .
(5 p.)	**B.** Dacă $a = -\frac{2}{5}$, atunci suma dintre $\lvert a \rvert$ și opusul numărului rațional a este egală cu ... .
(5 p.)	**C.** Rezultatul calculului $9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ este ... .
(5 p.)	**D.** Soluția ecuației $3 - x = -0{,}35$, $x \in \mathbb{Q}$, este ... .
5 puncte	**3.** *Scrie pe foaie litera corespunzătoare răspunsului corect.* Afirmația „Dacă $a = -1{,}2$ și $b = \frac{6}{5}$, atunci $\lvert a \rvert = b$.” este: a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea **50 puncte**

Scrie rezolvările complete.

10 puncte	**1.** Calculează $\left[\frac{11}{6} - \frac{6}{35} : \left(-\frac{2}{5}\right)^2\right] \cdot 2{,}1 + 2^{-2}$.
10 puncte	**2.** Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuația $\left(-\frac{1}{4}\right) + 5x = 0{,}2$.
30 puncte	**3.** Un produs s-a ieftinit cu 20%, adică cu 12,5 lei.
(10 p.)	**A.** Cât costa produsul înainte de ieftinire?
(10 p.)	**B.** Care este prețul produsului după ieftinire?
(10 p.)	**C.** Cu cât la sută trebuie mărit prețul pentru a ajunge la prețul inițial?

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Pot să compar două sau mai multe numere raționale.					
Pot să efectuez calcule cu numere raționale.					
Pot să formulez și să rezolv probleme folosind ecuații.					

Unitatea 5

Noțiuni geometrice fundamentale

În matematică se întâlnesc propoziții în care sunt menționate însușirile esențiale ale unor categorii de obiecte. O astfel de propoziție se numește **definiție**. Prin definiție se precizează ce înțeles se dă unei noțiuni. Pentru a defini o noțiune vom folosi cunoștințele despre *punct*, *dreaptă*, *plan* și alte noțiuni definite anterior.

Propozițiile matematice care exprimă adevăruri care se admit fără demonstrații se numesc **axiome**.

Propozițiile matematice care exprimă adevăruri ce trebuie demonstrate se numesc **teoreme**. Enunțul unei teoreme are două părți: **ipoteza** (formată din informațiile pe care enunțul teoremei le presupune adevărate) și **concluzia** (formată din ceea ce enunțul teoremei afirmă că se poate deduce din ipoteză, prin demonstrație).

Dacă se schimbă o parte din ipoteza unei teoreme cu concluzia acesteia, se obține o altă propoziție matematică. Dacă aceasta este adevărată, ea reprezintă o nouă teoremă, numită **teoremă reciprocă**.

Teorema și reciproca ei se pot concentra într-o singură teoremă, folosind în formularea enunțului acesteia expresia „dacă și numai dacă".

1. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare

Descopăr

a) Construiește un unghi cu măsura egală cu 60° și notează-l AOB.
b) Pe semidreapta opusă semidreptei OB fixează un punct C, iar pe semidreapta opusă semidreptei OA fixează un punct D.
c) Măsoară unghiurile AOC, BOD și DOC și scrie pe caiet măsurile lor.
d) Ce poți spune despre unghiurile AOB și DOC? Dar despre unghiurile AOC și BOD?
e) Calculează suma măsurilor unghiurilor AOC, COD, DOB și BOA.

Învăț

Unghiuri opuse la vârf

***Definiție*. Două unghiuri cu același vârf se numesc opuse la vârf dacă laturile lor sunt, respectiv, semidrepte opuse.**

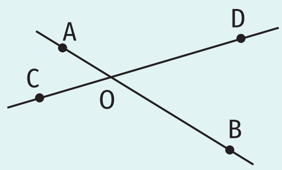


Figura 1

EXEMPLU:

În figura 1, punctele A, O, B și, respectiv, C, O, D sunt coliniare, așadar $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle DOB$, precum și $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri opuse la vârf.

Punctele A, O și B din figura 1 sunt coliniare, deci $\sphericalangle AOB = 180°$.
Cum $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOD$ rezultă $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB - \sphericalangle BOD = 180° - \sphericalangle BOD$.

Analog, punctele C, O și D din figura 1 sunt coliniare, deci $\sphericalangle COD = 180°$.
Cum $\sphericalangle COD = \sphericalangle COB + \sphericalangle BOD$ rezultă $\sphericalangle COB = \sphericalangle COD - \sphericalangle BOD = 180° - \sphericalangle BOD$.

Am obținut $\sphericalangle AOD = 180° - \sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle COB = 180° - \sphericalangle BOD$, de unde rezultă $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COB$.

Cum $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle COB$ sunt unghiuri opuse la vârf, putem formula un rezultat foarte important:

Teorema 1. **Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci ele sunt congruente.**

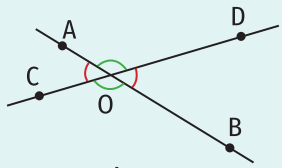


Figura 2

EXEMPLU:

În figura 2, $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COB$ și $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle DOB$.

ATENȚIE!

În figura 3 nu există unghiuri opuse la vârf. $\sphericalangle MSP$ și $\sphericalangle QSN$ au același vârf (punctul S), laturile SM și SN sunt semidrepte opuse, dar laturile SP și SQ nu sunt semidrepte opuse.

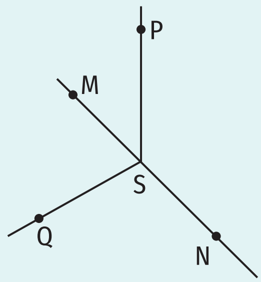


Figura 3

Unghiuri formate în jurul unui punct

Definiție. **Trei sau mai multe unghiuri se numesc unghiuri formate în jurul unui punct dacă:**

- **au același vârf (punctul respectiv),**
- **oricare două dintre ele au interioarele disjuncte,**
- **prin reuniunea unghiurilor și a interioarelor lor se obține planul.**

EXEMPLE:

Unghiurile AOB, BOC și COA din figura 4 sunt unghiuri formate în jurul punctului O.

Unghiurile MRN, NRP, PRQ și QRM din figura 5 sunt unghiuri formate în jurul punctului R.

Unghiurile QRN, NRP și PRQ din figura 5 sunt unghiuri formate în jurul punctului R.

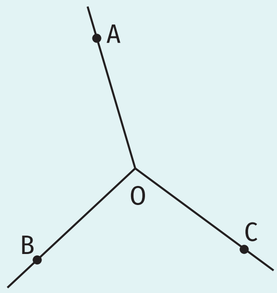


Figura 4

ATENȚIE!

Unghiurile PRQ, QRN și MRP din figura 5 nu sunt unghiuri formate în jurul punctului R deoarece unghiurile QRN și MRP nu au interioarele disjuncte.

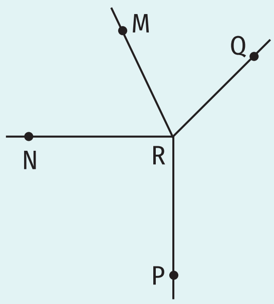


Figura 5

În figura 6 semidreapta OD este opusă semidreptei OB.

Unghiul BOD este alungit, deci $\sphericalangle BOD = 180°$. Rezultă $\sphericalangle BOA + \sphericalangle AOD = 180°$ și $\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 180°$. Astfel, $\sphericalangle BOA + \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 180° + 180° = 360°$.

Formulăm acest rezultat astfel:

Teorema 2. **Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este egală cu 360°.**

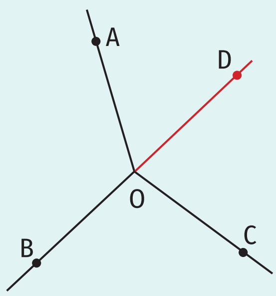


Figura 6

Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare

Definiție. **Două unghiuri se numesc complementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 90°. În acest caz, fiecare unghi este un complement al celuilalt.**

EXEMPLE:

1. Două unghiuri care au măsurile egale cu 23° și, respectiv, 67° sunt complementare deoarece $23° + 67° = 90°$.
2. Complementul unui unghi cu măsura egală cu 15° are măsura egală cu $90° - 15° = 75°$.

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *complementar* provine din limba latină, *complementum = întregire, completare.*

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *suplementar* provine din limba latină, *supplementum* = *suplimentare*.

Definiție. **Două unghiuri se numesc suplementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 180°. În acest caz, fiecare unghi este un suplement al celuilalt.**

EXEMPLE:

1. Două unghiuri care au măsurile egale cu 56° și, respectiv, 124° sunt suplementare deoarece 56° + 124° = 180°.
2. Suplementul unui unghi cu măsura egală cu 105° are măsura egală cu 180° − 105° = 75°.

OBSERVAȚII

1. Dacă două unghiuri au același complement (suplement), atunci acestea sunt congruente.
2. Suplementul unui unghi drept este tot un unghi drept.

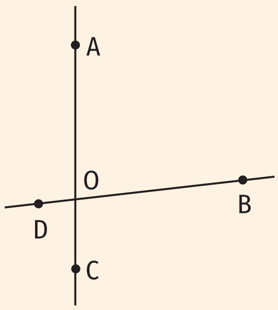


Figura 7

Exerciții rezolvate

1. Unul dintre cele patru unghiuri formate în jurul punctului de intersecție a două drepte concurente are măsura egală cu 83° 49′. Determină măsurile celorlalte trei unghiuri.

Rezolvare:

Realizăm o configurație geometrică care să respecte informațiile din enunțul problemei (figura 7).

Presupunem că ∢AOB = 83° 49′. Unghiurile AOB și COD sunt opuse la vârf, de unde rezultă ∢COD = ∢AOB = 83° 49′.

Punctele A, O și C sunt coliniare, deci ∢AOC = 180° ⇒ ∢AOB + ∢BOC = 180° ⇒

⇒ 83° 49′ + ∢BOC = 180° ⇒ ∢BOC = 180° − 83° 49′ = 179° 60′ − 83° 49′ = 96° 11′.

Unghiurile BOC și AOD sunt opuse la vârf, de unde rezultă ∢BOC ≡ ∢AOD, deci ∢AOD = 96° 11′.

Așadar, două dintre cele trei unghiuri au măsura egală cu 96° 11′, iar cel de-al treilea unghi are măsura egală cu 83° 49′.

OBSERVAȚIE

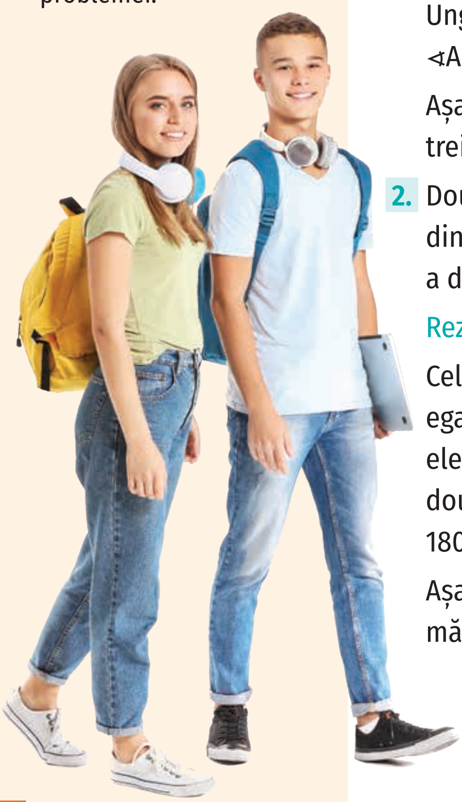
Presupunerea că ∢AOB = 83° 49′ nu modifică rezultatul problemei.

2. Două drepte, *a* și *b*, se intersectează în punctul O. Determină măsura fiecăruia dintre cele patru unghiuri formate în jurul punctului O, știind că suma măsurilor a două dintre acestea este egală cu 135°.

Rezolvare:

Cele două unghiuri formate în jurul punctului O, pentru care suma măsurilor este egală cu 135°, sunt opuse la vârf. Cum acestea sunt congruente, fiecare dintre ele va avea măsura egală cu 135° : 2 = 67° 30′. Măsura fiecăruia dintre celelalte două unghiuri (care sunt și ele opuse la vârf, deci congruente) este egală cu 180° − 67° 30′ = 179° 60′ − 67° 30′ = 112° 30′.

Așadar, două dintre unghiuri au măsura egală cu 67° 30′, iar celelalte două au măsura egală cu 112° 30′.



3. Determină măsura unui unghi, știind că măsura complementului său este de trei ori mai mare.

Rezolvare:

Pentru rezolvarea problemei folosim metoda figurativă. Reprezentăm prin segmente măsura unghiului și măsura complementului său folosind informațiile din problemă:

măsura unghiului

măsura complementului

90° : 4 = 22° 30′. Măsura unghiului este egală cu 22° 30′.

Aplic

1. a) Scrie perechile de unghiuri complementare: ∢A = 25°, ∢B = 70°, ∢C = 23° 20′, ∢D = 20°, ∢E = 48° 36′, ∢F = 75°, ∢G = 13° 15′, ∢H = 63° 28′, ∢I = 66° 40′, ∢J = 65°, ∢K = 76° 45′, ∢L = 41° 24′, ∢M = 26° 32′, ∢N = 15°. *Exemplu: ∢A și ∢J*

b) Scrie perechile de unghiuri suplementare: ∢A = 24°, ∢B = 143°, ∢C = 115° 47′, ∢D = 156°, ∢E = 27°, ∢F = 159° 25′, ∢G = 37°, ∢H = 153°, ∢I = 64° 13′, ∢J = 20° 35′.

2. Determină măsura complementului unghiului cu măsura egală cu:

a) 75°; b) 13° 45′; c) 38°; d) 83° 9′.

3. Determină măsura suplementului unghiului cu măsura egală cu:

a) 38°; b) 135°; c) 74° 13′; d) 118° 20′.

4. a) Determină măsura a două unghiuri complementare congruente.

b) Determină măsura a două unghiuri suplementare congruente.

5. Scrie perechile de unghiuri opuse la vârf din figura 8.

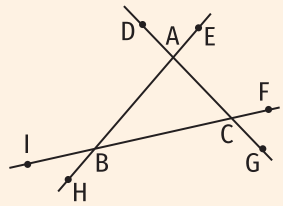


Figura 8

6. În figura 9 sunt reprezentate dreptele AB și CD, concurente în punctul O. Punctul E aparține interiorului unghiului AOC și punctul F aparține interiorului unghiului BOD, astfel încât punctele E, O și F nu sunt coliniare. Completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.

a) Semidreptele OA și OB sunt semidrepte ...

b) Vârful unghiului AOC este punctul ...

c) Laturile unghiului COB sunt .... și ...

d) Unghiul FOB este unghi ...

e) Unghiul EOF este unghi ...

f) Unghiul COD este unghi ...

g) Unghiul OBA este unghi ...

h) ∢AOB = ...°

i) ∢ODC = ...°

j) Punctul B aparține ... unghiului FOC.

k) Punctul C aparține ... unghiului AOD.

l) Punctele A, O și B sunt ...

m) Unghiurile BOD și BOC sunt ...

n) Unghiurile COE și ... sunt suplementare.

o) ∢AOD ≡ ∢ ...

p) Unghiul DOB și unghiul ... sunt unghiuri opuse la vârf.

q) Perechile de unghiuri opuse la vârf sunt: ...

r) ∢AOC + ∢COB = ...°

s) Unghiurile ..., ... și ... sunt unghiuri în jurul punctului O.

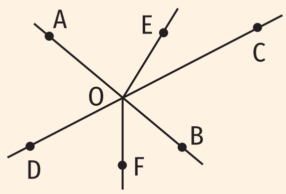


Figura 9

7. Folosind figura 9, completează casetele cu **A**, dacă propoziția este adevărată și cu **F**, dacă propoziția este falsă.

a) Semidreptele OE și OF sunt semidrepte opuse. ☐

b) Punctele D, O și E sunt coliniare. ☐

c) Vârful unghiului DOF este punctul O. ☐

d) Laturile unghiului FOB sunt semidreptele FO și BO. ☐

e) $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle EOD$. ☐

f) Unghiul ODC este unghi nul. ☐

g) $\sphericalangle BOA = 180°$. ☐

h) Unghiurile AOD și BOF sunt opuse la vârf. ☐

i) Unghiurile AOD, AOC, COF și BOD sunt unghiuri în jurul punctului O. ☐

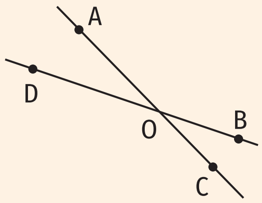


Figura 10

8. În figura 10 sunt reprezentate dreptele concurente AC și BD, $AC \cap BD = \{O\}$. Determină măsurile unghiurilor BOC, AOB și COD, știind că $\sphericalangle AOD = 27°$.

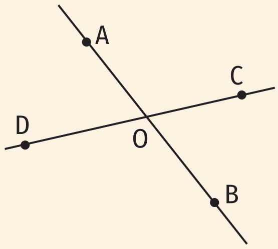


Figura 11

9. În figura 11 sunt reprezentate punctele A, O, B, C și D, astfel încât $AB \cap CD = \{O\}$. Determină măsurile unghiurilor AOD, AOC și COB, știind că $\sphericalangle BOD = 115°15'$.

10. Două drepte, *a* și *b*, se intersectează în punctul O. Unul dintre cele patru unghiuri formate în jurul punctului O are măsura egală cu $75°20'$. Determină măsurile celorlalte trei unghiuri.

11. Unghiurile MON și POQ sunt opuse la vârf. Determină suma măsurilor lor, știind că măsura complementului unghiului MON este egală cu 48°.

12. Suma măsurilor a două unghiuri opuse la vârf este egală cu 95°. Determină măsura celor două unghiuri.

13. a) Determină măsura fiecăruia dintre cele patru unghiuri formate în jurul punctului de intersecție a două drepte concurente, știind că suma măsurilor a două dintre acestea este egală cu 160°.

b) Determină măsura fiecăruia dintre cele patru unghiuri formate în jurul punctului de intersecție a două drepte concurente, știind că suma măsurilor a trei dintre acestea este egală cu 230°.

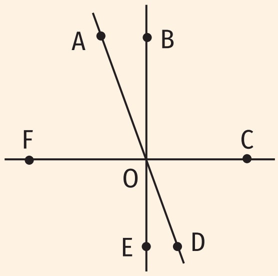


Figura 12

14. În figura 12 sunt reprezentate punctele O, A, B, C, D, E și F, astfel încât punctele B, O, E și, respectiv, F, O, C sunt coliniare, $\sphericalangle BOC = 90°$, $A \in Int(\sphericalangle BOF)$, $\sphericalangle AOC = 110°$, iar semidreptele OA și OD sunt opuse.

a) Scrie perechile de unghiuri opuse la vârf.

b) Scrie perechile de unghiuri complementare.

c) Scrie perechile de unghiuri suplementare.

d) Determină măsurile unghiurilor AOB, EOD, COD, AOF, DOF și AOE.

15. a) În jurul unui punct se formează patru unghiuri. Determină măsura fiecăruia dintre ele, știind că sunt congruente.

b) În jurul unui punct se formează cinci unghiuri. Determină măsura fiecăruia dintre ele, știind că sunt congruente.

c) În jurul unui punct se formează șase unghiuri. Determină măsura fiecăruia dintre ele, știind că sunt congruente.

d) Realizează un desen pentru fiecare dintre punctele a), b) și c).

16. Desenează trei unghiuri formate în jurul unui punct, astfel încât două dintre acestea să aibă măsurile egale cu $70°$ și, respectiv, $130°$. Calculează măsura celui de-al treilea unghi.

17. Suma măsurilor a patru dintre cele cinci unghiuri formate în jurul unui punct este egală cu $285°$. Care este măsura celui de-al cincilea unghi?

18. Două dintre cele cinci unghiuri formate în jurul unui punct sunt congruente, iar suma celorlalte trei este egală cu $265°$. Determină măsura celor două unghiuri congruente.

19. Unghiurile AOB, BOC și COA sunt trei unghiuri formate în jurul punctului O, astfel încât $\sphericalangle AOB = 53°25'$, $\sphericalangle BOC = 3 \cdot (\sphericalangle AOB)$.

a) Determină măsurile complementului și suplementului unghiului AOB.

b) Determină măsura suplementului unghiului BOC.

c) Determină măsura unghiului COA.

20. În figura 13 sunt reprezentate unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA, formate în jurul punctului O, astfel încât punctele A, O și D sunt coliniare, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD$ și $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle EOD$. Determină măsurile unghiurilor AOB, BOD și EOB.

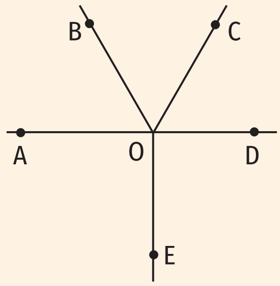


Figura 13

Rezolvă problemele următoare folosind metoda figurativă.

21. Determină măsura unui unghi, știind că măsura complementului său este:

a) de două ori mai mare;
b) de trei ori mai mică;
c) cu $30°$ mai mare;
d) cu $75°$ mai mică.

22. Determină măsura unui unghi, știind că măsura suplementului său este:

a) de trei ori mai mare;
b) de patru ori mai mică;
c) cu $70°$ mai mare;
d) cu $130°$ mai mică.

23. Diferența măsurilor a două unghiuri este egală cu $34°$.

a) Determină măsurile unghiurilor, știind că acestea sunt unghiuri complementare.

b) Determină măsurile unghiurilor, știind că acestea sunt unghiuri suplementare.

24. În figura 14 sunt reprezentate dreptele concurente MN și PQ, $MN \cap PQ = \{O\}$. Determină măsurile unghiurilor MOP, PON, QON și MOQ, știind că măsura unghiului MOP este de două ori mai mare decât măsura unghiului PON.

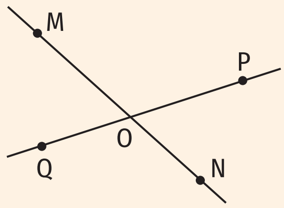


Figura 14

25. În figura 15 sunt reprezentate dreptele AC și BD, concurente în punctul O. Determină măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD și AOD, știind că măsura unghiului AOD este cu $32°$ mai mare decât dublul măsurii unghiului AOB.

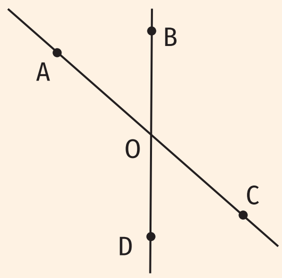


Figura 15

26. Unghiurile AOB, BOC și COA sunt unghiuri formate în jurul punctului O. Determină măsurile unghiurilor BOC și AOC, știind că $\sphericalangle AOB = 120°$ și $\sphericalangle BOC = 25° + \sphericalangle AOC$.

27. Unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA sunt unghiuri formate în jurul punctului O. Determină măsurile acestora, știind că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE = 6 \cdot (\sphericalangle AOB)$, $\sphericalangle AOE = 70° + \sphericalangle AOB$.

2. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi

Descopăr

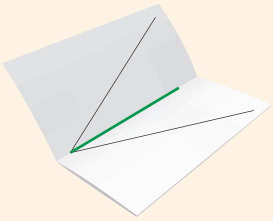


Figura 1

1. Pe o coală de hârtie desenează un unghi cu măsura egală cu 60°.
2. Pliază foaia, astfel încât laturile unghiului să se suprapună.
3. Folosind rigla, trasează cu creionul semidreapta formată prin pliere în interiorul unghiului, având originea în vârful unghiului.
4. Măsoară cele două unghiuri determinate de semidreapta desenată și laturile unghiului. Ce poți spune despre aceste unghiuri?

Învăț

Definiție. **Un unghi care nu este nici nul, nici alungit se numește unghi propriu.**

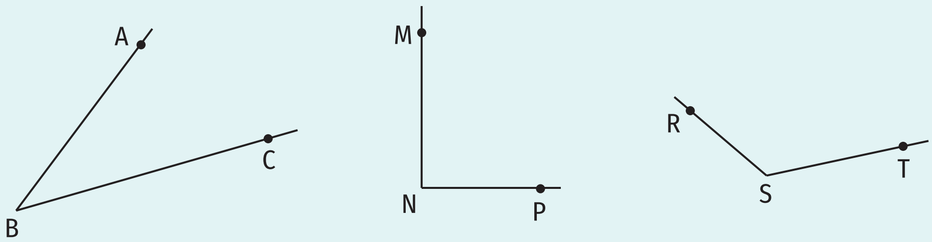


Figura 2

EXEMPLU:

Unghiurile ABC, MNP și RST din figura 2 sunt unghiuri proprii (unghiul ABC este unghi ascuțit, unghiul MNP este unghi drept, unghiul RST este unghi obtuz).

Unghiurile DEF și EDF din figura 3 nu sunt unghiuri proprii, acestea sunt **unghiuri improprii** (unghiul DEF este unghi alungit, unghiul EDF este unghi nul).

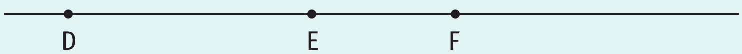


Figura 3

Unghiuri adiacente

Definiție. **Două unghiuri proprii care au același vârf, o latură comună, iar celelalte două laturi se află de o parte și de alta a dreptei care conține latura comună se numesc unghiuri adiacente.**

OBSERVAȚIE

Interioarele a două unghiuri adiacente sunt disjuncte.

EXEMPLU:

Unghiurile AOB și BOC din figura 4 sunt adiacente: au același vârf – punctul O, semidreapta OB este latură comună și semidreptele OA și OC se află de o parte și de alta a dreptei OB (Int(∢AOB) ∩ Int(∢BOC) = ∅).

Unghiurile AOB și AOC din figura 4 nu sunt adiacente: au același vârf – punctul O, semidreapta OA este latură comună, dar semidreptele OB și OC nu se află de o parte și de alta a dreptei OA (Int(∢AOB) ∩ Int(∢AOC) ≠ ∅).

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *adiacent* provine din limba latină, *adiacens, adiacentis = învecinat*.

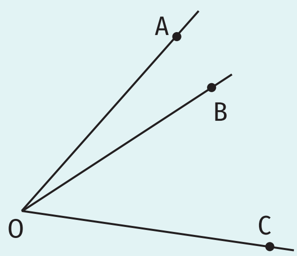


Figura 4

Bisectoarea unui unghi

Definiție. **Se numește bisectoarea unui unghi propriu o semidreaptă cu originea în vârful unghiului, inclusă în interiorul unghiului, care formează cu laturile acestuia unghiuri congruente.**

În figura 5, semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC. Astfel, $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBC$.

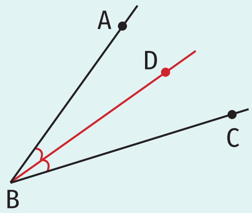


Figura 5

OBSERVAȚIE

Bisectoarea unui unghi propriu este unică.

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *bisectoare* e compus din două cuvinte din limba latină: *bis = de două ori* și *secare = a tăia*.

Construcția bisectoarei unui unghi

Bisectoarea unui unghi se poate construi cu ajutorul raportorului și al riglei sau cu ajutorul riglei negradate și al compasului.

Construcția bisectoarei unghiului ABC folosind raportorul și rigla se realizează astfel:

1. Măsurăm unghiul (figura 6).
2. Împărțim măsura unghiului la 2, determinând astfel măsura fiecăruia dintre cele două unghiuri formate de bisectoare cu laturile unghiului inițial.
3. Marcăm cu creionul un punct în dreptul diviziunii raportorului care indică jumătate din măsura unghiului (figura 7).
4. Trasăm semidreapta cu originea în vârful unghiului, care conține punctul marcat anterior.

   Această semidreaptă este bisectoarea unghiului ABC (figura 8).

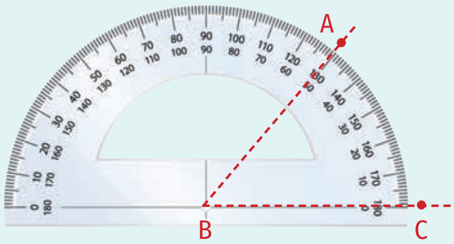


Figura 6

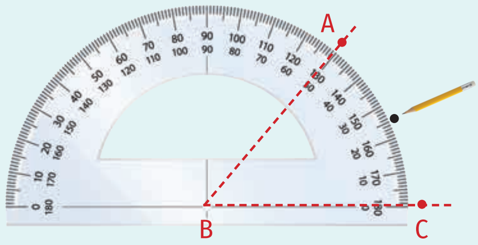


Figura 7

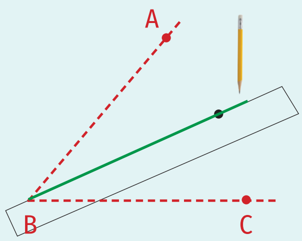


Figura 8

Construcția bisectoarei unghiului ABC folosind compasul și rigla

1. Fixăm vârful compasului în vârful unghiului și trasăm un cerc care intersectează laturile unghiului în două puncte, pe care le notăm M și N (figura 9).
2. Fixăm vârful compasului în punctul M și trasăm un cerc (deschiderea compasului este mai mare sau egală decât jumătate din distanța dintre punctele M și N) (figura 10).
3. Fixăm vârful compasului, care are aceeași deschidere ca cea folosită la punctul 2, în punctul N și trasăm un cerc, care intersectează cercul trasat la pasul anterior în unul sau două puncte. Notăm cu P punctul de intersecție (sau unul dintre punctele de intersecție) care aparține interiorului unghiului ABC (figura 11).
4. Trasăm, cu ajutorul riglei, semidreapta BP. Această semidreaptă este bisectoarea unghiului ABC (figura 12).

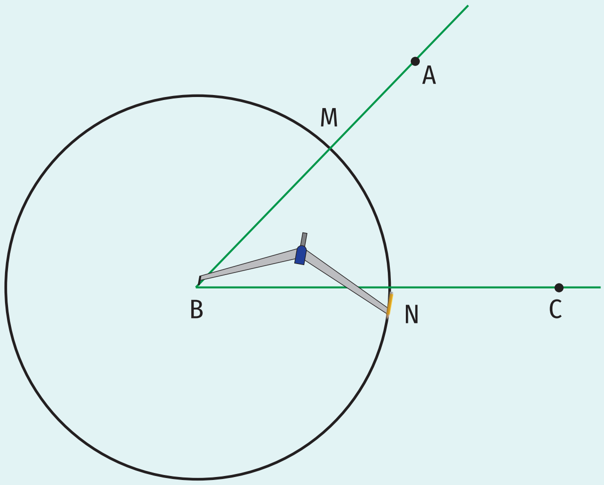


Figura 9

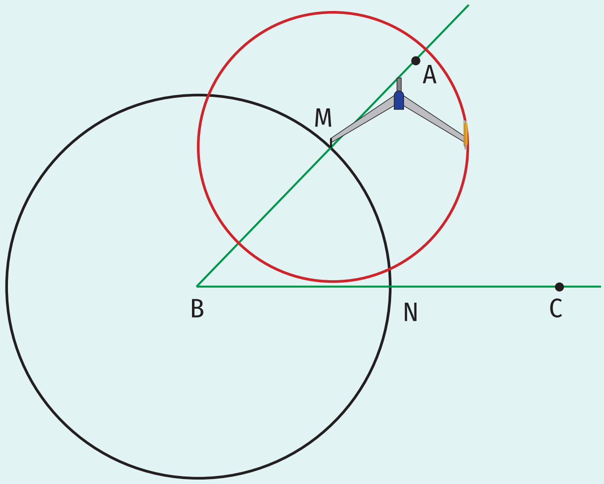


Figura 10

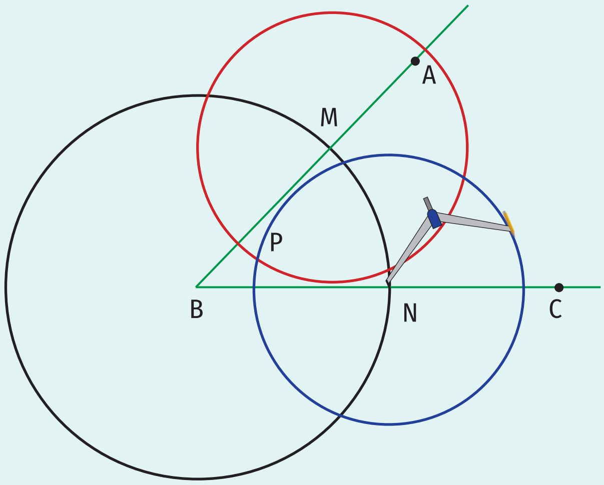


Figura 11

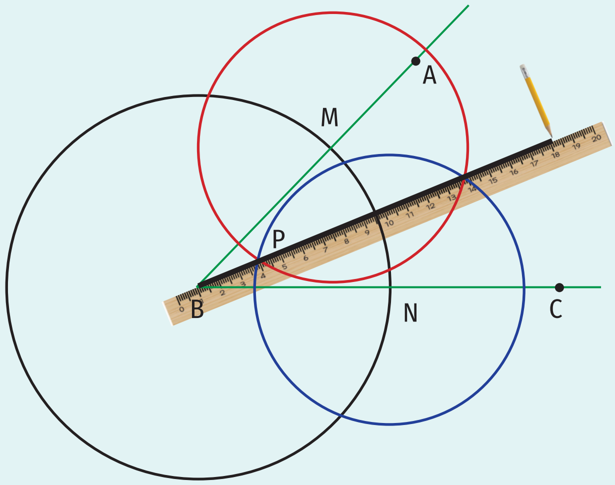


Figura 12

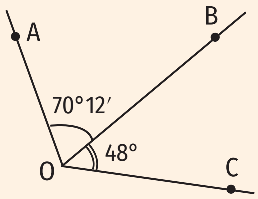


Figura 13

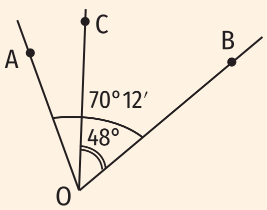


Figura 14

Exerciții rezolvate

1. Fie AOB și BOC două unghiuri, astfel încât $\sphericalangle AOB = 70°12'$ și $\sphericalangle BOC = 48°$. Determină măsura unghiului AOC dacă:

a) unghiurile AOB și BOC sunt adiacente;

b) unghiurile AOB și BOC nu sunt adiacente.

Rezolvare:

a) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 70°12' + 48° = 118°12'$ (figura 13).

b) Deoarece unghiurile AOB și BOC nu sunt adiacente și $\sphericalangle AOB > \sphericalangle BOC$, punctul C aparține interiorului unghiului AOB (figura 14).

$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB - \sphericalangle BOC = 70°12' - 48° = 22°12'$.

2. Semidreptele OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor adiacente AOB și, respectiv, BOC și $\sphericalangle MON = 68°$.

a) Determină măsura unghiului AOC.

b) Determină măsurile unghiurilor AOB și BOC, știind că măsura unghiului AOB reprezintă $\frac{2}{3}$ din măsura unghiului BOC.

Rezolvare:

a) Realizăm desenul corespunzător datelor problemei (figura 15).

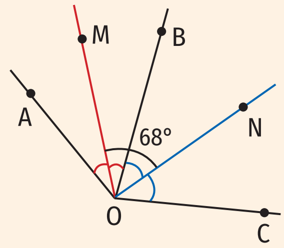


Figura 15

Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB, deci $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle MOB$ și $\sphericalangle AOB = 2 \cdot (\sphericalangle MOB)$.

Semidreapta ON este bisectoarea unghiului BOC, deci $\sphericalangle BON \equiv \sphericalangle NOC$ și $\sphericalangle BOC = 2 \cdot (\sphericalangle BON)$.

$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2 \cdot (\sphericalangle MOB) + 2 \cdot (\sphericalangle BON) = 2 \cdot (\sphericalangle MOB + \sphericalangle BON) = 2 \cdot (\sphericalangle MON) =$
$= 2 \cdot 68° = 136°$.

b) Folosim metoda figurativă: reprezentăm prin segmente măsurile unghiurilor AOB și BOC.

măsura unghiului BOC

măsura unghiului AOB

$136° : 5 = 27° 12'$

$\sphericalangle AOB = 2 \cdot 27° 12' = 54° 24'$, $\sphericalangle BOC = 3 \cdot 27° 12' = 81° 36'$.

Aplic

1. a) Construiește două unghiuri adiacente complementare.

b) Construiește două unghiuri adiacente suplementare.

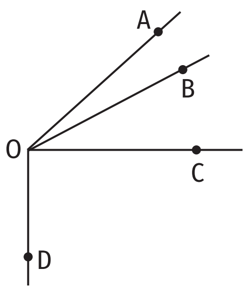
2. a) Construiește, folosind raportorul și rigla, un unghi cu măsura egală cu 80° și bisectoarea acestuia.

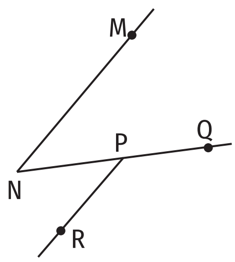
b) Construiește, folosind raportorul și rigla, un unghi cu măsura egală cu 140° și bisectoarea acestuia.

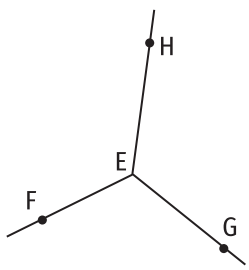
3. Construiește, folosind rigla negradată și compasul, bisectoarea unui unghi:

a) ascuțit; b) drept; c) obtuz.

4. Scrie perechi de unghiuri adiacente din următoarele figuri geometrice:







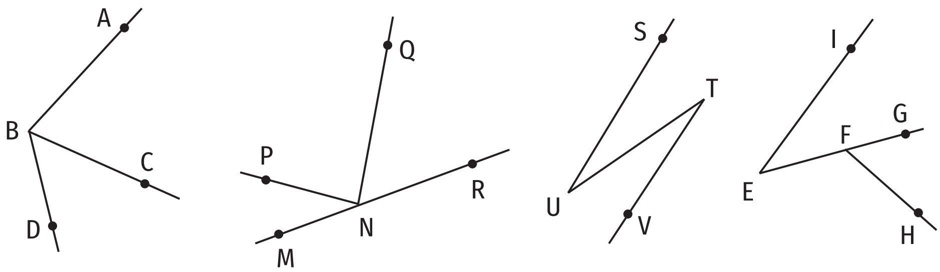
5. Măsura unghiului ABC este egală cu 70° și măsura unghiului CBD este egală cu 50°. Construiește unghiurile ABC și CBD și determină măsura unghiului ABD dacă unghiurile ABC și CBD sunt:

a) adiacente; b) neadiacente.

6. Folosind figurile geometrice de mai jos, precizează dacă unghiurile indicate în fiecare caz sunt adiacente. Argumentează răspunsul.

a) ∢ABC și ∢DBA; c) ∢PNQ și ∢RNQ; e) ∢HFG și ∢EFH;

b) ∢MNP și ∢QNR; d) ∢SUT și ∢UTV; f) ∢IEF și ∢GFH.



7. Semidreapta OM e bisectoarea unghiului AOB. Determină:

a) măsura unghiului AOM, știind că ∢AOB = 78°;

b) măsura unghiului BOM, știind că ∢AOM = 24°30′;

c) măsura unghiului AOB, știind că ∢BOM = 86°.

8. Se consideră un unghi MNP. Semidreapta NQ e bisectoarea unghiului MNP, semidreapta NT e bisectoarea unghiului MNQ , iar semidreapta NS e bisectoarea unghiului QNP.

a) Determină măsura unghiului MNP, știind că ∢MNT = 23°.

b) Determină măsura unghiului MNS, știind că ∢PNS = 32°15′.

c) Determină măsura unghiului TNQ, știind că ∢MNP = 120°.

d) Determină măsura unghiului TNS, știind că ∢MNP = 100°.

e) Determină măsura unghiului MNS, știind că ∢TNS = 38°.

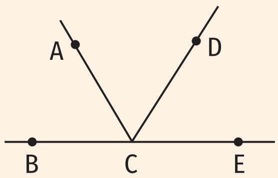


Figura 16

9. În figura 16 sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E, astfel încât punctele B, C și E sunt coliniare, ∢ACB = ∢DCE = 60°, iar punctele A și D sunt situate de aceeași parte a dreptei BC. Demonstrează că semidreapta CA este bisectoarea unghiului BCD.

10. Unghiurile AOB și AOC sunt adiacente suplementare. Pe bisectoarea unghiului AOC se consideră un punct M. Determină măsurile unghiurilor AOM și AOB, știind că ∢BOM = 142°.

11. Unghiurile MON și NOP sunt adiacente complementare, semidreapta OQ e bisectoarea unghiului NOP și ∢NOQ = 34°. Determină măsura unghiului MON.

12. Unghiurile AOC și BOC sunt adiacente suplementare, iar semidreptele OE și OD sunt bisectoarele unghiurilor AOC și, respectiv, BOC. Determină măsurile unghiurilor EOD, COD, EOB și AOD, știind că ∢AOE = 38°.

13. Unghiurile AOC și BOC sunt adiacente suplementare și ∢BOC = 138°. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOC, iar semidreapta ON este opusă semidreptei OM. Determină măsurile unghiurilor AOM, BON și CON.

14. a) Determină măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente complementare.

b) Determină măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare.

15. a) Bisectoarele a două unghiuri adiacente formează un unghi cu măsura egală cu $58°$. Determină suma măsurilor celor două unghiuri.

b) Suma măsurilor a două unghiuri adiacente este egală cu $88°$. Determină măsura unghiului format de bisectoarele acestora.

16. Demonstrează că bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt semidrepte opuse.

17. Fie AOB și BOC două unghiuri, astfel încât $\sphericalangle AOB = 53°27'$ și $\sphericalangle BOC = 72°$. Determină măsura unghiului AOC dacă:

a) unghiurile AOB și BOC sunt adiacente;

b) unghiurile AOB și BOC nu sunt adiacente.

18. Unghiurile AOB și BOC sunt suplementare și măsura unghiului AOB este egală cu $54°$.

a) Determină măsurile unghiurilor AOC și BOC, știind că unghiurile AOB și BOC sunt adiacente.

b) Determină măsura unghiului AOC, știind că unghiurile AOB și BOC nu sunt adiacente.

19. Unghiurile MON și NOP sunt complementare și $\sphericalangle NOP = 32°$.

a) Determină măsura unghiului MOP, știind că unghiurile MON și NOP sunt adiacente.

b) Determină măsura unghiului MOP, știind că unghiurile MON și NOP nu sunt adiacente.

20. Fie AOB și BOC două unghiuri, astfel încât $\sphericalangle AOB = 87°25'$ și $\sphericalangle BOC = 92°35'$.

a) Determină măsura unghiului AOC, știind că unghiurile AOB și BOC nu sunt adiacente.

b) Demonstrează că, dacă unghiurile AOB și BOC sunt adiacente, atunci semidreptele OA și OC sunt opuse.

21. Fie ACD și DCE două unghiuri adiacente suplementare. Semidreapta CB e bisectoarea unghiului ACD și $\sphericalangle DCB = 66°$. Determină măsurile unghiurilor ACB, ACD, DCE și ECB.

22. În interiorul unghiului AOB cu măsura egală cu $70°$ se consideră punctele M și N, astfel încât $\sphericalangle AOM = 15°$ și $\sphericalangle AON = 55°$. Demonstrează că unghiurile AOB și MON au aceeași bisectoare.

23. Unghiurile AOB, BOC, COD și DOA sunt unghiuri formate în jurul punctului O, astfel încât $\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOB + 25°$ și $\sphericalangle COD = 90°$. Semidreptele OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor BOC și, respectiv, AOD. Demonstrează că punctele M, O și N sunt coliniare.

24. Unghiurile AOB și AOC nu sunt adiacente, $\sphericalangle AOB = 46°$ și $\sphericalangle AOC = 122°$. Determină măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB și BOC.

Rezolvă problemele următoare folosind metoda figurativă.

25. Determină măsurile unghiurilor adiacente AOB și BOC, știind că $\sphericalangle AOC = 162°$ și măsura unghiului AOB este cu $16°$ mai mică decât măsura unghiului BOC.

26. Determină măsurile unghiurilor adiacente ABC și CBD, știind că $\sphericalangle ABD = 168°$ și $4 \cdot (\sphericalangle ABC) = 3 \cdot (\sphericalangle CBD)$.

27. Măsura unghiului format de laturile necomune a două unghiuri adiacente este egală cu $85°$. Determină măsurile celor două unghiuri, știind că măsura unuia dintre ele este de patru ori mai mică decât măsura celuilalt.

3. Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice

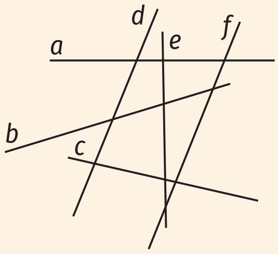


Figura 1

Îmi amintesc

Folosind figura 1, completează spațiile libere cu unul dintre cuvintele „paralele” sau „concurente” pentru a obține enunțuri adevărate.

Dreptele *a* și *d* sunt ...

Dreptele *d* și *e* sunt ...

Dreptele *b* și *f* sunt ...

Dreptele *d* și *f* sunt ...

Dreptele *c* și *b* sunt ...

Învăț

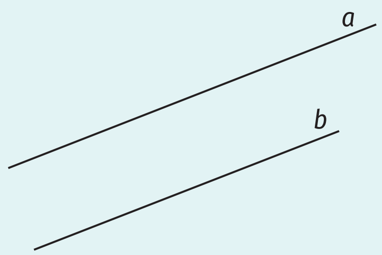
ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *paralele* este compus din două cuvinte ce provin din limba greacă: *para = alături* și *allelon = unul cu altul*.

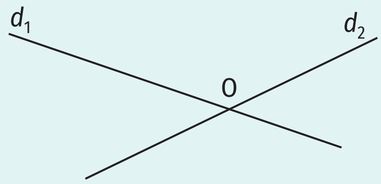
Drepte paralele

***Definiție.* Două drepte conținute în același plan, care nu au niciun punct comun, se numesc drepte paralele.**

EXEMPLU:



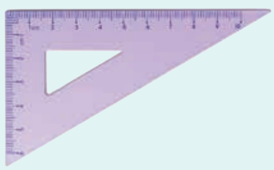
Dreptele *a* și *b* sunt paralele ($a \cap b = \varnothing$). Notăm $a \parallel b$.



Dreptele d_1 și d_2 nu sunt paralele ($d_1 \cap d_2 = \{O\}$). Notăm $d_1 \nparallel d_2$.

OBSERVAȚII

1. Dacă $a \parallel b$, atunci $b \parallel a$.
2. Dacă $a \parallel b$, $b \parallel c$ și dreptele *a* și *c* sunt distincte, atunci $a \parallel c$.
3. Dacă $a \parallel b$ și $b \nparallel c$, atunci $a \nparallel c$. (Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice dreaptă care o intersectează pe una dintre ele o intersectează și pe cealaltă.)



ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *echer* este compus din două cuvinte ce provin din limba latină: *ex = de la, din* și *quadrare = a tăia în unghiuri drepte.*

Construcția unei drepte paralele cu o dreaptă dată

Fiind dată o dreaptă *d* și un punct A, care nu aparține dreptei *d*, ne propunem să construim o paralelă la dreapta *d* care conține punctul A. Vom avea nevoie de două instrumente, riglă și echer.

1. Fixăm echerul cu latura cea mai mare (latura opusă unghiului drept) pe dreapta *d*, ca în figura 2.
2. Sprijinim rigla pe una dintre celelalte două laturi ale echerului ca în figura 3.
3. Translatăm echerul pe muchia riglei până când latura cea mai mare a acestuia trece prin punctul A, ca în figura 4.
4. Trasăm dreapta *a*, paralelă cu dreapta *d* ($A \in a$), ca în figura 5.

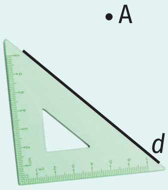


Figura 2

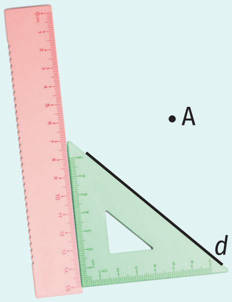


Figura 3

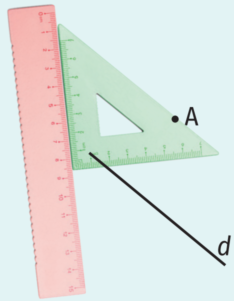


Figura 4

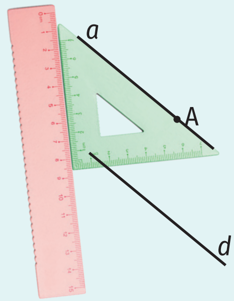


Figura 5

Axioma paralelelor

Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă.

Unghiuri formate de două drepte cu o secantă

Definiție. **O dreaptă care intersectează două drepte incluse în același plan, în puncte diferite, se numește secantă.**

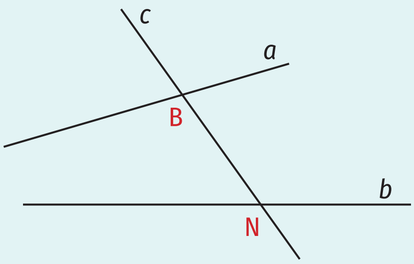


Figura 6

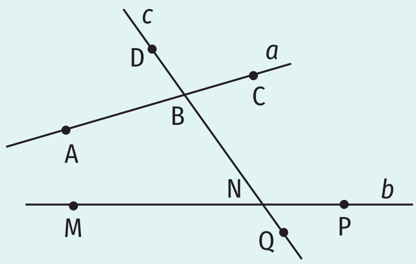


Figura 7

Dreapta c din figura 6 este secantă dreptelor a și b ($a \cap c = \{B\}, b \cap c = \{N\}$, $B \neq N$).

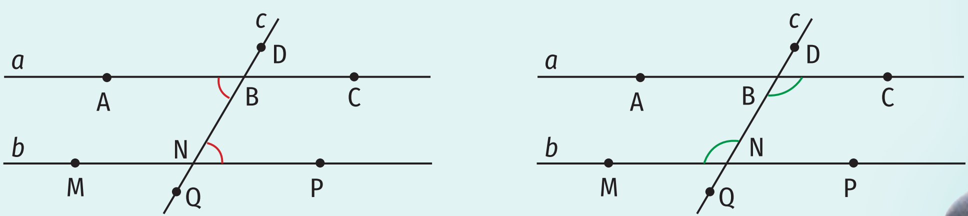
Două drepte formează cu o secantă opt unghiuri (figura 7).

Ținând cont de poziția față de cele două drepte și față de secantă, cu cele opt unghiuri se pot constitui perechi, cărora s-a convenit a li se da următoarele denumiri:

- unghiuri alterne interne ($\sphericalangle ABN$ și $\sphericalangle PNB$ sau $\sphericalangle CBN$ și $\sphericalangle BNM$);
- unghiuri alterne externe ($\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle PNQ$ sau $\sphericalangle DBC$ și $\sphericalangle MNQ$);
- unghiuri interne de aceeași parte a secantei ($\sphericalangle ABN$ și $\sphericalangle MNB$ sau $\sphericalangle CBN$ și $\sphericalangle PNB$);
- unghiuri externe de aceeași parte a secantei ($\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle MNQ$ sau $\sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle PNQ$);
- unghiuri corespondente ($\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle MNB$ sau $\sphericalangle DBC$ și $\sphericalangle PNB$ sau $\sphericalangle ABN$ și $\sphericalangle MNQ$ sau $\sphericalangle CBN$ și $\sphericalangle PNQ$).

Criterii de paralelism

Teorema 1. **Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele** (figura 8).



$\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle PNB \Rightarrow a \parallel b$

$\sphericalangle CBN \equiv \sphericalangle BNM \Rightarrow a \parallel b$

Figura 8

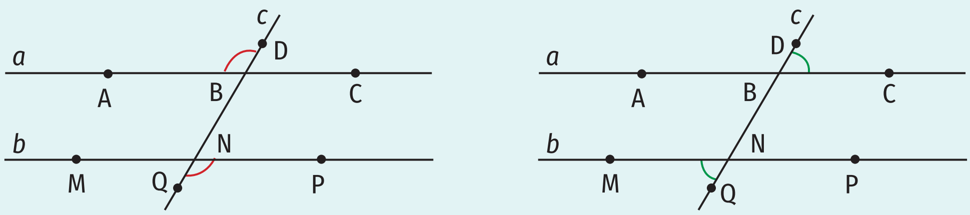
ȘTIAȚI CĂ...?

Axioma paralelelor mai este cunoscută și cu denumirea „axioma lui Euclid”. Euclid a fost un matematician grec (sec. III î.e.n.), autorul unui tratat numit *Elementele*, ce reprezintă prima expunere sistematică a cunoștințelor de geometrie.

Cuvântul *secantă* provine din limba latină: *secans, secantis = care taie*.

Se pot formula următoarele rezultate foarte importante:

***Consecința 1.* Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele** (figura 9).



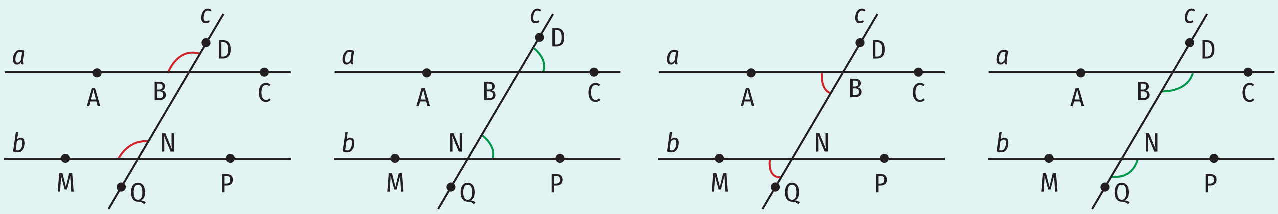
∢ABD ≡ ∢PNQ ⇒ $a \parallel b$ ∢DBC ≡ ∢MNQ ⇒ $a \parallel b$

Figura 9

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *consecință* provine din limba latină *consequentia = urmare.*

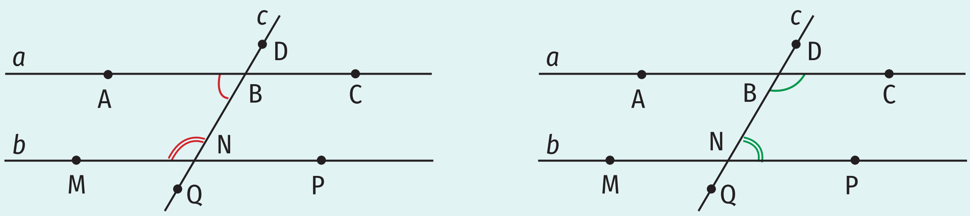
***Consecința 2.* Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele** (figura 10).



∢ABD ≡ ∢MNB ⇒ $a \parallel b$ ∢CBD ≡ ∢BNP ⇒ $a \parallel b$ ∢ABN ≡ ∢MNQ ⇒ $a \parallel b$ ∢CBN ≡ ∢PNQ ⇒ $a \parallel b$

Figura 10

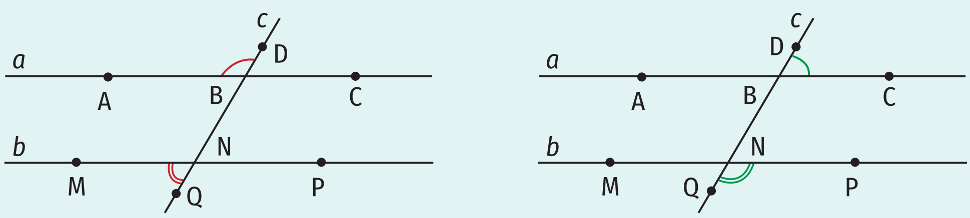
***Consecința 3.* Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele** (figura 11).



∢ABN + ∢MNB = 180° ⇒ $a \parallel b$ ∢CBN + ∢PNB = 180° ⇒ $a \parallel b$

Figura 11

***Consecința 4.* Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele** (figura 12).



∢ABD + ∢MNQ = 180° ⇒ $a \parallel b$ ∢CBD + ∢PNQ = 180° ⇒ $a \parallel b$

Figura 12

Teorema 2. **Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.**

Se pot formula următoarele consecințe:

Consecința 1. **Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri alterne externe congruente.**

Consecința 2. **Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri corespondente congruente.**

Consecința 3. **Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.**

Consecința 4. **Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare.**

OBSERVAȚIE

Teorema 2 este reciproca teoremei 1.

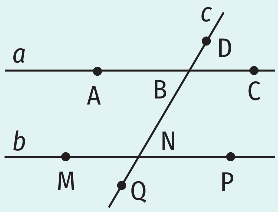


Figura 13

Folosind figura 13,

$$a \parallel b \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle PNB,\ \sphericalangle CBN \equiv \sphericalangle BNM \text{ (unghiuri alterne interne congruente)} \\ \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle PNQ,\ \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle MNQ \text{ (unghiuri alterne externe congruente)} \\ \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle MNB,\ \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle PNB,\ \sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle MNQ,\ \sphericalangle CBN \equiv \sphericalangle PNQ \text{ (unghiuri corespondente congruente)} \\ \sphericalangle ABN + \sphericalangle MNB = 180^\circ,\ \sphericalangle CBN + \sphericalangle PNB = 180^\circ \text{ (unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare)} \\ \sphericalangle ABD + \sphericalangle MNQ = 180^\circ,\ \sphericalangle CBD + \sphericalangle PNQ = 180^\circ \text{ (unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare)} \end{cases}$$

Exerciții rezolvate

1. Demonstrează că, dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci celelalte unghiuri alterne interne sunt congruente și unghiurile interne de aceeași parte a secantei sunt suplementare.

Rezolvare:

Realizăm un desen care să corespundă datelor problemei (figura 14).

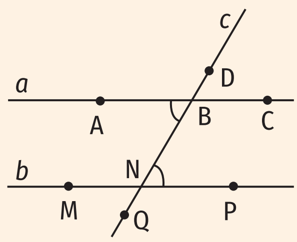


Figura 14

Presupunem că unghiurile alterne interne congruente sunt $\sphericalangle ABN$ și $\sphericalangle BNP$. În acest caz, cealaltă pereche de unghiuri alterne interne este formată din unghiurile CBN și MNB.

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle BNP \\ \sphericalangle CBN = 180^\circ - \sphericalangle ABN \\ \sphericalangle MNB = 180^\circ - \sphericalangle BNP \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle CBN \equiv \sphericalangle MNB \Rightarrow \text{Celelalte unghiuri alterne interne sunt congruente.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle BNP \\ \sphericalangle MNB + \sphericalangle BNP = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle MNB + \sphericalangle ABN = 180^\circ$$

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle CBN \equiv \sphericalangle MNB \\ \sphericalangle PNB + \sphericalangle MNB = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle PNB + \sphericalangle CBN = 180^\circ$$

Cum $\sphericalangle MNB$ și $\sphericalangle ABN$, respectiv, $\sphericalangle PNB$ și $\sphericalangle CBN$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, rezultă că unghiurile de aceeași parte a secantei sunt suplementare.

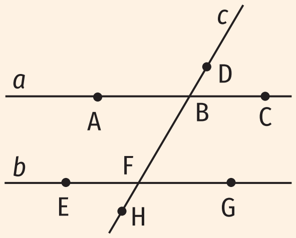


Figura 15

2. În figura 15 sunt reprezentate dreptele paralele *a* și *b* și dreapta *c*, secantă acestora. Determină măsurile celor opt unghiuri formate de dreptele *a* și *b* cu secanta *c*, știind că:

a) $\sphericalangle DBC = 51°$; b) $\sphericalangle ABD + \sphericalangle ABF + \sphericalangle FBC = 300°$; c) $\sphericalangle ABD + \sphericalangle HFG = 210°$.

Rezolvare:

a)

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle DBC = 51° \\ \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ABF \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \\ \sphericalangle DBC = \sphericalangle BFG \text{ (unghiuri corespondente)} \\ \sphericalangle DBC = \sphericalangle EFH \text{ (unghiuri alterne externe)}\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABF = \sphericalangle BFG = \sphericalangle EFH = \sphericalangle DBC = 51°$$

$\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = 180° \Rightarrow \sphericalangle ABD = 180° - \sphericalangle DBC = 180° - 51° = 129°$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBF \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \\ \sphericalangle ABD = \sphericalangle EFB \text{ (unghiuri corespondente)} \\ \sphericalangle ABD = \sphericalangle HFG \text{ (unghiuri alterne externe)} \\ \sphericalangle ABD = 129°\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle CBF = \sphericalangle EFB = \sphericalangle HFG = \sphericalangle ABD = 129°$$

b)

$$\left.\begin{array}{c}\sphericalangle ABD + \sphericalangle ABF + \sphericalangle FBC = 300° \\ \sphericalangle ABD + \sphericalangle ABF + \sphericalangle FBC + \sphericalangle CBD = 360° \text{ (unghiuri} \\ \text{formate în jurul unui punct)}\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle CBD = 360° - 300° = 60°$$

Folosind relațiile dintre unghiuri identificate la punctul a) obținem

$\sphericalangle ABF = \sphericalangle BFG = \sphericalangle EFH = \sphericalangle DBC = 60°$ și $\sphericalangle CBF = \sphericalangle EFB = \sphericalangle HFG = \sphericalangle ABD = 180° - 60° = 120°$.

c)

$$\left.\begin{array}{c}\sphericalangle ABD + \sphericalangle HFG = 210° \\ a \parallel b \Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle HFG \text{ (unghiuri alterne externe)}\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle HFG = 105°$$

Folosind relațiile dintre unghiuri identificate la punctul a) obținem

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBF = \sphericalangle EFB = \sphericalangle HFG = 105°$ și $\sphericalangle ABF = \sphericalangle BFG = \sphericalangle EFH = \sphericalangle DBC = 180° - 105° = 75°$.

Aplic

Figura 16

1. a) Obiectul din figura 16 are forma unui corp geometric. Desenează acest corp geometric pe caiet și colorează cu aceeași culoare segmentele ale căror drepte suport sunt paralele.

b) În figura 17 este o felicitare desenată de Maria. Descoperă în imagine segmentele ale căror drepte suport sunt paralele și arată-le colegilor!

Indicație: Dreapta suport a segmentului AB este dreapta AB.

Figura 17

2. În figura 18 e reprezentat cubul ABCDA’B’C’D’.

a) Scrie dreptele paralele cu dreapta AA’.

b) Scrie dreptele paralele cu dreapta AB.

c) Scrie dreptele paralele cu dreapta BC.

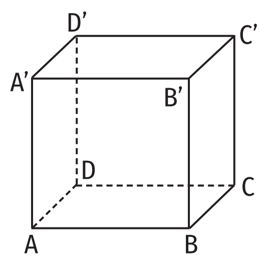


Figura 18

3. În figura 19 sunt reprezentate pătratul MNPQ și dreptunghiul NSRP, astfel încât MN < NS și punctele Q, P, R, respectiv M, N, S sunt coliniare. Completează casetele cu unul dintre simbolurile $\parallel$ sau $\nparallel$ pentru a obține propoziții adevărate.

a) QM □ PN; d) QN □ PM; g) QP □ NS;
b) PR □ NS; e) QM □ RS; h) QR □ MN;
c) MP □ NR; f) PS □ QN; i) PN □ RS.

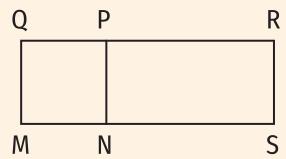


Figura 19

4. Fie *d* o dreaptă și A și B două puncte situate în semiplane diferite determinate de dreapta *d*.

a) Construiește, folosind echerul și rigla, paralela prin punctul A la dreapta *d* și paralela prin punctul B la dreapta *d*.

b) Ce poți spune despre dreptele construite la punctul a)?

5. Fie o dreaptă *d* și punctele A, B și C distincte două câte două care nu aparțin dreptei *d*, astfel încât AB $\parallel$ *d* și AC $\parallel$ *d*.

a) Realizează un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Ce poți spune despre punctele A, B și C?

6. Fie A, B și C trei puncte necoliniare. Construiește:

a) paralela prin punctul A la dreapta BC;

b) paralela prin punctul B la dreapta AC;

c) paralela prin punctul C la dreapta AB.

7. Scrie perechi de drepte și secantele lor din figura 20.

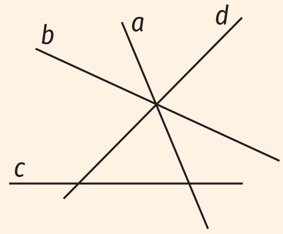


Figura 20

8. Folosind figura 21, scrie perechile de unghiuri alterne interne, alterne externe, corespondente, interne de aceeași parte a secantei și externe de aceeași parte a secantei formate de:

a) dreptele *a* și *b* cu secanta *c*; c) dreptele *c* și *b* cu secanta *a*.

b) dreptele *a* și *c* cu secanta *b*;

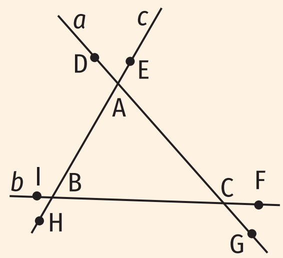
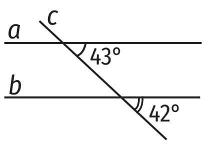
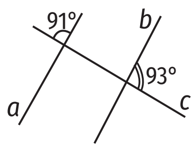


Figura 21

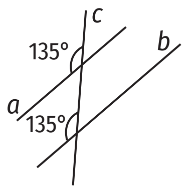
9. Completează casetele cu unul dintre simbolurile $\parallel$ sau $\nparallel$ pentru a obține propoziții adevărate.



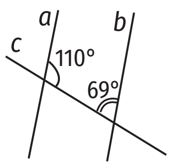
a) *a* □ *b*



b) *a* □ *b*



c) *a* □ *b*



d) *a* □ *b*

10. În figura 22 sunt reprezentate dreptele paralele *a* și *b* și dreapta *c*, o secantă a acestora, astfel încât $a \cap c = \{A\}$ și $b \cap c = \{F\}$. Punctele B și C aparțin dreptei *a*, punctele E și G aparțin dreptei *b*, iar punctele D și H aparțin dreptei *c*. Determină măsurile celor opt unghiuri formate de secanta *c* cu dreptele *a* și *b* știind că:

a) $\sphericalangle EFH = 45°$; c) $\sphericalangle EFA + \sphericalangle CAF = 220°$;

b) $\sphericalangle CAF = 105°$; d) $\sphericalangle DAC + \sphericalangle EFA + \sphericalangle GFH = 259°$.

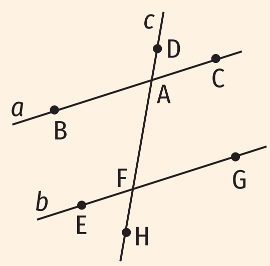
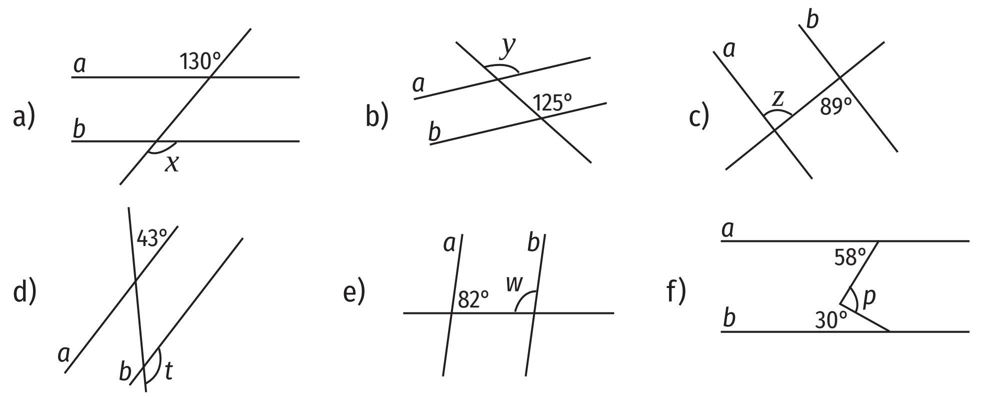


Figura 22

11. Determină x, y, z, t, w și p, știind că dreptele a și b din figurile geometrice de mai jos sunt paralele.



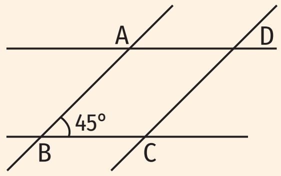


Figura 23

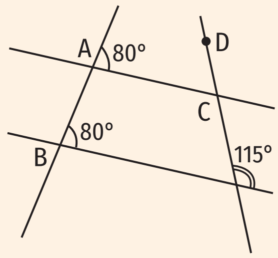
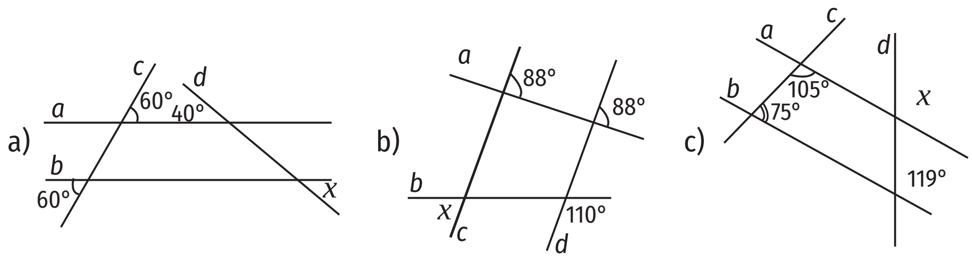


Figura 24

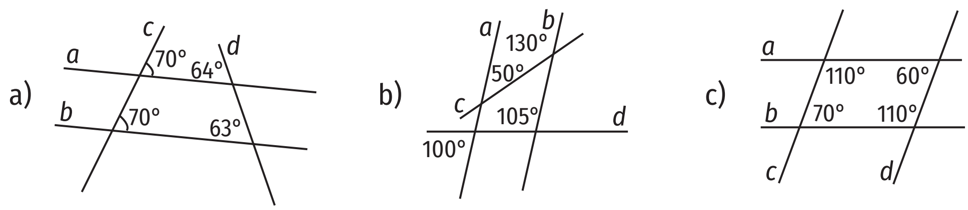
12. În figura 23 sunt reprezentate punctele A, B, C și D, astfel încât AB || CD, AD || BC și $\sphericalangle ABC = 45^\circ$. Determină măsurile unghiurilor ADC și BCD.

13. Folosind figura 24, determină măsurile unghiurilor CAB și ACD.

14. Folosind figurile geometrice de mai jos, determină valoarea lui x în fiecare caz.



15. Argumentează de ce datele din figurile geometrice de mai jos sunt incorecte.



16. Demonstrează că, dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci:

- unghiurile alterne externe sunt congruente;
- unghiurile corespondente sunt congruente;
- unghiurile externe de aceeași parte a secantei sunt suplementare.

17. Fie A, B și C trei puncte necoliniare, astfel încât $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. Printr-un punct M, care aparține segmentului AC, se duce o paralelă la dreapta BC, care intersectează dreapta AB în punctul N.

a) Realizează un desen care să corespundă datelor problemei.

b) Demonstrează că unghiurile AMN și ANM sunt congruente.

18. În figura 25 sunt reprezentate dreptele paralele AB și CD și punctul E, care aparține semidreptei opuse semidreptei CB. Punctele A și D sunt de aceeași parte a dreptei BC, CD este bisectoarea unghiului ACE și $\sphericalangle ABC = 63°$.

a) Determină măsura unghiului ACB.

b) Demonstrează că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$.

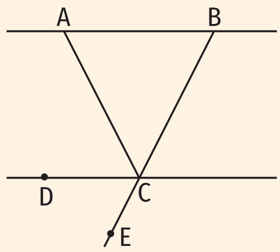


Figura 25

19. În figura 26 sunt reprezentate punctele A, B, C și D, astfel încât dreptele AB și CD sunt paralele și $\sphericalangle BCD = 74°$. Se consideră punctul E situat în același semiplan delimitat de dreapta BC cu punctul D, astfel încât $\sphericalangle EBC = 106°$. Demonstrează că punctele A, B și E sunt coliniare.

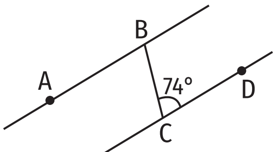


Figura 26

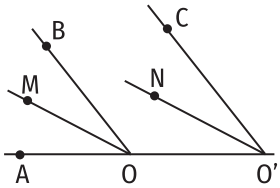


Figura 27

20. În figura 27, punctele A, O și O' sunt coliniare, OB || O'C, OM este bisectoarea unghiului AOB, iar O'N e bisectoarea unghiului AO'C. Demonstrează că OM || O'N.

21. Desenează două drepte paralele tăiate de o secantă și demonstrează că dreptele suport ale bisectoarelor a două unghiuri alterne externe formate de acestea sunt paralele.

22. În figura 28 sunt reprezentate dreptele paralele AB și CD. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta CD în punctul M, iar bisectoarea unghiului BCD intersectează dreapta AB în punctul N. Demonstrează că dreptele BM și CN sunt paralele.

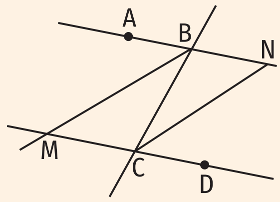


Figura 28

23. a) În figura 29 sunt reprezentate unghiurile AOB și BO'C, astfel încât OA || O'B și OB || O'C. Demonstrează că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BO'C$.

b) În figura 30 sunt reprezentate unghiurile AOB și BO'C, astfel încât OA || O'B și OB || O'C. Demonstrează că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BO'C = 180°$.

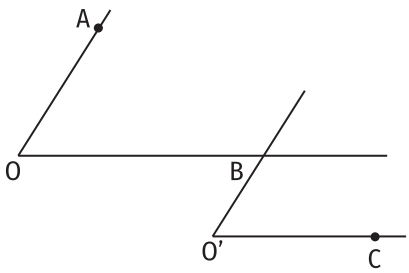


Figura 29

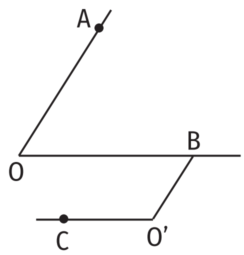


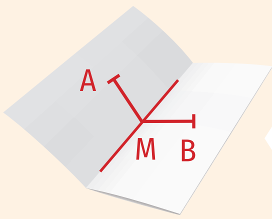
Figura 30

OBSERVAȚIE

Problema 23 se poate formula și astfel:

Demonstrează că două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

4. Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Construcţia mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă



Îmi amintesc

1. a) Construiește un unghi cu măsura egală cu 90° și notează-l AOB.

b) Marchează două puncte, M și N, pe semidreptele opuse semidreptelor OA și, respectiv, OB.

c) Determină măsura fiecăruia dintre cele patru unghiuri formate în jurul punctului O.

d) Cum se numesc dreptele AM și BN?

2. a) Pe o coală desenează un segment cu lungimea egală cu 6 cm și notează capetele acestuia cu A și B.

b) Pliază coala, astfel încât capetele segmentului AB să se suprapună.

c) Trasează dreapta formată prin îndoire și notează cu M punctul de intersecție al acesteia cu dreapta AB.

d) Măsoară unghiurile formate în jurul punctului M. Ce observi?

e) Măsoară segmentele AM și BM și compară lungimile acestora. Ce observi?

Învăț

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *perpendicular* provine din limba latină: *perpendiculum = fir cu plumb.*

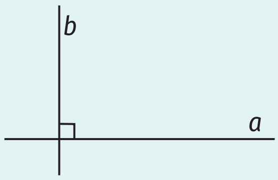


Figura 1

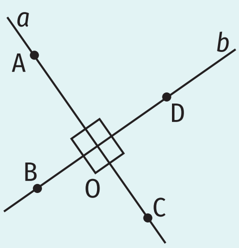


Figura 2

Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă.

***Definiție.* Două drepte concurente care formează un unghi cu măsura egală cu 90° se numesc drepte perpendiculare.**

Dreptele *a* și *b* din figura 1 sunt perpendiculare. Notăm $a \perp b$ sau $b \perp a$.

În figura 2, am desenat și notat două drepte perpendiculare *a* și *b*, pe care am considerat punctele A și C, respectiv, B și D. Presupunem că ∢AOB = 90°. În acest caz, ∢DOC = 90°, deoarece ∢AOB ≡ ∢DOC, fiind unghiuri opuse la vârf.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AOB = \sphericalangle DOC = 90^\circ \\ \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOA = 360^\circ \\ \text{(unghiuri formate în jurul punctului O)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sphericalangle BOC + \sphericalangle DOA = 180^\circ \\ \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle DOA \text{ (unghiuri} \\ \text{opuse la vârf)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sphericalangle BOC = \sphericalangle DOA = 90^\circ$

Așadar, ∢AOB = ∢BOC = ∢COD = ∢DOA = 90°.

Putem formula acest rezultat astfel:

Cele patru unghiuri formate în jurul punctului de intersecție a două drepte perpendiculare au măsura egală cu 90°.

Construcția unei drepte perpendiculare pe o dreaptă dată (*a*), dintr-un punct exterior acesteia (A), se poate face:

I. folosind echerul și rigla:

1. Așezăm echerul astfel încât una dintre cele două laturi ale acestuia care formează unghiul drept să se suprapună dreptei *a*, iar cealaltă să treacă prin punctul A (figura 3).

2. Trasăm dreapta care conține punctul A după latura echerului care se suprapune pe acesta și notăm cu B punctul de intersecție dintre această dreaptă și dreapta *a* (figura 4).

3. Prelungim dreapta desenată dincolo de punctul B, folosind rigla. Această dreaptă este perpendiculara dusă din punctul A pe dreapta *a* (figura 5).

Punctul B astfel construit se numește **piciorul perpendicularei duse din punctul A pe dreapta *a***, iar distanța dintre punctele A și B se numește **distanța de la punctul A la dreapta *a***.

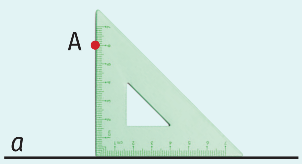


Figura 3

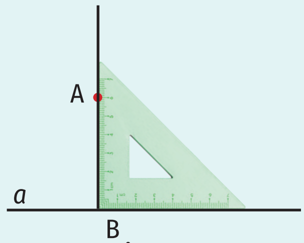


Figura 4

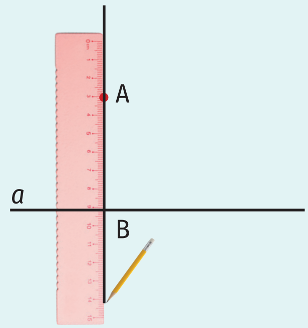


Figura 5

II. folosind compasul și rigla:

1. Așezăm vârful fix al compasului în punctul A și trasăm un cerc care intersectează dreapta *a* în două puncte, M și N (figura 6).

2. Așezăm vârful fix al compasului, pe rând, în punctele M și N și trasăm câte un cerc cu aceeași deschidere a compasului (mai mare sau egală decât jumătate din distanța dintre punctele M și N). Notăm cu B unul dintre punctele (sau punctul) în care se intersectează aceste cercuri ($B \neq A$) (figura 7, figura 8).

3. Cu ajutorul riglei, desenăm dreapta AB. Această dreaptă este perpendiculara dusă din punctul A pe dreapta *a* (figura 9).

OBSERVAȚIE

Deschiderea compasului trebuie să fie suficient de mare astfel încât cercul desenat să intersecteze dreapta *a* în două puncte.

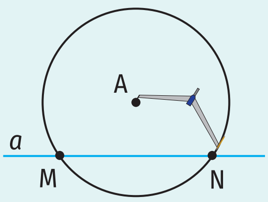


Figura 6

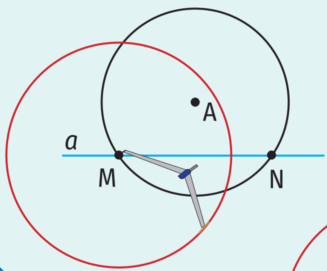


Figura 7

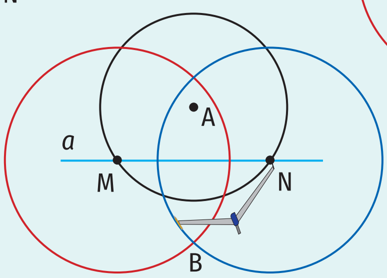


Figura 8

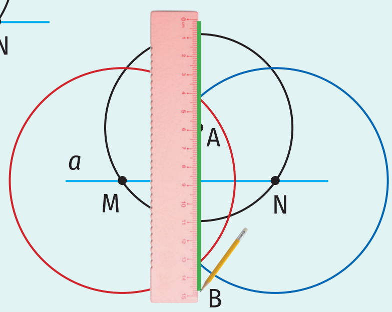


Figura 9

OBSERVAȚIE

Perpendiculara dusă dintr-un punct pe o dreaptă este unică.

Construcția unei drepte perpendiculare pe o dreaptă dată *(a)* într-un punct al acesteia (A) se poate face:

I. folosind echerul și rigla:

1. Așezăm echerul astfel încât una dintre cele două laturi ale acestuia care formează unghiul drept să se suprapună dreptei *a*, iar vârful unghiului drept al echerului să coincidă cu punctul A (figura 10).
2. Trasăm dreapta care conține punctul A după cealaltă latură a echerului care se suprapune pe acesta (figura 11).
3. Prelungim dreapta desenată dincolo de punctul A, folosind rigla. Această dreaptă este perpendiculara dusă în punctul A pe dreapta *a* (figura 12).

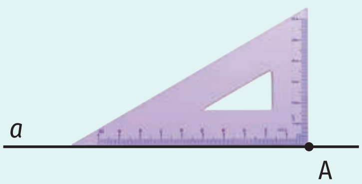


Figura 10

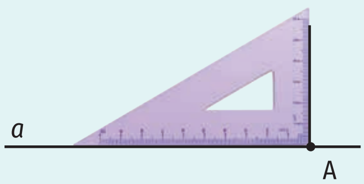


Figura 11

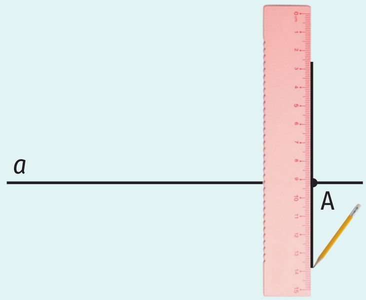


Figura 12

II. folosind compasul și rigla:

1. Așezăm vârful fix al compasului în punctul A și trasăm un cerc care intersectează dreapta *a* în două puncte, M și N (figura 13).
2. Așezăm vârful fix al compasului, pe rând, în punctele M și N și trasăm câte un cerc cu o deschidere a compasului mai mare decât distanța de la punctul M la punctul A. Notăm cu B unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri (figura 14, figura 15).
3. Cu ajutorul riglei, desenăm dreapta AB. Această dreaptă este perpendiculara dusă în punctul A pe dreapta *a* (figura 16).

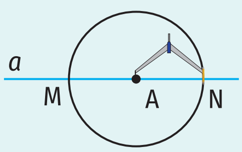


Figura 13

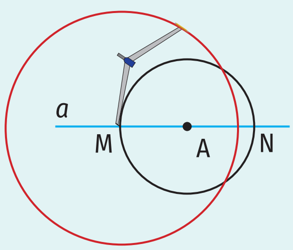


Figura 14

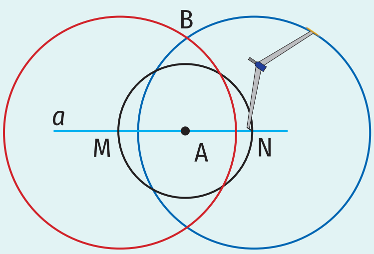


Figura 15

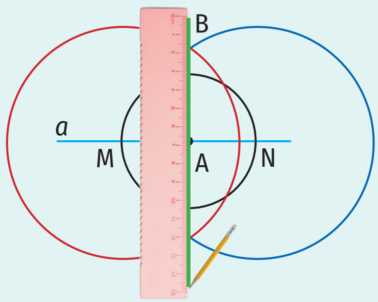


Figura 16

Definiție. **Piciorul perpendicularei duse dintr-un punct pe o dreaptă este punctul de intersecție dintre acea dreaptă și perpendiculara dusă din punctul respectiv pe aceasta** (figura 17).

Definiție. **Distanța de la un punct exterior unei drepte la acea dreaptă este lungimea segmentului ale cărui capete sunt punctul respectiv și piciorul perpendicularei duse din punct pe dreaptă.**

De exemplu, în figura 17, distanța de la punctul A la dreapta *a* este lungimea segmentului AB.

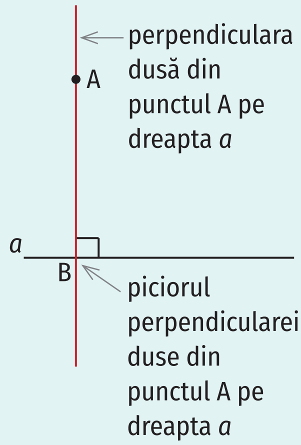


Figura 17

OBSERVAȚII

1. Distanța de la un punct ce aparține unei drepte la acea dreaptă este egală cu 0.
2. Distanța de la punctul A, exterior dreptei *a*, la dreapta *a* se notează d(A, *a*).
   De exemplu, în figura 17, d(A, *a*) = AB.

Dacă două drepte concurente nu sunt perpendiculare, atunci una dintre ele este oblică față de cealaltă.

În figura 18, dreapta *d* este o oblică dusă din punctul A pe dreapta *a*.

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *oblică* provine din limba latină: *obliquus* = *înclinat*.

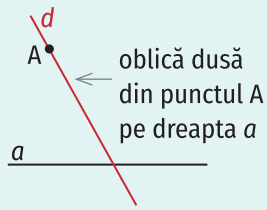


Figura 18

Mediatoarea unui segment

Definiție. **Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.**

În figura 19, dreapta *d* este mediatoarea segmentului AB.

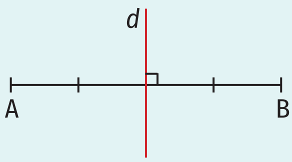


Figura 19

OBSERVAȚIE

Un segment are o singură mediatoare.

Construcția mediatoarei unui segment AB se poate realiza:

I. folosind echerul și rigla:

1. Măsurăm segmentul cu rigla, marcăm mijlocul său și îl notăm cu M (figura 20).

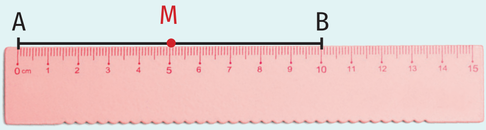


Figura 20

2. Așezăm echerul astfel încât una dintre cele două laturi ale acestuia, care formează unghiul drept, să se suprapună segmentului, iar vârful unghiului drept al echerului să coincidă cu punctul M (figura 21).

3. Trasăm dreapta care conține punctul M după cealaltă latură a echerului care se suprapune pe acesta (figura 22).

4. Prelungim dreapta desenată dincolo de punctul M, folosind rigla. Această dreaptă este mediatoarea segmentului AB (figura 23).

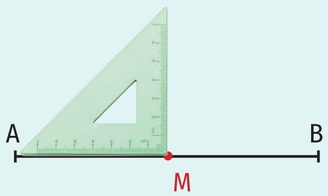


Figura 21

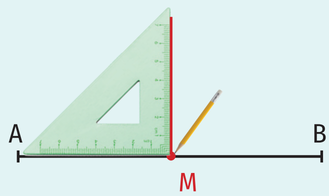


Figura 22

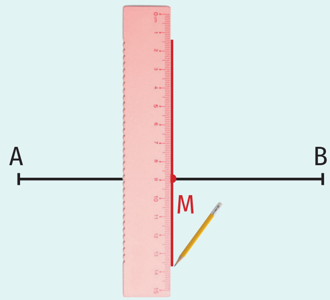


Figura 23

II. folosind compasul și rigla:

1. Așezăm vârful fix al compasului în punctul A și trasăm un cerc. Deschiderea compasului va fi mai mare decât jumătate din lungimea segmentului AB (figura 24).

2. Așezăm vârful fix al compasului în punctul B și trasăm un cerc cu aceeași deschidere a compasului ca cea folosită la pasul anterior (figura 25).

3. Cu ajutorul riglei, desenăm dreapta determinată de punctele de intersecție a celor două cercuri. Această dreaptă este mediatoarea segmentului AB (figura 26).

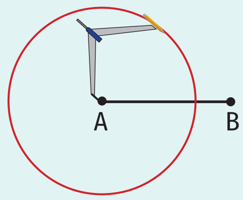


Figura 24

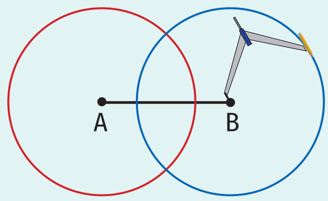


Figura 25

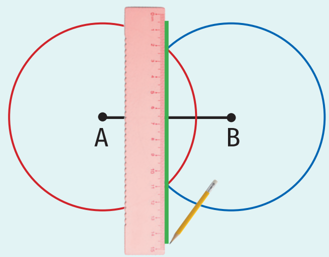


Figura 26

Simetria față de o dreaptă

Două puncte, A și B, sunt simetrice față de o dreaptă *d* (numită axă de simetrie) dacă dreapta *d* este mediatoarea segmentului AB. Punctul A se numește simetricul punctului B față de dreapta *d*, iar punctul B se numește simetricul punctului A față de dreapta *d*.

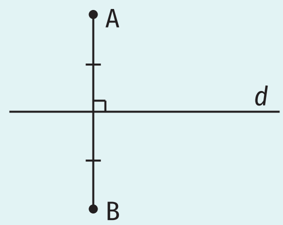


Figura 27

În figura 27, punctele A și B sunt simetrice față de dreapta *d* (dreapta *d* este mediatoarea segmentului AB).

Două figuri geometrice sunt simetrice față de o dreaptă dacă simetricul oricărui punct al unei figuri față de acea dreaptă aparține celeilalte figuri.

În figura 28, segmentele MN și PQ sunt simetrice față de dreapta *a*.

În figura 29, cele două triunghiuri sunt simetrice față de dreapta *b*.

Cuvântul *simetrie* e compus din două cuvinte ce provin din limba greacă: *syn = împreună* și *metron = măsură*.

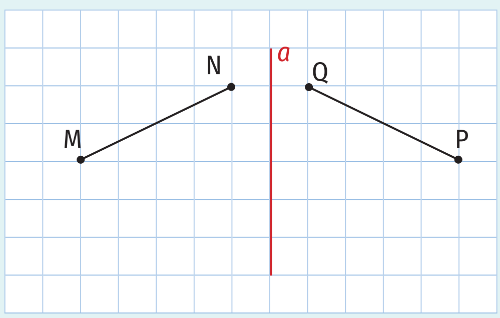


Figura 28

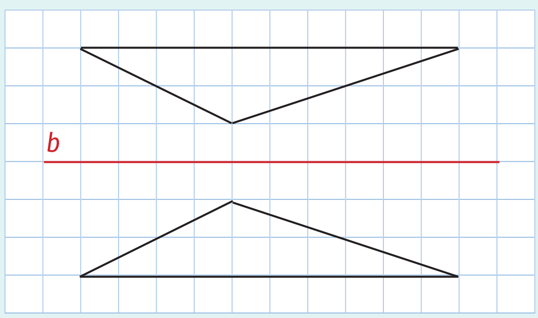


Figura 29

Exerciții rezolvate

1. Fie a, b și c trei drepte distincte două câte două, astfel încât $a \parallel b$ și $a \perp c$. Demonstrează că $b \perp c$.

Rezolvare:

Realizăm o configurație geometrică pentru a ilustra datele problemei. Notăm cu A și B punctele de intersecție dintre dreapta c și dreptele a și, respectiv, b. Pe dreapta a considerăm punctul M, iar pe dreapta b considerăm punctul N ca în figura 30.

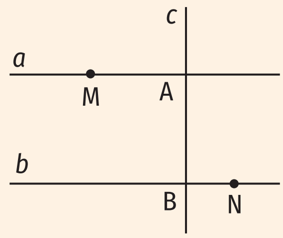


Figura 30

Cum $a \perp c$, fiecare dintre cele patru unghiuri formate în jurul punctului A are măsura egală cu 90°.

Dreptele a și b sunt paralele, deci formează cu secanta c unghiuri alterne interne congruente. Prin urmare, $\sphericalangle NBA = \sphericalangle MAB = 90°$, de unde rezultă că dreptele b și c sunt perpendiculare.

2. În figura 31 sunt reprezentate unghiurile ascuțite AOB și COD cu laturile respectiv perpendiculare (OA ⊥ OC și OB ⊥ OD). Demonstrează că unghiurile AOB și COD sunt congruente.

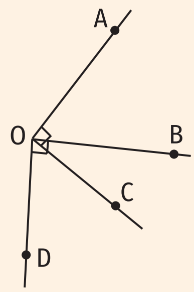


Figura 31

Rezolvare:

$OA \perp OC \Rightarrow \sphericalangle AOC = 90°$; $OB \perp OD \Rightarrow \sphericalangle DOB = 90°$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOC = 90° - \sphericalangle BOC \\ \sphericalangle COD = \sphericalangle DOB - \sphericalangle BOC = 90° - \sphericalangle BOC \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD.$$

Aplic

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Două drepte perpendiculare formează în jurul punctului de intersecție:

A. patru unghiuri ascuțite; C. patru unghiuri obtuze;
B. patru unghiuri drepte; D. două unghiuri ascuțite și două unghiuri obtuze.

b) Un segment are:

A. două mediatoare; C. o singură mediatoare;
B. trei mediatoare; D. o infinitate de mediatoare.

2. a) Desenează o dreaptă d și un punct M exterior acesteia.

b) Construiește perpendiculara din punctul M pe dreapta d și notează cu N piciorul acesteia.

c) Construiește o oblică prin punctul M la dreapta d și notează cu P punctul de intersecție dintre aceasta și dreapta d.

d) Măsoară segmentele MN și MP și compară apoi lungimile acestora.

3. Folosind figura 32, completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

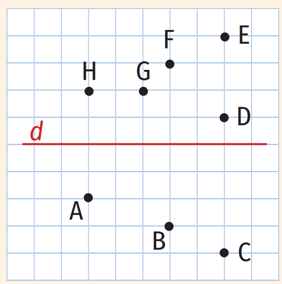


Figura 32

a) Simetricul punctului C față de dreapta d este punctul ...

b) Simetricul segmentului HF față de dreapta d este segmentul ...

c) Punctele A și ... sunt simetrice față de dreapta d.

d) Segmentele BC și ... sunt simetrice față de dreapta d.

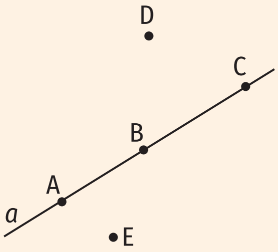


Figura 33

4. Reprodu în caiet desenul din figura 33 și construiește:

a) perpendicularele din punctele D și E pe dreapta *a*;

b) perpendicularele în punctele A, B și C pe dreapta *a*.

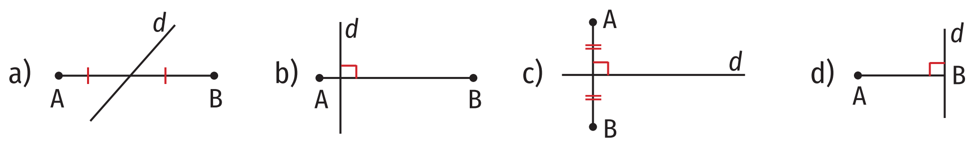
c) Ce se poate spune despre dreptele construite la punctele a) și b)?

5. Fie AB un segment cu lungimea egală cu 4 cm. Punctul M este mijlocul segmentului AB, iar punctul C este punct exterior dreptei AB, astfel încât CM ⊥ AB.

a) Realizează un desen care să ilustreze această situație.

b) Cum se numește dreapta CM?

6. Folosind figurile geometrice de mai jos, precizează, în fiecare caz, dacă dreapta *d* este mediatoarea segmentului AB.



7. Construiește un segment cu lungimea egală cu 8 cm și mediatoarea acestuia.

8. a) Desenează o dreaptă *d* și două puncte, A și B, situate în același semiplan delimitat de dreapta *d*. Construiește perpendicularele din A și B pe dreapta *d*. Ce poți spune despre acestea?

b) Desenează o dreaptă *a* și două puncte, M și N, situate în semiplane diferite delimitate de dreapta *a*. Construiește perpendicularele din M și N pe dreapta *a*. Ce poți spune despre acestea?

9. Construiește o dreaptă *d* și un segment MN, astfel încât dreapta *d* să fie mediatoarea segmentului MN.

10. a) Construiește o dreaptă *d* și un punct A, exterior ei, astfel încât distanța de la punctul A la dreapta *d* să fie egală cu 3 cm.

b) Desenează și notează cu B punctul pentru care dreapta *d* este mediatoarea segmentului AB.

c) Determină distanța de la punctul B la dreapta *d*.

d) Determină lungimea segmentului AB.

11. Fie A, B și C trei puncte necoliniare. Construiește:

a) perpendiculara din punctul A pe dreapta BC;

b) perpendiculara din punctul B pe dreapta AC;

c) perpendiculara din punctul C pe dreapta AB;

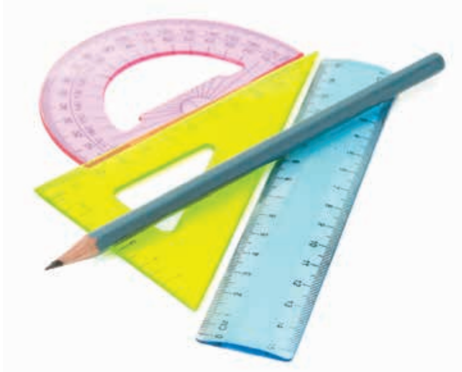
d) perpendiculara în punctul A pe dreapta AB;

e) perpendiculara în punctul C pe dreapta BC;

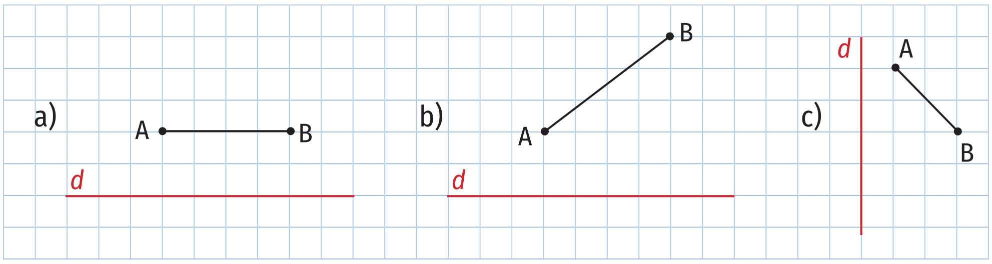
f) perpendiculara în punctul B pe dreapta BC;

g) simetricul punctului A față de dreapta BC;

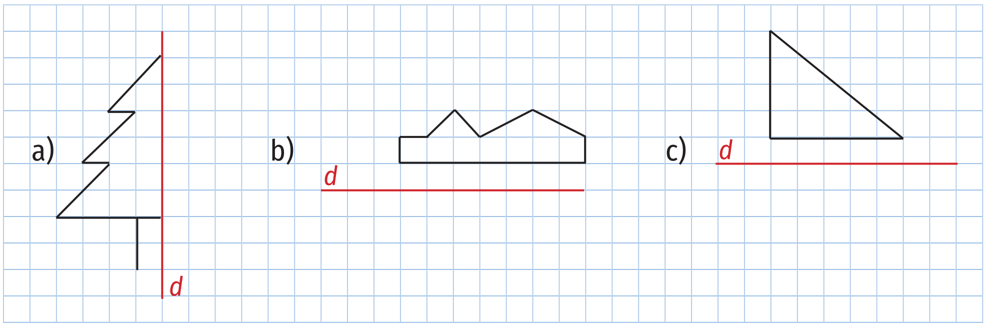
h) simetricul punctului B față de dreapta AC.



12. Reprodu figurile geometrice de mai jos pe caiet și construiește simetricul segmentului AB față de dreapta *d* în fiecare caz.



13. Reprodu figurile geometrice de mai jos pe caiet și construiește simetrica fiecărei figuri față de dreapta *d*.



14. a) Desenează un dreptunghi și un pătrat și trasează diagonalele acestora.

b) Identifică perechi de drepte perpendiculare.

c) Stabilește dacă dreptele suport ale diagonalelor pătratului sunt perpendiculare.

d) Stabilește dacă dreptele suport ale diagonalelor dreptunghiului sunt perpendiculare.

15. a) Desenează un cub și notează-l ALGORITM.

b) Numește patru drepte perpendiculare pe dreapta AL.

c) Dacă AL = 3 cm, determină distanța de la punctul G la dreapta OM, distanța de la punctul A la dreapta MR și distanța de la punctul T la dreapta IL.

16. a) Desenează un paralelipiped dreptunghic și notează-l ABCDA'B'C'D'.

b) Numește perechi de drepte perpendiculare.

c) Dacă AB = 5 cm, BC = 4 cm și AA'= 6 cm, determină distanța de la punctul D la dreapta A'D', distanța de la punctul A' la dreapta D'C' și distanța de la punctul B la dreapta AA'.

17. Desenează o dreaptă *d* și patru puncte distincte două câte două, A, B, C și D, astfel încât distanța de la punctul A la dreapta *d* să fie egală cu 4 cm, distanța de la punctul B la dreapta *d* să fie egală cu 5 cm, distanța de la punctul C la dreapta *d* să fie egală cu 4 cm și distanța de la punctul D la dreapta *d* să fie egală cu 0 cm.

18. a) Construiește două drepte perpendiculare și notează-le *a* și *b*.

b) Pe dreapta *b* desenează și notează punctele A, B și C, astfel încât distanțele de la acestea la dreapta *a* să fie egale cu 2 cm, 3 cm și, respectiv, 6 cm.

c) Construiește simetricele punctelor A, B și C față de dreapta *a*.

19. a) Determină distanța de la punctul A la dreapta a, știind că $A \in a$.

b) Precizează poziția punctului B față de dreapta a, știind că distanța de la punctul B la dreapta a este egală cu 0 cm.

20. Fie a, b și c trei drepte distincte două câte două, astfel încât $a \perp c$ și $b \perp c$. Realizează desenul corespunzător și demonstrează că $a \parallel b$.

21. Fie a, b, c și d patru drepte distincte două câte două, astfel încât $a \parallel b$, $c \parallel d$ și $a \perp c$. Realizează desenul corespunzător și demonstrează că $b \perp d$.

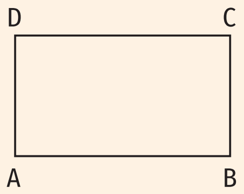


Figura 34

22. În figura 34, AB ∥ CD, AD ∥ BC și AD ⊥ DC. Determină măsurile unghiurilor BAD, ABC și BCD.

23. Fie A și B două puncte distincte. Pe perpendiculara în B pe dreapta AB se consideră un punct C. Demonstrează că mediatoarele segmentelor AB și BC sunt perpendiculare.

24. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare. Demonstrează că dreptele OA și OC sunt perpendiculare.

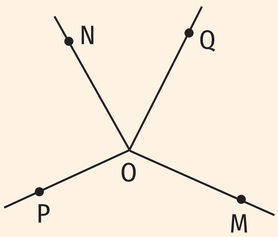


Figura 35

25. În figura 35 sunt reprezentate unghiurile obtuze MON și POQ cu laturile respectiv perpendiculare (OM ⊥ OQ și ON ⊥ OP). Demonstrează că unghiurile MON și POQ sunt congruente.

26. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente suplementare, iar semidreptele OM și, respectiv, ON sunt bisectoarele lor. Demonstrează că dreptele OM și ON sunt perpendiculare.

27. Fie a și b două drepte paralele și c o secantă a lor.

a) Demonstrează că dreptele suport ale bisectoarelor unghiurilor interne de aceeași parte a secantei formate de secanta c cu dreptele a și b sunt perpendiculare.

b) Demonstrează că dreptele suport ale bisectoarelor unghiurilor externe de aceeași parte a secantei formate de secanta c cu dreptele a și b sunt perpendiculare.

INDICAȚIE:

Se construiește o paralelă la dreapta a prin punctul de intersecție al celor două bisectoare.

28. Pe segmentul AB, cu AB = 10 cm, se consideră un punct C. Punctul D este mijlocul segmentului AC, punctul E este mijlocul segmentului CB și AD = 2 cm. Determină distanța de la punctul D la mediatoarea segmentului BC.

29. a) Construiește un unghi cu măsura egală cu 150° și notează-l AOB.

b) Construiește perpendiculara în O pe OB. Pe aceasta desenează și notează cu C și D două puncte, astfel încât $C \in \text{Int}(\sphericalangle AOB)$ și $D \in \text{Ext}(\sphericalangle AOB)$.

c) Determină măsurile unghiurilor AOC și AOD.

30. Se consideră un unghi AOB cu măsura egală cu 70° și un punct C, în interiorul acestuia, astfel încât $\sphericalangle BOC = 20°$. Semidreptele OE și OF sunt opuse semidreptelor OC și, respectiv, OB. Pe perpendiculara în O pe dreapta OA se consideră un punct D. Determină măsurile unghiurilor DOB, AOF, EOF și EOD, dacă:

a) punctele D și A sunt în același semiplan delimitat de dreapta OC;

b) punctele D și A sunt în semiplane diferite delimitate de dreapta OC.

5. Cercul
5.1. Cerc: definiție și construcție. Elemente în cerc. Unghi la centru. Măsuri

Descopăr

a) Desenează punctele O, A și B astfel încât OA = OB = 3 cm.

b) Există și alte puncte în plan situate la distanța de 3 cm față de punctul O? Câte? Ce figură geometrică formează aceste puncte?

Învăț

Cerc: definiție și construcție. Elemente în cerc

***Definiție.* Figura geometrică formată din toate punctele din plan care sunt la aceeași distanță de un punct fix (numit centru) se numește cerc.**

O rază a cercului este un segment ale cărui capete sunt centrul cercului și un punct de pe cerc (figura 1).

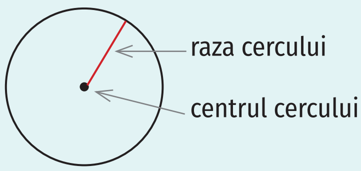


Figura 1

OBSERVAȚIE

Cuvântul *rază* are două sensuri: un segment ale cărui capete sunt centrul cercului și un punct de pe cerc sau lungimea acestui segment, din text înțelegându-se despre care sens este vorba.

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvintele *cerc* și *rază* provin din limba latină: *circus = cerc*, *radius = spiță*.

***Definiție.* Dacă O este un punct în plan și *r* este un număr rațional pozitiv, atunci cercul cu centrul în O și rază *r* este mulțimea punctelor din plan situate la distanța *r* față de O. Se notează $\mathscr{C}(O, r)$.**

Instrumentul cu care se desenează cercuri se numește compas.

Pentru a desena cercul cu centrul în punctul O și raza de 2 cm procedăm astfel (figura 2):

- Însemnăm pe foaia de hârtie punctul O, centrul cercului.
- Însemnăm pe foaia de hârtie un punct A aflat la distanța de 2 cm de punctul O.
- Fixăm vârful fix al compasului în punctul O și luăm deschiderea 2 cm (brațul mobil al compasului, cel care conține creionul, este în punctul A).
- Rotim compasul astfel încât figura construită „să se închidă” (brațul mobil al compasului pleacă din A și ajunge tot în A).

Cuvântul *centru* provine din limba latină: *centrum = centru*.

Cuvântul *compas* este compus din două cuvinte provenite din limba latină: *com = cu* și *passus = pas, deschidere*.

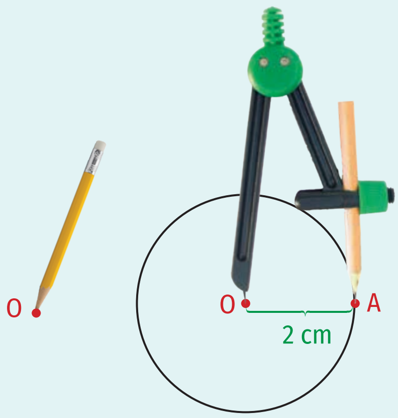


Figura 2

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *diametru* este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *dia = prin* și *metron = măsură.*

***Definiție.* Un segment ale cărui capete sunt puncte ale cercului se numește coardă** (figura 3).

***Definiție.* O coardă care conține centrul cercului se numește diametru. Capetele unui diametru se numesc puncte diametral opuse** (figura 3).

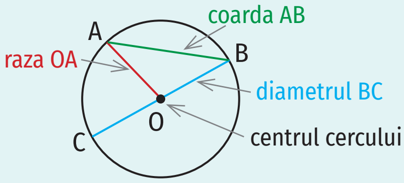


Figura 3

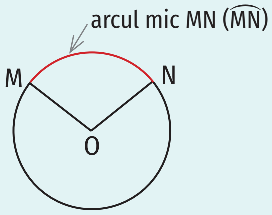


Figura 4

***Definiție.* Fie M și N două puncte ale cercului $\mathscr{C}(O, r)$ care nu sunt diametral opuse. Mulțimea formată din punctele M, N și punctele cercului care aparțin interiorului unghiului MON se numește arc mic MN (se notează $\overset{\frown}{MN}$)** (figura 4).

Mulțimea formată din punctele cercului care nu aparțin interiorului unghiului MON se numește arc mare MN (figura 5).

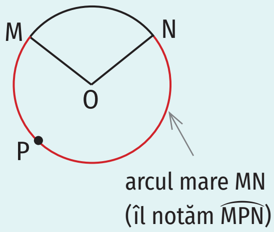


Figura 5

OBSERVAȚIE

Pentru a nu se face confuzie între arcul mic MN și arcul mare MN, pentru notarea arcului mare se folosește încă un punct al acestuia. Astfel, arcul mare MN din figura 5 se notează $\overset{\frown}{MPN}$.

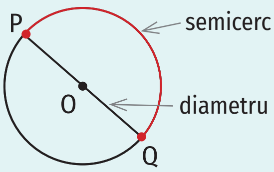


Figura 6

***Definiție.* Mulțimea formată din două puncte diametral opuse ale unui cerc și punctele cercului cuprinse între acestea se numește semicerc** (figura 6).

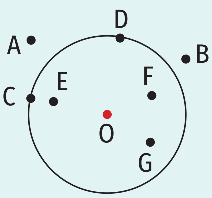


Figura 7

***Definiție.* Fiind dat un cerc de centru O și rază *r*, mulțimea punctelor M din plan pentru care OM < *r* se numește interiorul cercului, iar mulțimea punctelor P din plan pentru care OP > *r* se numește exteriorul cercului**.

În figura 7, punctele A și B aparțin exteriorului cercului, punctele C și D aparțin cercului, iar punctele E, F, G și O aparțin interiorului cercului.

Unghi la centru. Măsuri

***Definiție.* Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește unghi la centru pentru acel cerc.**

De exemplu, unghiul AOB din figura 8 este unghi la centru.

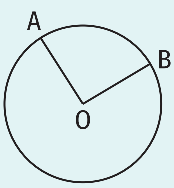


Figura 8

Măsura unui cerc este egală cu 360°, iar măsura unui semicerc este egală cu 180°.

Dacă punctele A și B nu sunt diametral opuse, atunci măsura arcului mic AB este egală cu măsura unghiului la centru AOB, iar măsura arcului mare AB este egală cu 360° – ∢AOB.

Exerciții rezolvate

1. În figura 9 sunt reprezentate trei cercuri cu centrul O și razele egale cu 2 cm, 3 cm și, respectiv, 6 cm și punctele A, B, C, D, E și F astfel încât $A, D \in \mathscr{C}(O, 2\text{ cm})$, $B, E \in \mathscr{C}(O, 3\text{ cm})$, $C, F \in \mathscr{C}(O, 6\text{ cm})$, iar punctele O, A, B, C și, respectiv, O, D, E, F sunt coliniare.

a) Determină lungimile segmentelor AB și BC.

b) Determină măsurile arcelor mici CF și AD, știind că arcul mic BE are măsura egală cu 70°.

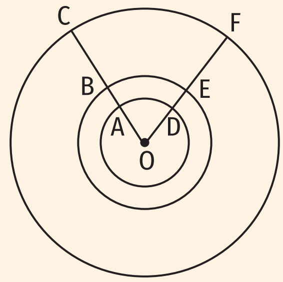


Figura 9

Rezolvare:

a) $A \in \mathscr{C}(O, 2\text{ cm}) \Rightarrow OA = 2\text{ cm}$; $B \in \mathscr{C}(O, 3\text{ cm}) \Rightarrow OB = 3\text{ cm}$; $C \in \mathscr{C}(O, 6\text{ cm}) \Rightarrow OC = 6\text{ cm}$

$AB = OB - OA = 3\text{ cm} - 2\text{ cm} = 1\text{ cm}$, $BC = OC - OB = 6\text{ cm} - 3\text{ cm} = 3\text{ cm}$.

b) $\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{BE} = 70^\circ \\ \overset{\frown}{BE} = \sphericalangle BOE\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BOE = 70^\circ$

$\overset{\frown}{CF} = \sphericalangle COF \Rightarrow \overset{\frown}{CF} = 70^\circ$; $\overset{\frown}{AD} = \sphericalangle AOD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 70^\circ$.

2. În figura 10, punctele A, B, C, D și E aparțin cercului de centru O și măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD, DOE și EOA sunt direct proporționale cu numerele 4, 5, 6, 7 și, respectiv, 8.

a) Determină măsurile arcelor mici AB, BC și CE.

b) Demonstrează că punctele A, O și D sunt coliniare.

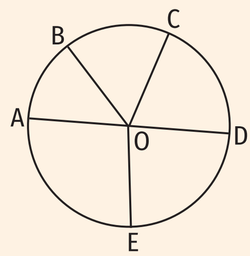


Figura 10

Rezolvare:

a) Măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD, DOE și EOA sunt direct proporționale cu numerele 4, 5, 6, 7 și 8. Atunci, $\dfrac{\sphericalangle AOB}{4} = \dfrac{\sphericalangle BOC}{5} = \dfrac{\sphericalangle COD}{6} = \dfrac{\sphericalangle DOE}{7} = \dfrac{\sphericalangle EOA}{8} =$

$\dfrac{\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA}{4 + 5 + 6 + 7 + 8} = \dfrac{360^\circ}{30} = 12^\circ$

Obținem: $\sphericalangle AOB = 4 \cdot 12^\circ = 48^\circ$, $\sphericalangle BOC = 5 \cdot 12^\circ = 60^\circ$, $\sphericalangle COD = 6 \cdot 12^\circ = 72^\circ$, $\sphericalangle DOE = 7 \cdot 12^\circ = 84^\circ$ și $\sphericalangle EOA = 8 \cdot 12^\circ = 96^\circ$.

$\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB = 48^\circ$, $\overset{\frown}{BC} = \sphericalangle BOC = 60^\circ$, $\overset{\frown}{CE} = \sphericalangle COE = \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE = 72^\circ + 84^\circ = 156^\circ$.

b) $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOE + \sphericalangle DOE = 96^\circ + 84^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Punctele A, O și D sunt coliniare.

Aplic

1. a) Desenează un punct și notează-l cu M.

b) Construiește figura geometrică formată din punctele din plan aflate la distanța de 2,5 cm de punctul M.

2. Numește elementele cercului (centru, raze, coarde, diametre, arce) din figura 11.

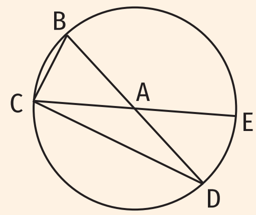


Figura 11

3. Completează casetele cu **A**, dacă propoziția este adevărată și cu **F**, dacă propoziția este falsă.

a) Dacă $M \in \mathscr{C}(O, r)$, atunci segmentul OM este o coardă a cercului. ☐

b) Dacă $A, B \in \mathscr{C}(O, r)$ și A, O, B sunt coliniare, atunci AB este rază a cercului. ☐

c) Oricare coardă a unui cerc conține exact două puncte ale cercului. ☐

d) Măsura unui cerc este egală cu 180°. ☐

4. Cercul din mijlocul unui teren de fotbal are centrul în punctul O și raza egală cu 9,15 m. Cinci jucători se află pe terenul de fotbal în punctele distincte A, B, C, D și E, astfel încât OA = OB = OC = 9,15 m. Punctele A, O și B sunt coliniare, OD = 5 m și OE = 9,5 m.

a) Precizează poziția fiecărui jucător față de cercul de la mijlocul terenului.

b) Determină distanța dintre jucătorii aflați în punctele A și B.

5. Determină:

i) diametrul unui cerc cu raza egală cu: a) 2 cm; b) 1,4 cm; c) 3,25 cm.

ii) raza unui cerc cu diametrul egal cu: a) 10 cm; b) 7 cm; c) 1,3 cm.

6. Determină raza unei roți de bicicletă cu diametrul egal cu 60 cm.

7. Se consideră punctele A și B, astfel încât AB = 4 cm.

a) Desenează cercul cu centrul în A și raza egală cu 4 cm și cercul cu centrul în B și raza egală cu 4 cm.

b) Dreapta AB intersectează cele două cercuri desenate la punctul a) în punctele M, și, respectiv, N. Determină lungimea segmentului MN.

8. Desenează un cerc cu raza egală cu 2 cm și o coardă a acestuia cu lungimea egală cu 4 cm.

9. i) Fie A și B două puncte distincte pe cercul de centru O și rază r ($r > 0$). Determină măsura unghiului AOB dacă:

a) $\overset{\frown}{AB} = 86°$; b) $\overset{\frown}{AB} = 103°$; c) $\overset{\frown}{AB} = 18°$.

ii) Fie A și B două puncte distincte pe cercul de centru O și rază r ($r > 0$). Măsura arcului mare AB este egală cu x. Determină măsura unghiului AOB dacă:

a) $x = 240°$; b) $x = 285°$; c) $x = 315°$.

10. a) Construiește un cerc cu raza egală cu 2 cm și notează cu O centrul acestuia.

b) Pe cercul construit la punctul a), construiește punctele A, B, C și D, astfel încât punctele A și B să fie diametral opuse, punctele C și D să fie de o parte și de alta a dreptei AB, $\overset{\frown}{AC} = 60°$ și $\overset{\frown}{DB} = 30°$.

c) Determină măsurile unghiurilor AOB, BOC și AOD.

d) Determină lungimea segmentului AB.

11. Fie O, A și B trei puncte, astfel încât punctele A și B aparțin unui cerc cu centrul în O.

a) Determină măsura unghiului AOB, știind că măsura arcului mic AB este egală cu 25% din măsura cercului.

b) Determină măsura unghiului AOB, știind că măsura arcului mare AB este egală cu 80% din măsura cercului.

12. Fie O un punct. Pe un cerc cu centrul în punctul O se consideră punctele A, B și C, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 75°$ și $\overset{\frown}{AC} = 105°$.

a) Determină măsura unghiului BOC dacă punctul B aparține interiorului unghiului AOC.

b) Demonstrează că, dacă unghiurile AOB și AOC sunt adiacente, atunci punctele B, O și C sunt coliniare.

13. Fie O, A și B trei puncte, astfel încât punctele A și B aparțin cercului cu centrul în punctul O și raza egală cu 4 cm, iar AB = 8 cm. Determină măsura unghiului AOB.

14. Fie O un punct. Pe un cerc cu centrul în punctul O se consideră punctele A, B și C, astfel încât $\sphericalangle AOB = 60°$ și $\overset{\frown}{BC} = 3 \cdot \overset{\frown}{AB}$. Demonstrează că punctele B și C sunt diametral opuse.

15. Calculează măsura unghiului format de orarul și minutarul unui ceas când acestea indică ora 2.

16. În figura 12, AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, iar măsura unghiului AOC este egală cu 50°. Determină măsura arcului mic BD.

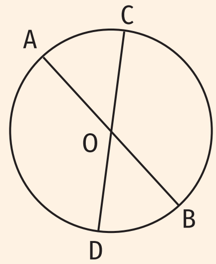


Figura 12

17. În figura 13, punctele A, B, C și D aparțin cercului de centru O, astfel încât punctele A, O și C sunt coliniare, ∢AOD = 70°, iar semidreapta OD e bisectoarea unghiului AOB. Determină măsurile arcelor mici AD, AB, BC și măsura arcului mare CD.

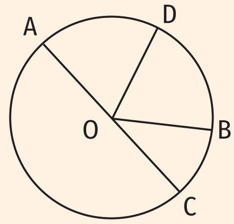


Figura 13

18. Punctele A, B, C, D, E și F sunt situate, în această ordine, pe un cerc cu centrul în punctul O, astfel încât arcele mici AB, BC, CD, DE, EF și FA au aceeași măsură.

a) Determină măsurile unghiurilor AOB și COE.

b) Demonstrează că punctele A, O și D sunt coliniare.

c) Demonstrează că punctele B și E sunt diametral opuse.

19. Fie A, B și C trei puncte pe cercul cu centrul în O și raza egală cu 3 cm, astfel încât punctele A și B sunt diametral opuse și ∢AOC = 80°.

a) Determină măsura arcului mic AC.

b) Determină lungimea coardei AB.

c) Dacă M și N sunt două puncte pe cercul cu centrul în O și raza egală cu 3 cm, astfel încât dreapta MN este mediatoarea segmentului AB, iar punctele C și M sunt situate de aceeași parte a dreptei OA, determină măsura arcelor mici CM și AM și lungimea coardei MN.

20. Fie AB și CD două diametre ale unui cerc, astfel încât AB ⊥ CD.

a) Demonstrează că dreapta AB e mediatoarea segmentului CD.

b) Demonstrează că punctele A și B sunt simetrice față de dreapta CD.

21. În figura 14 sunt reprezentate două cercuri cu centrele în punctele B și, respectiv, C. Punctele A, B, C și D sunt coliniare și BC = 3 cm. Determină lungimea segmentului AD.

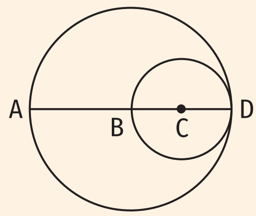


Figura 14

22. În figura 15 sunt reprezentate două cercuri cu centrul O și raze egale cu 2 cm și, respectiv, 4 cm. Punctele A și B aparțin cercului cu centrul O și raza egală cu 2 cm, iar punctele C și D aparțin cercului cu centrul O și raza egală cu 4 cm, astfel încât punctele O, A, C și, respectiv, O, B, D sunt coliniare.

a) Determină lungimea segmentului AC.

b) Determină măsura arcului mic CD, știind că $\overset{\frown}{AB} = 70°$.

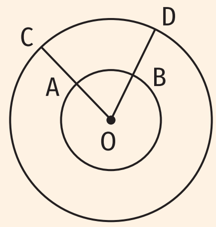


Figura 15

23. În figura 16, AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, CE este o coardă, astfel încât CE ∥ AB și măsura unghiului OCE este egală cu 40°. Determină măsura arcului mic BD.

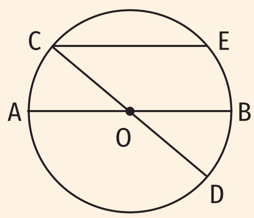
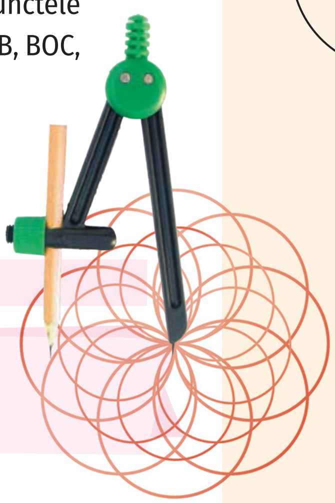


Figura 16

24. Fie O un punct. Pe un cerc cu centrul în punctul O se consideră punctele A, B, C și D în această ordine astfel încât măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD și DOA sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5 și 6.

a) Determină măsura arcului mic AB și măsura arcului mare BC.

b) Demonstrează că punctele B, O și D sunt coliniare.



Portofoliu

Realizează o mandală folosind numai cercuri.
Colorează-o cum dorești, apoi adaug-o la portofoliul tău.

5.2. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri

Descopăr

1. a) Desenează un cerc cu raza egală cu 3 cm și notează cu O centrul acestuia.
b) Construiește o dreaptă *a*, care intersectează cercul în două puncte, o dreaptă *b*, care intersectează cercul într-un punct și o dreaptă *c*, care nu intersectează cercul.
c) Măsoară distanța de la centrul cercului la dreptele *a*, *b* și *c* și compară-le cu raza cercului. Ce observi?

2. a) Desenează două cercuri care au un punct comun și interioarele disjuncte.
b) Desenează două cercuri care au un punct comun, iar interioarele lor au puncte comune.
c) Desenează două cercuri care au două puncte comune.
d) Desenează două cercuri care nu au puncte comune, iar interioarele lor sunt disjuncte.
e) Desenează două cercuri care nu au puncte comune, au centre diferite, iar interioarele lor au puncte comune.
f) Măsoară razele cercurilor desenate și distanțele între centrele acestora pentru fiecare dintre punctele a) - e).
g) Compară suma lungimilor razelor cercurilor desenate la punctele a), c) și d) cu distanța dintre centrele acestora.
h) Compară diferența lungimilor razelor cercurilor desenate la punctele b), c) și e) cu distanța dintre centrele acestora.

INDICAȚIE:

Din raza mai mare se scade raza mai mică.

Învăț

Pozițiile unei drepte față de un cerc

Fie un cerc de centru O și rază r (r > 0) și o dreaptă *d*.

a) Dacă $d(O, d) < r$, atunci dreapta *d* și cercul au exact două puncte comune. Dreapta *d* se numește **dreptă secantă cercului** (figura 1).

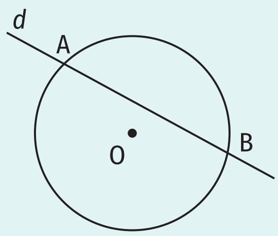


Figura 1
(Dreapta *d* este dreaptă secantă cercului.)

b) Dacă $d(O, d) = r$, atunci dreapta *d* și cercul au exact un punct comun. Dreapta *d* se numește **dreaptă tangentă cercului** (figura 2).

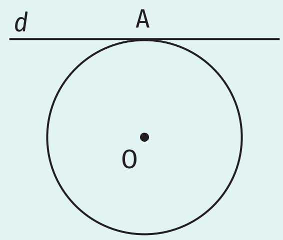


Figura 2
(Dreapta *d* este dreaptă tangentă cercului.)

c) Dacă $d(O, d) > r$, atunci dreapta *d* și cercul nu au puncte comune. Dreapta *d* se numește **dreaptă exterioară cercului** (figura 3).

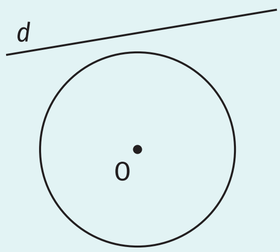


Figura 3
(Dreapta *d* este dreaptă exterioară cercului.)

Pozițiile relative a două cercuri

Fie două cercuri de centre O_1 și O_2 și raze r_1 și, respectiv, r_2, $r_1 > r_2$.

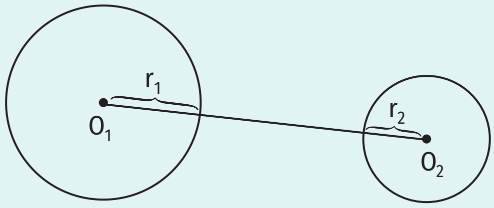


Figura 4 (Cercuri exterioare)

a) Dacă $r_1 + r_2 < O_1O_2$, atunci cercurile nu au niciun punct comun, iar interioarele lor sunt disjuncte. Aceste cercuri se numesc **cercuri exterioare** (figura 4).

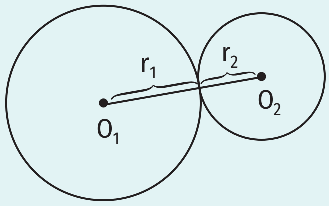


Figura 5 (Cercuri tangente exterioare)

b) Dacă $r_1 + r_2 = O_1O_2$, atunci cercurile au un singur punct comun, iar interioarele lor sunt disjuncte. Aceste cercuri se numesc **cercuri tangente exterioare** (figura 5).

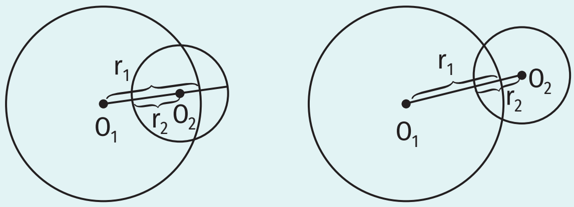


Figura 6 (Cercuri secante)

c) Dacă $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, atunci cercurile au două puncte comune. Aceste cercuri se numesc **cercuri secante** (figura 6).

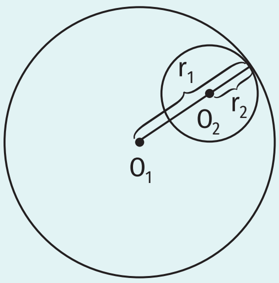


Figura 7 (Cercuri tangente interioare)

d) Dacă $r_1 - r_2 = O_1O_2$, atunci cercurile au un singur punct comun și toate punctele din interiorul cercului cu raza r_2 aparțin interiorului cercului cu raza r_1. Aceste cercuri se numesc **cercuri tangente interioare** (figura 7).

e) Dacă $r_1 - r_2 > O_1O_2$, atunci cercurile nu au niciun punct comun și toate punctele din interiorul cercului cu raza r_2 aparțin interiorului cercului cu raza r_1. Aceste cercuri se numesc **cercuri interioare** (figura 8).

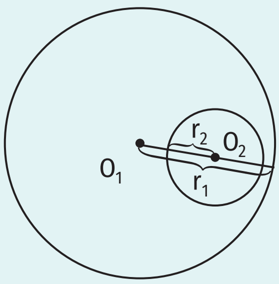


Figura 8 (Cercuri interioare)

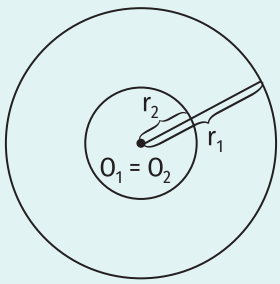


Figura 9 (Cercuri concentrice)

f) Dacă $O_1 = O_2$ ($O_1O_2 = 0$), atunci cercurile nu au niciun punct comun și toate punctele din interiorul cercului cu raza r_2 aparțin interiorului cercului cu raza r_1. Aceste cercuri se numesc **cercuri concentrice** (figura 9).

Exercițiu rezolvat

Se consideră cercurile cu centrele O și Q și raze R și, respectiv, r. Precizează poziția celor două cercuri în fiecare caz:

a) R = 4 cm, r = 2 cm, OQ = 6 cm;

b) R = 1 cm, r = 4 cm, OQ = 4 cm;

c) R = 5 cm, r = 4 cm, OQ = 0,5 cm;

d) R = 6 cm, r = 3 cm, OQ = 3 cm.

Rezolvare:

a) $\left.\begin{array}{r} R + r = 4 + 2 = 6 \text{ cm} \\ OQ = 6 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow R + r = OQ \Rightarrow$ Cercurile sunt tangente exterioare.

b) $\left.\begin{array}{r} R + r = 1 + 4 = 5 \text{ cm} \\ r - R = 4 - 1 = 3 \text{ cm} \\ OQ = 4 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow r - R < OQ < R + r \Rightarrow$ Cercurile sunt secante.

c) $\left.\begin{array}{r} R - r = 5 - 4 = 1 \text{ cm} \\ OQ = 0{,}5 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow R - r > OQ \Rightarrow$ Cercurile sunt interioare.

d) $\left.\begin{array}{r} R - r = 6 - 3 = 3 \text{ cm} \\ OQ = 3 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow R - r = OQ \Rightarrow$ Cercurile sunt tangente interioare.

Aplic

1. Fie un punct O și o dreaptă *a*. Realizează desenele și stabilește poziția dreptei *a* față de $\mathscr{C}$(O, 3 cm) în fiecare dintre cazurile următoare:

a) d(O, *a*) = 5 cm; c) d(O, *a*) = 2,5 cm; e) d(O, *a*) = 2 cm;

b) d(O, *a*) = 1 cm; d) d(O, *a*) = 3,4 cm; f) d(O, *a*) = 3 cm.

2. Desenează un cerc cu centrul într-un punct O și raza egală cu 2 cm. Fie A un punct care aparține acestui cerc.

a) Construiește două drepte care trec prin punctul A și sunt secante cercului.

b) Construiește tangenta la cerc care conține punctul A.

3. a) Desenează un punct A și patru cercuri cărora le aparține punctul A.

b) Câte cercuri situate în planul caietului trec prin A?

4. Fie A și B două puncte distincte. Desenează două cercuri cu centrele în punctele A și B, știind că ele sunt:

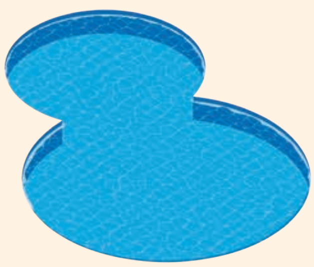
a) exterioare; c) interioare; e) secante;

b) tangente exterioare; d) tangente interioare; f) concentrice.

5. Fie A și B două puncte astfel încât AB = 5 cm. Construiește cercurile cu centrele în punctele A și B și cu razele r_1 și, respectiv, r_2 și precizează poziția cercurilor unul față de celălalt în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $r_1 = 2{,}4$ cm, $r_2 = 2{,}6$ cm; c) $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 6$ cm; e) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 7$ cm;

b) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm; d) $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm; f) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 9$ cm.



6. Fie $\mathscr{C}_1(M, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(N, r_2)$ $(r_1 > 0, r_2 > 0)$ două cercuri secante și $\mathscr{C}_1(M, r_1) \cap \mathscr{C}_2(N, r_2) = \{A, B\}$. Demonstrează că MN < AM + AN.

7. Fie $\mathscr{C}_1(A, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(B, r_2)$ două cercuri tangente exterioare $(r_1 > 0, r_2 > 0)$. Demonstrează că AB = AM + NB, unde $M \in \mathscr{C}_1(A, r_1)$, $N \in \mathscr{C}_2(B, r_2)$ și $M \neq N$.

8. Fie cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$, tangente exterioare. Determină r_1, știind că $O_1O_2 = 7$ cm și $r_2 = 4{,}2$ cm.

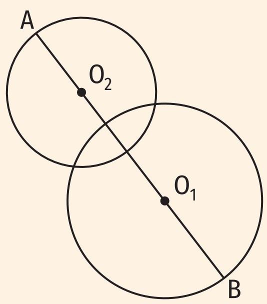


Figura 10

9. Cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ sunt secante. Dreapta O_1O_2 intersectează cercul $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ în punctul A și cercul $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ în punctul B. Determină lungimea segmentului AB, știind că $O_1O_2 = 9$ cm, $r_1 = 8$ cm și $r_2 = 6$ cm.

10. În figura 10 este reprezentată schematic piscina din imaginea de mai sus. Care este distanța dintre punctele A și B, dacă cercul cu centrul O_1 are diametrul egal cu 10 m, cercul cu centrul O_2 are diametrul egal cu 6 m, distanța dintre centrele celor două cercuri este egală cu 7 m, iar punctele A, O_1, O_2 și B sunt coliniare?

Exerciții recapitulative

1. Fie O și Q două puncte astfel încât OQ = 3 cm. Construiește cercurile cu centrele în punctele O și Q și razele r_1 și, respectiv, r_2 și precizează poziția cercurilor unul față de celălalt în fiecare dintre cazurile următoare:
a) r_1 = 1 cm, r_2 = 5 cm; b) r_1 = 4 cm, r_2 = 6 cm; c) r_1 = 1 cm, r_2 = 1 cm.

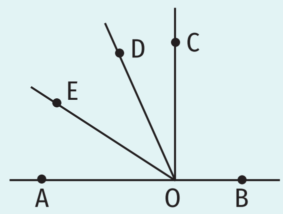


Figura 1

2. În figura 1 sunt reprezentate punctele O, A, B, C, D și E, astfel încât punctele A, O și B sunt coliniare, OC ⊥ AB, ∢COD = 24° și semidreapta OE e bisectoarea unghiului AOD. Determină măsura unghiului AOE.

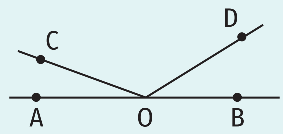


Figura 2

3. În figura 2 sunt reprezentate punctele O, A, B, C și D, astfel încât punctele A, O și B sunt coliniare, ∢AOD = 148° și ∢BOC = 160°. Determină măsura unghiului COD.

4. Semidreptele OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor adiacente AOB și BOC. Determină măsurile unghiurilor AOB și AOC, știind că ∢AON = 81° și ∢BON = 31°.

5. Fie AOB și BOC două unghiuri cu măsurile egale cu 76° și, respectiv, 42°. Realizează desenul corespunzător și calculează măsura unghiului AOC dacă:
a) unghiurile AOB și BOC sunt adiacente;
b) unghiurile AOB și BOC nu sunt adiacente.

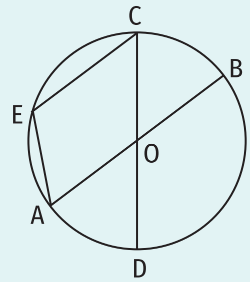


Figura 3

6. În figura 3, AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, astfel încât măsura arcului mic AD este egală cu 53°. Punctul E aparține cercului astfel încât ∢CEA + ∢OAE = 180°. Determină măsura arcului BD și măsura unghiului ECO.

7. Fie OA și OC două drepte perpendiculare și B un punct în interiorul unghiului AOC, astfel încât măsura unghiului AOB este de trei ori mai mică decât măsura unghiului BOC.
a) Determină măsura unghiului BOC.
b) Determină măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB și BOC.
c) Determină măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB și AOC.

8. Determină măsurile a patru unghiuri formate în jurul unui punct, știind că sunt direct proporționale cu 2, 3, 4 și 6.

9. Măsurile a două unghiuri adiacente sunt invers proporționale cu 0,(3) și 0,25. Știind că bisectoarele celor două unghiuri formează un unghi cu măsura egală cu 84°, determină măsurile celor două unghiuri.

10. Fie AOB un unghi cu măsura egală cu 40° și OC bisectoarea acestuia. Determină măsura unghiului COD, unde D este un punct pe semidreapta opusă semidreptei OB.

11. Fie MON și NOP două unghiuri, astfel încât ∢MON = 54° și ∢NOP = 136°. Determină măsura unghiului MOP dacă:
a) Unghiurile MON și NOP sunt adiacente;
b) Unghiurile MON și NOP nu sunt adiacente.

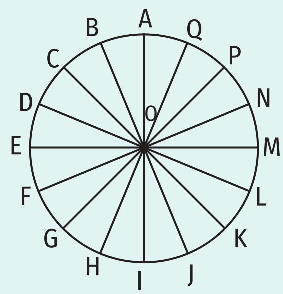


Figura 4

12. În figura 4 este reprezentată schematic dispunerea locuințelor dintr-o localitate din Danemarca. Punctele A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P și Q împart cercul în arce care au aceeași măsură.
a) Demonstrează că unghiurile formate în jurul punctului O sunt congruente.
b) Determină măsurile unghiurilor AOQ, AOC și POK.
c) Determină măsurile arcelor mici KM, MP și QE.
d) Determină măsurile arcelor mari CG și PJ.
e) Demonstrează că punctele Q și H sunt diametral opuse.
f) Demonstrează că punctele B, O și J sunt coliniare.
g) Demonstrează că dreptele OF și OJ sunt perpendiculare.

Timp de lucru: 40 de minute **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I **40 puncte**

15 puncte (5 p.) (5 p.) (5 p.)	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.* **A.** Dacă $\sphericalangle AOB = 81°$, atunci măsura complementului unghiului AOB este egală cu: a) 99°; b) 81°; c) 9°; d) 90°. **B.** Dacă punctele A, O și B sunt coliniare, iar punctele A și B aparțin cercului de centru O și rază 5 cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu: a) 5 cm; b) 10 cm; c) 2,5 cm; d) 25 cm. **C.** În jurul unui punct s-au format cinci unghiuri congruente. Măsura unuia dintre acestea este egală cu: a) 360°; b) 36°; c) 60°; d) 72°.
20 puncte (5 p.) (5 p.) (5 p.) (5 p.)	**2.** *Scrie pe foaie numai rezultatele.* **A.** Dacă $\sphericalangle AOB = 44°$, $\sphericalangle AOC = 63°$, iar unghiurile AOB și BOC sunt adiacente, atunci măsura unghiului BOC este egală cu ...°. **B.** Dacă punctul P este simetricul punctului M față de dreapta *a* ($M \notin a$), atunci dreapta *a* este ... segmentului MP. **C.** Punctele M și N aparțin unui cerc cu centrul O, astfel încât $\sphericalangle MON = 35°$. Măsura arcului mare MN este egală cu ...° **D.** Dacă OB este bisectoarea unghiului AOC și $\sphericalangle AOB = 25°$, atunci măsura unghiului AOC este egală cu: ...°.
5 puncte	**3.** *Scrie pe foaie litera corespunzătoare răspunsului corect.* Afirmația „Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă." este: a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea **50 puncte**

Scrie rezolvările complete.

15 puncte	**1.** Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente suplementare. Semidreapta OM e bisectoarea unghiului AOB, iar semidreapta ON este semidreapta opusă acesteia. Determină măsurile unghiurilor BOC și CON, știind că $\sphericalangle AOM = 27°$.
15 puncte (5 p.) (10 p.)	**2.** Fie ABC un unghi cu măsura egală cu 60°. Paralela dusă prin punctul A la dreapta BC intersectează paralela dusă prin punctul C la dreapta AB în punctul M. **A.** Realizează desenul corespunzător. **B.** Determină măsurile unghiurilor BAM și AMC.
20 puncte (10 p.) (10 p.)	**3.** Fie O un punct. M, N și P sunt trei puncte care aparțin cercului cu centrul în O și diametrul egal cu 8 cm, astfel încât punctele M și N sunt diametral opuse și măsura arcului mic NP este egală cu $\frac{1}{6}$ din măsura cercului. **A.** Determină lungimea segmentului OP. **B.** Determină măsura unghiului POM.

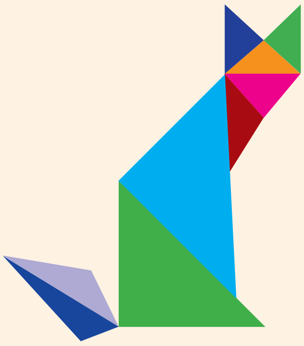
Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Pot să utilizez instrumentele geometrice pentru a construi diferite configurații geometrice.					
Pot să aplic criteriile de paralelism în situații practice.					
Pot să identific și să reprezint elementele unui cerc.					

Unitatea 6

Triunghiul



1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare, perimetru. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi

Descopăr

1. Cum se numește figura geometrică folosită în realizarea desenului alăturat?
2. Identifică în desen unghiuri ascuțite, unghiuri drepte și unghiuri obtuze.
3. Realizează un desen în care să folosești numai figura geometrică identificată la exercițiul 1.

Învăț

Triunghiul: definiție, elemente, clasificare, perimetru

***Definiție.* Fiind date punctele necoliniare A, B și C, se numește triunghi cu vârfurile A, B, C figura geometrică ce rezultă din reuniunea mulțimii formate din punctele A, B, C cu mulțimea formată din segmentele AB, AC și BC. Se notează ΔABC.**

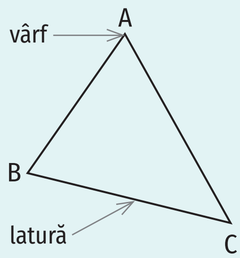


Figura 1

În figura 1 este desenat un triunghi notat ABC. Elementele triunghiului ABC sunt:

- laturile triunghiului (AB ∪ {A, B}, BC ∪ {B, C}, AC ∪ {A, C}, unde AB, AC și BC sunt segmente),
- unghiurile triunghiului (∢A, ∢B, ∢C).

Punctele A, B și C din figura 1 se numesc vârfurile triunghiului ABC.

ATENȚIE!

Unghiurile unui triunghi notat ABC se citesc folosind o singură literă numai dacă nu se produce confuzie, caz în care acestea vor fi citite astfel: ∢A va fi citit ∢BAC sau ∢CAB, ∢B va fi citit ∢ABC sau ∢CBA, ∢C va fi citit ∢BCA sau ∢ACB.

Fiind dat un triunghi ABC, putem spune că:

1. Unghiul A se opune laturii BC, unghiul B se opune laturii AC, unghiul C se opune laturii AB.
2. Latura BC se opune unghiului A, latura AC se opune unghiului B, latura AB se opune unghiului C.
3. Latura BC este alăturată unghiurilor B și C, latura AC este alăturată unghiurilor A și C, latura AB este alăturată unghiurilor A și B.
4. Unghiul A este cuprins între laturile AB și AC, unghiul B este cuprins între laturile BC și BA, unghiul C este cuprins între laturile CA și CB.

Un punct aparține interiorului unui triunghi dacă aparține interiorului fiecăruia dintre unghiurile acestuia.

Un punct aparține exteriorului unui triunghi dacă se află în planul acestuia, dar nu aparține nici interiorului triunghiului, nici vreunei laturi a acestuia.

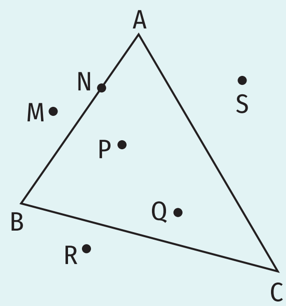


Figura 2

EXEMPLU:

În figura 2, punctele P și Q aparțin interiorului triunghiului ABC, punctele M, R și S aparțin exteriorului triunghiului ABC, iar punctul N nu aparține nici interiorului, nici exteriorului triunghiului ABC (punctul N aparține laturii AB).

După măsurile unghiurilor sale, un triunghi poate fi:

- **ascuțitunghic** – are toate unghiurile ascuțite (figura 3),
- **dreptunghic** – are un unghi drept (figura 4),
- **obtuzunghic** – are un unghi obtuz (figura 5).

Ne amintim că un unghi ascuțit are măsura mai mică decât 90°, un unghi drept are măsura egală cu 90°, iar un unghi obtuz are măsura mai mare decât 90°.

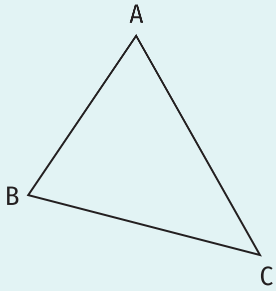


Figura 3

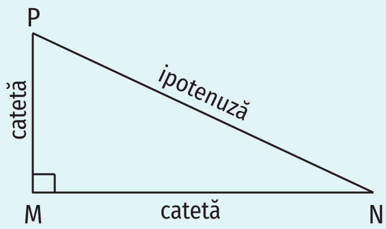


Figura 4

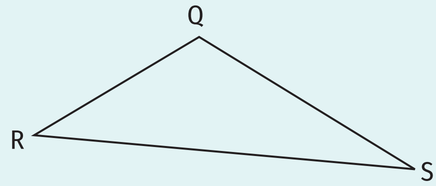


Figura 5

EXEMPLE:

1. Triunghiul ABC din figura 3 este triunghi ascuțitunghic ($\sphericalangle A < 90^\circ$, $\sphericalangle B < 90^\circ$, $\sphericalangle C < 90^\circ$).

2. Triunghiul MNP din figura 4 este triunghi dreptunghic ($\sphericalangle M = 90^\circ$). În acest caz, laturile MN și MP se numesc **catete**, iar latura NP (latura opusă unghiului drept) se numește **ipotenuză**.

3. Triunghiul QRS din figura 5 este triunghi obtuzunghic ($\sphericalangle Q > 90^\circ$).

După lungimile laturilor, un triunghi poate fi:

- **oarecare** sau **scalen** – oricare două laturi au lungimi diferite (figura 6),
- **isoscel** – are două laturi congruente (figura 7),
- **echilateral** – are toate laturile congruente (figura 8).

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *scalen* provine din limba greacă: *skalenos* = *șchiop*.

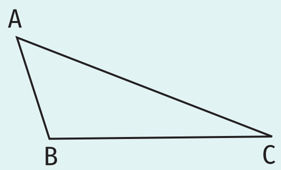


Figura 6

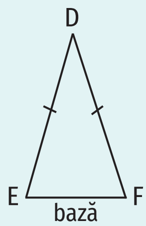


Figura 7

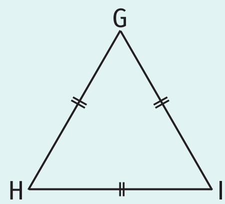


Figura 8

EXEMPLE:

1. Triunghiul ABC din figura 6 este triunghi oarecare ($AB \not\equiv AC$, $AB \not\equiv BC$, $AC \not\equiv BC$).

2. Triunghiul DEF din figura 7 este triunghi isoscel ($DE \equiv DF$, $DE \not\equiv EF$). În acest caz, latura EF se numește **baza triunghiului isoscel** DEF.

3. Triunghiul GHI din figura 8 este triunghi echilateral ($GH \equiv HI \equiv IG$).

OBSERVAȚIE

Dacă dorim, putem marca pe desen laturile congruente ale unui triunghi folosind același număr de liniuțe (figurile 7 și 8).

Perimetrul unui triunghi este suma lungimilor laturilor acestuia. Se notează $P_{\Delta ABC}$.

$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$$

EXEMPLU:

Perimetrul triunghiului ABC cu AB = 2 cm, AC = 8 cm și BC = 7 cm este egal cu:

2 cm + 8 cm + 7 cm = 17 cm. Așadar, $P_{\Delta ABC} = 17$ cm.

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

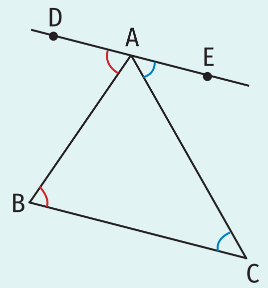


Figura 9

Se consideră triunghiul oarecare ABC. Prin vârful A al triunghiului ducem paralela la dreapta BC, pe care considerăm punctele D și E, de o parte și de alta a dreptei AB, ca în figura 9.

Unghiul DAE este unghi alungit și $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle EAC$.

Astfel, $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle EAC = 180°$. (1)

Unghiurile DAB și ABC sunt congruente, fiind unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele DE și BC cu secanta AB. (2)

Unghiurile EAC și ACB sunt congruente, fiind unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele DE și BC cu secanta AC. (3)

Din (1), (2) și (3) obținem $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB = 180°$.

Acest rezultat poate fi formulat astfel:

Teorema 1. **Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.**

Consecințe:

1. Un triunghi are cel mult un unghi drept.

2. Un triunghi are cel mult un unghi obtuz.

3. Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare.

Unghi exterior unui triunghi

Definiție. **Un unghi adiacent și suplementar cu unul dintre unghiurile unui triunghi se numește unghi exterior triunghiului.**

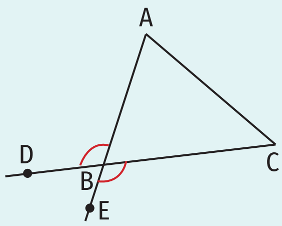


Figura 10

EXEMPLU:

În figura 10, unghiurile ABD și EBC sunt unghiuri exterioare triunghiului ABC (fiecare dintre ele este unghi adiacent și suplementar cu unghiul ABC).

OBSERVAȚIE

Un triunghi are 6 unghiuri exterioare.

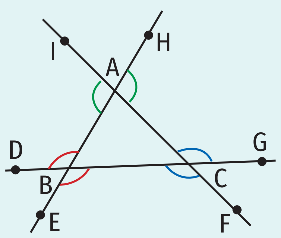


Figura 11

De exemplu, unghiurile exterioare triunghiului ABC din figura 11 sunt: $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle EBC$, $\sphericalangle BCF$, $\sphericalangle GCA$, $\sphericalangle CAH$, $\sphericalangle IAB$.

În figura 11, unghiurile ABD și ABC sunt adiacente suplementare, deci $\sphericalangle ABD + \sphericalangle ABC = 180°$.

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, așadar
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB = 180°$.

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD &= 180° \\ \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB &= 180° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB$$

Acest rezultat poate fi formulat astfel:

Teorema 2. **Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente cu el.**

EXEMPLU:

În figura 11,

$\sphericalangle IAB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$,

$\sphericalangle GCA = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC$.

Exerciții rezolvate

1. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu 115°, iar măsura unui unghi al triunghiului este egală cu 44°39′. Determină măsurile celorlalte două unghiuri.

Rezolvare:

Construim un triunghi pe care îl notăm ABC. Presupunem că $\sphericalangle ABC = 44^\circ 39'$. În acest caz, unghiul exterior al triunghiului ABC, care are măsura egală cu 115°, nu poate avea vârful în punctul B (deoarece nu e suplementar cu unghiul ABC).

Pe semidreapta CA fixăm un punct D, astfel încât punctul A să aparțină segmentului CD și presupunem că $\sphericalangle DAB = 115^\circ$ (figura 12).

Deoarece unghiul DAB este unghi exterior triunghiului ABC, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$.

$115^\circ = 44^\circ 39' + \sphericalangle ACB \Rightarrow \sphericalangle ACB = 115^\circ - 44^\circ 39' = 70^\circ 21'$

Unghiurile BAD și BAC sunt suplementare, deci $\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BAD = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

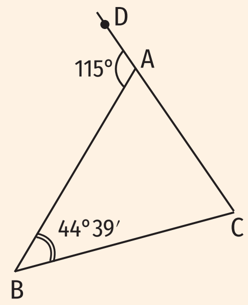


Figura 12

2. Stabilește natura triunghiului ABC, știind că măsurile unghiurilor sale sunt invers proporționale cu 0,(3); 0,2 și $\frac{1}{8}$.

Rezolvare:

Presupunem că măsurile unghiurilor A, B și C sunt invers proporționale cu 0,(3); 0,2 și $\frac{1}{8}$.

Atunci, $0,(3) \cdot (\sphericalangle A) = 0,2 \cdot (\sphericalangle B) = \frac{1}{8} \cdot (\sphericalangle C) \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot (\sphericalangle A) = \frac{1}{5} \cdot (\sphericalangle B) = \frac{1}{8} \cdot (\sphericalangle C) \Rightarrow$

$\frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{5} = \frac{\sphericalangle C}{8} = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C}{3+5+8} = \frac{180^\circ}{16} = 11^\circ 15'$.

Obținem: $\sphericalangle A = 11^\circ 15' \cdot 3 = 33^\circ 45'$; $\sphericalangle B = 11^\circ 15' \cdot 5 = 56^\circ 15'$; $\sphericalangle C = 11^\circ 15' \cdot 8 = 90^\circ$.

Triunghiul ABC are un unghi cu măsura egală cu 90°, deci este dreptunghic.

Aplic

1. i) Construiește un triunghi și notează-l GHI.

ii) Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Latura opusă unghiului GHI este ...

b) Unghiul cuprins între laturile GH și GI este unghiul ...

c) Unghiul opus laturii IH este unghiul ...

d) Latura alăturată unghiurilor GHI și GIH este ...

e) Latura opusă unghiului ... este IH.

2. Desenează un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$. Precizează care sunt catetele și care este ipotenuza triunghiului ABC.

3. a) Desenează un triunghi ascuțitunghic, notează-l TUȘ și scrie elementele acestuia.

b) Fixează punctele M și N în interiorul triunghiului TUȘ și punctele P, Q și R în exteriorul triunghiului TUȘ, astfel încât punctele T, M și P să fie coliniare.

4. a) Desenează un triunghi obtuzunghic, notează-l DAR și scrie elementele acestuia.

b) Fixează punctele B și C în exteriorul triunghiului DAR, astfel încât BD = 3 cm, CA = 4 cm, iar punctele D, A și B să fie coliniare.

c) În interiorul triunghiului DAR fixează punctele E, F și G, astfel încât $DE \equiv AF \equiv GR$.

5. Se consideră triunghiul MNP. Calculează măsura unghiului M, știind că:

a) $\sphericalangle N = 30^\circ$ și $\sphericalangle P = 80^\circ$;

b) $\sphericalangle N = 50^\circ$ și $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$;

c) $\sphericalangle N + \sphericalangle P = 75^\circ 24'$;

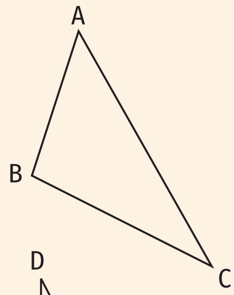
d) $\sphericalangle P = 35^\circ 45'$ și $\sphericalangle N = 2 \cdot \sphericalangle P$.

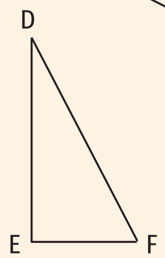
APLICAȚIE

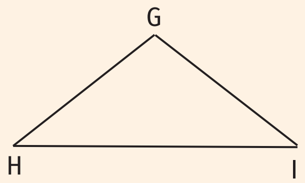
Măsoară unghiurile și laturile triunghiurilor de mai jos și precizează tipul acestora, ținând cont de:

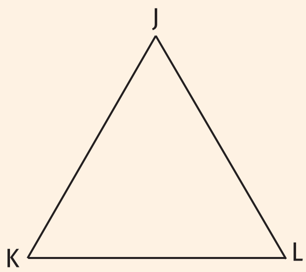
a) lungimile laturilor;

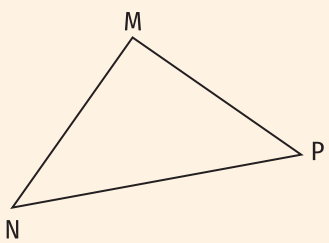
b) măsurile unghiurilor.

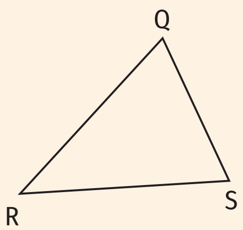












6. Calculează perimetrul triunghiului DEF, știind că:
a) DE = 5 cm, EF = 6 cm, DF = 8 cm; b) DE = 2EF = 1,5DF = 9 cm;
c) $DE = \frac{5}{4}EF$, DF = 0,3 DE, EF = 24 cm; d) DE + EF = 22 cm, DE + DF = 29 cm, EF + DF = 33 cm.

7. a) Calculează perimetrul unui triunghi echilateral, știind că o latură a sa are lungimea egală cu 7,2 cm.
b) Determină lungimile laturilor unui triunghi echilateral al cărui perimetru este egal cu 27,3 cm.

8. a) Lungimea bazei unui triunghi isoscel este egală cu 10 cm, iar perimetrul triunghiului este egal cu 36 cm. Determină lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului.
b) Laturile congruente ale unui triunghi isoscel au lungimea egală cu 7 cm, iar perimetrul triunghiului este egal cu 19 cm. Determină lungimea bazei triunghiului.

9. a) Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui triunghi este egală cu 90°. Precizează natura triunghiului.
b) Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui triunghi este mai mică decât 90°. Precizează natura triunghiului.

10. Determină măsurile unghiurilor exterioare triunghiului DEF, știind că:
a) $\sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle E = 55°17'$; b) $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle F = 73°$.

11. Determină suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi.

12. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi dreptunghic este egală cu 123°. Determină măsurile unghiurilor triunghiului.

13. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu 80°, iar măsura unui unghi al triunghiului este egală cu 45°. Determină măsurile celorlalte două unghiuri ale triunghiului.

14. Măsurile a două unghiuri exterioare ale unui triunghi sunt 98° și, respectiv, 152°. Determină măsurile unghiurilor triunghiului.

15. Suma a cinci dintre unghiurile exterioare unui triunghi este egală cu 630°. Demonstrează că triunghiul este dreptunghic.

16. Determină măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că sunt direct proporționale cu 4, 6 și 8.

17. Determină măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că sunt invers proporționale cu 0,25; 0,2 și 0,1(6).

18. Se consideră un triunghi ABC cu perimetrul egal cu 74 cm. Pe latura BC se consideră un punct D. Determină lungimea segmentului AD, știind că perimetrul triunghiului ABD este egal cu 48 cm, iar perimetrul triunghiului ACD este egal cu 59 cm.

19. În figura 13 este reprezentat triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 70°$. Semidreapta CE este bisectoarea unghiului ACD, unghi exterior triunghiului ABC. Determină măsurile unghiurilor ACB și ABC, știind că CE ∥ AB.

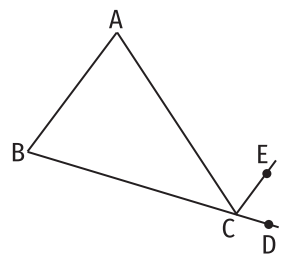


Figura 13

Rezolvă problemele următoare folosind metoda figurativă.

20. Măsura unghiului B al triunghiului dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) este de două ori mai mare decât măsura unghiului C. Determină măsurile unghiurilor B și C ale triunghiului ABC.

21. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = a°$, $\sphericalangle B = b°$, $\sphericalangle C = c°$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC, în fiecare dintre cazurile:
a) a, b, c sunt numere naturale consecutive;
b) a, b, c sunt numere naturale pare consecutive.

2. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului

Descopăr

1. Desenează trei puncte coliniare și notează-le A, B și C.
   a) Câte drepte distincte trec prin cele trei puncte?
   b) Măsoară lungimile segmentelor AB, AC și BC. Ce concluzie legată de lungimile acestor segmente poți să formulezi?
2. Desenează trei puncte necoliniare și notează-le A, B și C.
   a) Câte drepte distincte trec prin cele trei puncte? Desenează-le!
   b) Măsoară lungimile segmentelor AB, AC și BC. Calculează suma lungimilor a două dintre laturile triunghiului ABC și compar-o cu lungimea celeilalte laturi. Ce concluzie poți să formulezi?
   c) Scrie laturile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a lungimilor lor.
   d) Măsoară unghiurile triunghiului ABC.
   e) Scrie unghiurile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a măsurilor lor.
   f) Scrie unghiul și latura care se află pe aceeași poziție în ordonările de la punctele c) și e). Ce observi?

Învăț

Construcția triunghiurilor

Pentru a putea construi un triunghi este suficient să știm:

- lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins între ele – cazul LUL (latură, unghi, latură);
- măsurile a două unghiuri și lungimea laturii alăturate acestora – cazul ULU (unghi, latură, unghi);
- lungimile celor trei laturi – cazul LLL (latură, latură, latură).

1. Cazul LUL

Pentru a construi un triunghi știind lungimile a două laturi (a și b) și măsura unghiului cuprins între ele (α) parcurgem următoarele etape:

- Construim un unghi cu măsura α (figura 1).
- Fixăm un punct pe una dintre laturile unghiului, la distanța a de vârful unghiului (figura 2).
- Fixăm un punct pe cealaltă latură a unghiului, la distanța b de vârful unghiului (figura 3).
- Construim segmentul ale cărui capete sunt cele două puncte fixate anterior, obținând astfel triunghiul care are două laturi cu lungimile a și, respectiv, b, iar măsura unghiului cuprins între acestea este α (figura 4).

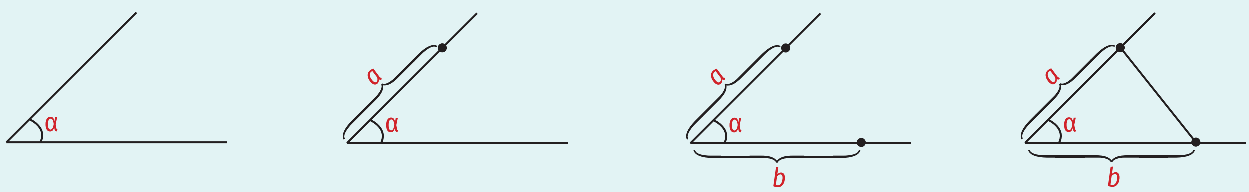


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

2. Cazul ULU

Pentru a construi un triunghi știind măsurile a două unghiuri (α și β) și lungimea laturii alăturate acestora (*a*), parcurgem următoarele etape:

- Construim un segment cu lungimea *a* (figura 5).
- Construim un unghi cu măsura egală cu α, cu vârful în unul dintre capetele segmentului, ca în figura 6.
- În același semiplan determinat de dreapta suport a segmentului ca unghiul α, construim un unghi cu măsura egală cu β, cu vârful în celălalt capăt al segmentului, ca în figura 7.
- Cel de-al treilea vârf al triunghiului este punctul de intersecție a celor două semidrepte ce reprezintă laturile unghiurilor construite anterior, care nu conțin segmentul construit inițial (figura 8).

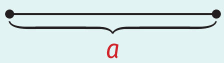


Figura 5

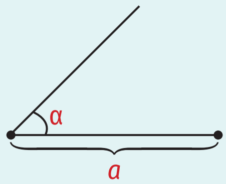


Figura 6

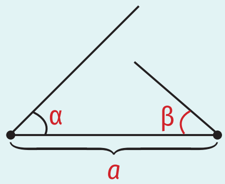


Figura 7

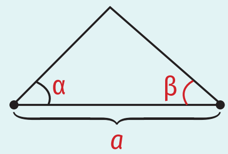


Figura 8

3. Cazul LLL

Pentru a construi un triunghi știind lungimile laturilor sale (*a*, *b* și *c*) parcurgem următoarele etape:

- Construim un segment cu lungimea *a* (figura 9).
- Construim un cerc cu centrul în unul dintre capetele segmentului și raza egală cu *b* (figura 10).
- Construim un cerc cu centrul în celălalt capăt al segmentului și raza egală cu *c* (figura 11).
- Cel de-al treilea vârf al triunghiului este punctul sau unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri. Construim segmentele ale căror capete sunt acest vârf și capetele segmentului inițial. Obținem astfel triunghiul ale cărui laturi au lungimile *a*, *b* și, respectiv, *c* (figura 12).

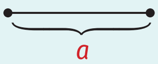


Figura 9

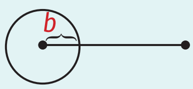


Figura 10

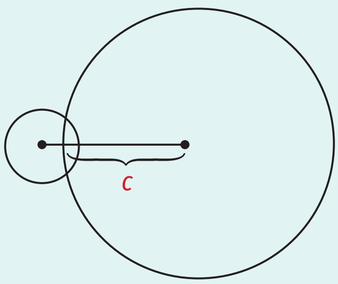


Figura 11

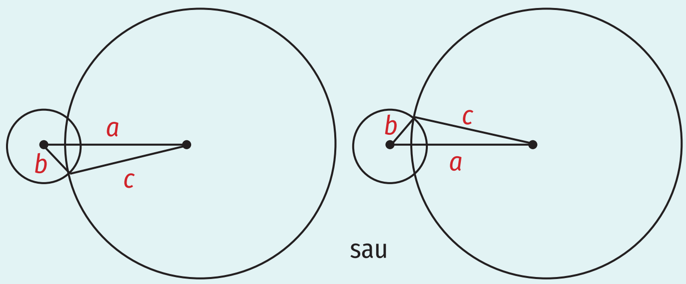


Figura 12

Inegalități între elementele triunghiului

Teorema 1. **Într-un triunghi, lungimea unei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi.**

Altfel spus, în triunghiul ABC, AB < AC + BC, AC < AB + BC și BC < AC + AB.

Teorema 2. **Într-un triunghi, unei laturi cu lungimea mai mare i se opune un unghi cu măsura mai mare și, reciproc, unui unghi cu măsura mai mare i se opune o latură cu lungimea mai mare.**

Consecințe:

1. Într-un triunghi obtuzunghic, latura opusă unghiului obtuz are cea mai mare lungime.
2. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decât lungimea oricărei catete.

OBSERVAȚIE

Lungimea unei laturi a unui triunghi este mai mare decât diferența lungimilor celorlalte două laturi ale triunghiului.

Exercițiu rezolvat

Lungimile laturilor triunghiului ABC, exprimate în centimetri, sunt numere naturale, AB = 3 cm și AC = 5 cm. Determină lungimea laturii BC a triunghiului ABC.

Rezolvare:

BC < AC + AB $\Rightarrow$ BC < 8 cm.

Dacă BC = 1 cm, atunci BC + AB = 4 cm și AC > BC + AB, ceea ce nu e posibil.
Dacă BC = 2 cm, atunci BC + AB = 5 cm și AC = BC + AB, ceea ce nu e posibil.
Dacă BC = 3 cm, atunci BC + AB = 6 cm și AC < BC + AB, AB < AC + BC.
Dacă BC = 4 cm, atunci BC + AB = 7 cm și AC < BC + AB, AB < AC + BC.
Dacă BC = 5 cm, atunci BC + AB = 8 cm și AC < BC + AB, AB < AC + BC.
Dacă BC = 6 cm, atunci BC + AB = 9 cm și AC < BC + AB, AB < AC + BC.
Dacă BC = 7 cm, atunci BC + AB = 10 cm și AC < BC + AB, AB < AC + BC.

Așadar, latura BC a triunghiului ABC poate avea lungimea egală cu 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm sau 7 cm.

Aplic

1. Construiește triunghiul ABC, știind că:

I. a) AB = 2 cm, AC = 5 cm, $\sphericalangle A = 50°$;
b) AB = 3,5 cm, BC = 4 cm, $\sphericalangle B = 80°$;
c) BC = 2,5 cm, AC = 4 cm, $\sphericalangle C = 120°$;
d) AB = 4,2 cm, AC = 4,2 cm, $\sphericalangle A = 100°$.

II. a) $\sphericalangle A = 30°$, AB = 3 cm, $\sphericalangle B = 70°$;
b) $\sphericalangle A = 45°$, AC = 4 cm, $\sphericalangle C = 60°$;
c) $\sphericalangle B = 20°$, CB = 5 cm, $\sphericalangle C = 20°$;
d) $\sphericalangle A = 10°$, BA = 3,5 cm, $\sphericalangle B = 150°$.

III. a) AB = 4 cm, AC = 3 cm, BC = 5 cm;
b) AB = 3,5 cm, BC = 4 cm, AC = 6 cm;
c) BC = 2,5 cm, AC = 4,2 cm, AB = 2,5 cm;
d) AB = 4 cm, AC = 4 cm, BC = 4 cm.

2. Construiește triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$), știind că:
a) AB = 5 cm, AC = 7 cm; b) AB = 4 cm, $\sphericalangle B = 30°$.

3. Construiește triunghiul isoscel MNP (MN $\equiv$ MP), știind că:
a) MN = 4,5 cm, $\sphericalangle M = 50°$; b) MP = 6 cm, $\sphericalangle M = 120°$; c) MN = 6 cm, $P_{\Delta MNP} = 20$ cm.

4. Construiește triunghiul echilateral ABC, știind că: a) AB = 6,5 cm; b) $P_{\Delta ABC} = 15$ cm.

5. Construiește triunghiul isoscel ABC, știind că AB = 7 cm și BC = 5 cm. Analizează toate cazurile posibile.

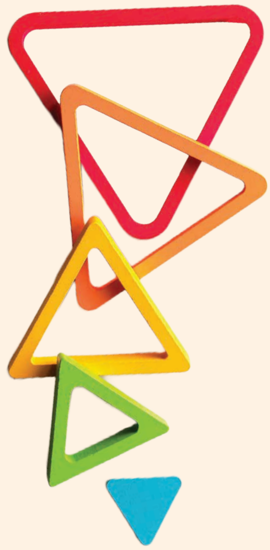
6. Construiește triunghiul isoscel NMP, știind că MN = 8 cm și MP = 4 cm.

7. a) Desenează punctele A, B și C, astfel încât AB = 5 cm, AC = 8 cm și BC = 3 cm.
b) Desenează punctele A, B și C, astfel încât AB = 10 cm, AC = 7 cm și BC = 5 cm.

8. a) Care este numărul maxim de drepte determinate de trei puncte?
b) Care este numărul minim de drepte determinate de patru puncte? Dar numărul maxim?

9. a) Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 14 cm. Determină lungimile laturilor triunghiului știind că lungimea uneia dintre ele este egală cu 4 cm.
b) Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 9 cm. Determină lungimile laturilor triunghiului știind că lungimea uneia dintre ele este egală cu 2 cm.

10. Lungimile laturilor AB, BC și AC ale triunghiului ABC sunt direct proporționale cu 11, 4 și 9, iar perimetrul triunghiului este egal cu 36 cm.
a) Determină lungimile laturilor triunghiului ABC.
b) Scrie unghiurile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a măsurilor lor.



APLICAȚIE

A. Scrie unghiurile triunghiului ABC în ordinea descrescătoare a măsurilor lor, știind că:
a) AB = 6 cm, AC = 8 cm, BC = 10 cm;
b) AB = 7,8 cm, AC = 3,6 cm, BC = 9 cm.

B. Scrie laturile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a lungimilor lor, știind că:
a) $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 40°$;
b) $\sphericalangle A = 20°$, $\sphericalangle C = 100°$.

C. Justifică de ce nu se poate construi un triunghi ABC, astfel încât:
a) $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 125°$, AB = 7 cm;
b) AB = 5 cm, BC = 6 cm, AC = 11 cm;
c) AB = 8 cm, BC = 8 cm, AC = 19 cm;
d) $\sphericalangle A = 180°$, AB = 7 cm, AC = 5 cm.

3. Linii importante în triunghi

Descopăr

Împărțiți clasa în patru grupe. Desenați un triunghi pe o coală de hârtie.

Grupa 1:

- Îndoiți triunghiul astfel încât, pe rând, laturile acestuia să se suprapună.
- Trasați cu creionul, folosind rigla, semidreptele cu originea în vârfurile triunghiului (care aparțin interioarelor unghiurilor triunghiului) obținute prin îndoire. Ce observați?

Grupa 2:

- Îndoiți triunghiul astfel încât, pe rând, vârfurile acestuia să se suprapună.
- Trasați cu creionul, folosind rigla, dreptele obținute prin îndoire. Ce observați?

Grupa 3:

Construiți:

- perpendiculara din punctul A pe dreapta BC;
- perpendiculara din punctul B pe dreapta AC;
- perpendiculara din punctul C pe dreapta AB.

Ce observați?

Grupa 4:

Construiți:

- segmentul ale cărui extremități sunt punctul A și mijlocul laturii BC;
- segmentul ale cărui extremități sunt punctul B și mijlocul laturii AC;
- segmentul ale cărui extremități sunt punctul C și mijlocul laturii AB.

Ce observați?

Învăț

Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris în triunghi

Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a acestora se notează de obicei cu I și este centrul cercului înscris în triunghi (figura 1).

Dreptele suport ale laturilor unui triunghi sunt tangente cercului înscris în triunghi. Lungimea razei acestui cerc este egală cu distanța de la centrul cercului la laturile triunghiului. Așadar, r = d(I, AB) = d(I, AC) = d(I, BC) (figura 2).

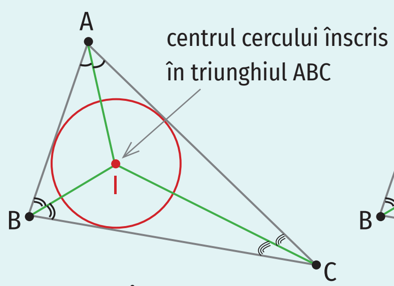


Figura 1

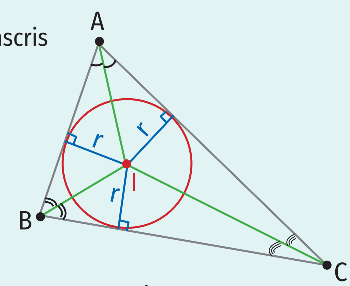
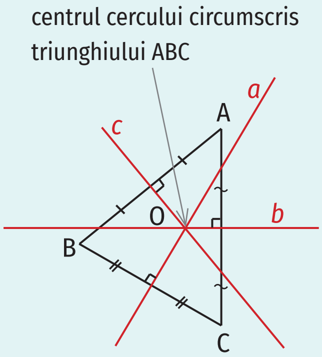


Figura 2

Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi

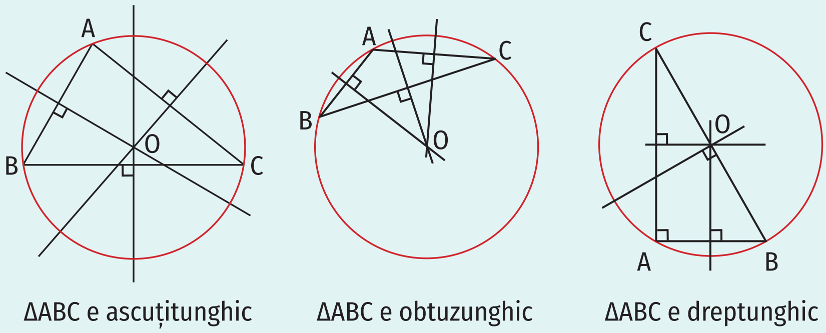
Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a acestora se notează de obicei cu O și este egal depărtat de vârfurile triunghiului (figura 3).

Cu alte cuvinte, $OA \equiv OB \equiv OC$. Așadar, punctul O este centrul cercului căruia îi aparțin vârfurile triunghiului, numit **cercul circumscris triunghiului** (figura 4).



Dreptele *a*, *b*, *c* sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC.

Figura 3



Cercul circumscris triunghiului ABC

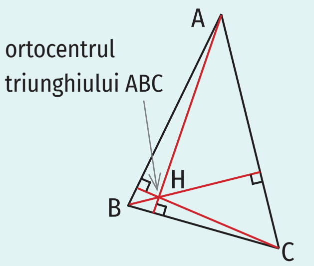
Figura 4

Înălțimile unui triunghi

Se numește înălțime a unui triunghi un segment ale cărui extremități sunt un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei duse din acel vârf pe dreapta suport a laturii opuse.

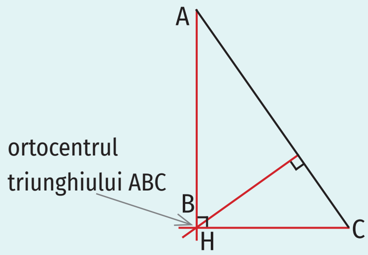
Un triunghi are trei înălțimi.

Dreptele suport ale înălțimilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a acestora se notează de obicei cu H și se numește ortocentrul triunghiului (figurile 5, 6, 7).



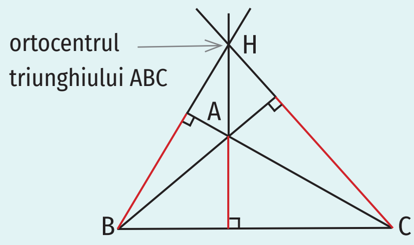
Înălțimile triunghiului ascuțitunghic ABC

Figura 5



Înălțimile triunghiului dreptunghic ABC

Figura 6



Înălțimile triunghiului obtuzunghic ABC

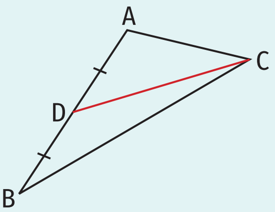
Figura 7

OBSERVAȚII

1. Ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic aparține interiorului triunghiului (figura 5).
2. Cele două catete ale unui triunghi dreptunghic sunt și înălțimi ale acestuia. Ortocentrul unui triunghi dreptunghic coincide cu vârful unghiului drept al triunghiului (figura 6).
3. Ortocentrul unui triunghi obtuzunghic aparține exteriorului triunghiului (figura 7).

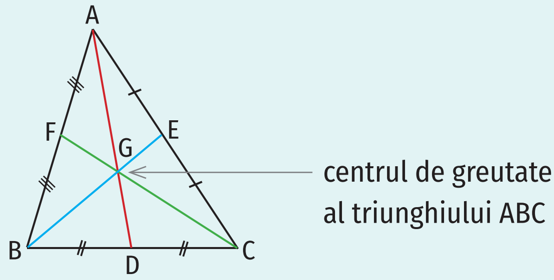
Medianele unui triunghi

Se numește mediană a unui triunghi un segment ale cărui extremități sunt un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse acestuia (figura 8).



Segmentul CD este o mediană a triunghiului ABC.

Figura 8



Segmentele AD, BE și CF sunt medianele triunghiului ABC.

Figura 9

Un triunghi are trei mediane (figura 9).

Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a acestora se notează de obicei cu G și se numește centrul de greutate al triunghiului (figura 9).

Centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană, la două treimi de vârf și o treime de bază.

De exemplu, în figura 9, $BG = \frac{2}{3}BE$, $GE = \frac{1}{3}BE$. Deducem de aici că $BG = 2GE$.

Exercițiu rezolvat

Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Determină măsura unghiului BIC, știind că $\sphericalangle BAI = 36°$.

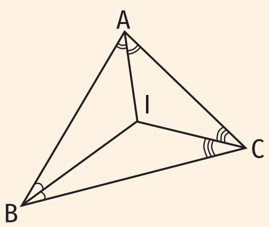


Figura 10

Rezolvare:

În figura 10 e reprezentat triunghiul ABC.

Ipoteză: I e centrul cercului înscris în triunghiul ABC, $\sphericalangle BAI = 36°$

Concluzie: $\sphericalangle BIC$

Demonstrație: Punctul I e centrul cercului înscris în triunghiul ABC, deci semidreptele AI, BI și CI sunt bisectoarele unghiurilor BAC, ABC și, respectiv, ACB.

Rezultă $\sphericalangle BAI = \sphericalangle CAI = \frac{\sphericalangle BAC}{2}$, $\sphericalangle ABI = \sphericalangle CBI = \frac{\sphericalangle ABC}{2}$, $\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCI = \frac{\sphericalangle ACB}{2}$.

$\sphericalangle BAI = 36° \Rightarrow \sphericalangle BAC = 2 \cdot 36° = 72°$

$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180° \Rightarrow 72° + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180° \Rightarrow$

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180° - 72° = 108° \Rightarrow \sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB = \frac{\sphericalangle ABC}{2} + \frac{\sphericalangle ACB}{2} =$

$= \frac{\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB}{2} = 108° : 2 = 54°$.

În triunghiul IBC, $\sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB + \sphericalangle BIC = 180°$.

Rezultă $\sphericalangle BIC = 180° - (\sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB) = 180° - 54° = 126°$.

Aplic

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Dacă M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, atunci segmentul CM este o ... a triunghiului ABC.

b) Dacă segmentul AN este o mediană a triunghiului ABC, atunci punctul N este ... segmentului ...

c) Dacă segmentele AM și BE sunt mediane ale triunghiului ABC și $BE \cap AM = \{G\}$, atunci punctul G se numește ...

d) Dacă segmentul AD este o mediană a triunghiului ABC și G este centrul de greutate al acestuia, atunci AG = ... AD și AG = ... GD.

2. Construiește triunghiul ABC și mediatoarele laturilor sale în fiecare dintre cazurile:

a) AB = 4 cm, $\sphericalangle A = 90°$, AC = 3 cm; c) BC = 7 cm, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 30°$;

b) AB = 5 cm, BC = 6 cm, $\sphericalangle B = 120°$; d) AB = 6 cm, AC = 8 cm, BC = 12 cm.

3. Construiește triunghiul ABC și înălțimile sale în fiecare dintre cazurile:

a) AB = 5 cm, $\sphericalangle B = 90°$, BC = 7 cm; c) AC = 10 cm, $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle C = 60°$

b) AB = 9 cm, AC = 6 cm, $\sphericalangle A = 150°$; d) AB = 5 cm, AC = 7 cm, BC = 10 cm.

4. Construiește triunghiul ABC și medianele sale în fiecare dintre cazurile:

a) BC = 6 cm, $\sphericalangle B = 100°$, AB = 7 cm; c) AC = 8 cm, $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle C = 70°$;

b) AB = 9 cm, AC = 6 cm, $\sphericalangle A = 90°$; d) AB = 4 cm, AC = 7 cm, BC = 10 cm.

5. Construiește triunghiul ABC știind că AC = 4 cm, BC = 6 cm și lungimea medianei AM este egală cu 6 cm, $M \in BC$.

6. Mediatoarele laturilor DE și EF ale triunghiului DEF se intersectează în punctul O. Calculează OD + OE + OF, știind că OE = 8 cm.

7. Punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar punctul D este mijlocul segmentului BC. Demonstrează că $OD \perp BC$.

8. Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Există un punct în plan egal depărtat de cele trei puncte? Dacă da, cum se construiește?

9. Punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor BC, AC și, respectiv, AB ale triunghiului ABC, iar G este punctul de intersecție a dreptelor AM, BN și CP.

a) Determină lungimea segmentului AG, știind că AM = 9 cm.

b) Determină lungimea segmentului CP, știind că PG = 3 cm.

c) Determină lungimea segmentului AG, știind că GM = 4,5 cm.

d) Determină lungimea segmentului NG, știind că BG = 2,3 cm.

e) Determină lungimea segmentului CG, știind că GP = 5 cm.

f) Determină lungimea segmentului NG, știind că BN = 36 cm.

10. Construiește triunghiul ABC cu BC = 4 cm, BA = 3 cm și AG = 2 cm, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

11. Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC.

a) Determină măsura unghiului BAI, știind că $\sphericalangle BAC = 100°$.

b) Determină măsura unghiului ICB, știind că $\sphericalangle ACB = 79°12'$.

c) Determină măsura unghiului ABC, știind că $\sphericalangle IBC = 36°36'$.

PORTOFOLIU

1. Desenează un triunghi ascuțitunghic, un triunghi dreptunghic și un triunghi obtuzunghic, construiește bisectoarele unghiurilor acestora și notează corespunzător punctul lor de intersecție.

2. Desenează un triunghi ascuțitunghic, un triunghi dreptunghic și un triunghi obtuzunghic, construiește mediatoarele laturilor acestora și notează corespunzător punctul lor de intersecție.

3. Desenează un triunghi ascuțitunghic, un triunghi dreptunghic și un triunghi obtuzunghic, construiește medianele acestora și notează corespunzător punctul lor de intersecție.

4. Desenează un triunghi ascuțitunghic, un triunghi dreptunghic și un triunghi obtuzunghic, construiește înălțimile acestora și notează corespunzător punctul lor de intersecție.

5. Precizează poziția față de triunghi a centrului cercului înscris, a centrului cercului circumscris, a centrului de greutate și a ortocentrului unui triunghi:
a) ascuțitunghic;
b) dreptunghic;
c) obtuzunghic.

d) Determină măsura unghiului ICA, știind că $\sphericalangle BAC = 80°$ și $\sphericalangle ABC = 75°$.

e) Determină măsura unghiului BAC, știind că $\sphericalangle IBC = 32°$ și $\sphericalangle ICA = 43°$.

f) Determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că $\sphericalangle IAB = 28°$ și $\sphericalangle ICB = 37°47'$.

12. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Determină măsurile unghiurilor BAC și BAI, știind că $\sphericalangle IBC = 44°$ și $\sphericalangle ICB = 38°$.

13. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle A = 78°$ și $\sphericalangle B = 65°$. Determină măsurile unghiurilor ABI, IAC, ICB, BIC, BIA și AIC, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

14. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul MNP.

a) Determină măsura unghiului NIP, știind că $\sphericalangle NMP = 79°$.

b) Determină măsura unghiului MIP, știind că $\sphericalangle MNP = 102°40'$.

c) Determină măsura unghiului MPN, știind că $\sphericalangle MIN = 106°$.

d) Determină măsurile unghiurilor triunghiului MNP, știind că $\sphericalangle MIN = 100°$ și $\sphericalangle MIP = 130°$.

15. Bisectoarea unghiului N al triunghiului MNP intersectează latura MP în punctul Q. Determină măsurile unghiurilor triunghiului MNP, știind că $\sphericalangle QNP = 39°$ și $\sphericalangle NQM = 95°$.

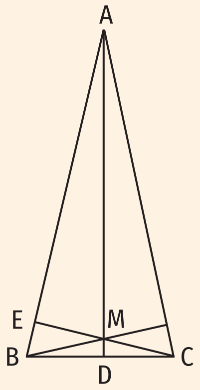


Figura 11

16. În figura 11 este reprezentat triunghiul ABC. Dreapta AD este mediatoarea segmentului BC ($D \in BC$), CE este o înălțime a triunghiului ABC și $CE \cap AD = \{M\}$. Demonstrează că $BM \perp AC$.

17. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC. Punctul D aparține segmentului AC, astfel încât BD este înălțime în triunghiul ABC. Determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că semidreapta BD e bisectoarea unghiului ABC și $\sphericalangle DBC = 35°$.

18. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC cu $\sphericalangle A = 63°$. Punctul H este ortocentrul triunghiului ABC și $BH \cap AC = \{M\}$. Paralela dusă prin punctul A la dreapta BM intersectează dreapta BC în punctul N.

a) Demonstrează că $AN \perp AC$.

b) Determină măsurile unghiurilor NAB și ACH.

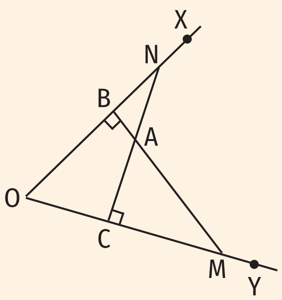


Figura 12

19. În figura 12 este reprezentat unghiul XOY și un punct A în interiorul acestuia. Perpendiculara din A pe dreapta OX intersectează dreptele OX și OY în punctele B și, respectiv, M, iar perpendiculara din A pe dreapta OY intersectează dreptele OX și OY în punctele N și, respectiv, C. Demonstrează că $OA \perp MN$.

20. Fie un triunghi ABC cu $\sphericalangle A = 80°$ și $\sphericalangle B = 40°$. Punctul H este ortocentrul triunghiului ABC și $BH \cap AC = \{M\}$, $AH \cap BC = \{N\}$, $CH \cap AB = \{P\}$. Determină măsurile unghiurilor ABM, BMC, ANC, BPC, NAC, NCH, AHB și MHC.

21. Fie H ortocentrul triunghiului ABC cu $\sphericalangle A = 120°$ și $\sphericalangle C = 25°$. Determină măsurile unghiurilor BAG, HBG, ECH, BHC, HAE și FAC, unde $\{E\} = AC \cap BH$, $\{F\} = AB \cap CH$, $\{G\} = BC \cap AH$.

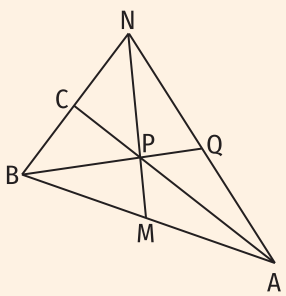


Figura 13

22. În figura 13 este reprezentat triunghiul oarecare ABC. Punctul M e mijlocul segmentului AB, punctul N e simetricul punctului B față de punctul C, $AC \cap MN = \{P\}$ și $BP \cap AN = \{Q\}$. Demonstrează că punctul Q este mijlocul segmentului AN.

4. Congruența triunghiurilor oarecare
4.1. Criterii de congruență a triunghiurilor

Descopăr

1. a) Desenează două triunghiuri, TUȘ și ARC, astfel încât TU = 4 cm, ∢T = 50°, TȘ = 6 cm, AC = 6 cm, ∢A = 50° și AR = 4 cm.

b) Decupează și apoi suprapune cele două triunghiuri. Ce observi?

2. a) Desenează două triunghiuri, MIC și DAR, astfel încât ∢M = 60°, MC = 4 cm, ∢C = 80°, ∢D = 60°, DR = 4 cm și ∢R = 80°.

b) Decupează și apoi suprapune cele două triunghiuri. Ce observi?

3. a) Desenează două triunghiuri, LAC și DOR, astfel încât LA = 4 cm, LC = 3 cm, AC = 6 cm, DO = 4 cm, DR = 3 cm, OR = 6 cm.

b) Decupează și apoi suprapune cele două triunghiuri. Ce observi?

Învăț

În clasa a V-a ați învățat că **două figuri geometrice sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid**. Putem spune astfel că **două triunghiuri sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid**. În această situație, fiecare latură a unui triunghi este congruentă cu câte o latură a celuilalt triunghi și fiecare unghi al unui triunghi este congruent cu câte un unghi al celuilalt triunghi. Această definiție poate fi formulată și astfel:

Definiție: **Două triunghiuri care au laturile și unghiurile respectiv congruente sunt congruente.**

Dacă ABC și DEF sunt două triunghiuri oarecare, prin notația ΔABC ≡ ΔDEF (citim „triunghiul ABC este congruent cu triunghiul DEF”) înțelegem congruențele:

AB ≡ DE, AC ≡ DF, BC ≡ EF, ∢A ≡ ∢D, ∢B ≡ ∢E, ∢C ≡ ∢F.

În figura 1 sunt ilustrate grafic aceste congruențe.

În scrierea ΔABC ≡ ΔDEF, laturile AB și DE (AC și DF, BC și EF) se numesc **laturi omoloage**, iar unghiurile ∢A și ∢D (∢B și ∢E, ∢C și ∢F) se numesc **unghiuri omoloage**.

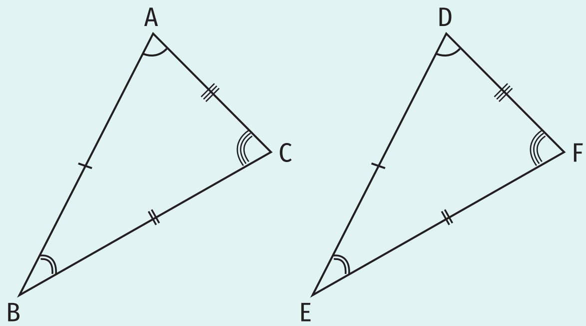


Figura 1 (ΔABC ≡ ΔDEF)

OBSERVAȚIE

În notația triunghiurilor congruente contează ordinea în care sunt scrise vârfurile triunghiurilor (laturile omoloage sunt congruente, unghiurile omoloage sunt congruente). Astfel, dacă ΔABC ≡ ΔDEF, nu rezultă ΔABC ≡ ΔEFD (deoarece unghiurile omoloage din acest caz sunt altele decât în cazul anterior), dar rezultă ΔBAC ≡ ΔEDF.

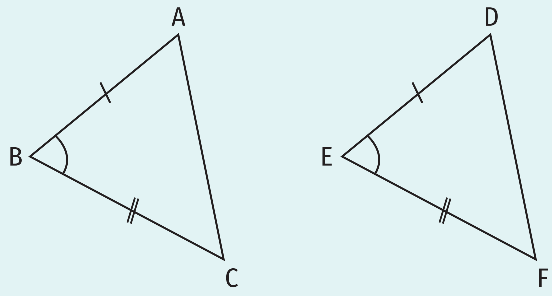


Figura 2

Criterii de congruență a triunghiurilor

Criteriul LUL (latură, unghi, latură)

Două triunghiuri oarecare care au câte două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente sunt congruente (figura 2).

Dacă în triunghiurile oarecare ABC și DEF avem $AB \equiv DE$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$ și $BC \equiv EF$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. Ca urmare, $AC \equiv DF$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$ (figura 2).

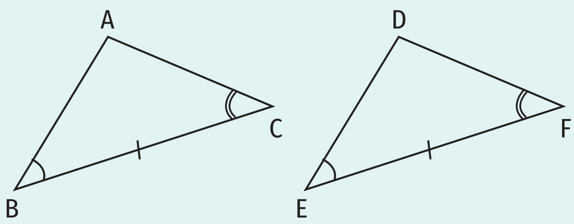


Figura 3

Criteriul ULU (unghi, latură, unghi)

Două triunghiuri oarecare care au câte o latură și unghiurile alăturate acesteia respectiv congruente sunt congruente (figura 3).

Dacă în triunghiurile oarecare ABC și DEF avem $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $BC \equiv EF$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. Ca urmare, $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ (figura 3).

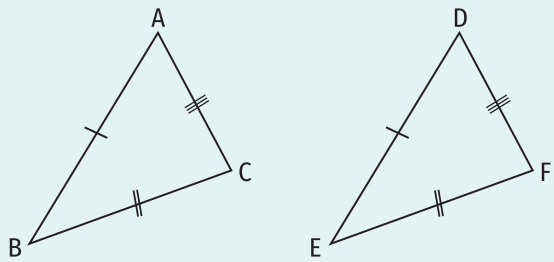


Figura 4

Criteriul LLL (latură, latură, latură)

Două triunghiuri oarecare care au laturile respectiv congruente sunt congruente (figura 4).

Dacă în triunghiurile oarecare ABC și DEF avem $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$, $BC \equiv EF$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. Ca urmare, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$ (figura 4).

OBSERVAȚIE

După ce demonstrăm că două triunghiuri sunt congruente, folosind unul dintre cazurile de congruență de mai sus, pentru a descoperi restul elementelor care sunt respectiv congruente ținem cont de următoarele: laturilor congruente li se opun unghiuri respectiv congruente, unghiurilor congruente li se opun laturi respectiv congruente.

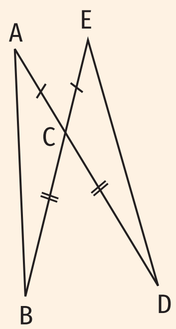


Figura 5

Exercițiu rezolvat

În figura 5 sunt reprezentate triunghiurile ACB și ECD, astfel încât $AD \cap EB = \{C\}$, $AC \equiv EC$ și $CB \equiv CD$. Demonstrează că $\Delta ACB \equiv \Delta ECD$ și scrie celelalte elemente congruente ale celor două triunghiuri.

Rezolvare:

Ipoteză: $AC \equiv EC$, $CB \equiv CD$

Concluzie: $\Delta ACB \equiv \Delta ECD$

Demonstrație: În ΔACB și ΔECD avem:

$$\left.\begin{array}{r} AC \equiv EC \\ \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ECD \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \\ CB \equiv CD \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(LUL)}]{} \Delta ACB \equiv \Delta ECD$$

$\triangle ACB \equiv \triangle ECD \Rightarrow AB \equiv ED$, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CED$ ($\sphericalangle CAB$ este unghiul opus laturii CB în triunghiul ACB, $\sphericalangle CED$ este unghiul opus laturii CD în triunghiul ECD și $BC \equiv CD$), $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle EDC$ ($\sphericalangle ABC$ este unghiul opus laturii AC în triunghiul ACB, $\sphericalangle EDC$ este unghiul opus laturii EC în triunghiul ECD și $AC \equiv EC$).

Aplic

1. Completează casetele pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $\triangle MNP \equiv \triangle RST$, atunci $NP \equiv \square$, $\square \equiv RT$, $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle\square$, $\sphericalangle\square \equiv \sphericalangle T$.

b) Dacă $AR \equiv SU$, $AC \equiv SP$ și $RC \equiv UP$, atunci $\triangle\square \equiv \triangle\square$. Ca urmare, $\sphericalangle\square \equiv \sphericalangle\square$, $\sphericalangle\square \equiv \sphericalangle\square$, $\sphericalangle\square \equiv \sphericalangle\square$.

c) Dacă $AP \equiv MI$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle I$ și $AR \equiv IC$, atunci $\triangle\square \equiv \triangle\square$. Ca urmare, $\sphericalangle\square \equiv \sphericalangle\square$, $\sphericalangle\square \equiv \sphericalangle\square$.

2. Știind că $\triangle AER \equiv \triangle PIN$, scrie laturile și unghiurile omoloage respectiv congruente.

3. Știind că $\triangle ABC \equiv \triangle FED$, $\sphericalangle A = 40°$ și $\sphericalangle C = 88°$, determină măsurile unghiurilor triunghiului FED.

4. Știind că $\triangle ASR \equiv \triangle PQT$, $\sphericalangle Q = 102°$ și $\sphericalangle P = 26°$, determină măsurile unghiurilor triunghiului ASR.

5. Știind că $\triangle MEN \equiv \triangle PUR$, $\sphericalangle M = 73°24'$ și $\sphericalangle R = 27°48'$, determină măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiurilor MEN și PUR.

6. Știind că $\triangle DAN \equiv \triangle RUP$, AD = 2 cm, DN = 4 cm și AN = 5 cm, determină lungimile laturilor triunghiului RUP.

7. Știind că $\triangle ARM \equiv \triangle BIS$, BI = 8 cm, IS = 6 cm și BS = 10 cm, determină lungimea segmentului AR și perimetrul triunghiului ARM.

8. Știind că $\triangle NOI \equiv \triangle ABC$, NO = 12 cm, OI = 10,3 cm și AC = 19,45 cm, determină perimetrul triunghiului ABC.

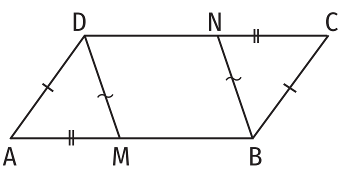
9. Știind că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, $AB \equiv AC$, AB = 5 cm și NP = 8 cm, determină perimetrul triunghiului MNP.

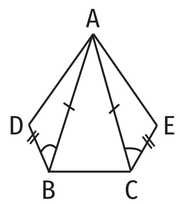
10. Știind că $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$, AB = 4,5 cm, BC = 8,3 cm și MP = 11 cm, determină perimetrul triunghiului MNP.

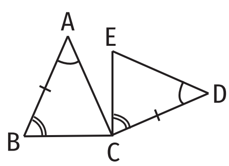
11. Stabilește natura triunghiului MNP, știind că $\triangle MNP \equiv \triangle MPN$.

12. Stabilește natura triunghiului MNP, știind că $\triangle MNP \equiv \triangle MPN \equiv \triangle PNM$.

13. Identifică, în figurile geometrice de mai jos, triunghiuri congruente, demonstrează congruența acestora folosind cazurile de congruență și scrie congruențele celorlalte elemente.

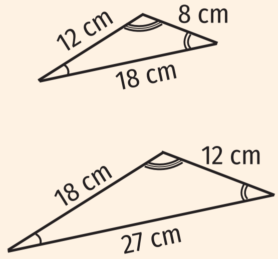
a) 

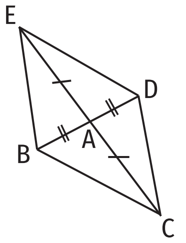
b) 

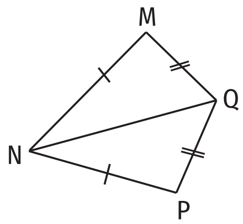
c) 

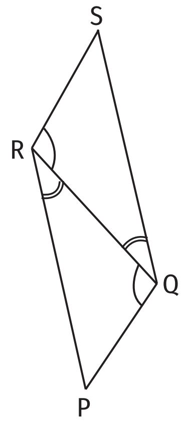
ȘTIAȚI CĂ...?

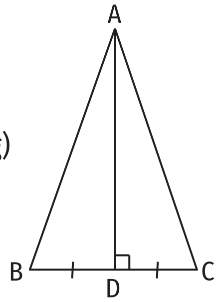
Există triunghiuri care, deși au cinci perechi de elemente respectiv congruente, nu sunt congruente. Un exemplu îl constituie triunghiurile de mai jos.

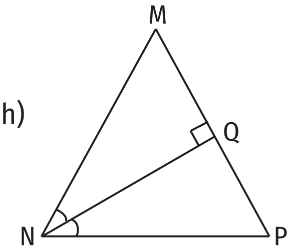


d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

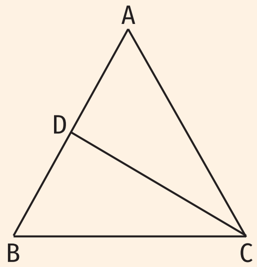


Figura 6

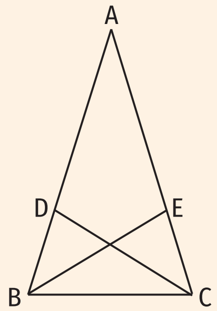


Figura 7

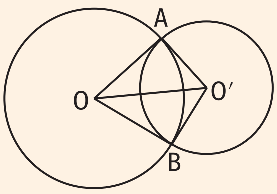


Figura 8

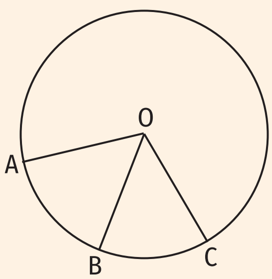


Figura 9

14. În figura 6 este reprezentat triunghiul echilateral ABC. Punctul D este mijlocul laturii AB. Demonstrează că $\Delta BCD \equiv \Delta ACD$.

15. Pe laturile OA și OB ale unghiului AOB se consideră punctele M și, respectiv, N astfel încât $OM \equiv ON$. Demonstrează că $\Delta MOS \equiv \Delta NOS$, unde S este un punct oarecare pe bisectoarea unghiului AOB.

16. În figura 7 este reprezentat triunghiul ABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Semidreptele BE ($E \in AC$) și CD ($D \in AB$) sunt bisectoarele unghiurilor B și C ale triunghiului ABC. Demonstrează că $\Delta EBC \equiv \Delta DCB$.

17. Se consideră triunghiurile ABC și MNP, astfel încât $AB \equiv MN$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$ și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle MPN$. Demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

18. În figura 8 sunt reprezentate două cercuri cu centrele O și, respectiv, O′, secante în punctele A și B. Demonstrează că $\Delta AOO' \equiv \Delta BOO'$.

19. Se consideră triunghiul ABC. Paralela prin A la dreapta BC intersectează paralela prin C la dreapta AB în punctul M. Demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta CMA$.

20. Fie ABC un triunghi oarecare. Punctul M este mijlocul laturii AC a triunghiului ABC, iar punctul D e simetricul punctului B față de punctul M. Demonstrează că:

a) $\Delta AMD \equiv \Delta CMB$; b) $\Delta AMB \equiv \Delta CMD$.

21. În figura 9 este reprezentat un cerc cu centrul în punctul O și punctele A, B și C care aparțin acestuia, astfel încât arcele AB și BC au aceeași măsură. Demonstrează că $\Delta OAB \equiv \Delta OBC$.

4.2. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Descopăr

a) În figura 1 sunt reprezentate punctele A, B, C și D, astfel încât dreapta CD e mediatoarea segmentului AB și $\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle BAD$. Demonstrează că $\Delta COB \equiv \Delta DOA$, unde $\{O\} = AB \cap CD$.

b) În figura 2 sunt reprezentate triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) și triunghiurile dreptunghice ADB și AEC cu $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EAC = 90°$ și $AD \equiv AE$. Demonstrează că $\Delta ADB \equiv \Delta AEC$.

c) Construiește triunghiurile dreptunghice ABC și MNP astfel încât $\sphericalangle BAC = \sphericalangle NMP = 90°$, AB = 3 cm, BC = 5 cm, MN = 3 cm și NP = 5 cm. Decupează cele două triunghiuri și suprapune-le. Ce observi?

d) Numește criteriile de congruență a triunghiurilor folosite la punctele a)-c) omițând congruența unghiurilor drepte și utilizând denumirile laturilor unui triunghi dreptunghic.

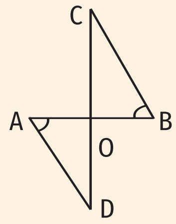


Figura 1

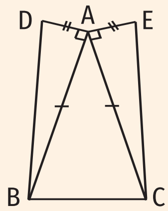


Figura 2

Învăț

Deoarece oricare triunghi dreptunghic are un unghi drept, rezultă că două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă există două perechi de elemente omoloage congruente (diferite de unghiurile drepte), dintre acestea cel puțin una fiind o pereche de laturi.

Astfel, criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice sunt:

Criteriul CC (catetă, catetă)

Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente.

Demonstrație: Fie triunghiurile dreptunghice ABC și MNP cu $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$, $AB \equiv MN$ și $AC \equiv MP$ (figura 3).

În triunghiurile ABC și MNP avem:

$$\left.\begin{array}{r} AB \equiv MN \\ \sphericalangle A = \sphericalangle M = 90° \\ AC \equiv MP \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(LUL)}]{} \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

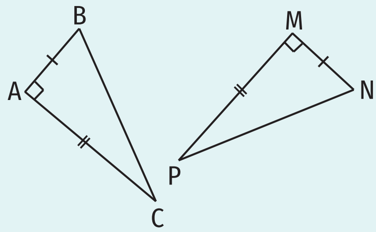


Figura 3

Criteriul CU (catetă, unghi ascuțit)

Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și unghiul ascuțit alăturat acesteia respectiv congruente sunt congruente.

Demonstrație: Fie triunghiurile dreptunghice ABC și MNP cu $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$, $AB \equiv MN$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ (figura 4).

În triunghiurile ABC și MNP avem:

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle A = \sphericalangle M = 90° \\ AB \equiv MN \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ULU)}]{} \Delta ABC \equiv \Delta MNP$$

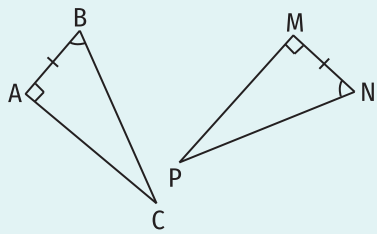


Figura 4

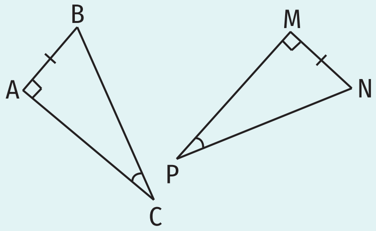


Figura 5

OBSERVAȚIE

Fie triunghiurile dreptunghice ABC și MNP cu $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$, $AB \equiv MN$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ (figura 5).

Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° avem:

$\sphericalangle B = 180° - (\sphericalangle A + \sphericalangle C) = 180° - (90° + \sphericalangle C) = 90° - \sphericalangle C$ (1)

$\sphericalangle N = 180° - (\sphericalangle M + \sphericalangle P) = 180° - (90° + \sphericalangle P) = 90° - \sphericalangle P$ (2)

Ținând cont de faptul că $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și de relațiile (1) și (2) obținem $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$.

În triunghiurile ABC și MNP avem: $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle M \\ AB \equiv MN \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \end{array}\right\} \xrightarrow[(ULU)]{} \Delta ABC \equiv \Delta MNP.$

Putem formula acest rezultat astfel:

Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.

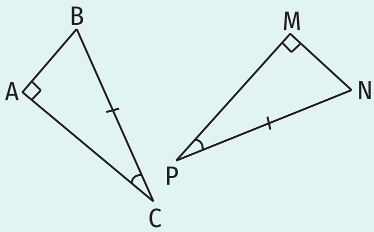


Figura 6

Criteriul IU (ipotenuză, unghi ascuțit)

Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.

Demonstrație: Fie triunghiurile dreptunghice ABC și MNP cu $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$, $BC \equiv NP$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ (figura 6).

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle B = 180° - (\sphericalangle A + \sphericalangle C) = 180° - (90° + \sphericalangle C) = 90° - \sphericalangle C \\ \sphericalangle N = 180° - (\sphericalangle M + \sphericalangle P) = 180° - (90° + \sphericalangle P) = 90° - \sphericalangle P \\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$$

În triunghiurile ABC și MNP avem: $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \\ BC \equiv NP \\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P \end{array}\right\} \xrightarrow[(ULU)]{} \Delta ABC \equiv \Delta MNP.$

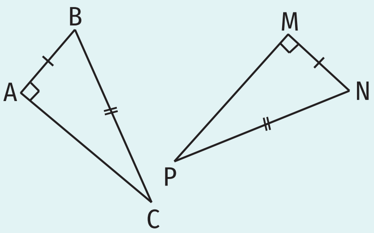


Figura 7

Criteriul CI (catetă, ipotenuză)

Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente sunt congruente (figura 7).

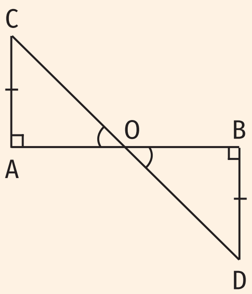


Figura 8

Exercițiu rezolvat

În figura 8 e reprezentat segmentul AB și punctele C și D, situate în semiplane diferite delimitate de dreapta AB, astfel încât $CA \perp AB$, $DB \perp AB$ și $AC \equiv BD$. Demonstrează că $\Delta OAC \equiv \Delta OBD$, unde $\{O\} = AB \cap CD$.

Rezolvare:

Ipoteză: $CA \perp AB$ ($C \notin AB$), $DB \perp AB$ ($D \notin AB$), $AC \equiv BD$, $AB \cap CD = \{O\}$

Concluzie: $\Delta OAC \equiv \Delta OBD$

Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{l} CA \perp AB \Rightarrow \sphericalangle CAO = 90° \\ BD \perp AB \Rightarrow \sphericalangle DBO = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle CAO = \sphericalangle DBO = 90°$$

În triunghiurile dreptunghice OAC și OBD ($\sphericalangle CAO = \sphericalangle DBO = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} CA \equiv DB \\ \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \end{array}\right\} \xrightarrow[(CU)]{} \Delta OAC \equiv \Delta OBD$$

Aplic

1. Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.

a) Dacă triunghiurile ABC și MNP sunt dreptunghice cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle M = 90°$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

b) Dacă $\sphericalangle BAC = \sphericalangle NMP = 90°$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MPN$, AB = 15 cm și NP = 15 cm, atunci $\Delta BAC \equiv \Delta PMN$.

2. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $AB \equiv MN$, $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$ și $BC \equiv NP$, atunci $\Delta... \equiv \Delta...$, conform criteriului de congruență ....

b) Dacă $EF \equiv TR$, $\sphericalangle G = \sphericalangle P = 90°$ și $\sphericalangle E = \sphericalangle T$ atunci $\Delta GEF \equiv \Delta...$, conform criteriului de congruență ....

c) Dacă $RT \equiv MN$, $\sphericalangle R = \sphericalangle M = 90°$ și $\sphericalangle S = \sphericalangle P$, atunci $\Delta... \equiv \Delta MNP$, conform criteriului de congruență ....

d) Dacă $AU \equiv PN$, $\sphericalangle U = \sphericalangle N = 90°$ și $UR \equiv NL$, atunci $\Delta... \equiv \Delta...$, conform criteriului de congruență ....

3. În figura 9 este reprezentat triunghiul ABC cu $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$. AM este o mediană a triunghiului ABC, iar punctele N și P aparțin segmentelor AB și, respectiv, AC, astfel încât $MN \perp AB$ și $MP \perp AC$. Demonstrează că $\Delta BMN \equiv \Delta CMP$.

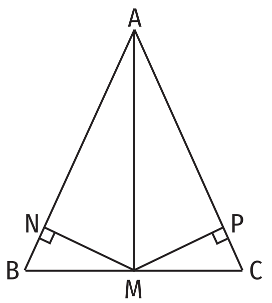


Figura 9

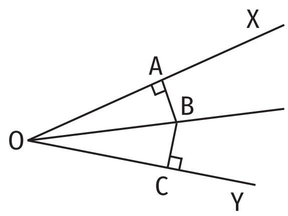


Figura 10

4. În figura 10 e reprezentat unghiul XOY și bisectoarea acestuia, semidreapta OB. Punctele A și C aparțin semidreptelor OX și, respectiv, OY, astfel încât $BA \perp OX$ și $BC \perp OY$. Demonstrează că $\Delta OAB \equiv \Delta OCB$.

5. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, AB = 6 cm și AC = 8 cm. Pe semidreapta BA se consideră punctul M, astfel încât AM = 8 cm, iar pe semidreapta CA se consideră punctul N, astfel încât CN = 14 cm. Demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta ANM$.

6. Fie *d* mediatoarea segmentului AB ($d \cap AB = \{O\}$), și punctele distincte M și N pe dreapta *d*, astfel încât MO = ON. Demonstrează că $\Delta AOM \equiv \Delta BON$.

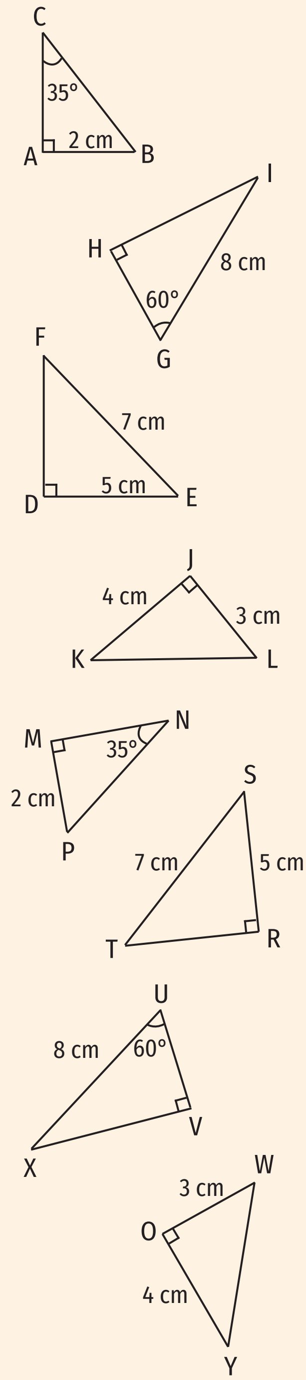
7. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). Perpendiculara în punctul B pe dreapta AB intersectează perpendiculara în punctul C pe dreapta AC în punctul D. Demonstrează că $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$.

8. Fie BB' și CC' ($B' \in AC$, $C' \in AB$) înălțimile triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Demonstrează că $\Delta ABB' \equiv \Delta ACC'$.

9. Fie *d* o dreaptă, A un punct care nu aparține acesteia și A' simetricul punctului A față de dreapta *d*. Demonstrează că, pentru orice punct $M \in d$, $\Delta AOM \equiv \Delta A'OM$, unde $\{O\} = AA' \cap d$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Identificați, printre triunghiurile de mai jos, triunghiuri congruente, demonstrați congruența acestora folosind cazurile de congruență și scrieți congruențele celorlalte elemente.



5. Metoda triunghiurilor congruente

Descopăr

1. Fie M un punct pe bisectoarea unghiului XOY. Punctul A este piciorul perpendicularei duse din punctul M pe dreapta OX, iar punctul B este piciorul perpendicularei duse din punctul M pe dreapta OY.

i) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei.

ii) Demonstrează că triunghiurile OAM și OBM sunt congruente.

iii) Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Segmentele MA și MB sunt ... .

b) Distanța de la punctul M la dreapta OX este ... cu distanța de la punctul M la dreapta OY.

2. Dreapta d este mediatoarea segmentului AB, $AB \cap d = \{M\}$ și P este un punct oarecare pe dreapta d.

i) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei.

ii) Demonstrează că triunghiurile AMP și BMP sunt congruente.

iii) Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Segmentele PA și PB sunt ... .

b) Punctul P este ... depărtat de capetele segmentului AB.

Învăț

Metoda triunghiurilor congruente se folosește pentru a stabili congruențele între elementele corespunzătoare a două triunghiuri. Astfel, pe baza criteriilor de congruență, demonstrăm congruența celor două triunghiuri, iar, pe baza definiției congruenței a două triunghiuri, obținem congruența celorlalte elemente ale triunghiurilor.

Aplicații:

1. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi

Teorema 1. **Orice punct de pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile acestuia.**

Pentru a demonstra această teoremă considerăm un unghi XOY și un punct oarecare, M, pe bisectoarea acestuia (figura 1).

Ipoteză: OM e bisectoarea unghiului XOY

Concluzie: $d(M, OX) = d(M, OY)$

Demonstrație:

Fie $A \in OX$ astfel încât $MA \perp OX$ și $B \in OY$ astfel încât $MB \perp OY$ (figura 1) $\Rightarrow$ $\sphericalangle OAM = 90°$, $\sphericalangle OBM = 90°$, $d(M, OX) = MA$, $d(M, OY) = MB$.

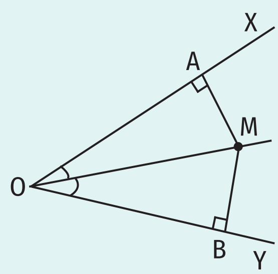


Figura 1

Semidreapta OM e bisectoarea unghiului XOY $\Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$.

În triunghiurile dreptunghice ΔOAM și ΔOBM ($\sphericalangle OAM = OBM = 90°$) avem

$$\left.\begin{array}{l} OM \equiv OM \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(IU)}]{} \Delta OAM \equiv \Delta OBM \Rightarrow MA \equiv MB \Rightarrow d(M, OX) = d(M, OY).$$

2. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment

Teorema 2. **Dacă un punct aparține mediatoarei unui segment, atunci el este egal depărtat de capetele segmentului.**

Pentru a demonstra această teoremă considerăm un segment AB și un punct oarecare P, pe mediatoarea acestuia, dreapta *d* (figura 2).

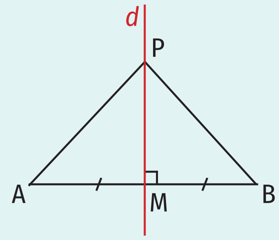


Figura 2

Ipoteză: d este mediatoarea segmentului AB, $P \in d$

Concluzie: $PA \equiv PB$

Demonstrație:

Fie $\{M\} = d \cap AB \Rightarrow$ M e mijlocul segmentului AB $\Rightarrow AM \equiv MB$

d e mediatoarea segmentului AB $\Rightarrow d \perp AB \Rightarrow \sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP = 90°$.

În triunghiurile dreptunghice ΔAMP și ΔBMP ($\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} MP \equiv MP \text{ (latură comună)} \\ AM \equiv BM \end{array}\right\} \xRightarrow[(CC)]{} \Delta AMP \equiv \Delta BMP \Rightarrow PA \equiv PB.$$

Exerciții rezolvate

1. În figura 3 este reprezentat triunghiul oarecare ABC și mediana AM a acestuia. Demonstrează că $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

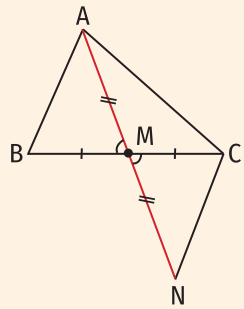


Figura 3

Rezolvare:

Ipoteză: ΔABC – triunghi oarecare, AM mediană

Concluzie: $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$

Demonstrație:

AM este mediană în triunghiul ABC $\Rightarrow BM \equiv MC$ (1)

Fie N simetricul punctului A față de punctul M $\Rightarrow$ A, M, N sunt coliniare, $AM \equiv MN$ (2)

În triunghiurile ΔAMB și ΔNMC avem

$$\left.\begin{array}{r} BM \equiv CM \text{ din (1)} \\ \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle NMC \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \\ AM \equiv MN \text{ din (2)} \end{array}\right\} \xRightarrow[(LUL)]{} \Delta AMB \equiv \Delta NMC \Rightarrow AB \equiv NC \text{ (3)}$$

În triunghiul ANC, $AN < AC + CN. \xRightarrow{(2) \text{ și } (3)} 2AM < AC + AB \Rightarrow AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

2. Se consideră două puncte distincte, A și B, și un punct M care nu aparține dreptei AB. Punctul M′ este simetricul punctului M față de dreapta AB. Demonstrează că semidreapta AB este bisectoarea unghiului MAM′ (figura 4).

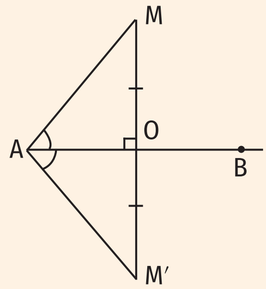


Figura 4

Rezolvare:

Ipoteză: $M \notin AB$, M′ este simetricul punctului M față de dreapta AB

Concluzie: AB este bisectoarea unghiului MAM′

Demonstrație:

Fie $\{O\} = MM' \cap AB$. Cum M′ este simetricul punctului M față de dreapta AB, avem $MO \equiv M'O$ și $MM' \perp AB$, de unde rezultă $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle AOM' = 90°$.

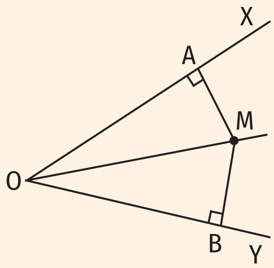


Figura 5

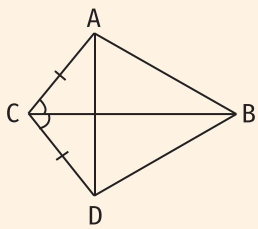


Figura 6

În triunghiurile dreptunghice ΔAOM și $\Delta AOM'$ ($\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle AOM' = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} AO \equiv AO \text{ (latură comună)} \\ MO \equiv M'O \end{array}\right\} \underset{(CC)}{\Longrightarrow} \Delta AOM \equiv \Delta AOM' \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle M'AO \\ AO \subset \text{Int}(\sphericalangle MAM') \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ AB este bisectoarea unghiului MAM'.

Aplic

1. În figura 5, este reprezentat unghiul XOY și punctele A, B și M, astfel încât $A \in OX$, $B \in OY$, $M \in \text{Int}(\sphericalangle XOY)$, $MA \perp OX$, $MB \perp OY$ și $MA \equiv MB$. Demonstrează că semidreapta OM este bisectoarea unghiului XOY.
2. În figura 6 sunt reprezentate punctele A, B, C și D, astfel încât $AC \equiv CD$ și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DCB$. Demonstrează că $AB \equiv DB$ și $CB \perp AD$.
3. În figura 7 sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice ACM și BDN ($\sphericalangle ACM = \sphericalangle BDN = 90°$). Punctele A, B, C și D sunt coliniare, $AM \equiv BN$ și $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle DBN$. Demonstrează că $AB \equiv DC$ și $CN \equiv DM$.

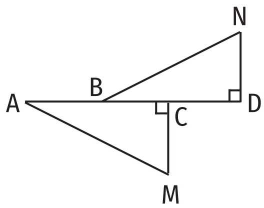


Figura 7

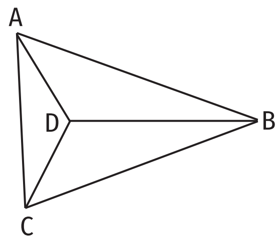


Figura 8

4. În figura 8 este reprezentat triunghiul ABC cu $AB \equiv CB$. Punctul D aparține interiorului triunghiului ABC, astfel încât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$. Demonstrează că triunghiul ADC este isoscel.
5. Pe laturile OX și OY ale unghiului XOY se consideră punctele A și, respectiv, B, astfel încât $OA \equiv OB$. Demonstrează că $MA \equiv MB$, unde M este un punct oarecare pe bisectoarea unghiului XOY.
6. Triunghiul ABC din figura 9 este isoscel ($AB \equiv AC$). Punctele M și N aparțin dreptelor AC și, respectiv, AB astfel încât punctul A aparține segmentelor CM și BN și $AM \equiv AN$. Demonstrează că $MB \equiv NC$.

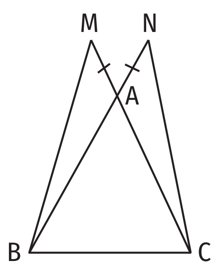


Figura 9

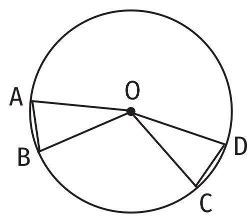


Figura 10

7. În figura 10, punctele A, B, C și D aparțin cercului cu centrul O, astfel încât $AB \equiv CD$. Demonstrează că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.
8. În triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) AM este mediană, iar punctele N și P aparțin laturilor AB și, respectiv, AC astfel încât $AN = AP$. Demonstrează că:

a) $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$; b) $MN \equiv MP$.

9. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC cu AB = AC = 10 cm se consideră punctele M și, respectiv, N astfel încât AM = 3 cm și NC = 7 cm. Demonstrează că BN $\equiv$ CM (figura 11).

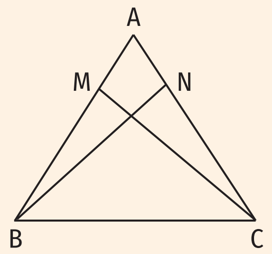


Figura 11

10. În figura 12 sunt reprezentate dreptele *a* și *b* care se intersectează în punctul O. Punctele A și B aparțin dreptei *a*, astfel încât punctul B este simetricul punctului A față de punctul O, iar punctele C și D aparțin dreptei *b*, astfel încât punctul D este simetricul punctului C față de punctul O. Demonstrează că:

a) AD $\equiv$ BC; b) AC $\parallel$ DB.

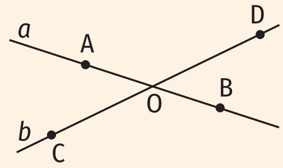


Figura 12

11. Se consideră un triunghi ABC și O un punct în interiorul acestuia. Fie M simetricul punctului O față de dreapta AB și N simetricul punctului O față de dreapta AC. Demonstrează că:

a) BO $\equiv$ BM; b) CO $\equiv$ CN; c) AO $\equiv$ AM $\equiv$ AN.

12. Fie A și B două puncte distincte și M un punct care nu aparține dreptei AB. Punctul A′ este simetricul punctului A față de punctul M, iar punctul B′ simetricul punctului B față de punctul M. Demonstrează că:

a) AB′ $\equiv$ A′B; b) AB $\parallel$ A′B′.

13. În figura 13 sunt reprezentate dreptele concurente AN și BM, AN $\cap$ BM = {O}. Unghiurile AMB și BNA sunt unghiuri drepte și MO $\equiv$ NO. Demonstrează că:

a) AM $\equiv$ BN; b) ΔAMB $\equiv$ ΔBNA.

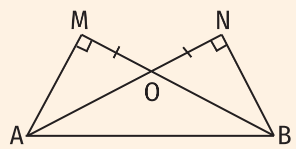


Figura 13

14. Fie *d* o dreaptă, A și B două puncte distincte situate de aceeași parte a dreptei *d*. Notăm cu A′ și B′ simetricele punctelor A și B față de dreapta *d*. Demonstrează că AB $\equiv$ A′B′ și A′B $\equiv$ AB′ .

15. Se consideră un triunghi ABC. Punctul D este mijlocul laturii BC, iar triunghiurile ABD și ACD au același perimetru. Demonstrează că:

a) $\sphericalangle$ABD $\equiv$ $\sphericalangle$ACD; b) AD $\perp$ BC.

16. În figura 14, punctul M reprezintă un depozit, iar punctele N, P, Q și R reprezintă magazinele care sunt aprovizionate din acel depozit. Punctele M, N și P sunt coliniare, punctele R și Q sunt de o parte și de alta a dreptei MN, astfel încât NR $\equiv$ NQ și RP $\equiv$ QP. Un camion cu marfă pleacă din depozit și aprovizionează magazinele R și P, parcurgând traseul M-R-P. Un alt camion pleacă din depozit și aprovizionează magazinele Q și P, parcurgând traseul M-Q-P. Demonstrează că cele două camioane parcurg aceeași distanță.

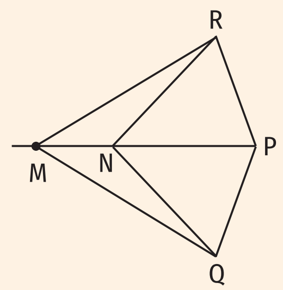
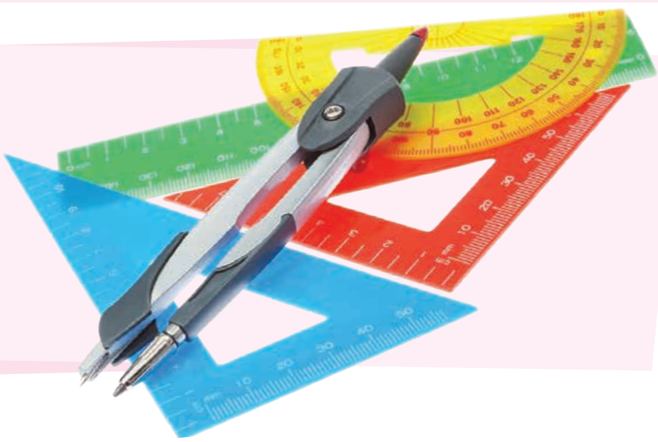


Figura 14

Portofoliu

Rezolvă cerințele următoare pe o coală de hârtie și adaug-o la portofoliu.

1. Enunță și demonstrează reciproca teoremei 1 (vezi pagina 200).
2. Enunță și demonstrează reciproca teoremei 2 (vezi pagina 201).



6. Proprietăți ale triunghiului isoscel

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *isoscel* e compus din două cuvinte ce provin din limba greacă:
isos = egal și
schelos = picior.

Descopăr

Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB \equiv AC$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează dreapta BC în punctul D.

a) Demonstrează că $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ și scrie congruențele dintre elementele acestor triunghiuri.

b) Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

Semidreapta AD este ... unghiului ... .

Segmentul AD este o ... și o ... a triunghiului isoscel ABC.

Dreapta AD este ... segmentului ... .

Dreapta AD este axa de ... a triunghiului ABC.

Învăț

Ne amintim că **un triunghi care are două laturi congruente se numește triunghi isoscel**, iar cea de-a treia latură a acestuia se numește baza triunghiului.

Triunghiul isoscel are câteva proprietăți importante pe care le vom enunța în continuare.

***Teorema 1.* Într-un triunghi isoscel unghiurile alăturate bazei sunt congruente.**

Pentru a demonstra această teoremă considerăm un triunghi isoscel ABC cu $AB \equiv AC$ (figura 1).

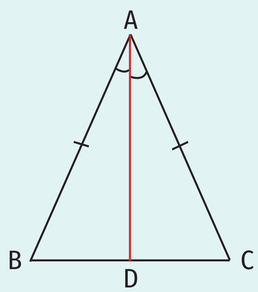


Figura 1

Ipoteză: ΔABC este isoscel ($AB \equiv AC$)

Concluzie: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$

Demonstrație:

Construim bisectoarea unghiului BAC și notăm cu D punctul în care aceasta intersectează latura BC a triunghiului. Astfel, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.

În triunghiurile ABD și ACD avem:

$$\left.\begin{array}{r} AB \equiv AC \\ \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \\ AD \equiv AD \text{ (latură comună)} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(LUL)}]{} \Delta ABD \equiv \Delta ACD \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$$

Din congruența triunghiurilor ABD și ACD rezultă și congruențele: $BD \equiv DC$, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$.

Cum punctele B, D și C sunt coliniare și $BD \equiv DC$ rezultă că AD este mediana corespunzătoare bazei triunghiului isoscel ABC.

Unghiurile ADB și ADC sunt congruente și suplementare, de unde rezultă $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90°$, adică $AD \perp BC$. Așadar, AD este o înălțime a triunghiului ABC.

Cum punctele B, D și C sunt coliniare, $BD \equiv DC$ și $AD \perp BC$, obținem că dreapta AD este mediatoarea segmentului BC.

Aceste rezultate pot fi formulate astfel:

Teorema 2. **Într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului opus bazei, mediana și înălțimea corespunzătoare bazei sunt incluse în mediatoarea bazei.**

Cu alte cuvinte, în triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) din figura 2, semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC, segmentul AD este o mediană și o înălțime a triunghiului ABC, iar dreapta AD este mediatoarea segmentului BC.

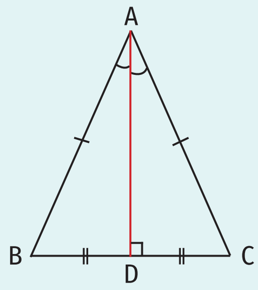


Figura 2

Teorema 3. **Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci este triunghi isoscel.**

Pentru a demonstra această teoremă considerăm un triunghi ABC cu $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (figura 3).

Ipoteză: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$

Concluzie: ΔABC este isoscel

Demonstrație:

$\Delta ABC \equiv \Delta ACB$ conform cazului de congruență ULU ($\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, $BC \equiv CB$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$) $\Rightarrow AB \equiv AC \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel

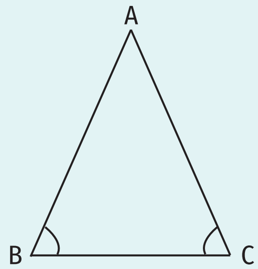


Figura 3

Teorema 4. **Dacă într-un triunghi o înălțime este inclusă într-o bisectoare, atunci triunghiul este isoscel.**

Pentru a demonstra această teoremă considerăm un triunghi ABC. Bisectoarea unghiului BAC intersectează dreapta BC în punctul D (figura 4).

Ipoteză: AD – bisectoarea unghiului BAC, $AD \perp BC$

Concluzie: ΔABC este isoscel

Demonstrație:

AD e bisectoarea unghiului BAC $\Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$

$AD \perp BC \Rightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90°$

În triunghiurile dreptunghice ABD și ACD ($\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} AD \equiv AD \\ \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \end{array}\right\} \xRightarrow[(CU)]{} \Delta ABD \equiv \Delta ACD \Rightarrow AB \equiv AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ este isoscel}$$

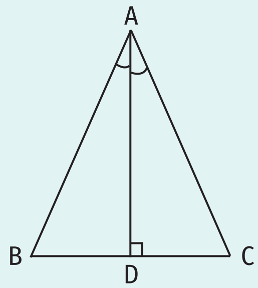


Figura 4

Teorema 5. **Dacă într-un triunghi o mediană este inclusă într-o bisectoare, atunci triunghiul este isoscel.**

Pentru a demonstra această teoremă considerăm un triunghi ABC. Bisectoarea unghiului BAC intersectează dreapta BC în punctul D (figura 5).

Ipoteză: AD e bisectoarea unghiului BAC, AD e mediană a triunghiului ABC

Concluzie: ΔABC este isoscel

Demonstrație:

AD este bisectoarea unghiului BAC $\Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ (1)

AD este mediană a triunghiului ABC $\Rightarrow BD \equiv CD$

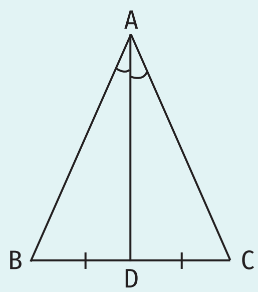


Figura 5

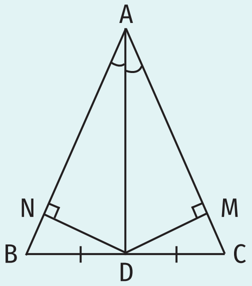


Figura 6

Fie $M \in AC$ și $N \in AB$, astfel încât $DM \perp AC$ și $DN \perp AB$ (figura 6).

În triunghiurile dreptunghice ADN și ADM ($\sphericalangle AND = \sphericalangle AMD = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} AD \equiv AD \\ \sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle MAD \text{ din (1)} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(IU)}]{} \Delta ADN \equiv \Delta ADM \Rightarrow AN \equiv AM,\ DN \equiv DM$$

În triunghiurile dreptunghice BDN și CDM ($\sphericalangle BND = \sphericalangle CMD = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} BD \equiv CD \\ DN \equiv DM \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(IC)}]{} \Delta BDN \equiv \Delta CDM \Rightarrow BN \equiv CM$$

$$\left.\begin{array}{r} AN \equiv AM \\ BN \equiv CM \end{array}\right\} \Rightarrow AB \equiv AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ este isoscel}$$

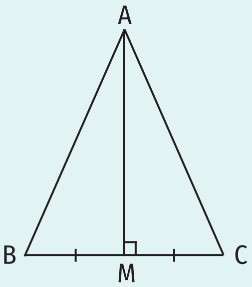


Figura 7

Teorema 6. **Dacă într-un triunghi o mediană este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel.**

Pentru a demonstra această teoremă considerăm un triunghi ABC. AM este o mediană și o înălțime a triunghiului ABC (figura 7).

Ipoteză: AM – mediană și înălțime în ΔABC.

Concluzie: ΔABC este isoscel

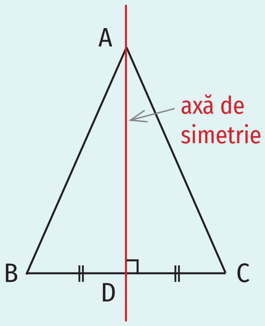
Demonstrație:

AM e mediană în $\Delta ABC \Rightarrow BM \equiv CM$

AM e înălțime în $\Delta ABC \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow \sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 90°$

În triunghiurile dreptunghice ABM și ACM ($\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} AM \equiv AM \\ BM \equiv CM \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(CC)}]{} \Delta ABM \equiv \Delta ACM \Rightarrow AB \equiv AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ este isoscel}$$



Dreapta AD este axa de simetrie a triunghiului isoscel ABC.

Figura 8

Teorema 7. **Într-un triunghi isoscel, mediatoarea bazei este axa de simetrie a triunghiului** (figura 8).

Teorema 8. **Dacă într-un triunghi mediatoarea unei laturi este axă de simetrie a triunghiului, atunci triunghiul este isoscel.**

Exercițiu rezolvat

Demonstrează că medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

Rezolvare:

Pentru a rezolva această problemă considerăm un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$) și medianele corespunzătoare laturilor congruente, CN și BM (figura 9).

Ipoteză: ΔABC isoscel ($AB \equiv AC$), CN și BM sunt mediane în ΔABC

Concluzie: $BM \equiv CN$

Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{r} \text{CN este mediană în } \Delta ABC \Rightarrow BN = NA = \dfrac{AB}{2} \\ \text{BM este mediană în } \Delta ABC \Rightarrow CM = MA = \dfrac{AC}{2} \\ \Delta ABC \text{ isoscel } (AB \equiv AC) \end{array}\right\} \Rightarrow BN \equiv CM$$

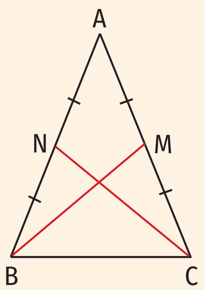


Figura 9

ΔABC isoscel ($AB \equiv AC$) $\Rightarrow$ $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$

În triunghiurile NBC și MCB avem:

$$\left.\begin{array}{r} BN \equiv CM \\ \sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle MCB \\ BC \equiv CB \text{ (latură comună)} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(LUL)}]{} \Delta NBC \equiv \Delta MCB \Rightarrow BM \equiv CN.$$

Aplic

1. Un unghi al unui triunghi isoscel are măsura egală cu 35°. Determină măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului. Analizează toate cazurile posibile.

2. Un unghi al unui triunghi isoscel are măsura egală cu 105°. Determină măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului.

3. Măsurile a două unghiuri ale unui triunghi isoscel sunt direct proporționale cu 2 și 5. Determină măsurile unghiurilor triunghiului.

4. Lungimile a două laturi ale unui triunghi isoscel sunt 8 cm și, respectiv, 4 cm. Calculează perimetrul triunghiului.

5. În figura 10 e reprezentat traseul pe care îl parcurge un paznic. Acesta pornește din punctul A, verifică obiectivele din punctele B și C și apoi ajunge din nou în A (parcurge traseul A-B-C-A). Știind că triunghiul ABC e isoscel și are o latură egală cu 5 km, iar lungimea traseului este egală cu 21 km, determină lungimile celorlalte laturi ale triunghiului ABC.

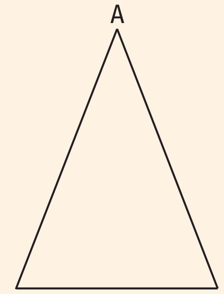


Figura 10

6. Construiește un triunghi isoscel care are perimetrul egal cu 23 cm și o latură cu lungimea egală cu 7 cm. Câte astfel de triunghiuri poți construi?

7. Construiește un triunghi isoscel care are perimetrul egal cu 24 cm, iar una dintre laturi are lungimea egală cu media aritmetică a lungimilor celorlalte laturi.

8. Stabilește natura triunghiului ABC, știind că $\sphericalangle ABC = 65°$ și $\sphericalangle BAC = 50°$.

9. Unghiurile B și A ale triunghiului ABC au măsurile egale cu $62°45'$ și, respectiv, $54°30'$. Stabilește natura triunghiului ABC.

10. Unul dintre unghiurile alăturate bazei triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$) are măsura egală cu 70°. Calculează măsura unghiului BIC, știind că punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

11. În figura 11 este reprezentat triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Punctele D și E aparțin dreptei BC, astfel încât punctul B aparține segmentului CD, punctul C aparține segmentului BE și $BD \equiv CE$. Demonstrează că triunghiul ADE este isoscel.

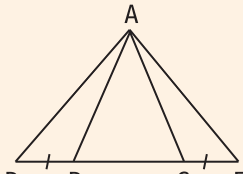
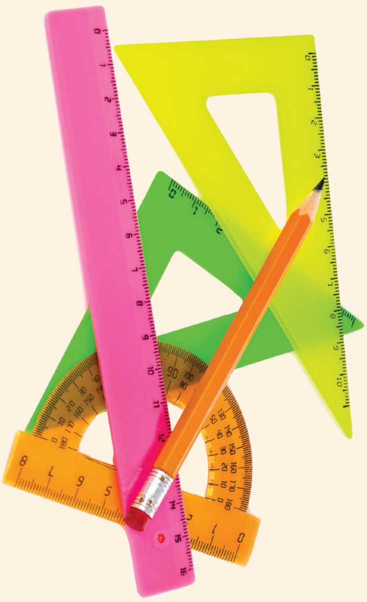


Figura 11

12. Demonstrează că înălțimile construite din vârfurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente.

13. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC. Bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în punctul D, iar bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul E. Demonstrează că $BD \equiv CE$.

14. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC. Punctul M este piciorul perpendicularei duse din punctul B pe dreapta AC, punctul N este piciorul perpendicularei duse din punctul C pe dreapta AB și $BM \equiv CN$. Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.



15. Se consideră triunghiul isoscel MNP cu baza NP și D un punct interior triunghiului astfel încât $\sphericalangle DNP \equiv \sphericalangle DPN$. Demonstrează că semidreapta MD este bisectoarea unghiului NMP.

16. Pe laturile AB și AC ale triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$) se consideră punctele M și, respectiv, N, astfel încât $AM \equiv AN$. Demonstrează că $AP \perp BC$, unde $\{P\} = BN \cap CM$.

17. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°$. Punctul D este piciorul perpendicularei duse din punctul A pe dreapta BC.

a) Determină măsura unghiului BAD.

b) Determină măsura unghiului ADE, unde E este mijlocul segmentului AB.

18. În triunghiul ascuțitunghic ABC, AD este înălțime, iar punctele M și N sunt picioarele perpendicularelor duse din punctul D pe dreptele AB și, respectiv, AC.

a) Demonstrează că, dacă $DM \equiv DN$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

b) Demonstrează că, dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci $DM \equiv DN$.

19. Fie AD ($D \in BC$) bisectoarea unghiului A al triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Determină lungimea segmentului AD, știind că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 36 cm și perimetrul triunghiului ABD este egal cu 25 cm.

20. Se consideră un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Semidreapta BE ($E \in AC$) este bisectoarea unghiului ABC. Paralela dusă prin punctul E la dreapta AB intersectează dreapta BC în punctul F. Demonstrează că triunghiurile FBE și EFC sunt isoscele.

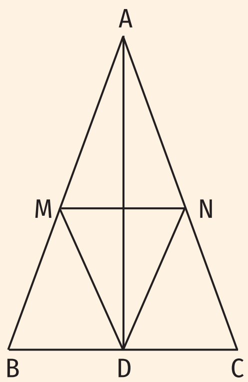


Figura 12

21. În figura 12 este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu baza BC și o înălțime a acestuia, AD. Punctele M și N aparțin segmentelor AB și, respectiv, AC, astfel încât $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle ADN$.

a) Demonstrează că $\Delta BDM \equiv \Delta CDN$.

b) Demonstrează că $AD \perp MN$.

22. Pe laturile AB și AC ale triunghiului isoscel ABC cu baza BC se consideră punctele D și, respectiv, E, astfel încât $BD \equiv CE$. Dreptele BE și CD se intersectează în punctul P.

a) Demonstrează că triunghiul PBC este isoscel.

b) Demonstrează că semidreapta AP este bisectoarea unghiului BAC.

23. Demonstrează că centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, ortocentrul și centrul de greutate ale unui triunghi isoscel sunt coliniare.

24. Fie ABC un triunghi isoscel cu AB = AC = 6 cm și BC = 4 cm. Punctul D este simetricul punctului A față de dreapta BC. Calculează perimetrul triunghiului DBC.

25. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC. Punctele D și E sunt simetricele punctelor B și C față de mijloacele segmentelor AC și, respectiv, AB.

a) Demonstrează că $AD \parallel BC$.

b) Demonstrează că punctele E, A și D sunt coliniare.

c) Demonstrează că punctul A este mijlocul segmentului DE.

d) Demonstrează că $DC \equiv EB$.

7. Proprietăți ale triunghiului echilateral

Descopăr

a) Construiește un triunghi echilateral cu latura egală cu 5 cm și notează-l ABC.

b) Demonstrează că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle CAB$.

c) Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

Unghiurile unui triunghi echilateral sunt ... .

Fiecare unghi al unui triunghi echilateral are măsura egală cu ...°.

d) Construiește înălțimile triunghiului ABC și demonstrează că acestea sunt mediane ale triunghiului și sunt incluse în bisectoarele unghiurilor triunghiului și în mediatoarele laturilor triunghiului.

ȘTIAȚI CĂ...?

Cuvântul *echilateral* e compus din două cuvinte ce provin din limba latină: *aequus = egal* și *latus-eris = latură*.

Învăț

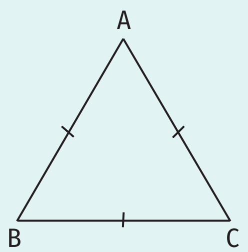


Figura 1

Ne amintim că **un triunghi care are toate laturile congruente se numește triunghi echilateral**.

Deoarece orice triunghi echilateral este și isoscel, triunghiul echilateral are toate proprietățile triunghiului isoscel.

Teorema 1. **Unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente și au fiecare măsura egală cu 60°.**

Demonstrație: Pentru a demonstra această teoremă considerăm un triunghi echilateral ABC (figura 1).

$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ isoscel cu baza } BC \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \\ AB \equiv BC \Rightarrow \Delta BAC \text{ isoscel cu baza } AC \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACB \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BAC$$

$$\left.\begin{array}{c} \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180° \\ \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BAC \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC = 180° : 3 = 60°$$

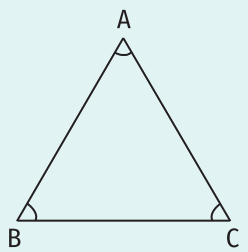


Figura 2

Teorema 2 (teorema reciprocă teoremei 1). **Dacă unghiurile unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este echilateral.**

Demonstrație: Fie un triunghi ABC cu $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC$ (figura 2).

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \Rightarrow \Delta ABC \text{ e isoscel cu baza } BC \Rightarrow AB \equiv AC \\ \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BAC \Rightarrow \Delta BAC \text{ e isoscel cu baza } AC \Rightarrow AB \equiv BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB \equiv AC \equiv BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ e echilateral}$$

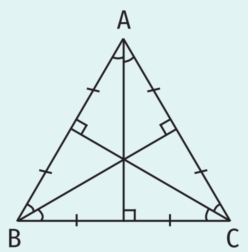


Figura 3

Teorema 3. **Într-un triunghi echilateral, bisectoarea unui unghi, mediana, înălțimea și mediatoarea corespunzătoare laturii opuse acestuia au aceeași dreaptă suport** (figura 3).

Demonstrație:

Fie ABC un triunghi echilateral și AD ($D \in BC$) bisectoarea unghiului BAC (figura 4).

$$\left.\begin{array}{r} \Delta ABC \text{ e echilateral} \Rightarrow AB \equiv AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ e isoscel cu baza } BC \\ AD\ (D \in BC) \text{ e bisectoarea unghiului } BAC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{segmentul } AD \text{ e}$$

mediană și înălțime a triunghiului ABC și dreapta AD e mediatoarea segmentului BC (conform proprietăților triunghiului isoscel).

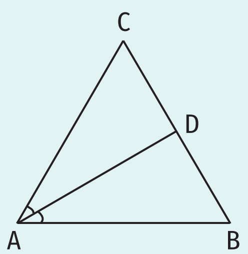


Figura 4

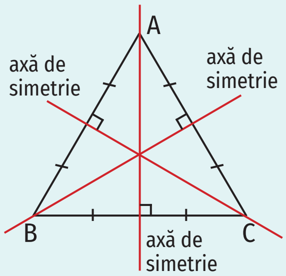


Figura 5

OBSERVAȚIE

Centrul de greutate, ortocentrul, centrul cercului circumscris și centrul cercului înscris într-un triunghi echilateral coincid.

***Teorema 4.* Mediatoarele laturilor unui triunghi echilateral sunt axe de simetrie ale triunghiului** (figura 5).

***Teorema 5.* Dacă mediatoarele laturilor unui triunghi sunt axe de simetrie ale triunghiului, atunci triunghiul este echilateral.**

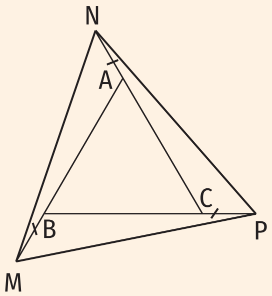


Figura 6

Exerciții rezolvate

1. Pe prelungirile laturilor unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $M \in AB$, $N \in AC$ și $P \in BC$, astfel încât $AN \equiv BM \equiv CP$ (figura 6). Demonstrează că triunghiul MNP este echilateral.

Rezolvare:

Ipoteză: ΔABC este echilateral;

$M \in AB$, $N \in AC$ și $P \in BC$, $AN \equiv BM \equiv CP$.

Concluzie: ΔMNP este echilateral.

Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{r} AM = AB + BM \\ BP = BC + CP \\ CN = CA + AN \\ AB \equiv BC \equiv CA \ (\Delta ABC \text{ este echilateral}) \\ BM \equiv CP \equiv AN \end{array}\right\} \Rightarrow AM \equiv BP \equiv CN$$

$$\left.\begin{array}{l} A, B, M \text{ sunt coliniare} \Rightarrow \sphericalangle MBP = 180° - \sphericalangle ABC \\ B, C, P \text{ sunt coliniare} \Rightarrow \sphericalangle PCN = 180° - \sphericalangle ACB \\ C, A, N \text{ sunt coliniare} \Rightarrow \sphericalangle NAM = 180° - \sphericalangle BAC \\ \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BAC \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle PCN \equiv \sphericalangle NAM$$

În triunghiurile NAM, MBP și PCN avem:

$$\left.\begin{array}{r} AN \equiv BM \equiv CP \\ \sphericalangle NAM \equiv \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle PCN \\ AM \equiv BP \equiv CN \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(LUL)}]{} \Delta NAM \equiv \Delta MBP \equiv \Delta PCN \Rightarrow NM \equiv MP \equiv PN \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta MNP$ este echilateral

2. În figura 7 este reprezentat triunghiul echilateral ABC în interiorul căruia se consideră punctul D, astfel încât $\sphericalangle ABD = 13°$ și $\sphericalangle ACD = 17°$. Demonstrează că triunghiul BDC este dreptunghic.

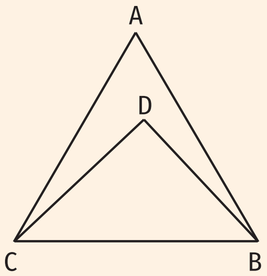


Figura 7

Rezolvare:

Ipoteză: ΔABC echilateral

$D \in \text{Int}\,\Delta ABC$, $\sphericalangle ACD = 13°$, $\sphericalangle ABD = 17°$

Concluzie: ΔBDC este dreptunghic.

Demonstrație:

ΔABC este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC = 60°$

$\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACD = 60° - 17° = 43°$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD = 60° - 13° = 47°$

$\sphericalangle CDB = 180° - (\sphericalangle DCB + \sphericalangle DBC) = 180° - (47° + 43°) = 90° \Rightarrow \Delta BDC$ este dreptunghic.

Aplic

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Perimetrul unui triunghi echilateral a cărui latură are lungimea egală cu 12,4 cm este egal cu ...

b) Unghiurile exterioare unui triunghi echilateral sunt ... și au măsura egală cu ...°.

c) Triunghiul echilateral are ... axe de simetrie.

d) Lungimea laturii unui triunghi echilateral cu perimetrul egal cu 19,5 cm este egală cu ... cm.

2. Demonstrează că un triunghi isoscel care are un unghi cu măsura egală cu 60° este echilateral.

3. Demonstrează că un triunghi isoscel care are un unghi exterior cu măsura egală cu 120° este triunghi echilateral.

4. Un triunghi isoscel și un triunghi echilateral au perimetrele egale. Latura triunghiului echilateral are lungimea egală cu 8 cm, iar baza triunghiului isoscel are lungimea egală cu 6 cm. Determină lungimea uneia dintre laturile congruente ale triunghiului isoscel.

5. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC. Punctul M este mijlocul segmentului BC, $\sphericalangle BAM = 30°$ și MC = 8 cm. Determină perimetrul triunghiului ABC.

6. Demonstrează că medianele unui triunghi echilateral sunt congruente.

7. Pe laturile triunghiului echilateral ABC se consideră punctele $M \in BC$, $N \in AB$ și $P \in AC$, astfel încât $AN \equiv BM \equiv CP$. Demonstrează că triunghiul MNP este echilateral.

8. Pe laturile BC și AB ale unui triunghiului echilateral ABC se consideră punctele E și, respectiv, F astfel încât EF || AC. Demonstrează că triunghiul BEF este echilateral.

9. Fie ABC un triunghi echilateral cu AB = 5 cm. Punctul A′ este simetricul punctului A față de BC, punctul B′ este simetricul punctului B față de AC și punctul C′ este simetricul punctului C față de AB.

a) Demonstrează că punctele A′, B, C′ sunt coliniare.

b) Calculează perimetrul triunghiului A′B′C′.

10. Fie H ortocentrul triunghiului echilateral ABC. Demonstrează că $AH \equiv BH \equiv CH$.

11. În figura 8 este reprezentat triunghiul echilateral ABC în exteriorul căruia s-au construit triunghiurile ABM, BCN și ACP, astfel încât AM = MB = BN = NC = CP = PA. Demonstrează că triunghiul MNP e echilateral.

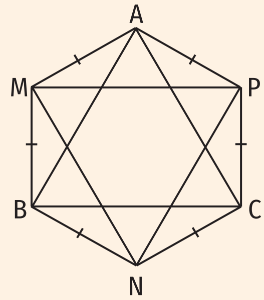


Figura 8

12. Fie un triunghi echilateral ABC. Punctul M este simetricul punctului A față de dreapta BC. Demonstrează că triunghiul MBC este echilateral.

8. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic

Descopăr

1. a) Construiește triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm.

b) Măsoară ipotenuza BC și compară BC^2 cu $AB^2 + AC^2$. Ce observi?

c) Construiește mediana AM, măsoar-o și compară lungimea acesteia cu lungimea ipotenuzei. Ce constați?

2. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și $AB = 3$ cm.

a) Determină măsura unghiului ABC.

b) Desenează triunghiul dreptunghic ABC.

c) Măsoară ipotenuza triunghiului ABC și compară lungimea acesteia cu lungimea catetei AB. Ce constați?

Învăț

Ne amintim că **un triunghi care are un unghi drept se numește triunghi dreptunghic**. Laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**.

În figura 1 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$. În acest caz, laturile AB și AC se numesc catete, iar latura BC se numește ipotenuză.

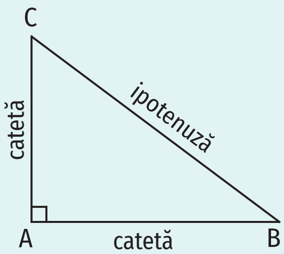


Figura 1

OBSERVAȚII

1. Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare.

2. Fiecare dintre unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic isoscel are măsura egală cu 45°.

Teorema medianei. **Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.**

Demonstrație:

Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și M mijlocul ipotenuzei BC (figura 2).

În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ de unde rezultă că $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC = 90°$.

Fie N simetricul punctului A față de punctul M. Atunci punctele A, M și N sunt coliniare, $AM \equiv MN$, $AN = 2 \cdot AM$. (1)

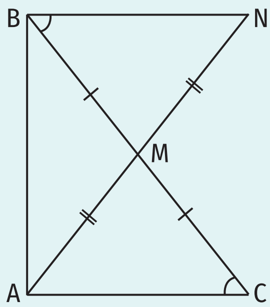


Figura 2

În triunghiurile AMC și NMB avem:

$$\left.\begin{array}{r} MC \equiv MB \\ \sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle NMB \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \\ AM \equiv NM \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(LUL)}]{} \Delta AMC \equiv \Delta NMB \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle NBM \text{ (2)} \\ AC \equiv BN \end{array}\right.$$

$$\sphericalangle ABN = \sphericalangle ABM + \sphericalangle NBM \overset{(2)}{\Longrightarrow} \sphericalangle ABN = \sphericalangle ABM + \sphericalangle ACM = 90°$$

În triunghiurile dreptunghice BAC și ABN ($\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABN = 90°$) avem:

$$\left.\begin{array}{r} AC \equiv BN \\ AB \equiv AB \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(CC)}]{} \Delta BAC \equiv \Delta ABN \Rightarrow BC \equiv AN \overset{(1)}{\Longrightarrow} BC = 2 \cdot AM \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

OBSERVAȚIE

Conform teoremei medianei, punctul care reprezintă mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal depărtat de vârfurile acestuia, deci centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.

***Reciproca teoremei medianei:* Dacă mediana unui triunghi este egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic și ipotenuza lui este latura corespunzătoare medianei.**

Demonstrație:

Fie ABC un triunghi și M mijlocul laturii BC (figura 3).

$AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM \equiv MB \equiv MC$

$AM \equiv MC \Rightarrow \Delta AMC$ este isoscel cu baza $AC \Rightarrow \sphericalangle CAM = \sphericalangle MCA = x$

$AM \equiv MB \Rightarrow \Delta AMB$ este isoscel cu baza $AB \Rightarrow \sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = y$

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAM + \sphericalangle MAB = x + y$

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180° \Rightarrow (x + y) + x + y = 180° \Rightarrow 2(x + y) = 180° \Rightarrow$
$x + y = 90° \Rightarrow \sphericalangle CAB = 90° \Rightarrow \Delta ABC$ e dreptunghic.

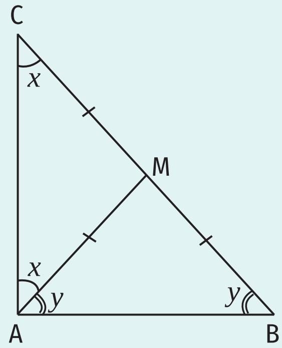


Figura 3

***Teorema unghiului de 30°*. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea catetei opuse unghiului cu măsura de 30° este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.**

Demonstrație:

Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle C = 30°$ (figura 4).

Punctul M este mijlocul ipotenuzei BC. $\xrightarrow{\text{T. medianei}} AM \equiv BM \equiv MC$

În triunghiul ABC, $\sphericalangle ABC = 180° - (\sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC) = 180° - (30° + 90°) = 60°$.

În triunghiul ABM, $AM \equiv BM$ și $\sphericalangle ABC = 60°$, de unde rezultă că ΔABM e echilateral, deci $AB \equiv AM \equiv BM$.

Cum $BM = \frac{BC}{2}$, obținem $AB = \frac{BC}{2}$, adică lungimea catetei opuse unghiului cu măsura egală cu 30° este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

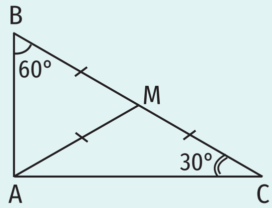


Figura 4

***Teorema reciprocă.* Dacă într-un triunghi dreptunghic o catetă are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci unghiul care se opune acestei catete are măsura egală cu 30°.**

Demonstrație:

Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AB = \frac{BC}{2}$ (figura 5).

Punctul M este mijlocul ipotenuzei BC $\xrightarrow{\text{T. medianei}} AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$

$AB = BM = AM \Rightarrow \Delta ABM$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle ABM = 60°$

În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 60°$, de unde rezultă $\sphericalangle C = 30°$.

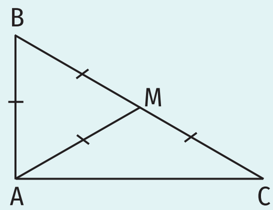


Figura 5

ȘTIAȚI CĂ...?

Numerele b, c, a formează un triplet de numere pitagoreice dacă $b^2 + c^2 = a^2$.

Exemple de numere pitagoreice:

- 3, 4, 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$);
- 5, 12, 13 ($5^2 + 12^2 = 13^2$);
- 8, 15, 17 ($8^2 + 15^2 = 17^2$).

***Teorema lui Pitagora:* Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.**

Altfel spus, în triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

***Reciproca teoremei lui Pitagora.* Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii celei de a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.**

Altfel spus, dacă în ΔABC avem $AB^2 + AC^2 = BC^2$, atunci ΔABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$.

Exerciții rezolvate

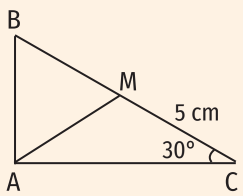


Figura 6

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $\sphericalangle C = 30°$. Punctul M este mijlocul ipotenuzei triunghiului ABC și MC = 5 cm. Calculează perimetrul triunghiului ABM (figura 6).

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta ABC \text{ e dreptunghic în } A\\ M \text{ e mijlocul segmentului } BC\end{array}\right| \xrightarrow{\text{T. medianei}} AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM = BM = MC = 5 \text{ cm}$$

În ΔABC, $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180° \Rightarrow 90° + \sphericalangle B + 30° = 180° \Rightarrow \sphericalangle B = 60°$

Cum $AM = BM = 5$ cm și $\sphericalangle B = 60°$ rezultă că ΔABM e echilateral, deci $P_{\Delta ABM} = 3 \cdot AM = 15$ cm.

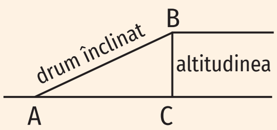


Figura 7

2. David parcurge cu mașina un drum înclinat AB, AB = 400 m. Știind că drumul face cu orizontala AC un unghi cu măsura egală cu 30° ($\sphericalangle BAC = 30°$), determină cu cât crește altitudinea la care se află mașina după parcurgerea drumului AB (figura 7).

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta ABC \text{ dreptunghic în } C\\ \sphericalangle A = 30°\end{array}\right| \Rightarrow BC = \frac{AB}{2} \Rightarrow BC = 200 \text{ m}.$$

3. În figura alăturată este reprezentată schematic o scară formată din 16 trepte identice. O treaptă (reprezentată prin triunghiul dreptunghic ABC) are înălțimea AB = 15 cm și lățimea BC = 36 cm (figura 8). Determină lungimea scării (AD).

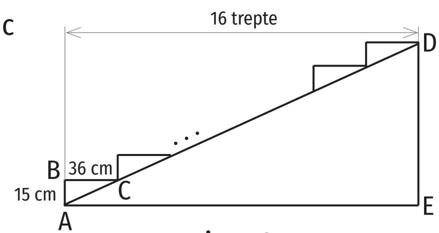


Figura 8

Rezolvare:

$AD = 16AC$.

$$\Delta ABC\ (\sphericalangle B = 90°) \xrightarrow{\text{T. Pitagora}} AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 15^2 + 36^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2 = 225 + 1296 \Rightarrow AC^2 = 1\,521$$

Descompunem în produs de factori primi numărul 1 521 și obținem

$1521 = 3^2 \cdot 13^2 = 39^2$.

$AC^2 = 39^2 \Rightarrow AC = 39$ cm; $AD = 16 \cdot 39$ cm $= 624$ cm $= 6{,}24$ m.

Aplic

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu măsura unghiului B egală cu 68°. Determină măsura unghiului ACB.
2. Calculează măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic, știind că unul dintre unghiurile exterioare ale acestui triunghi are măsura egală cu 128°.
3. Măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt direct proporționale cu 2 și 8. Determină măsurile unghiurilor triunghiului.
4. Un unghi al unui triunghi dreptunghic are măsura de 5 ori mai mică decât a altui unghi al triunghiului. Determină măsurile unghiurilor triunghiului.
5. Măsurile unghiurilor ascuțite ale un triunghi dreptunghic sunt invers proporționale cu 0,5 și $\frac{1}{7}$. Determină măsura unghiurilor ascuțite ale triunghiului.
6. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea egală cu 48 cm. Determină lungimea medianei duse din vârful unghiului drept al triunghiului.
7. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, $\sphericalangle B = 60°$ și BC = 16 cm. Determină lungimea catetei AB.
8. Măsurile unghiurilor A, B, și C ale triunghiului ABC sunt direct proporționale cu numerele 3, 2 și 1. Punctul M este mijlocul laturii BC. Demonstrează că:

   a) triunghiul ABC este dreptunghic în A;

   b) triunghiul ABM este echilateral.
9. În triunghiul ΔABC, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și M este mijlocul laturii BC. Completează tabelul de mai jos.

AB	BC	AM	$P_{\Delta ABM}$
3 cm			
	10 cm		
		6 cm	
			21 cm

10. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și AB = 6,5 cm. Punctul M este simetricul punctului B față de dreapta AC, iar punctul N este simetricul punctului C față de punctul A. Determină perimetrul triunghiului BMN.
11. Fie triunghiul dreptunghic DAN cu $\sphericalangle A = 90°$ și DN = 18 cm. Punctul M este mijlocul laturii DN și $\sphericalangle AMN = 120°$. Determină perimetrul triunghiului AMD.
12. Fie triunghiul dreptunghic ΔABC cu $\sphericalangle A = 90°$. Punctul M este mijlocul laturii BC. Completează tabelul următor.

AB	AC	BC	AM	$P_{\Delta ABC}$	$P_{\Delta ABM}$	$P_{\Delta ACM}$
6 cm	8 cm					
	12 cm	13 cm				
12 cm			10 cm			
7 cm	24 cm					
9 cm		41 cm				

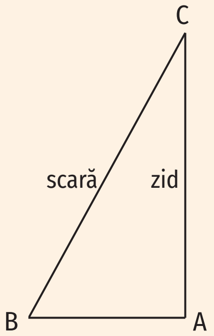


Figura 9

13. Determină perimetrul triunghiului dreptunghic ale cărui catete au lungimile egale cu 8 cm și, respectiv, 15 cm.

14. Un pompier se află în vârful unei scări (BC) cu lungimea egală cu 13 m. Scara este sprijinită de un zid (AC), iar distanța de la zid la piciorul scării este egală cu 5 m (AB = 5 m). La ce distanță de sol se află pompierul? (figura 9)

15. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 3, 4 și 5. Demonstrează că triunghiul este dreptunghic.

16. Precizează dacă *a*, *b*, *c* reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic:

a) a = 15 cm, b = 20 cm, c = 25 cm;
b) a = 10 dm, b = 26 dm, c = 24 dm;
c) a = 8 cm, b = 60 mm, c = 100 mm;
d) a = 2 cm, b = 3 cm, c = 4 cm;
e) a = 2 dm, b = 2,1 dm, c = 29 cm;
f) a = 1,6 cm, b = 3 cm, c = 34 mm.

17. Se consideră triunghiul ABC cu AB = AC = 26 cm și BC = 20 cm. Punctul D aparține segmentului BC, astfel încât AD ⊥ BC. Calculează lungimea segmentului AD.

18. Fie A și B două puncte care aparțin cercului cu centrul O și raza egală cu 10 cm, astfel încât AB = 16 cm. Calculează distanța de la centrul cercului la dreapta AB.

19. Fie M și N două puncte care aparțin cercului cu centrul O și raza egală cu 15 cm, astfel încât distanța de la centrul cercului la dreapta MN este egală cu 9 cm. Calculează perimetrul triunghiului MNO.

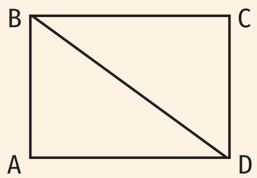


Figura 10

20. În figura 10 este reprezentat un teren sub forma unui dreptunghi ABCD. Dacă AB = 15 m și BD = 25 m, determină lungimea gardului necesar împrejmuirii terenului.

21. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ∢A = 90°, AB = 25 cm și AC = 12 cm. Pe latura AB se consideră punctul M astfel încât AM = 9 cm. Punctul D e simetricul punctului A față de mijlocul segmentului BC. Determină perimetrul triunghiului CMD.

22. În triunghiul MNP, ∢N = 45°, ∢P = 30°, MR ⊥ NP (R ∈ NP) și RS ⊥ MP (S ∈ MP). Dacă NR = 6 cm, determină lungimea segmentului MS.

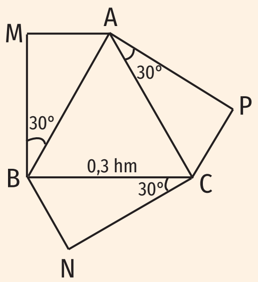


Figura 11

23. În figura 11 sunt reprezentate aleile dintr-un parc. Triunghiul ABC este echilateral cu AB = 0,3 km, iar triunghiurile AMB, BNC și CPA sunt dreptunghice (∢AMB = ∢BNC = ∢CPA = 90°) cu ∢ABM = ∢BCN = ∢CAP = 30°. Alin parcurge traseul M – A – B – N, iar Robert parcurge traseul P – C – A – B. Determină lungimea traseului parcurs de fiecare dintre cei doi.

24. Un teren în formă de triunghi dreptunghic are cele două laturi care formează unghiul drept egale cu 40 m și, respectiv, 30 m. Proprietarul plantează pomi pe toate laturile terenului pornind dintr-un vârf al triunghiului. Câți pomi plantează dacă distanța dintre doi pomi consecutivi este egală cu 2 m?

25. Se pot planta doi copaci la distanța de 24 m unul de celălalt într-o grădină în formă de dreptunghi cu dimensiunile 15 m și, respectiv, 20 m? Justifică.

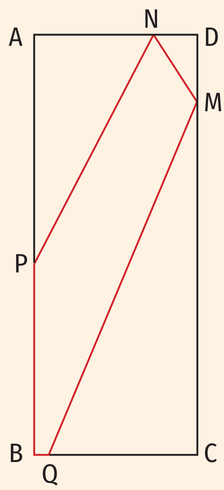


Figura 12

26. Figura 12 reprezintă schița unui loc de joacă care are forma unui dreptunghi ABCD cu AB = 28 m și AD = 11 m. Punctele M, N, P și Q aparțin segmentelor CD, AD, AB și, respectiv, BC, astfel încât DM = $\frac{1}{7}$CD; AN = 0,(72) · AD, $\frac{AP}{PB} = \frac{15}{13}$ și $\frac{BQ}{CQ} = 0,1$. Segmentele MN, NP, PB, BQ și MQ sunt trasate cu vopsea. Determină cantitatea de vopsea folosită pentru trasarea acestora, știind că, pentru trasarea unui segment cu lungimea de 10 m se folosesc 75 g de vopsea.

Exerciții recapitulative

1. Pe latura BC a triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$) se consideră punctele E și F, astfel încât $BE \equiv CF$. Demonstrează că triunghiul AEF este isoscel și $EF \parallel BC$.

2. În figura 1 sunt reprezentate triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) și triunghiurile echilaterale ABE și ACF. Demonstrează că $CE \equiv BF$ și triunghiul FEB e isoscel.

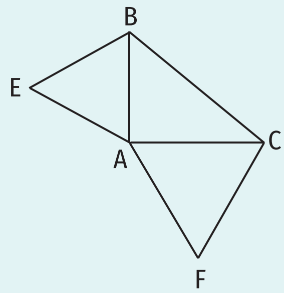


Figura 1

3. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC și perimetrul egal cu 48 cm și AD o înălțime a acestuia, BD = 9 cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB și, respectiv, AC.

a) Determină lungimea segmentului AD.

b) Demonstrează că $AD \perp MN$.

4. În figura 2 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$). Punctele D și M aparțin dreptei BC, astfel încât $AD \perp BC$ și $BM \equiv MC$. Demonstrează că triunghiul ACM e echilateral și calculează lungimea segmentului BC, știind că $\sphericalangle DAM = 30°$ și DM = 3 cm.

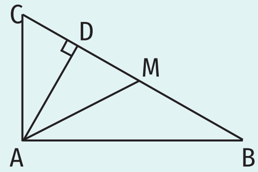


Figura 2

5. Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC cu AB = 10 cm și AC = 12 cm. Paralela dusă prin I la dreapta BC intersectează laturile AB și AC în punctele E și, respectiv, F. Determină perimetrul triunghiului AEF.

6. Demonstrează că mijloacele laturilor unui triunghi echilateral sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

7. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $D \in BC$, astfel încât $AD \perp BC$, punctele B și C sunt simetrice față de punctul D și AD = 10 cm.

a) Demonstrează că BC = 20 cm.

b) Determină măsura unghiului ABC.

8. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle C = 60°$. AD este o înălțime a triunghiului ABC. Determină valoarea fiecăruia dintre rapoartele $\frac{CD}{BC}$ și $\frac{BD}{AC}$.

9. În triunghiul ascuțitunghic ABC, $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$) și punctul F este mijlocul segmentului BC. Demonstrează că triunghiul FED este isoscel.

10. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\sphericalangle A = 135°$. Înălțimea din C a triunghiului ABC intersectează dreapta AB în punctul D, iar bisectoarele unghiurilor BAC și ADC se intersectează în punctul E. Demonstrează că triunghiul AEC este isoscel și $BE \equiv AE$.

11. Unghiul A al triunghiului isoscel ABC are măsura egală cu 120°. Punctele M și N aparțin dreptelor BC și, respectiv, AB, astfel încât AM și CN sunt înălțimi ale triunghiului ABC. Demonstrează că triunghiul AMN este isoscel.

12. În figura 3 este reprezentat triunghiul echilateral ABC. Pe laturile triunghiului se consideră punctele $D \in AB$, $E \in BC$ și $F \in AC$, astfel încât AD = BE = CF. Demonstrează că triunghiul MNP este echilateral, unde $AE \cap BF = \{M\}$, $BF \cap CD = \{N\}$ și $CD \cap AE = \{P\}$.

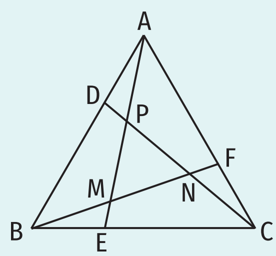


Figura 3

Timp de lucru: 40 de minute — **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I — **40 puncte**

15 puncte	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*
(5 p.)	**A.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $\sphericalangle A = 55°$ și $\sphericalangle P = 70°$, atunci: a) $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 105°$; c) ΔABC este dreptunghic în A; b) ΔMNP este isoscel; d) $\sphericalangle N = 60°$.
(5 p.)	**B.** Dacă punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului echilateral ABC, atunci măsura unghiului AMC este egală cu: a) 180°; b) 60°; c) 90°; d) 30°.
(5 p.)	**C.** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu 10 cm. Lungimea ipotenuzei este egală cu: a) 10 cm; b) 5 cm; c) 20 cm; d) 15 cm.
20 puncte	**2.** *Scrie pe foaie numai rezultatele.*
(5 p.)	**A.** Măsura unui unghi al unui triunghi echilateral este egală cu ... °
(5 p.)	**B.** În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$ și $BC = 12$ cm. Lungimea segmentului AB este egală cu ... cm.
(5 p.)	**C.** Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor egale cu 12 cm și, respectiv, 9 cm este egală cu ... cm.
(5 p.)	**D.** Unul dintre unghiurile unui triunghi isoscel are măsura egală cu 110°. Celelalte unghiuri ale triunghiului au măsura egală cu ... °.
5 puncte	**3.** *Scrie pe foaie litera corespunzătoare răspunsului corect.* Afirmația „Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sunt suplementare.” este: a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea — **50 puncte**

Scrie rezolvările complete.

10 puncte	**1.** Determină măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că sunt direct proporționale cu 3, 4 și 5.
10 puncte	**2.** Fie un triunghi isoscel ABC. Pe paralela dusă prin punctul A la dreapta BC, de aceeași parte a dreptei AB ca punctul C, se consideră un punct E, astfel încât $AE \equiv BC$. Demonstrează că triunghiul AEC e isoscel.
30 puncte	**3.** Fie ABC un triunghi cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și $AB = 5$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului BC, punctul N este simetricul punctului M față de dreapta AC și $MN \cap AC = \{E\}$.
(10 p.)	**A.** Determină lungimea segmentului BC.
(10 p.)	**B.** Calculează perimetrul triunghiului ABM.
(10 p.)	**C.** Arată că $AN \parallel BC$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Pot să construiesc triunghiuri cunoscând cazurile LUL, ULU, LLL.					
Pot să recunosc toate liniile importante într-un triunghi.					
Pot să identific triunghiuri congruente și să demonstrez congruența acestora.					

Recapitulare finală

1. Se consideră mulțimile A = {1, 2, 3} și B = {2, 3, 4}.

a) Scrie submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii A.

b) Scrie mulțimea părților mulțimii B.

c) Scrie două submulțimi nevide ale mulțimii A, X și Y, astfel încât $X \cap Y = \varnothing$ și $X \cup Y = A$.

d) Scrie două submulțimi nevide ale mulțimii A, X și Y, astfel încât $X \cap Y \neq \varnothing$ și $X \cup Y = A$.

e) Determină mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. Ordonează crescător numerele întregi *a*, *b*, *c*, *d*:

$a = 10 - \{(-8) + [(-3) + (+5) - (-7)] - (-9)\} : (-2) + (-2);$

$b = (200 - 20 + 2) : (-2) - (-200) : (+2) - (-20) : (-2) - (-2) : (+2);$

$c = (-3)^{15} : (-3^{13}) + (-3)^2 \cdot 3^3 : 9^2 + [(-3)^2]^3 : 27^2;$

$d = \left\{\left(1{,}5 + \frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}6 - \left[\left(\frac{3}{14} - \frac{2}{21}\right) \cdot \frac{28}{25}\right] \cdot \frac{9}{2} - 3{,}5\right\} \cdot 20.$

3. Dintr-o clasă cu 25 de elevi, 16 elevi merg în tabără la munte, 20 de elevi merg în tabără la mare, iar 2 elevi nu merg în nicio tabără.

a) Câți elevi merg în ambele tabere?

b) Câți elevi merg numai în tabără la munte?

4. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $4x - 1 = 2x + 7;$

b) $3 \cdot (2x + 2) - 4 \cdot (x - 6) = 3x + 31;$

c) $[4 + 2 \cdot (3x - 2)] : 3 = -4;$

d) $|5 - 2x| = 7.$

5. Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2{,}3 \cdot x - \frac{4}{5} = \frac{1}{6};$

b) $\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{7}{6};$

c) $2 - 4x = 5.$

6. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $7 - 2x < 3;$

b) $2 - 3 \cdot (4 + x) \geq 4 - 5x;$

c) $(2 + 3x)(-2) + 4 \geq 0;$

d) $3 - 2 \cdot |x| \geq -3.$

7. Raportul numerelor x și y este $\frac{3}{4}$. Determină rapoartele:

a) $\frac{x + y}{y};$ b) $\frac{y}{x};$ c) $\frac{y - x}{x};$ d) $\frac{2x}{3y};$ e) $\frac{2x + 5y}{3x - 2y}.$

8. Un bazin poate fi umplut de două robinete cu același debit în 6 ore. Câte robinete trebuie deschise simultan pentru a umple bazinul în 3 ore?

9. În 200 g de soluție de sare cu concentrația 25% se adaugă 50 g de apă. Care e concentrația soluției obținute?

10. Un lot de pământ cu suprafața egală cu 30 000 m^2 se împarte în trei parcele ale căror suprafețe sunt direct proporționale cu 2,5; 3 și 4,5. Determină suprafața fiecăreia dintre cele trei parcele.

11. La un concurs de atletism au fost oferite premii în valoare de 4 500 euro ocupanților locurilor I, II, III și IV. Știind că sumele primite de câștigătorii locurilor I, II, III și IV sunt invers proporționale cu 0,1(6); 0,2; 0,25 și 0,(3), determină valoarea premiului aferent fiecăruia dintre locurile câștigătoare.

12. Într-o tabără sunt 240 de copii. Dintre aceștia 60% sunt fete. Câți băieți ar trebui să mai vină în tabără pentru ca numărul acestora să fie cu 20 mai mic decât numărul fetelor?

13. După o reducere cu 15%, prețul unui hanorac s-a micșorat cu 30 de lei.

a) Determină prețul hanoracului înainte și după reducere.

b) Cu ce procent ar fi trebuit să fie redus prețul astfel încât, după reducere, hanoracul să coste 140 de lei?

14. Se consideră mulțimile $A = \left\{n \mid n \in \mathbb{N}, \frac{12}{n} \in \mathbb{N}\right\}$, $B = \left\{n \mid n \in \mathbb{N}, \frac{25}{2n+1} \in \mathbb{N}\right\}$,
$C = \left\{n \mid n \in \mathbb{N}, \frac{3n+2}{n+2} \in \mathbb{N}\right\}$ și $D = \left\{n \mid n \in \mathbb{N}, \frac{5n+7}{4n+2} \in \mathbb{N}\right\}$.
Determină elementele mulțimilor A, B, C, D, $A \cup B$, $C \cap B$, $C \setminus D$, $(A \cap C) \cup D$, $(B \setminus A) \cap C$.

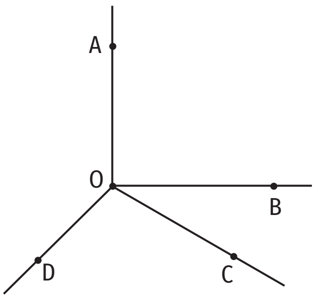


Figura 1

15. În figura 1 sunt reprezentate punctele O, A, B, C și D, astfel încât $OA \perp OB$, $\sphericalangle BOC = 30°$, $\sphericalangle AOD = 135°$ și punctele C și D sunt situate de aceeași parte a dreptei OB.

a) Determină măsura unghiului DOC.

b) Demonstrează că semidreapta OD și bisectoarea unghiului AOB sunt semidrepte opuse.

c) Determină măsura unghiului MON, unde semidreapta ON este bisectoarea unghiului BOC, iar semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOD.

16. Pe un cerc cu centrul în punctul O și raza egală cu 2,5 cm se consideră punctele A și B, astfel încât măsura arcului AB să fie egală cu 30°. Determină distanța de la punctul A la dreapta OB.

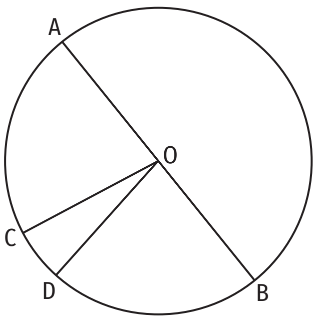


Figura 2

17. În figura 2 e reprezentat un cerc cu centrul în punctul O și punctele A, B, C și D ce aparțin acestui cerc, astfel încât punctele A și B sunt diametral opuse, $\overset{\frown}{AD} = 100°$ și $\sphericalangle COD = 20°$. Demonstrează că:

a) $AC \equiv DB$; b) $AD \equiv BC$; c) $CD \parallel AB$.

18. Pe laturile AB, BC și AC ale triunghiului echilateral ABC se consideră punctele M, N și, respectiv, P, astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului MNP.

19. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\sphericalangle BAC = 120°$. Mediatoarele segmentelor AB și AC intersectează latura BC în punctele M și, respectiv, N. Demonstrează că triunghiul AMN este echilateral.

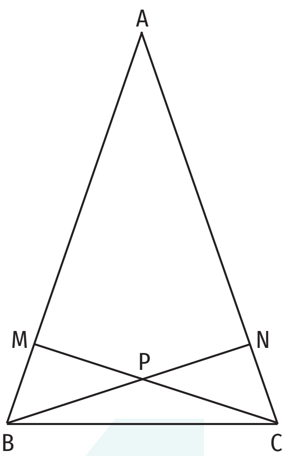


Figura 3

20. În figura 3 e reprezentat triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Punctele M și N aparțin laturilor AB și, respectiv, AC, asfel încât $BM \equiv CN$, $BM \cap CN = \{P\}$. Demonstrează că:

a) $BN \equiv CM$; b) $PM \equiv PN$; c) $AP \perp BC$; d) $MN \parallel BC$.

21. Fie O mijlocul ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$). Punctul D este simetricul punctului A față de punctul O. Demonstrează că:

a) triunghiul DOC este isoscel; b) $CD \parallel AB$.

Unitatea 1. Lecția 1. 14. a) F; **b)** A; **c)** A; **d)** F; **e)** F; **f)** A. **16.** $A = \{a, b, c, e, l, u, r, t\}$; $B = \{ba, ca, la, u, re, at\}$. **17.** $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{15, 24, 33, 42, 51\}$, $C = \{118, 124, 142, 181, 214, 222, 241, 412, 421, 811\}$, $D = \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $E = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$. **Lecția 2. 12.** $x = 8$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 5$. **13. a)** Submulțimile pot avea 2, 3 sau 5 elemente; **b)** {2}, {3}, {5}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {2, 3, 5}. **15.** a) $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$. **16.** {1, 5, 7}, {3, 10}. **18. b)** 13; **c)** 98. **f)** Ultima cifră a unui număr din mulțimea A e 3 sau 8. **Lecția 3. 3. a)** 50; **b)** 49; **c)** 27; **d)** 7; **e)** 2024; **f)** 26; **g)** 33; **h)** 7; **i)** 6; **j)** 2^{10}. **6. a)** card$B$ = 8, card$C$ = 9. **Lecția 4. 6.** $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$. **7.** $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d\}$ sau $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c\}$. **9.** 0. **11. a)** 10; **b)** 2; **c)** 12; **d)** 4. **12.** 10. **13. a)** 1 326; **c)** $C = \{3, 4, 5, 6, ..., 35, 36\}$; $D = \{0, 1, 2, 37, 38, 39, ..., 50, 51\}$. **14.** $X = \{3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, ..., 3 \cdot 33\}$, $Y = \{6 \cdot 0 + 1, 6 \cdot 1 + 1, 6 \cdot 2 + 1, ..., 6 \cdot 16 + 1\}$; **a)** card$X$ = 34, card$Y$ = 17, card$(X \cap Y)$ = 0; **b)** 1683; **c)** 833. **Lecția 5. 3. c)** cardD_{15} = 4, cardD_{18} = 6, cardD_{25} = 3, cardD_{38} = 4, cardD_{56} = 8, cardD_{81} = 5, cardD_{125} = 4, cardD_{49} = 3, cardD_{111} = 4, cardD_{63} = 6, cardD_{96} = 12. **6. a)** $m = 4$, $n = 2$; **b)** $m = 2$, $n = 3$, $p = 2$; **c)** $m = 2$, $n = 1$, $p = 1$; **d)** $m = 2$, $n = 2$, $p = 1$. **7. c)** $x = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $y = 5^3 \cdot 7$, $z = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$, $x \cdot y \cdot z = 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^4$; **d)** $x = 2^{10}$, $y = 3^6$, $z = 2 \cdot 5^4$, $x \cdot y \cdot z = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^4$. **Lecția 6. 9.** $\overline{ab} \in \{16, 32, 64, 80\}$ **10.** $x \in \{5, 10, 15, 30, 45, 90\}$. **12.** 7 930. **13.** 2 424. **14. a)** $a = 34$, $b = 238$ sau $a = 102$, $b = 170$; **b)** $a = 15$, $b = 90$ sau $a = 30$, $b = 45$; **c)** $a = 28$, $b = 812$ sau $a = 196$, $b = 644$ sau $a = 308$, $b = 532$ sau $a = 364$, $b = 476$; **d)** $a = 7$, $b = 105$ sau $a = 21$, $b = 35$. **15. a)** $a = 2$, $b = 252$ sau $a = 4$, $b = 126$ sau $a = 14$, $b = 36$ sau $a = 18$, $b = 28$; **b)** $a = 12$, $b = 72$ sau $a = 24$, $b = 36$; **c)** $a = 17$, $b = 255$ sau $a = 51$, $b = 85$. **16.** 24. **17.** 7. **18.** 23, 69. **19.** 5, 7, 35. **20.** 77, 91, 143, 1 001. **21.** 24. **22.** 36. **23.** 373. **24.** 1 360. **25.** 195. **26.** 1 052. **27.** 6 plăcuțe, 576 cm^2. **28.** 900. **29.** 301. **Lecția 7. 3. a)** 0; **b)** 0; **c)** 0. **4.** $A = \{1, 5\}$; $B = \{1, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 15\}$; $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. **10. a)** 1, 2, 3, 6; **b)** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; **c)** 1, 7; **d)** 1, 3, 9; **e)** 1, 3, 7, 21. **11. e)** Dacă $(a, b) = d$, atunci $d \mid 2(3n + 5) - 3(2n + 3)$. Rezultă că $d = 1$. **Ex. recapitulative. 2.** $A = \{0, 2, 4, 8\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$. **3.** card$A$ = 13, card$B$ = 12, card$D$ = 8, card$(A \cap B)$ = 11, card$(A \cap B \cap C)$ = 3, card$(A \setminus B)$ = 2, card$(D \cap C)$ = 2. **4.** 90. **6.** 439. **7.** 427. **8.** 60 paralelipipede, 216 dm^3. **9.** 39. **10. a)** $a = 30$, $b = 300$ sau $a = 60$, $b = 270$ sau $a = 90$, $b = 240$ sau $a = 120$, $b = 210$ sau $a = 150$, $b = 180$; **b)** $a = 12$, $b = 420$ sau $a = 60$, $b = 84$; **c)** $a = 13$, $b = 39$; **d)** $a = 7$, $b = 420$ sau $a = 21$, $b = 140$ sau $a = 28$, $b = 105$ sau $a = 35$, $b = 84$. **12. a)** $A = \{1, 13\}$; **b)** $A = \{1, 3, 7, 21\}$. **14.** $\overline{ab} \in \{14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98\}$.

Unitatea 2. Lecția 1. 9. a) 1 562,5 lei; **b)** 812,5 lei; **c)** 1 237,5 lei; **d)** 1 800 lei; **10.** 1 176. **12. a)** 0,(6); **b)** 0,25; **c)** 2. **13. a)** 2; **b)** 1,3; **c)** 1,2. **15. a)** 440 km; **b)** 5 h și 52 min. **16.** 60 km. **17.** 84 m. **18.** 1:3 000 000. **19.** 12,5%. **20.** 12%. **21.** 0,875. **22.** 0,750. **Lecția 2. 4.** 10. **5. a)** 5; **b)** 3; **c)** 6; **d)** 30; **e)** 20; **f)** 10; **g)** 4; **h)** 0,08; **i)** 1; **j)** $\frac{1}{2}$; **k)** 2^7; **l)** 3. **6.** 4 lei. **7.** 154 cm. **8.** 35. **9.** 20. **10.** 12 sau $\frac{64}{3}$. **11.** 5. **14.** 12, 21, 24, 42, 36, 63, 48, 84. **15.** 9 g. **16.** 10,5 kg. **Lecția 3. 6.** 0,5. **7. a)** $\frac{5}{6}$; **b)** $\frac{1}{8}$; **c)** $\frac{6}{5}$; **d)** 11; **e)** $\frac{5}{23}$; **f)** $\frac{17}{8}$. **9.** $\frac{39}{34}$. **10.** 6 lei, 32 lei. **11.** 16. **12. a)** $\frac{3}{2}$; **b)** $\frac{2}{5}$; **c)** $\frac{2}{7}$; **d)** $\frac{10}{7}$. **13. a)** 3; **b)** 7; **c)** 3,25; **d)** 12. **14. a)** $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{7}{2}$; **b)** $x = 15$, $y = 21$; **c)** $x = 10$, $y = 14$. **15. a)** $x = 5$, $y = 4$; **b)** $x = 15$, $y = 12$; **c)** $x = 10$, $y = 8$. **16.** 120 g. **Lecția 4. 2.** $a = 9$, $b = 7$. **3.** 600 g pișcoturi, 900 g brânză dulce/mascarpone, 9 gălbenușuri, 300 g zahăr, 6 ceșcuțe cafea, 3 lingurițe cacao. **4.** 24 kg var, 72 kg nisip, 12 kg ciment. **6.** $\frac{13}{12}$. **7.** $\frac{4}{5}$. **8.** $x = 10,5$; $y = 24,5$; $z = 28$. **9.** $x = 25$, $y = 30$, $z = 35$. **12. i)** $a = 12$, $b = 16$, $c = 22$; **ii)** $a = 12$, $b = 30$, $c = 18$. **13. a)** $x = 18$, $y = 27$, $z = 63$; **b)** $x = 10$, $y = 20$, $z = 30$. **Lecția 5. 2. a)** Da; **b)** Da; **c)** Da; **d)** Nu. **3.** 2 730 lei. **4.** 17. **5.** 245 lei, 315 lei, 350 lei. **6.** 33,6 euro. **7.** 2. **8.** $a = 10$, $b = 25$. **9.** $a = \frac{35}{6}$, $b = \frac{65}{6}$. **10.** $a = 63$, $b = 77$, $c = 105$. **11.** 950 lei, 1 710 lei, 1 330 lei. **12.** 35, 63. **13.** 10, 15, 35. **14.** 68, 119, 170. **15. a)** $\frac{15}{14}$; **b)** $\frac{11}{5}$; **c)** $\frac{10}{23}$; **d)** $\frac{7}{27}$; **e)** $\frac{5}{2}$. **16. a)** $\frac{13}{11}$; **b)** $\frac{20}{29}$; **c)** $\frac{19}{8}$. **17.** 519. **18.** 12, 24, 36, 48. **Lecția 6. 5.** 12 zile, 96 zile. **6.** 120 km/h. **7.** $a = 15$, $b = 40$. **8.** $a = 8$, $b = 12$. **9.** $a = 15$, $b = 9$. **10.** $x = 1,5$; $y = 1,2$; $z = 2,4$. **11.** 360, 288, 240. **12.** $a = 42$, $b = 18$, $c = 14$. **13.** 110 lei, 99 lei, 100 lei, 88 lei. **14. a)** $\frac{31}{15}$; **b)** 18; **c)** $\frac{23}{2}$; **d)** $\frac{1}{5}$; **e)** $\frac{4}{5}$. **15. a)** $\frac{10}{3}$; **b)** $\frac{21}{19}$; **c)** $\frac{22}{5}$. **Lecția 7. 1.** 44. **2.** 30 ore. **3. a)** 15; **b)** 27,50 lei. **4.** 11 kg. **5.** 640. **6.** 258 g. **7.** 60. **8.** 3 ore și 20 de minute. **9.** 120. **10.** 7 h și 12 min; 2 min. **11.** 1200. **12.** 16. **13.** 120. **14.** 432 l. **Lecția 8. 1.** 30%. **2. a)** 70; **b)** 25%; **c)** 890. **3.** 1 411,2 lei. **6. c)** 48% **e)** 7,44. **7.** 32. **Lecția 9. 1.** $\frac{1}{15}$. **2. a)** $\frac{14}{27}$; **b)** $\frac{19}{27}$. **3.** $\frac{6}{13}$. **4.** $\frac{11}{25}$. **5.** $\frac{4}{9}$. **6.** $\frac{5}{9}$. **7.** $\frac{2}{45}$ **8.** $\frac{1}{30}$ **9.** $\frac{1}{90}$ **10. a)** $\frac{7}{36}$; **b)** $\frac{2}{9}$; **c)** $\frac{11}{36}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **11. a)** $\frac{5}{16}$; **b)** $\frac{9}{16}$; **c)** $\frac{11}{16}$. **12.** $\frac{5}{12}$. **13.** $\frac{1}{6}$. **14.** $\frac{1}{90}$. **15.** $\frac{3}{7}$. **16.** 16 mere verzi, 32 mere roșii. **17.** 15. **18.** 15. **Ex. recapitulative. 1. a)** 0,8; **b)** 0,2; **c)** 0,(3); **d)** 0,4; **e)** 0,875. **2. a)** 2,7; **b)** 3; **c)** 396; d) 150. **3.** 624 lei. **4.** $\frac{1}{225}$. **5. a)** 25; **b)** 88%; **c)** 6,88. **6. a)** 25; **b)** 30; **c)** 5; **d)** 5; **e)** 8; **f)** 13. **7.** 28. **8.** 3. **9.** 31,5 lei. **10.** $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{5}{1}$. **11.** Un pix costă 4 lei, un stilou costă 14 lei. **12. a)** 1,5; **b)** 2. **13. a)** $x = 108$; $y = 72$; **b)** $x = 6$; $y = 4$. **14.** 480 000 €, 360 000 €, 160 000 €. **15.** 7 zile, 63 zile. **16.** 36; 72; 90; 126. **17.** 238; 357; 595; 833. **18.** $\frac{34}{19}$. **19.** 10,8 cm.

Unitatea 3. Lecția 1. 13. $m \in \{-3, -2\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$. **14. b)** $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. **16. a)** $A \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 4, 7\}$, $A \setminus \mathbb{N} = \{-5, -3, -2\}$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \{-5, -3, -2\}$; **d)** $B = \{-5, -3, -2\}$, $C = \{1, 2, 4, 7\}$, $D = \{-5, -3, -2\}$, $E = \{-2, 1, 2\}$, $F = \{-5, -3, -2, 2, 4, 7\}$. **Lecția 2. 7. a)** −10 sau −15 sau −20 sau −25 sau −30; **b)** 21 sau 15 sau 9 sau 3 sau −3 sau −9. **10.** −5. **13. a)** $x \in \{-4, 4\}$, $y \in \{-13, 13\}$, $x + y \in \{-17, -9, 9, 17\}$; **b)** $x \in \{-5, 5\}$, $y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $x + y \in \{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **Lecția 6. 8.** $1 = (-2)^0$, $4 = (-2)^2$, $-8 = (-2)^3$, $-128 = (-2)^7$, $-2 = (-2)^1$, $64 = (-2)^6$, $2^{10} = (-2)^{10}$, $-2^5 = (-2)^5$, $(-2^3)^{10} = (-2)^{30}$,

$(-2^3)^3 = (-2)^9$. **9.** $1 = 5^0$, $125 = 5^3$, $(-5)^4 = 5^4$, $(5^2)^3 = 5^6$, $[(-5)^2]^5 = 5^{10}$, $5 = 5^1$, $[(-5)^3]^4 = 5^{12}$. **10. a)** 2^{17}; **b)** $(-2)^{22}$; **c)** 3^{14}; **d)** 5^{16}; **e)** $(-3)^{13}$; **f)** 3^{21}; **g)** $(-5)^{16}$; **h)** 2^{37}; **i)** 5^4; **j)** $(-7)^4$; **k)** 5^{26}; **l)** 4^3; **m)** $(-2)^2$; **n)** 10^4; **o)** $(-2)^{16}$. **11. a)** 2^{35}; **b)** 3^{40}; **c)** 2^{100}; **d)** 3^{46}; **e)** $(-5)^{77}$; **f)** $(-5)^{31}$; **g)** 10^0; **h)** 10^{20}; **i)** 2^9; **j)** 4^5; **k)** 4^3; **l)** 5^4; **m)** 3^4; **n)** 2^{50}. **Lecția 8. 8. a)** $x = -1$; **b)** $x = 9$; **c)** $x = 1$; **d)** $x = 4$; **e)** nu are soluție în $\mathbb{Z}$; **f)** $x = 13$; **g)** $x = 2$; **h)** $x = 7$; **i)** $x = 13$. **9. a)** $x = -1$; **b)** $x = 2$; **c)** $x = 5$; **d)** $x = 3$; **e)** $x = -3$; **f)** $x = -6$; **g)** $x = 0$; **h)** $x = -4$. **10. a)** $x \in \{-3, 3\}$; **b)** $x \in \{-9, -1\}$; **c)** nu are soluții în $\mathbb{Z}$; **d)** $x \in \{-5, 13\}$; **e)** $x \in \{-3, 4\}$; **f)** $x \in \{-8, 8\}$; **g)** $x \in \{0, 4\}$; **h)** $x \in \{2, 4\}$. **11.** $A = B = \{2\}$. **12.** $A \setminus B = \{-1, 0, 2\}$. **13.** $A = \{-1, 4\}$, $B = \{-1\}$. **14.** $A = \{3\}$, $B = \{-1\}$, $A \cap B = \emptyset$. **15. b)** $a = 0$; **c)** $a = 1$. **16.** $x = 3$. **17. a)** $A = \{0\}$; **b)** $A = \{0, 1, 2, 4, 10\}$; **c)** $A = \{1, 2, 3, 8\}$; **d)** $A = \{0, 3, 8\}$. **18. a)** $A = \{5\}$; **b)** $A = \{0\}$; **c)** $A = \{0, 2\}$; **d)** $A = \{0, 2\}$; **e)** $A = \{1, 4\}$; **f)** $A = \{1, 4\}$. **19. a)** $x = -3$, $y \in \mathbb{Z}$ sau $x \in \mathbb{Z}$, $y = -4$; **b)** $x = 4$, $y = -2$ sau $x = 11$, $y = 5$ sau $x = 6$, $y = 10$ sau $x = -1$, $y = 3$ sau $x = 3$, $y = 1$ sau $x = 8$, $y = 6$ sau $x = 7$, $y = 7$ sau $x = 2$, $y = 2$. **Lecția 9. 6. a)** $x \in \{..., -3, -2, -1\}$; **b)** $x \in \{6, 7, 8, ...\}$; **c)** $x \in \{..., 0, 1, 2\}$; **d)** $x \in \{4, 5, 6, ...\}$; **e)** $x \in \{-2, -1, 0, ...\}$; **f)** $x \in \{18, 19, 20, ...\}$; **g)** $x \in \{..., -2, -1, 0\}$; **h)** $x \in \{..., 2, 3, 4\}$; **i)** $x \in \{..., 7, 8, 9\}$. **7. a)** $x \in \{-9, -8, -7, ...\}$; **b)** $x \in \{-5, -4, -3, ...\}$; **c)** $x \in \{-2, -1, 0, ...\}$; **d)** $x \in \{..., -2, -1, 0\}$. **8. a)** $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; **b)** $x \in \{-1, 0, 1\}$; **c)** nu are soluții în Z; **d)** $x = 0$; **e)** $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; **f)** nu are soluții în Z; **g)** $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; **h)** $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **Lecția 10. 1.** 92. **2.** 12. **3.** 30. **4.** −21. **5.** Orice nr. întreg mai mic decât −22. **6.** Orice nr. întreg mai mic decât −3. **7.** Orice nr. întreg mai mare sau egal decât decât 23. **8.** 145, 146, 147. **9.** 246, 248. **10.** 123, 125, 127, 129. **11.** 0, 1, 2 sau 1, 2, 3 sau 2, 3, 4 sau 3, 4, 5 sau 4, 5, 6. **12.** 33, 34, 35, 36, 37. **13.** 123. **14.** −10. **15.** 168. **16.** 24 sau −16. **17.** Oricare nr. întreg din mulțimea {..., −17, −16, −15}. **18. a)** 15°; **b)** 144°; **c)** 60°; **d)** 55°; **e)** 57°. **19.** 24 de cărți. **20.** 5 kg, 15 kg. **21.** 20 de copii. **22.** 40 de persoane. **23.** 23 kg. **24.** 2 ani. **25.** 7 ani. **26.** 4 ani. **27.** 4 ani. **28.** 6 lei. **29.** 19. **30.** 7. **31.** 7 călători. **32.** 27 de probleme. **33.** 22, 23, 24 sau 25 de lovituri. **Ex. recapitulative. 5.** $B = \{-7, -2, -1\}$, $C = \{3, 4, 8, 10\}$, $D = \{-7, -2, -1\}$, $E = \{-2, -1\}$, $F = \{-7, 8, 10\}$. **6. a)** $x = 3$; **b)** $x = 4$; **c)** $x = 2$; **d)** $x = -1$; **e)** $x = 1$; **f)** $x = -2$. **7. a)** $x \in \{5, 6, 7, ...\}$; **b)** $x \in \{-3, -2, -1, ...\}$; **c)** $x \in \{-8, -7, -6, ...\}$; **d)** $x \in \{0, 1, 2, ...\}$; **e)** $x \in \{0, 1, 2, ...\}$; **f)** $x \in \{..., -3, -2, -1\}$. **8.** −3. **9.** 9 lei. **10. a)** 40 ani; **b)** 16 ani; **c)** 5 ani. **11.** 114 kg. **12.** 159. **13.** 64 de pagini.

Unitatea 4. Lecția 1. 19. $B = \{6 ; 2\}$, $C = \left\{\frac{22}{5}; \frac{16}{3}; 6; 2; \frac{25}{8}; \frac{49}{5}\right\}$, $D = \left\{-3; \frac{22}{5}; -0{,}3; -\frac{6}{5}; 2; \frac{25}{8}\right\}$, $E = \left\{-3; \frac{25}{8}\right\}$. **20. a)** 2; **b)** 151. **21. a)** $n \in \{1, 2, 3, 6\}$; **b)** $n \in \{0, 2, 4, 14\}$; **c)** $n \in \{0, 3\}$; **d)** $n \in \{1, 2\}$; **e)** $n = 0$; **f)** $n \in \{2, 8\}$; **g)** $n \in \{1, 4\}$. **Lecția 5. 10. a)** $1 = 2^0$; $4 = 2^2$, $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, $\frac{1}{32} = 2^{-5}$, $(-2)^8 = 2^8$, $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-4} = 2^{-12}$, $(-2^2)^{10} = 2^{20}$, $(-2^3)^{-2} = 2^{-6}$, $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{3} = 2^{-6}$; **b)** $1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $27 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$, $27^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-12}$, $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$, $[(-3)^{-1}]^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\frac{1}{9^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^8$, $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$; **c)** $\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$, $1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, $\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $\frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$, $(-1{,}5)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$, $(1{,}5)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-10}$. **12. a)** 2^{-1}; **b)** 2^{-34}; **c)** 3^{-13}; **d)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{-12}$; **e)** $\left(\frac{10}{3}\right)^{-14}$; **f)** 3^{-19}; **g)** $\left(\frac{5}{4}\right)^0$; **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; **i)** $\left(\frac{3}{4}\right)^5$; **j)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-14}$. **13.** $a = \frac{1}{2^{55}}$, $b = \frac{1}{2^{50}}$, $a < b$. **Lecția 6. 5. a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $-\frac{1}{16}$; **c)** $\frac{1}{3}$; **d)** 0,2; **e)** 8. **6. a)** $a = -\frac{1}{2} > -1$; **b)** $a = -\frac{2}{3} > -1$; **c)** $a = \frac{6}{35} > 0$; **d)** $a = \frac{160}{67} > 2$. **Lecția 7. 8. a)** $x = -\frac{11}{2}$; **b)** $x = \frac{4}{3}$; **c)** $x = \frac{13}{4}$; **d)** $x = 1$; **e)** $x = \frac{4}{3}$; **f)** $x = \frac{7}{4}$; **g)** $x = -\frac{25}{4}$; **h)** $x = \frac{3}{25}$; **i)** $x = \frac{16}{15}$; **j)** $x = \frac{1}{6}$; **k)** $x = \frac{6}{7}$; **l)** $x = -\frac{21}{5}$. **9. a)** $a = -8$; **b)** $a = \frac{8}{35}$; **c)** $a = -\frac{5}{27}$; **d)** $a = -\frac{37}{24}$. **10.** $A = B = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$. **11.** $A \cap B = \left\{\frac{2}{15}\right\}$. **12.** $A \cup B = \left\{-\frac{1}{3}, -3\right\}$. **13.** $A = \left\{\frac{17}{75}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $A \cap B = \emptyset$. **Lecția 8. 1.** −10,89. **2.** $-\frac{30}{11}$. **3.** $-\frac{8}{5}$. **4.** 97,5. **5.** −4,8 sau 7,2. **6.** 6,85 lei. **7.** 3 kg. **8.** 19 persoane. **9. a)** 36 ani; **b)** 6 ani. **10.** 5,3 lei. **11.** 15 m^3. **12.** 5,2 %. **13.** 500 cărți. **14.** 12 probleme. **15.** 105 lei. **16. a)** 65,6 lei; **b)** 82 lei; **c)** 20 %. **17. a)** 420,75 lei; **b)** 25%. **18.** 278,25 kg. **Ex. recapitulative. 7. a)** $a = -\frac{11}{10}$, $b = \frac{1}{2}$, $b > a$; **b)** $a = -\frac{3}{7}$, $b = -\frac{25}{8}$, $a > b$; **c)** $a = \frac{81}{16}$, $b = \frac{11}{8}$, $a > b$. **8. a)** $x = -\frac{13}{33}$; **b)** $x = \frac{9}{5}$; **c)** $x = \frac{10}{3}$; **d)** $x = -\frac{41}{12}$; **e)** $x = \frac{4}{3}$; **f)** $x = 2{,}5$. **9.** 4,045. **10.** $\frac{7}{30}$. **11.** 3. **12.** $\frac{5}{36}$. **13.** 2. **14.** $-\frac{17}{12}$ sau $\frac{23}{12}$. **15.** 22,5 km. **16.** 294 pagini. **17.** 19,9 lei. **18. a)** 120,4 lei; **b)** 90,3 lei; **c)** 20%.

Unitatea 5. Lecția 1. 2. a) 15°; **b)** 76°15′; **c)** 52°; **d)** 6°51′. **3. a)** 142°; **b)** 45°; **c)** 105°47′; **d)** 61°40′. **4. a)** 45°; **b)** 90°. **8.** ∢BOC = 27°, ∢AOB = ∢COD = 153°. **9.** ∢AOD = ∢COB = 64°45′, ∢AOC = 115°15′. **10.** 75°20′, 104°40′, 104°40′. **11.** 84°. **12.** 47°30′. **13. a)** 80°, 80°, 100°, 100°; **b)** 50°, 50°, 130°, 130°. **15. a)** 90°; **b)** 72°; **c)** 60°. **17.** 75°. **18.** 47°30′. **19. a)** 36°35′, 126°35′; **b)** 19°45′; **c)** 146°20′. **20.** ∢AOB = 60°, ∢BOD = 120°, ∢EOB = 150°. **21. a)** 30°; **b)** 67°30′; **c)** 30°; **d)** 82°30′. **22. a)** 45°; **b)** 144°; **c)** 55°; **d)** 155°. **23. a)** 62°, 28°; **b)** 107°, 73°. **24.** ∢MOP = ∢QON = 120°, ∢PON = ∢MOQ = 60°. **25.** ∢AOB = ∢COD = 49°20′, ∢BOC = ∢AOD = 130°40′. **26.** ∢BOC = 132°30′, ∢AOC = 107°30′. **27.** ∢AOB = ∢BOC = ∢COD = 29°, ∢DOE = 174°, ∢AOE = 99°. **Lecția 2. 7. a)** 39°; **b)** 24°30′; **c)** 172°. **8. a)** 92°; **b)** 96°45′; **c)** 30°; **d)** 50°; **e)** 57°. **9.** ∢ACB = ∢ACD = 60°, A ∈ *Int*(∢BCD). **10.** ∢AOM = 38°, ∢AOB = 104°. **11.** 22°. **12.** ∢EOD = 90°, ∢COD = 52°, ∢EOB = 142°, ∢AOD = 128°. **13.** ∢AOM = 21°, ∢BON = 21°, ∢CON = 159°. **14. a)** 45°; **b)** 90°. **15. a)** 116°; **b)** 44°. **17. a)** 125°27′; **b)** 18°33′. **18. a)** ∢AOC = 180°, ∢BOC = 126°; **b)** ∢AOC = 72°. **19. a)** 90°; **b)** 26°. **20. a)** 5°10′; **b)** ∢AOC = 180°. **21.** ∢ACB = 66°, ∢ACD = 132°, ∢DCE = 48°, ∢ECB = 114°. **22.** ∢AOM ≡ ∢BON. Dacă OP e bisectoarea ∢ MON, atunci ∢MOP = ∢PON = 20° și ∢AOP = ∢BOP = 35°. **23.** ∢MON = 180°. **24.** 61°. **25.** ∢AOB = 73°, ∢BOC = 89°. **26.** ∢ABC = 72°, ∢CBD = 96°. **27.** 17°, 68°. **Lecția 3. 11.** $x = 130°$, $y = 125°$, $z = 89°$, $t = 137°$, $w = 98°$, $p = 88°$. **12.** ∢ADC = 45°, ∢BCD = 135°. **13.** ∢CAB = 100°, ∢ACD = 65°. **14. a)** 40°; **b)** 70°; **c)** 119°. **17. b)** ∢ANM ≡ ∢ABC, ∢AMN ≡ ∢ACB (corespondente). **18. a)** 54°; **b)** ∢BAC ≡ ∢ACD (alterne interne) ⇒ ∢BAC = 63°. **19.** ∢EBC + ∢BCD = 180° ⇒ EB ∥ CD.

20. ∢AOB ≡ ∢AO′C (corespondente) ⇒ ∢AOM ≡ ∢AO′N. **22.** ∢ABC ≡ ∢BCD (alterne interne) ⇒ ∢MBC ≡ ∢BCN. **Lecția 4. 25.** ∢MON = 90° + ∢QON = ∢POQ. **26.** ∢MON = $\frac{∢AOB}{2} + \frac{∢BOC}{2}$ = 90°. **28.** 5 cm. **29. c)** ∢AOC = 60°, ∢AOD = 120°. **30. a)** ∢DOB = 160°, ∢AOF = 110°, ∢EOF = 20°, ∢EOD = 40°; **b)** ∢DOB = 20°, ∢AOF = 110°, ∢EOF = 20°, ∢EOD = 140°. **Lecția 5.1. 10. c)** ∢AOB = 180°, ∢BOC = 120°, ∢AOD = 150°. **11. a)** 90°; **b)** 72°. **12. a)** 30°; **b)** ∢COB = 180°. **13.** 180°. **14.** ∢BOC = 180°. **15.** 60°. **16.** 50°. **18. a)** ∢AOB = 60°, ∢COE = 120°; **b)** ∢AOD = 180°; **c)** ∢BOE = 180°. **19. a)** 80°; **b)** 6 cm; **c)** $\overset{\frown}{CM}$ = 10°, $\overset{\frown}{AM}$ = 90°, MN = 6 cm. **21.** 12 cm. **22. a)** 2 cm; **b)** 70°. **23.** 40°. **24. a)** $\overset{\frown}{AB}$ = 60°, măsura arcului mare BC e 280°; **b)** ∢BOD = 180°. **Lecția 5.2. 6.** MN < $r_1 + r_2$, r_1 = AM, r_2 = AN. **7.** AB = $r_1 + r_2$ = AM + BN. **8.** 2,8 cm. **9.** 5 cm. **10.** 15 m. **Ex. recapitulative. 2.** 33°. **3.** 128°. **4.** ∢AOB = 50°, ∢AOC = 112°. **5. a)** ∢AOC = 118°; **b)** ∢AOC = 34°. **6.** BD = 127°, ∢ECO = 53°. **7. a)** 67°30′; **b)** 45°; **c)** 33°45′. **8.** 48°, 72°, 96°, 144°. **9.** 72°, 96°. **10.** 160°. **11. a)** 170°; **b)** 82°.

Unitatea 6. Lecția 1. 5. a) 70°; **b)** 65°; **c)** 104°36′; **d)** 72°45′. **6. a)** 19 cm; **b)** 19,5 cm; **c)** 63 cm; **d)** 42 cm. **12.** 90°, 33°, 57°. **13.** 35°, 100°. **14.** 82°, 28°, 70°. **16.** 40°, 60°, 80°. **17.** 48°, 60°, 72°. **18.** 16,5 cm. **19.** ∢ACB = 40°, ∢ABC = 70°. **20.** ∢B = 60°, ∢C = 30°. **21. a)** 59°, 60°, 61°; **b)** 58°, 60°, 62°. **Lecția 3. 9. a)** 6 cm; **b)** 9 cm; **c)** 9 cm; **d)** 1,15 cm; **e)** 10 cm; **f)** 12 cm. **11. a)** 50°; **b)** 39°36′; **c)** 73°12′; **d)** 12°30′; **e)** 30°; **f)** ∢A = 56°,∢B = 48°26′,∢C = 75°34′. **12.** ∢BAC = 16°,∢BAI = 8°. **13.** ∢ABI = 32°30′, ∢IAC = 39°, ∢ICB = 18°30′, ∢BIC = 129°, ∢BIA = 108°30′, ∢AIC = 122°30′. **14. a)** 129°30′; **b)** 141°20′; **c)** 32°; **d)** ∢P = 20°, ∢N = 80°, ∢M = 80°. **15.** ∢M = 46°,∢P = 56°, ∢N = 78°. **17.** ∢A = ∢C = 55°, ∢B = 70°. **18. a)** BM ∥ AN, BM ⊥ AC; **b)** ∢NAB = 27°, ∢ACH = 27°. **19.** A e ortocentrul triunghiului OMN. **20.** ∢ABM = 10°, ∢BMC = 90°, ∢ANC = 90°, ∢BPC = 90°, ∢NAC = 30°, ∢NCH = 50°, ∢AHB = 120°, ∢MHC = 80°. **21.** ∢BAG = 55°, ∢HBG = 65°, ∢ECH = 30°, ∢BHC = 60°, ∢HAE = 65°, ∢FAC = 60°. **22.** P e centrul de greutate al triunghiului ABN. **Lecția 4.1. 3.** ∢F = 40°, ∢E = 52°, ∢D = 88°. **5.** ∢P = 73°24′, ∢N = 27°48′, ∢E = ∢U = 78°48′. **6.** RU = 2 cm, RP = 4 cm, UP = 5 cm. **8.** 41,75 cm. **11.** triunghi isoscel. **12.** triunghi echilateral. **13. a)** ΔADM ≡ ΔCBN; **b)** ΔADB ≡ ΔAEC; **c)** ΔABC ≡ ΔDCE; **d)** ΔEAD ≡ ΔCAB, ΔEAB ≡ ΔCAD; **e)** ΔMNQ ≡ ΔPNQ; **f)** ΔRSQ ≡ ΔQPR; **g)** ΔABD ≡ ΔACD; **h)** ΔMNQ ≡ ΔPNQ. **14.** BC ≡ AC, BD ≡ AD, CD ≡ CD. **15.** OM ≡ ON, ∢MOS ≡ ∢SON, OS ≡ OS. **16.** ∢EBC ≡ ∢DCB, BC ≡ BC, ∢ECB ≡ ∢DBC. **17.** ∢BAC ≡ ∢NMP, AB ≡ MN, ∢ABC ≡ ∢MNP. **18.** AO ≡ OB, AO′ ≡ BO′, OO′≡ OO′. **19.** ∢BAC ≡ ∢MCA, AC ≡ AC, ∢ACB ≡ ∢MAC (alterne interne). **20. a)** AM ≡ MC, ∢AMD ≡ ∢BMC, MD ≡ BM; **b)** AM ≡ MC, ∢AMB ≡ ∢DMC, BM ≡ DM. **21.** OA ≡ OB, ∢AOB ≡ ∢BOC, OB ≡ OC. **Lecția 4.2. 3.** BM ≡ MC, ∢NBM ≡ ∢PCM (IU). **4.** OB ≡ OB, ∢*AOB* ≡ ∢BOC (IU). **5.** AB ≡ AN, AC ≡ AM (CC). **6.** OA ≡ OB, OM ≡ ON (CC). **7.** AD ≡ AD, AB ≡ AC (IC). **8.** AB ≡ AC, ∢BAB′ ≡ ∢CAC′ (IU). **9.** OA ≡ OA′, OM ≡ OM (CC). **Lecția 5. 1.** ΔOAM ≡ ΔOBM (IC). **2.** ΔACB ≡ ΔDCB (LUL). **3.** ΔACM ≡ ΔBDN (IU), ΔDNC ≡ ΔCMD (CC). **4.** ΔABD ≡ ΔCBD (LUL). **5.** ΔOAM ≡ ΔOBM (LUL). **6.** ΔAMB ≡ ΔANC (LUL). **7.** ΔAOB ≡ ΔCOD. **8. a)** ΔBAM ≡ ΔCAM (LLL); **b)** ΔANM ≡ ΔAPM (LUL) **9.** ΔAMC ≡ ΔANB (LUL). **10. a)** ΔAOD ≡ ΔBOC (LUL); **b)** ΔAOC ≡ ΔBOD (LUL) ⇒ ∢ACO ≡ ∢BDO. **11.** Fie {P} = OM ∩ *AB* și {Q} = ON ∩ AC. **a)** ΔBOP ≡ ΔBMP (CC); **b)** ΔCOQ ≡ ΔCNQ (CC); **c)** ΔAPM ≡ ΔAPO (CC), ΔAOQ ≡ ΔANQ (CC). **12. a)** ΔAB′M ≡ ΔA′BM (LUL); **b)** ΔAMB ≡ ΔA′MB′ (LUL) ⇒ ∢MAB ≡ ∢MA′ B′. **14.** Fie {M} = AA′ ∩ *d* și {N} = BB′ ∩ *d*. ΔAMN ≡ ΔA′MN (CC) ⇒ AN ≡ A′N, ∢ANM ≡ ∢A′NM ⇒ ∢ANB ≡ ∢A′NB′. ΔABN ≡ ΔA′B′N (LUL), ΔABB′ ≡ ΔA′B′B (LUL). **15. a)** ΔABD ≡ ΔACD (LLL); **b)** ΔABD ≡ ΔACD ⇒ ∢ADB ≡ ∢ADC. **16.** ΔNRP ≡ ΔNQP, ΔMRP ≡ ΔMQP (LUL) ⇒ MR ≡ MQ. **Lecția 6. 1.** 35°, 110° sau 72°30′, 72°30′. **2.** 37°30′, 37°30′. **3.** 40°, 40°,100° sau 30°, 75°,75°. **4.** 20 cm. **5.** 8 km, 8 km. **6.** 2 triunghiuri, cu lungimile laturilor: 7 cm, 7 cm, 9 cm sau 7 cm, 8 cm, 8 cm. **10.** 110°. **11.** ΔABD ≡ ΔACE (LUL). **13.** ΔBDA ≡ ΔCEA (ULU). **14.** ΔANC ≡ ΔAMB (CU). **15.** ΔDNM ≡ ΔDPM (LLL). **16.** ΔABN ≡ ΔACM (LUL) ⇒ ∢ABN ≡ ∢ACM. Cum ∢ABC ≡ ∢ACB, obținem ∢NBC ≡ ∢MCB ⇒ ΔPBC e isoscel cu PB ≡ *PC*. ΔAPB ≡ ΔAPC (LLL) ⇒ ∢BAP ≡ ∢CAP ⇒ AP e bisectoarea unghiului BAC. **17. a)** 45°; **b)** 45°. **18. a)** ΔAMD ≡ ΔAND (IC) ⇒ ∢MAD ≡ ∢NAD; **b)** ΔMBD ≡ ΔNCD (IU). **19.** 7 cm. **20.** ∢BEF ≡ ∢ABE (EF ∥ AB) și ∢EBF ≡ ∢ABE (BE e bisectoarea unghiului ABC). ∢EFC ≡ ∢ABC (EF ∥ AB) și ∢ABC ≡ ∢ACB (ΔABC e isoscel). **22. a)** ΔBDC ≡ ΔCEB (LUL) ⇒ ∢BCD ≡ ∢CBE; **b)** ΔABP ≡ ΔACP (LLL). **24.** DA e mediatoarea segmentului BC ⇒ DB ≡ DC. CB e mediatoarea segmentului AD ⇒ CA ≡ CD. P_{DBC} = 16 cm **25.** Fie {N} = BD ∩ AC,{M} = CE ∩ AB. **a)** ΔAND ≡ ΔCNB (LUL) ⇒ ∢ADN ≡ ∢NBC ⇒ AD ∥ BC; **b)** ΔAME ≡ ΔBMC (LUL) ⇒ ∢AEM ≡ ∢MCB ⇒ AE ∥ BC. **Lecția 7. 4.** 9 cm. **5.** 48 cm. **7.** ΔANP ≡ ΔBMN ≡ ΔCPM. **8.** ∢BEF = ∢BCA = 60° (unghiuri corespondente), ∢EBF = 60°. **9. a)** BC și AB sunt mediatoarele segmentelor AA′, respectiv, CC′⇒ BA ≡ BA′, CA ≡ CA′, AC ≡ AC′, BC ≡ BC′. ΔABC echilateral, deci triunghiurile AC′B și A′BC sunt echilaterale, de unde rezultă că ∢A′BC = ∢ABC′ = 60° și ∢A′BC′ = 180°; **b)** 30 cm. **10.** CH, AH, BH sunt mediatoarele segmentelor AB, BC și, respectiv, AC ⇒ ΔHAB, ΔHBC, ΔHAC sunt isoscele. **11.** ΔNBC ≡ ΔMAB ≡ ΔPCA (LLL), ΔMBN ≡ ΔPAM ≡ ΔNCP (LUL). **12.** BC e mediatoarea segmentului AM ⇒ CA ≡ CM, BA ≡ BM. Cum ΔABC e echilateral, obținem MC ≡ BM ≡ BC. **Lecția 8. 1.** 22°. **2.** 90°, 38°, 52°. **3.** 18°, 72°, 90°. **4.** 90°, 18°, 72° sau 90°, 15°, 75°. **5.** 20°, 70°. **6.** 24 cm. **7.** 8 cm. **10.** 39 cm. **11.** 27 cm. **13.** 40 cm. **17.** 24 cm. **18.** 6 cm. **19.** 54 cm. **20.** 70 m. **21.** 60 cm. **22.** 3 cm. **23.** 600 m, 750 m. **24.** 60. **26.** 465 g. **Ex. recapitulative. 2.** ΔEAC ≡ ΔBAF (LUL), ΔFAE ≡ ΔFAB (LUL). **3. a)** 12 cm; **b)** ΔAMN e isoscel și AD e bisectoarea unghiului MAN. **5.** ΔEBI, ΔFIC sunt isoscele cu EI ≡ BE, IF ≡ FC. P_{AEF} = 22 cm. **7. a)** ΔABC e dreptunghic isoscel, BC = 2AD = 20 cm; **b)** 45°. **8.** În ΔACD, ∢D = 90°, ∢A = 30°⇒ CD = $\frac{AC}{2}$. În ΔABC, ∢A = 90°, ∢B = 30° ⇒ AC = $\frac{BC}{2}$. Atunci $\frac{CD}{BC}$ = 0,25 și $\frac{BD}{AC}$ = 1,5. **9.** DE și EF sunt medianele corespunzătoare ipotenuzei în triunghiurile dreptunghice BDC și CEB. **11.** În ΔAMC, ∢M = 90°, ∢C = 30° ⇒ AM = $\frac{AC}{2}$. În ΔANC, ∢N = 90°, ∢C = 30° ⇒ AN = $\frac{AC}{2}$.

SUGESTII DE FIȘE PENTRU OBSERVAREA SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVILOR

FIȘĂ DE OBSERVARE A ACTIVITĂȚII INDIVIDUALE			
Indicator	**Frecvent**	**Rar**	**Deloc**
Folosește corect termenii specifici disciplinei.			
Este implicat în îndeplinirea sarcinilor de lucru.			
Exprimare socială și emoțională adecvată.			
Are o atitudine adecvată față de ceilalți colegi.			

FIȘĂ DE OBSERVARE A ACTIVITĂȚII GRUPULUI			
Indicator	**Frecvent**	**Rar**	**Deloc**
Fiecare membru al grupului este implicat în rezolvarea sarcinii.			
Elevii formulează idei clare și ușor de înțeles de către ceilalți.			
Toate ideile propuse sunt luate în considerare.			
Elevii se sprijină și se încurajează pentru a fi productivi și creativi.			
Rezultatul activității de grup este relevant și prezentat într-o manieră care facilitează înțelegerea.			
Elevii urmăresc cu atenție prezentările celorlalte grupuri.			
Elevii acordă feedback colegilor.			

ETAPELE REALIZĂRII UNUI PROIECT

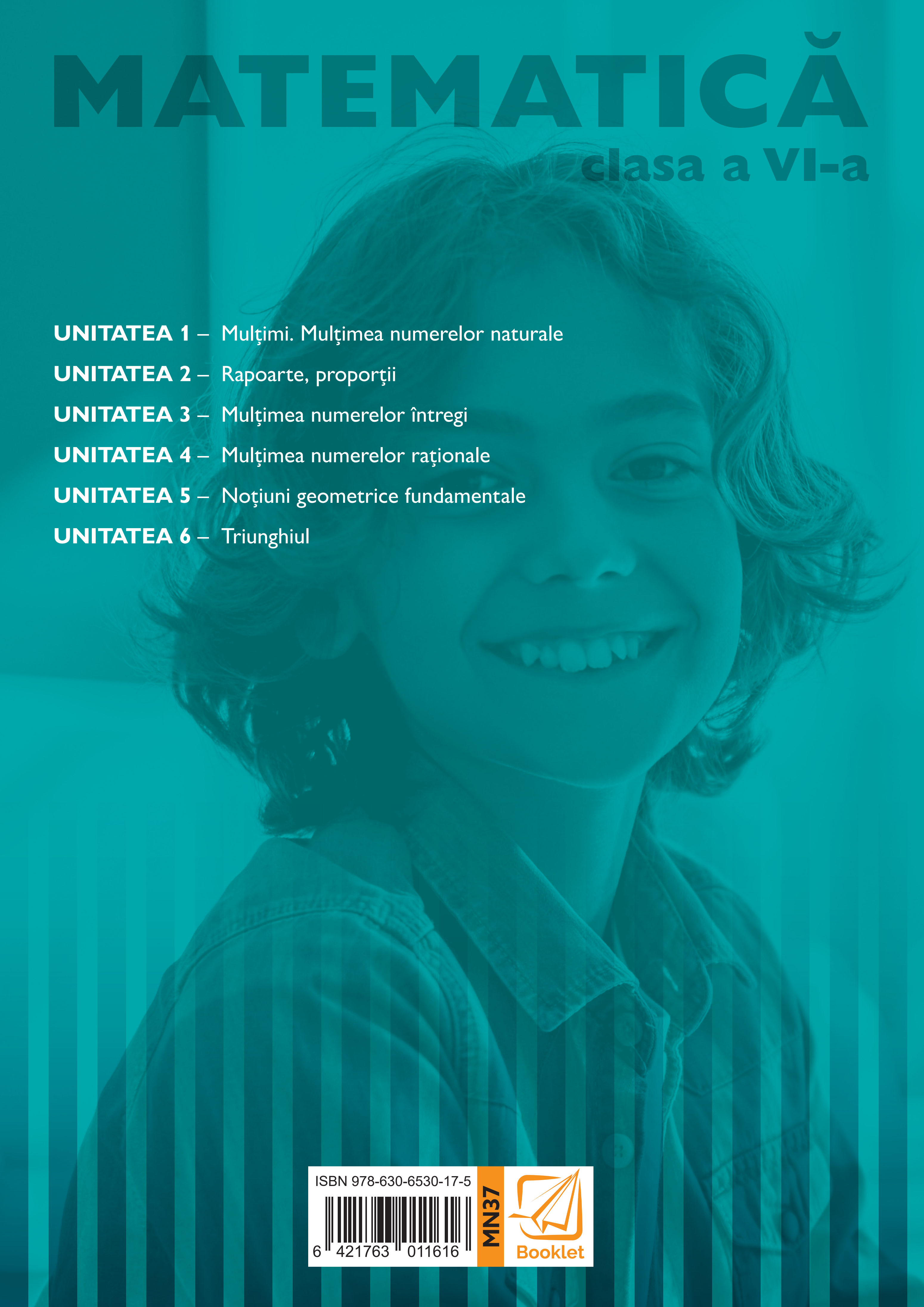
1. Stabilește câteva obiective și împarte sarcinile în pași mai mici.
2. Caută pe internet sau în diverse publicații informațiile de care ai nevoie. Folosește doar surse de încredere.
3. Îndeplinește, în ordine, obiectivele stabilite. Vei realiza astfel o prezentare. Fii creativ! Poți include imagini sau ilustrații.
4. Prezintă proiectul în fața clasei.

ETAPELE REALIZĂRII UNUI PORTOFOLIU

1. Stabilește o temă și alege un titlu adecvat pentru fișa de portofoliu.
2. Realizează un plan. Împarte sarcinile în pași mai mici.
3. Caută pe internet sau în diverse publicații informațiile de care ai nevoie.
4. Folosind aceste informații, realizează o prezentare.
5. Prezintă fișa în fața clasei.
6. Păstrează toate fișele create de tine într-un dosar.

ETAPELE REALIZĂRII UNEI INVESTIGAȚII

1. Adună informațiile de care ai nevoie. Poți folosi internetul sau poți studia cărți la bibliotecă.
2. Prelucrează informațiile și realizează prezentarea. Realizează o diagramă sau un tabel în care să notezi informațiile găsite.
3. Prezintă în fața clasei rezultatele investigației.



MATEMATICĂ

clasa a VI-a

ISBN 978-630-6530-17-5

MN37

Booklet