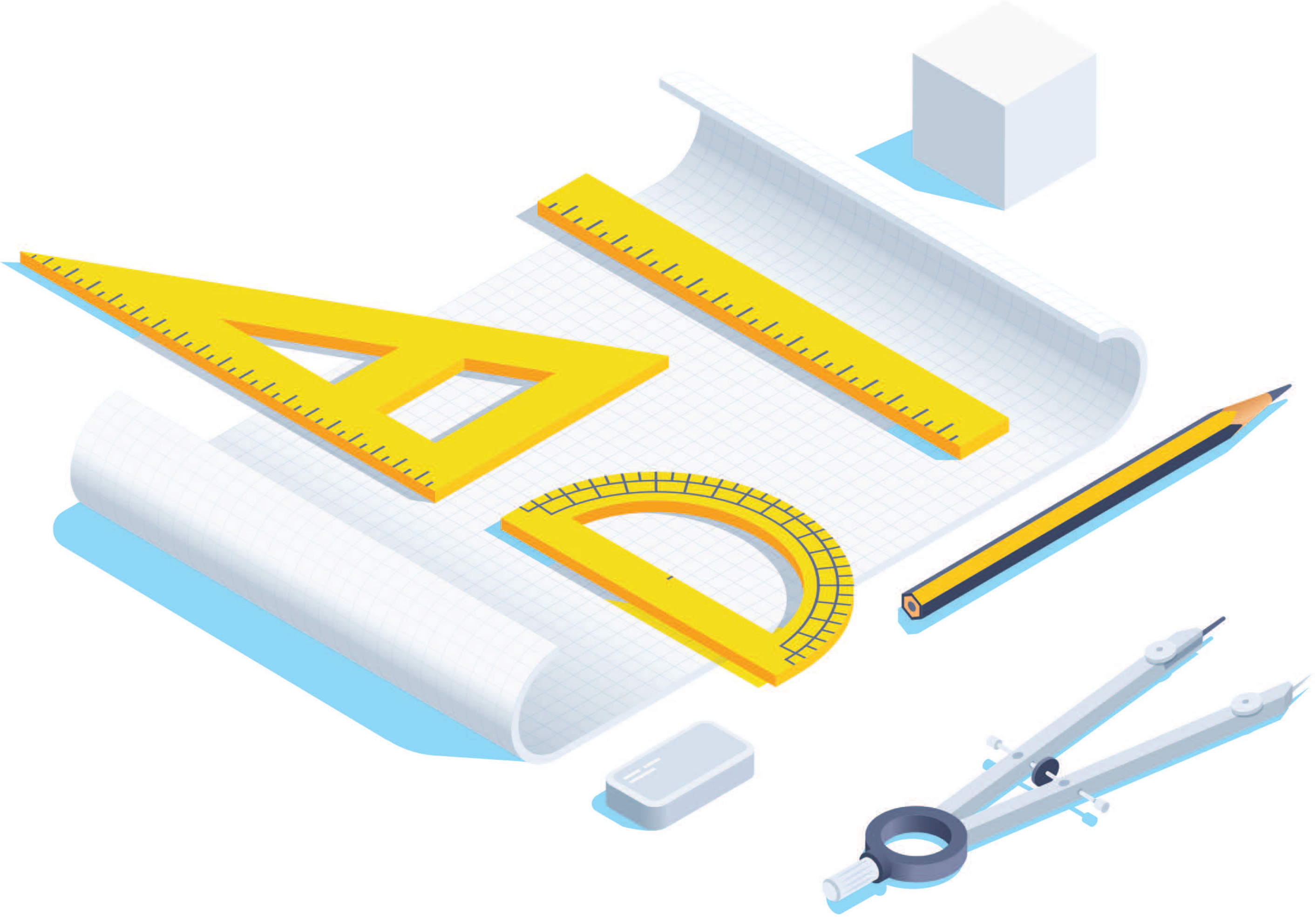
Ministerul Educației

Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică



Matematică

Clasa a V-a

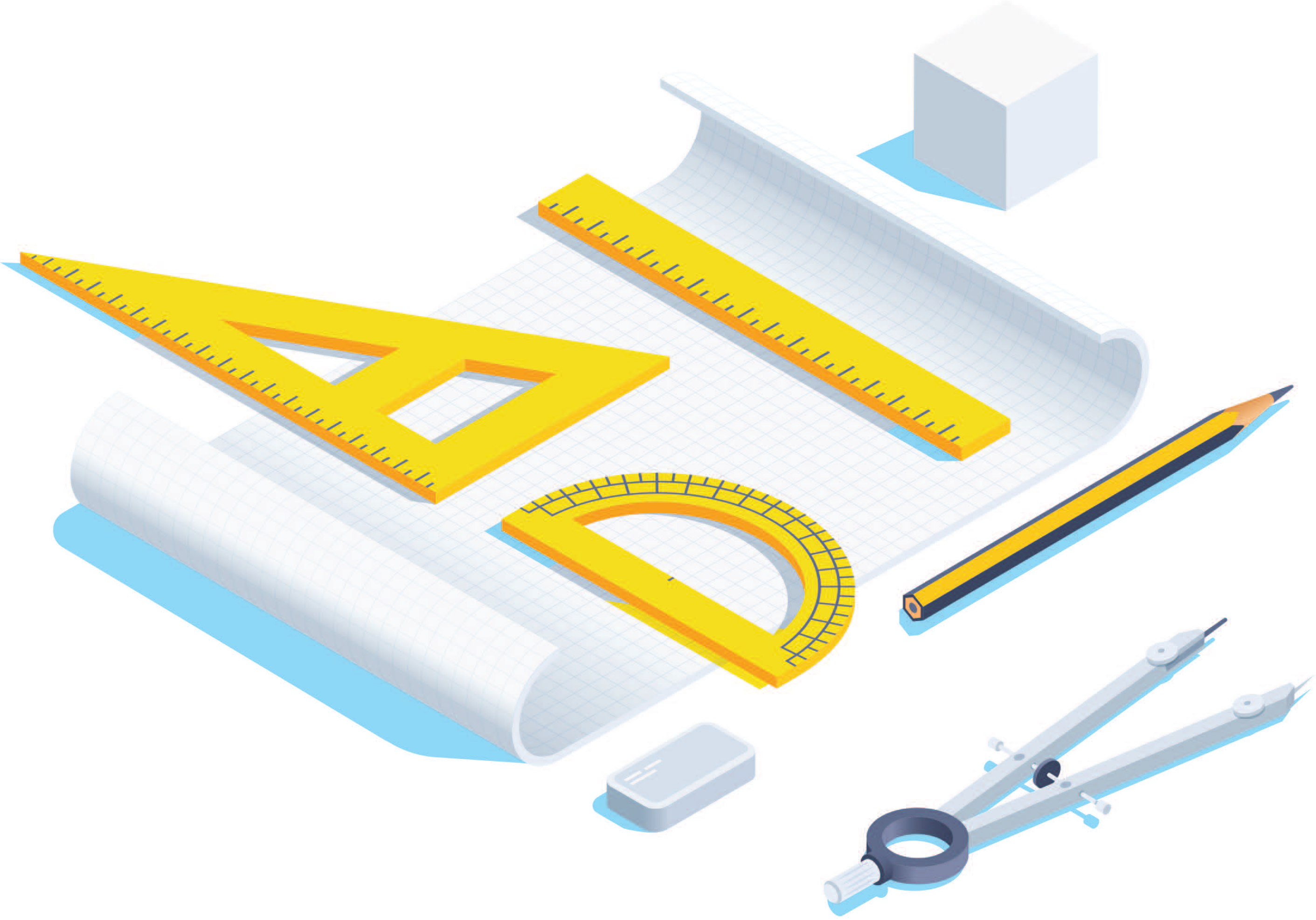
Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației.

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu *Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017*.

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

Ministerul Educației

Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică



Matematică 5

Clasa a V-a

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației prin ordinul de ministru nr. 4065/16.06.2022.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2022–2023.

Inspectoratul Școlar . . . .

Școala / Colegiul / Liceul . . . .

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: ***nou***, ***bun***, ***îngrijit***, ***neîngrijit***, ***deteriorat***.
- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:
- conf. univ. dr. Eugen Păltănea, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea ***Transilvania*** din Brașov
- prof. gradul I Dorin Irinel Popa, Liceul cu Program Sportiv, Slatina

Redactor-șef: Roxana Jeler
Redactor: Mihaela Preda
Coperta: Anca Chiriță, Alexandru Daș
Tehnoredactor: Crenguța Rontea
Ilustrații: Alexandra Gabor
Activități digitale interactive și platformă e-learning: Learn Forward Ltd. Website: https://learnfwd.com
Înregistrare sunet și postprocesare: ML Sistem Consulting, Grupul Editorial Art – Alexa Vangu
Voci: Mircea Dragoman, Camelia Pintilie
Animații: Krogen Creative Studio, Alexandru Daș, S.C. Film Experience S.R.L.-D
Credite foto și video: Dreamstime

ISBN 978-606-076-394-9

Pentru comenzi vă puteți adresa Departamentului Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 0744 634 719; 0751 281 774; 021 796 73 83; 021 796 73 80
Fax: 021 369 31 99

www.art-educational.ro

Cuvânt-înainte

Dragi copii,

Acest manual este primul pas pe care îl puteți face pentru a descoperi miracolul matematicii. Vom constata împreună că matematica este limba în care a fost scris Universul. Dacă în clasele primare am învățat *alfabetul matematicii*, clasa a V-a ne învață să construim *cuvinte*, *propoziții*, să dezvoltăm *idei*, să imaginăm lumi, astfel încât, în final, să scriem propria poveste matematică a universalității noastre.

Și, pentru că matematica este limbajul pe care îl poate înțelege oricare dintre noi, ca parte a Universului, am dorit să prezentăm acest manual folosind o exprimare prietenoasă, apropiată de cititor, apelând la simțul practic și la intuiție, ca forme de cunoaștere imediată a adevărului, concret sau abstract. Nu trebuie să fii matematician ca să simți numerele; ele sunt peste tot în jurul nostru și tot ce ne înconjoară e făcut din numere.

Introducerea conceptelor matematice se face plecând de la exemple din realitatea imediată, de la experiențele de zi cu zi. Matematica apare astfel ca o lume deschisă, vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

Matematica nu constă doar în rezolvarea de probleme și găsirea răspunsurilor la întrebări; adevărata lecție a matematicii este arta de a pune corect o întrebare, indiferent dacă se referă la o problemă practică sau una pur științifică. Doar pentru că nu putem găsi o soluție la o problemă, nu înseamnă că nu există una; rămâne să descoperim calea corectă de abordare. Manualul oferă, la fiecare pas, momente de investigație, de reflecție, ocazii de a pune întrebări și de a corela răspunsurile posibile cu datele situațiilor analizate.

Matematica este ceea ce spiritul vieții scrie cu litere de mână în conștiința umană. Umanitatea are nevoie de matematică, pentru că tot ceea ce există în Univers nu este doar descris de matematică, ci este construit din matematică.

Autorii

Instrucțiuni de utilizare a manualului digital

Varianta digitală a manualului este similară cu cea tipărită, având în plus peste 115 AMII, activități multimedia interactive de învățare, care asigură un plus cognitiv.

Activitățile multimedia interactive de învățare sunt de trei feluri și sunt simbolizate pe parcursul manualului astfel:

AMII static, de ascultare activă și de observare dirijată a unei imagini semnificative

Activitate animată, filmuleț sau scurtă animație

Activitate interactivă, de tip exercițiu sau joc, în urma căreia elevul are feedback imediat

Alte butoane folosite în varianta digitală:

- CUPRINS
- ECRAN COMPLET
- Mod de afișare **2 pagini (tip carte)**
- Mod de afișare **pagină lată (pagină sub pagină)**
- Mod de afișare **digital *responsive***
- Mod de afișare **comutare automată**
- NOTIȚE
- AJUTOR
- Navigare către pagina precedentă
- Navigare către pagina următoare

Ce propune acest manual

Manualul propune o viziune inspirată dintr-o pedagogie deschisă, conform căreia matematica este o lume vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

În acest context, matematica nu constă doar în rezolvarea de probleme și găsirea răspunsurilor la întrebări; adevărata lecție a matematicii este arta de a pune corect o întrebare, indiferent dacă se referă la o problemă practică sau la una pur științifică.

Structura unei unități de învățare

Fiecare unitate de învățare cuprinde teme de predare-învățare și o fișă de recapitulare/evaluare.

U1 Operații cu numere naturale

U2 Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

U3 Divizibilitatea numerelor naturale

U4 Fracții ordinare

U5 Fracții zecimale

U6 Elemente de geometrie și unități de măsură

Structura unei lecții de predare

Situație-problemă – problemă practică pe baza căreia se introduc noile concepte

De reținut – secvență în care sunt teoretizate conținuturile noi aflate în substratul situației-problemă propuse

Exemple – completarea informațiilor științifice

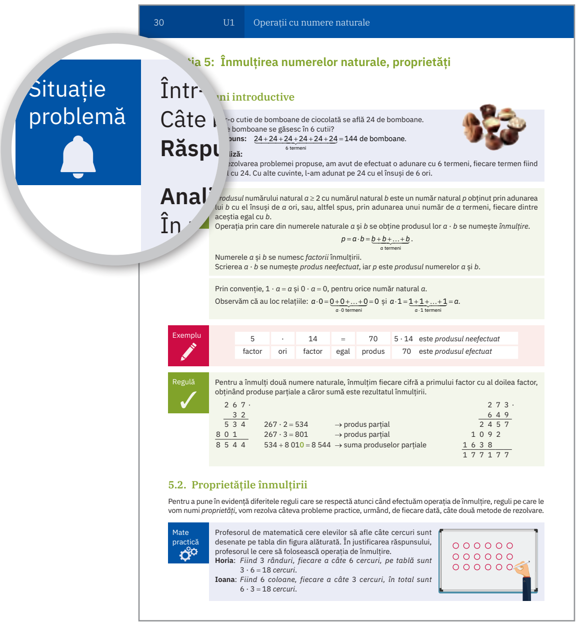
Mate practică – activități de învățare pentru formarea/dezvoltarea competențelor specifice și valorificarea experienței concrete a elevului în raport cu cotidianul

Probleme rezolvate: strategii și metode – reintegrarea conținuturilor noi, uneori rezolvate în mai multe moduri pentru a permite analogii și diferențieri

Probleme propuse – aplicații de natură teoretică sau practic-aplicativă

Gândire critică – încurajarea activităților de grup, a independenței în gândire și dezvoltarea încrederii în sine

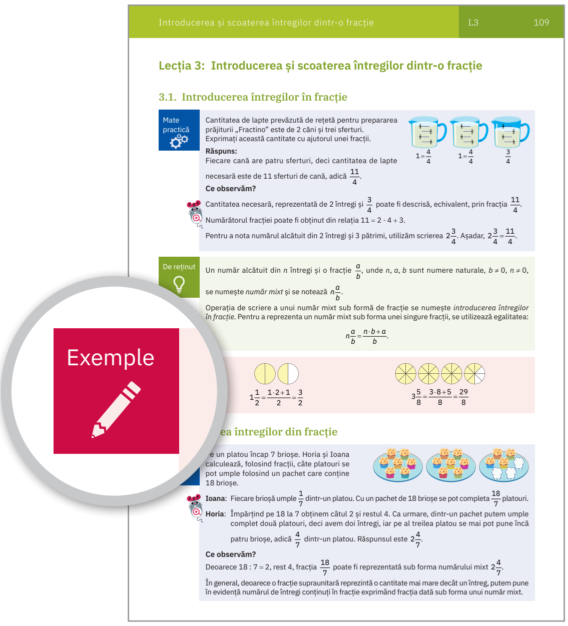
Autoevaluare – evaluarea de către elevii înșiși a cunoștințelor dobândite în cadrul lecției, cu ajutorul punctajelor și al soluțiilor

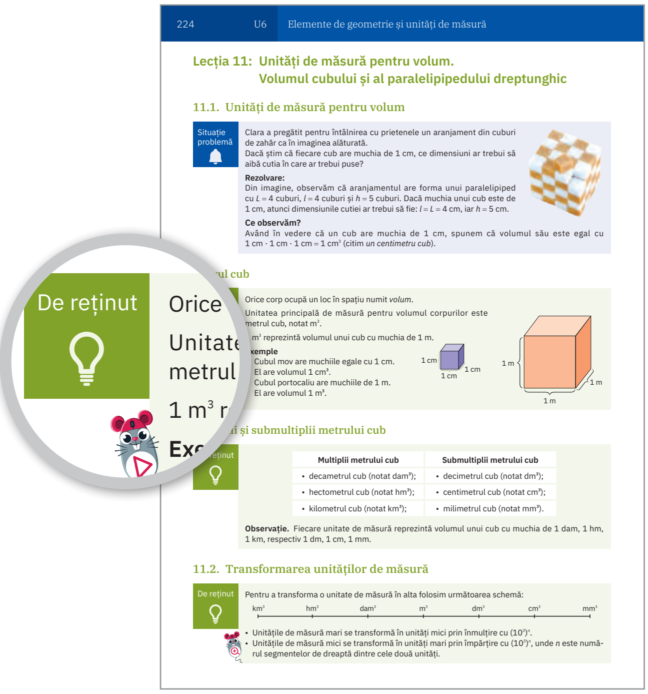


Cum este organizat manualul

Manualul este împărțit în șase unități de învățare care acoperă integral cele trei domenii de conținut prevăzute de programa școlară: *Operații cu numere naturale • Metode aritmetice de rezolvare a problemelor • Divizibilitatea numerelor naturale • Fracții ordinare • Fracții zecimale • Elemente de geometrie • Unități de măsură.*

Fiecare unitate se deschide printr-o scurtă prezentare a structurii respectivei unități, care, prin crearea de așteptări, asigură conștientizarea relațiilor intradisciplinare.



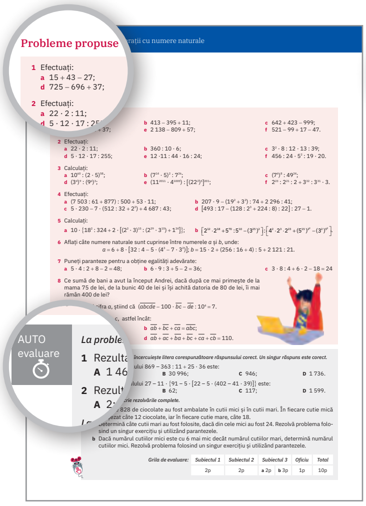


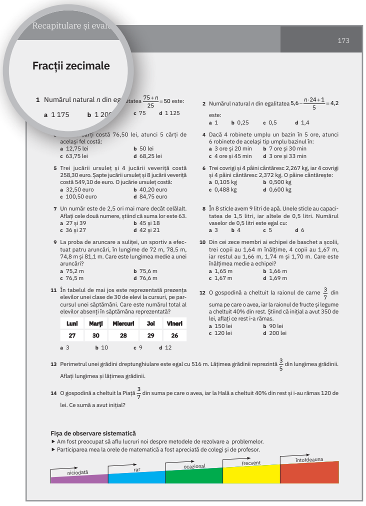
Componenta de evaluare

Pe parcursul unei unități de învățare sunt propuse instrumente complementare de evaluare (proiecte, portofolii, investigații, jocuri etc.), care au un grad ridicat de relevanță/aplicabilitate în viața de zi cu zi. Fiecare lecție se încheie cu autoevaluare, care conține un set de 3–4 itemi cu un grad ridicat de relevanță, ceea ce permite profesorilor să identifice rapid gradul de înțelegere de către elevi a conținuturilor predate în respectiva lecție.

La finalul fiecărei unități de învățare (după o succesiune mai consistentă de lecții) este propusă o fișă de evaluare, care se realizează prin forme și instrumente diversificate, axate pe formarea și dezvoltarea competențelor matematice.

Exercițiile și problemele propuse pot constitui și suport pentru lecțiile de recapitulare, acoperind întreaga gamă a tipologiei itemilor (obiectivi, semiobiectivi și subiectivi).





Cuprins

Competențe generale

1 Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2 Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3 Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4 Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5 Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6 Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1 Identificarea numerelor naturale în contexte variate
1.2 Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate
1.3 Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte
2.1 Efectuarea de calcule cu numere naturale, folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora
2.2 Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice.
2.3 Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice
3.1 Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate
3.2 Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale
3.3 Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare
4.1 Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparări, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale
4.2 Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date
4.3 Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură
5.1 Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale, pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
5.2 Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
5.3 Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată
6.1 Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului
6.2 Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra- și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)
6.3 Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor

U1

Operații cu numere naturale

Lecția 1: Scrierea și citirea numerelor naturale

Mate practică

În vizită la Muzeul de Istorie, ghidul le prezintă elevilor mai multe manuscrise ce conțin scrieri vechi.

El le spune elevilor că semnele:
se numesc cifre arabe,


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

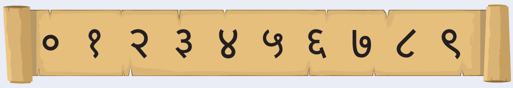
iar semnele din manuscrisul alăturat:
se numesc cifre romane.


I II III IV V VI VII VIII IX

Cifrele arabe provin din cultura indiană și au fost preluate de arabi. La început, arabii utilizau pentru cifrele de la 0 la 9 semnele:


٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩,

iar matematicienii indieni
utilizau semnele:


० १ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९.

În prezent, cel mai des se utilizează cifrele arabe.

De reținut

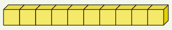
Numerele naturale au apărut din necesități practice de numărare și ordonare a unor lucruri, obiecte, ființe. Pentru scrierea unui număr natural, se folosesc unul sau mai multe dintre următoarele zece simboluri, numite *cifre arabe*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

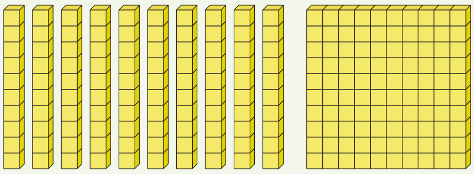
Fiecare număr natural se scrie ca o succesiune de cifre, care se pot repeta, prima cifră a unui număr natural de cel puțin două cifre fiind diferită de 0. De asemenea, fiecare succesiune de cifre reprezintă un număr natural.

Acest mod de scriere a unui număr natural se numește *scriere în sistem zecimal* sau *scriere în baza zece*, **pentru că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare**.

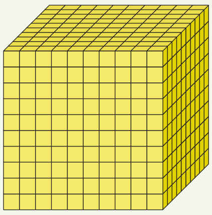
 ⟶ o unitate



10 unități ⟶ o zece



10 zeci formează o sută
o sută = 10 zeci = 100 de unități



⟶ o mie
= 10 sute
= 100 de zeci
= 1 000 de unități

În scrierea oricărui număr natural, poziția ocupată de fiecare cifră reprezintă un anumit ordin:
- ordinul 1 este ordinul unităților (prima cifră din dreapta);
- ordinul 2 este ordinul zecilor (a doua cifră din dreapta);
- ordinul 3 este ordinul sutelor (a treia cifră din dreapta);
- ordinul 4 este ordinul unităților de mii (a patra cifră din dreapta) etc.

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
Ordinul sutelor de milioane	Ordinul zecilor de milioane	Ordinul unităților de milioane	Ordinul sutelor de mii	Ordinul zecilor de mii	Ordinul unităților de mii	Ordinul sutelor	Ordinul zecilor	Ordinul unităților
9	8	7	6	5	4	3	2	1

Pentru a citi un număr natural, grupăm cifrele câte trei de la dreapta spre stânga. Aceste grupe se numesc clase. Fiecare clasă se compune din trei ordine consecutive: unități, zeci și sute. Zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior.

În ordine, de la dreapta la stânga avem: clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor etc. Din acest motiv, scrierea numerelor în baza zece este o scriere *pozițională*, deoarece fiecare cifră are o anumită valoare după locul unde este scrisă.

Exemplu

În numărul 23 472 508 216, cifra 2 apare de trei ori, de la dreapta spre stânga, și are următoarele valori: sute, milioane, respectiv zeci de miliarde.

sute de miliarde	zeci de miliarde	unități de miliarde	sute de milioane	zeci de milioane	unități de milioane	sute de mii	zeci de mii	unități de mii	sute	zeci	unități
	2	3	4	7	2	5	0	8	2	1	6
clasa *miliardelor*			clasa *milioanelor*			clasa *miilor*			clasa *unităților*		

Numărul se citește de la stânga la dreapta, citind mai întâi cifrele fiecărei clase, apoi numele clasei, astfel: două zeci și trei de miliarde patru sute șapte zeci și două de milioane cinci sute opt mii două sute șaisprezece.

Observații

1 **Descompunerea zecimală.** Orice număr natural de două sau mai multe cifre se scrie în mod unic sub forma unei sume de produse între fiecare cifră din scrierea numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective (1, 10, 100, 1 000 etc.).

Exemple:

1 $37 = 3 \cdot 10 + 7$; $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$.

2 $275 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5$; $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$.

3 $8\,086 = 8 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6$; $\overline{abcd} = 1\,000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$.

2 **Numere pare, numere impare.** Numerele naturale în scrierea cărora ultima cifră (cifra unităților) este 0, 2, 4, 6 sau 8 se numesc numere naturale pare, iar cele în scrierea cărora ultima cifră este 1, 3, 5, 7 sau 9 se numesc numere naturale impare.

Exemple:

1 Numerele 21, 35, 129 și 3 457 sunt impare, deoarece au ultima cifră 1, 5, 9, respectiv 7.

2 Numerele 54, 128, 3 526, 1 372 sunt pare, deoarece au ultima cifră 4, 8, 6, respectiv 2.

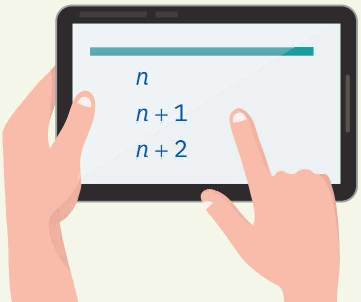
3 **Șirul numerelor naturale.** Scrierea 0, 1, 2, 3, ..., 23, 24, 25, ..., n, $n + 1$, $n + 2$, ... se numește *șirul numerelor naturale*. Orice două sau mai multe numere alăturate din șirul numerelor naturale se numesc numere naturale consecutive.

Exemple:

1 17 și 18 sunt două numere naturale consecutive.

2 45, 46, 47 sunt trei numere naturale consecutive.

3 Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numerele n, $n + 1$ și $n + 2$ sunt numere naturale consecutive.



Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați cifrele a, b și c, știind că $789 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

Rezolvare:
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = \overline{abc}$ și obținem $789 = \overline{abc}$.
În concluzie, $a = 7$, $b = 8$ și $c = 9$.

2 **a** Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 80 de pagini?
b Pentru numerotarea paginilor unui manual de matematică s-au folosit 468 de cifre.
Câte pagini are manualul?

Rezolvare:
a De la 1 la 9 s-au folosit 9 cifre.
De la 10 la 80 sunt $80 - 10 + 1 = 71$ de numere de două cifre, deci s-au folosit $71 \cdot 2 = 142$ de cifre.
Pentru numerotarea cărții s-au folosit $9 + 142 = 151$ de cifre.
b De la 1 la 9 s-au folosit 9 cifre. Au mai rămas $468 - 9 = 459$ de cifre utilizate.
De la 10 la 99 s-au utilizat 180 de cifre. Au mai rămas $459 - 180 = 279$ de cifre utilizate. Cele 279 de cifre provin de la numere de trei cifre, adică de la primele $279 : 3 = 93$ de numere de trei cifre.
Manualul are $100 + 93 - 1 = 192$ de pagini.

3 Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $a + 2b = 11$.

Rezolvare:
Vom studia cazuri după valorile lui b, deoarece observăm că pentru $b \geq 6$ avem $a + 2b > 11$.
Cazul I: Pentru $b = 5$, obținem $a = 1$.
Cazul II: Pentru $b = 4$, obținem $a = 3$.
Cazul III: Pentru $b = 3$, obținem $a = 5$.
Cazul IV: Pentru $b = 2$, obținem $a = 7$.
Cazul V: Pentru $b = 1$, obținem $a = 9$.
Cazul VI: Pentru $b = 0$, obținem $a = 11$ care nu este cifră.
Numerele cerute sunt 15, 34, 53, 72 și 91.

Probleme propuse

1 Scrieți cu litere numerele naturale:
a 843 027;
b 500 002;
c 5 017;
d 11 111;
e 21 005;
f 403 067;
g 120 004;
h 20 305 023.

2 Copiați tabelul de mai jos pe caiet și completați spațiile punctate:

Numărul natural	Cifra numărului natural	Ordinul cifrei	Clasa cifrei
1 234 567	3	zeci	mii
54 678	7	...	...
23 456 981	9	sute	...
1 234 567	2	...	...
23 456 981	4	...	mii
50 423 678	...	unități	milioane

3 Scrieți cu cifre, într-un tabel după modelul dat, numerele naturale de mai jos:
a douăzeci și șapte;
b trei sute cincizeci și opt de mii;
c cinci mii opt;
d nouă mii șapte sute cinci;
e două milioane opt sute treizeci și șapte de mii doi;
f șapte milioane trei mii șase sute cinci.

Clasa milioanelor			**Clasa miilor**			**Clasa unităților**		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U

4 Câte numere cuprinse între 30 și 60 conțin:
a cifra 4; **b** două cifre identice; **c** cifrele 1 sau 8?

5 **a** Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 9$.

b Determinați cifrele a, b, c, știind că $324 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

c Determinați cifrele a, b, c, d, știind că $\overline{a3c4} = 5 \cdot 1\,000 + b \cdot 100 + 7 \cdot 10 + d$.

6 **a** Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 320 de pagini?
b Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 612 cifre. Câte pagini are cartea?

7 Copiați tabelul următor pe caiet și completați spațiile punctate:

Numărul natural	**Cifra unităților**	**Cifra zecilor**	**Cifra sutelor**	**Cifra unităților de mii**	**Cifra zecilor de mii**	**Cifra sutelor de mii**	**Cifra unităților de milioane**
2 045 632	...	3	...	...	4	...	...
...	2	8	1	1	9	4	7
9 305 467	7	...	...	5	...	...	9
7 012 210	...	1	...	...	...	...	...
4 036 369	...	...	...	...	...	...	...

8 Pentru fiecare dintre șirurile de mai jos, observați regula de alcătuire și scrieți încă trei numere:
a 10, 16, 22, ...; **b** 10, 21, 32, ...; **c** 2, 6, 18, ...;
d 5, 11, 23, ...; **e** 4, 11, 32, ...; **f** 12, 23, 34, ...

9 **a** Scrieți trei numere impare cu produsul cifrelor 6.
b Scrieți patru numere pare cu suma cifrelor 10.

10 **a** Câte numere naturale de forma $\overline{aba}$ au produsul cifrelor egal cu 4?

b Câte numere naturale de forma $\overline{abcabc}$ au suma cifrelor egală cu 6?

11 **a** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $a + b = 3$.

b Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + 2b + c = 6$.

c Determinați numărul de forma $\overline{ab}$, știind că numerele naturale $\overline{ab3}$, $\overline{aba}$ și $\overline{a25}$ sunt consecutive.

12 Pe ecranul calculatorului sunt scrise toate numerele de la 700 la 1 084. Radu utilizează un program care șterge de pe ecran toate numerele impare. Câte numere rămân pe ecran?

13 Fiind dat un număr natural n, numărul scris cu cifrele lui n, în ordine inversă (citite de la dreapta la stânga) se numește *răsturnatul* numărului n. De exemplu, răsturnatul lui 12 este 21, iar răsturnatul lui 12 345 este 54 321.

a Determinați cifrele a și b, știind că răsturnatul numărului $\overline{73a}$ este $\overline{4b7}$.

b Determinați cifrele a, b, c știind că răsturnatul numărului $\overline{6a4c}$ este $\overline{347b}$.

c Determinați cifrele a, b, c și d știind că răsturnatul numărului $\overline{6b6d}$ este $\overline{daba}$, iar răsturnatul numărului $\overline{ab49}$ este predecesorul numărului $\overline{d44c}$.

Indicație. **a** Răsturnatul numărului $\overline{73a}$ este numărul $\overline{a37}$, deci $\overline{a37} = \overline{4b7}$. Fiind egale, aceste două numere au aceeași cifră a sutelor și aceeași cifră a zecilor. În consecință, $a = 4$ și $b = 3$.

Activitate pe grupe

Vizită la Muzeul de Istorie

Elevii, împărțiți în trei grupe, primesc următoarele sarcini de lucru:

Grupa 1. Elevii unei clase descoperă că autorizația de funcționare a muzeului a fost dată prin Decret Regal, emis de regele Carol I, la data de 23 august, anul $\overline{abba}$. Determinați anul în care a fost emisă autorizația de funcționare a muzeului, știind că suma cifrelor anului este 18.

Grupa 2. Maria a trimis un e-mail de mulțumire pe adresa muzeului și a primit ca răspuns o invitație la o expoziție de afișe hazlii. La expoziție vor fi prezente $\overline{ab}$ afișe realizate de elevi din clasele I – IV și $\overline{ba}$ afișe realizate de elevi din clasele V – VIII. Dacă numărul total al afișelor este de 33, iar elevii din clasele I – IV vor realiza mai multe afișe decât elevii din clasele V – VIII, atunci determinați câte afișe trebuie să realizeze fiecare echipă.

Grupa 3. Elevii participă la concursul *Obiectul meu preferat din muzeu*, urmând să realizeze și o prezentare a obiectului ales. Obiectul ales de Horia a fost o carte. El a precizat că pentru paginarea cărții s-au utilizat 1 086 de cifre. Determinați numărul paginilor cărții alese de Horia.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Scrierea cu cifre a numărului treizeci și opt de mii nouă este:
A 389; **B** 3 809; **C** 38 009; **D** 380 009.

2 Scrierea cu litere a numărului 1 078 este:
A o sută șaptezeci și opt; **B** o mie șaptezeci și opt;
C zece mii șaptezeci și opt; **D** un million șaptezeci și opt.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numărul natural $A = \overline{a14b}$.
a Determină câte numere A sunt impare.
b Determină câte numere A verifică relația $a > b$.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 2: Reprezentarea pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, estimări

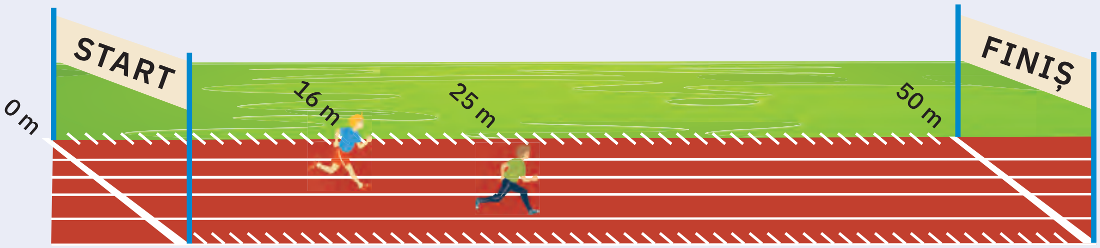
2.1. Reprezentarea pe axa numerelor

Situație problemă

1 Dimineața, Ioana observă că termometrul indică 22 de grade. La întoarcerea de la școală, la ora 14, termometrul indică 28 de grade. Este mai cald la ora 14 decât dimineața?

Răspuns: Este mai cald, deoarece pe scara termometrului 28 > 22.

2 Horia și Ioana se antrenează pe o pistă de 50 de metri. După plecarea din punctul *O*, marcat pe pistă cu 0 metri, la un moment dat, Horia se află în punctul *T* al pistei, la marcajul de 25 de metri, iar Ioana în punctul *Q* al pistei, la marcajul de 16 metri.
Cine este mai aproape de START și cine este mai aproape de FINIȘ?



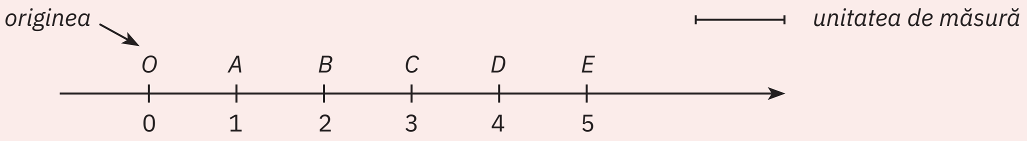
Răspuns: 16 < 25, deci Horia este mai aproape de FINIȘ.
25 > 16, deci Ioana este mai aproape de START.

De reținut

O dreaptă pe care se fixează un punct numit *origine*, un sens de parcurgere de la stânga la dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*, și un segment numit *unitate de măsură* se numește *axa numerelor*.

Fiecărui număr natural îi corespunde, pe axa numerelor, un punct. Numărul respectiv se numește *coordonata punctului*. Originea are coordonata 0 (zero).

Exemplu



Pe axa numerelor de mai sus sunt reprezentate punctele *O*(0), *A*(1), *B*(2), *C*(3), *D*(4) și *E*(5).
Citim: „punctul *O* de coordonată 0”, „punctul *A* de coordonată 1”, „punctul *D* de coordonată 4” etc.

2.2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

De reținut

Dintre două numere naturale care au un număr diferit de cifre, este mai mare numărul care are mai multe cifre.

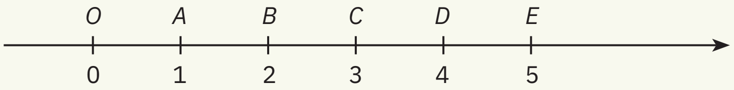
Dintre două numere naturale care au același număr de cifre, numărul mai mare este cel la care întâlnim prima cifră mai mare când comparăm cifrele de același ordin de la stânga la dreapta.
Semnele folosite în compararea numerelor sunt: =, <, >, ≤, ≥.

Exemple

1 546 < 1 234, deoarece 1 234 are 4 cifre, iar 546 are 3 cifre.
2 9 999 < 10 001, deoarece 10 001 are 5 cifre, iar 9 999 are 4 cifre.
3 123 < 193, deoarece numerele au același număr de cifre și 2 < 9.
4 540 > 440, deoarece numerele au același număr de cifre și 5 > 4.
5 1 234 < 1 237, deoarece au același număr de cifre și 4 < 7.

Observații

Dintre două numere naturale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este cel aflat în dreapta celuilalt.



3 este mai mic decât 4, deoarece punctul $D(4)$ se află poziționat pe axa numerelor în dreapta punctului $C(3)$.

2.3. Aproximări, rotunjiri, estimări

Situație problemă

Aflați într-o tabără internațională, Eva și Horia trebuie să prezinte câteva date despre țara noastră. Ei știu că în 2011, la ultimul recensământ oficial, populația României era de 20 121 641 de locuitori.

De reținut

Atunci când, în locul unui număr natural dat, utilizăm un alt număr apropiat de el, se spune că am folosit o aproximare a numărului respectiv. Există trei tipuri de aproximări: prin lipsă, prin adaos și prin rotunjire.

Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mare număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.) mai mic sau egal cu numărul respectiv.

Aproximarea prin adaos a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mic număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.) strict mai mare decât numărul respectiv.

Rotunjirea unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este aproximarea, prin lipsă sau prin adaos, la ordinul considerat cel mai apropiat de numărul respectiv.

În cazul în care cele două aproximări sunt la fel de apropiate de număr, pentru rotunjire se ia în considerare aproximarea prin adaos.

Exemple

	Aproximarea la ordinul zecilor prin …			Aproximarea la ordinul sutelor prin …		
Numărul	**lipsă**	**adaos**	**rotunjire**	**lipsă**	**adaos**	**rotunjire**
2 537	2 530	2 540	2 540	2 500	2 600	2 500
782	780	790	780	700	800	800
263 005	263 000	263 010	263 010	263 000	263 100	263 000

Observații

1. Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor se obține înlocuind ultima cifră a numărului (cifra unităților) cu zero, aproximarea prin lipsă la ordinul sutelor se face înlocuind ultimele două cifre ale numărului cu 0 (zero) etc.
2. Un număr natural este mai mare sau egal cu orice aproximare a sa prin lipsă (de orice ordin) și strict mai mic decât orice aproximare prin adaos.
3. Diferența dintre aproximarea prin adaos la ordinul zecilor (respectiv ordinul sutelor, miilor etc.) și aproximarea prin lipsă la același ordin este egală cu 10 (respectiv 100, 1 000 etc.).

Situație problemă

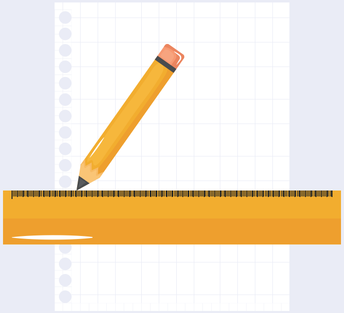
Prețul unui kilogram de mere în luna iulie este de 7 lei. Având în vedere că în toamnă intră pe piață noua recoltă, o firmă de băuturi răcoritoare estimează că în luna septembrie prețul unui kilogram de mere va fi mai mic cu 2 lei. În toamnă, prețul unui kilogram de mere a fost de 4 lei.
A fost utilă estimarea?

Răspuns: Estimarea a fost utilă, cu toate că aceasta nu a coincis întocmai realității. Din dorința de a avea un buget pentru achiziționarea unei cantități mari de mere, estimarea a ajutat, apropiindu-se de prețul corect.

De reținut

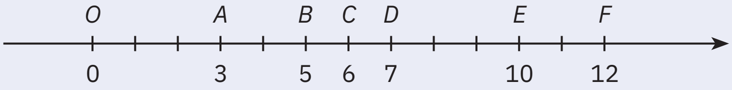
A estima înseamnă a evalua cu aproximație, a aprecia mărimea, valoarea, pe baza unor date incomplete. Estimarea are un rol informativ și este utilizată în planificarea diferitelor activități curente realizate de oameni, dar nu corespunde întotdeauna adevărului matematic. O estimare bună este cea care se apropie, în timp, de realitate.

Probleme rezolvate: strategii și metode



1 Reprezentați pe axa numerelor: 3, 5, 6, 7, 10, 12.

Rezolvare:
Se scrie $A(3)$, $B(5)$, $C(6)$, $D(7)$, $E(10)$, $F(12)$.



2 **a** Scrieți toate numerele naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 6, 1 și 3, apoi ordonați-le crescător.

b Scrieți, în ordine descrescătoare, toate numerele de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 0, 4 și 9.

Rezolvare:

a Numerele care se pot forma sunt următoarele: 613, 631, 136, 163, 316, 361.
Ordinea crescătoare a numerelor este: 136, 163, 316, 361, 613, 631.

b Prima cifră a unui număr natural de trei cifre nu poate fi egală cu zero, deci cu cifrele 0, 4 și 9 putem forma doar patru numere de trei cifre distincte și anume: 409, 490, 904 și 940.
Ordinea descrescătoare a numerelor este 940, 904, 490, 409.

3 Alegeți cifrele a și b astfel încât numărul $A = \overline{353a17}$ să fie mai mare decât numărul $B = \overline{3b4739}$.
Câte soluții are problema?

Rezolvare:
Dacă $b > 5$, atunci $A < B$, indiferent de alegerea lui a.
Dacă $b = 5$, atunci $B = 354\,739$. Primele două cifre ale numerelor A și B sunt egale. A treia cifră a numărului B este 4, mai mare decât a treia cifră a lui A, care este 3. În acest caz, $A < B$.
Dacă $b \leq 4$, atunci $A > B$, indiferent de valorile pe care le ia cifra a. Cifra b poate lua 5 valori (0, 1, 2, 3 sau 4), iar cifra a poate lua 10 valori (0, 1, 2, ..., 9). Oricare dintre cele 5 valori ale lui b se poate asocia cu oricare dintre cele 10 valori ale lui a, deci sunt $5 \cdot 10 = 50$ de posibilități diferite de alegere a cifrelor a și b.

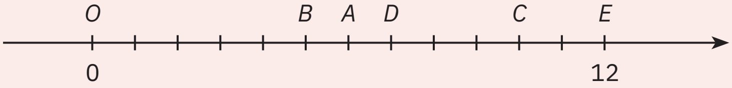
4 Fie numărul 269 317. Plasați cifra 5 între două cifre ale numărului pentru a obține cel mai mare și, respectiv, cel mai mic număr posibil.

Rezolvare:
Plasând cifra 5 între două cifre ale numărului 269 317, obținem numerele: 2 569 317, 2 659 317, 2 695 317, 2 693 517, 2 693 157.
Cel mai mare număr posibil este 2 695 317, iar cel mai mic număr posibil este 2 569 317.
Observăm că cel mai mare număr se obține atunci când plasăm cifra 5 înaintea primei cifre mai mici decât 5 din scrierea numărului 269 317, adică înaintea cifrei 3.
La fel, cel mai mic număr se obține când plasăm cifra 5 înaintea primei cifre mai mari decât 5 a numărului 269 317, adică înaintea cifrei 6.

Probleme propuse

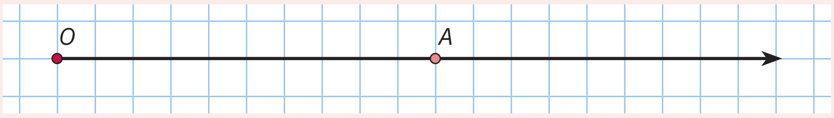
1 Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12.

2 Determinați coordonatele punctelor *A*, *B*, *C* și *D* din reprezentarea de mai jos.

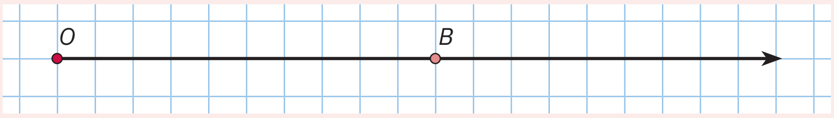


3 Scrieți în ordine descrescătoare numerele: 1 234, 1 342, 2 314, 2 143, 4 321.

4 Ioana a avut de reprezentat *A*(10) și a realizat acest desen:



Eva a avut de reprezentat *B*(5) și a realizat acest desen:



Sunt corecte cele două reprezentări? Justificați răspunsul.

5 Scrieți în ordine crescătoare numerele naturale:
- **a** mai mici decât 12;
- **b** cuprinse între 17 și 25;
- **c** impare, cuprinse între 14 și 38.

6 Comparați numerele:
- **a** 23 456 și 23 546;
- **b** 236 780 și 236 800;
- **c** 123 456 și 23 456.

7
- **a** Aproximați numărul 124 367, prin lipsă, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.
- **b** Aproximați numărul 892 524, prin adaos, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.
- **c** Aproximați numărul 587 321 la ordinul zecilor, sutelor, miilor și, respectiv, al sutelor de mii, prin lipsă și prin adaos.
- **d** Rotunjiți numărul 89 276 la ordinul zecilor, sutelor, miilor și, respectiv, al sutelor de mii.

8 Rotunjiți, prin aproximare la ordinul sutelor, următoarele numere: 2 367, 3 129, 1 087, 98 109, 63 987, 13 817, 56 257, 56 275, 80 978, 80 789.

9 Determinați următoarele numere naturale:
- **a** cel mai mic număr natural de trei cifre nenule distincte;
- **b** cel mai mare număr natural format cu patru cifre distincte;
- **c** cel mai mare număr care se scrie cu trei cifre pare și două impare, toate distincte;
- **d** cel mai mic număr de forma $\overline{a2b3c4}$, cu toate cifrele distincte.

10 **a** Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor pare cuprinse între 7 și 19. Câte puncte ați obținut?
b Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor impare cuprinse între 0 și 14. Câte puncte ați obținut?

11 Scrieți câte patru numere naturale cuprinse între 13 025 și 13 983, care, rotunjite la ordinul sutelor, ar fi egale cu:
a 13 000; **b** 13 500; **c** 14 000.

12 **a** Fie numărul 658 234. Plasați cifra 7 între cifrele sale, astfel încât numărul obținut să fie cel mai mic posibil.
b Fie numărul 852 374. Ștergeți o cifră a acestui număr, astfel încât numărul rămas să fie cel mai mare posibil.

13 Scrieți 6 numere naturale cuprinse între 23 427 și 23 482, care se pot rotunji la:
a 23 500; **b** 23 400; **c** 23 480.

14 Câte numere naturale de trei cifre se pot rotunji la ordinul sutelor, astfel încât să se obțină numărul 400?

15 Determinați perechile (b, d) care lipsesc din spațiile punctate din tabelul dat, pentru care $a < b \le c \le d < e$:

a	b	c	d	e
12	...	19	...	22

16 Determinați cel mai mic număr natural de cinci cifre diferite care este mai mare decât 30 000 și are suma cifrelor sale mai mare decât 21.

17 Asociați fiecare cifră din coloana **A** cu o literă din coloana **B**, pentru a obține predecesorul sau succesorul numărului din coloana **A**.

A	B
1 327	**a** 327
2 329	**b** 328
3 330	**c** 329
4 332	**d** 330
	e 331

18 Ordonați descrescător numerele naturale a, b, c, d, e, știind că: $c > e$, $c < a$, $d > a$ și $b > d$.

19 **a** Scrieți numerele pare cuprinse între $\overline{ab2}$ și $\overline{ab8}$.
b Scrieți numerele impare cuprinse între $\overline{a13}$ și $\overline{a28}$.

20 **a** De câte ori se folosește cifra 3 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 100?
b De câte ori se folosește cifra 1 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 1 000?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dintre numerele 2 021, 2 102, 2 012, 12 200, mai mic este numărul:
A 2 021; **B** 2 102; **C** 2 012; **D** 12 220.

2 Aproximarea, prin adaos, a numărului 182 323 la sute de mii este:
A 182 300; **B** 182 400; **C** 200 000; **D** 202 323.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numerele de forma $\overline{abc}$, astfel încât $200 < \overline{abc} < 400$.
a Câte numere de forma $\overline{abc}$ verifică datele problemei?
b Scrie toate numerele care verifică și condiția $c = a + b + 5$.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 3: Adunarea numerelor naturale, proprietăți

3.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

În colecția sa, Horia are 5 cărți poștale cu obiective turistice din România. Ioana, colega lui, îi face cadou încă 3.
Câte cărți poștale are acum Horia?

Răspuns: $5 + 3 = 8$ cărți poștale

De reținut

Prin adunarea numerelor naturale *a* și *b* se obține un număr natural *s*, numit *suma* numerelor *a* și *b*.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}$$

Numerele *a* și *b* se numesc *termenii* adunării, iar rezultatul adunării poartă numele de *sumă*.
Scrierea $a + b$ se numește *suma neefectuată*, iar *s* este *suma efectuată*.

Exemplu

27	+	**31**	=	**58**	**27** + **31**	este *suma neefectuată*
termen	plus	termen	egal	sumă	58	este *suma efectuată*

De reținut

Din clasele anterioare știm că, pentru a aduna două numere naturale, se adună unitățile de același ordin și se ține cont că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

$$\begin{array}{rrrl} ^{+1} & ^{+1} & & \\ 2 & 6 & 7 & + \\ 5 & 8 & 5 & \\ \hline 8 & 5 & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{unități:} & 7 + 5 = 12 = 10 + 2 \\ \text{zeci:} & 6 + 8 + 1 = 15 = 10 + 5 \\ \text{sute:} & 2 + 5 + 1 = 8 \end{array}$$

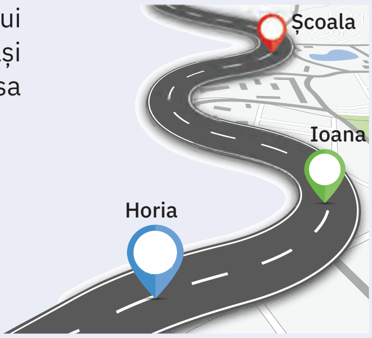
$$\begin{array}{rrrrl} & ^{+1} & ^{+1} & ^{+1} & \\ & 9 & 7 & 3 & + \\ 3 & 6 & 4 & 9 & \\ \hline 4 & 6 & 2 & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{unități:} & 3 + 9 = 12 = 10 + 2 \\ \text{zeci:} & 7 + 4 + 1 = 12 = 10 + 2 \\ \text{sute:} & 9 + 6 + 1 = 16 = 10 + 6 \\ \text{mii:} & 3 + 1 = 4 \end{array}$$

3.2. Proprietățile adunării numerelor naturale

Pentru a pune în evidență unele reguli care se respectă atunci când efectuăm operația de adunare (reguli pe care le vom numi proprietăți), vom analiza câteva situații practice.

Mate practică

În drumul spre școală, Horia trece în fiecare zi să o ia și pe colega lui de bancă, Ioana. La terminarea cursurilor, Horia se întoarce pe același drum, lăsând-o pe Ioana acasă la ea. De la casa lui Horia până la casa Ioanei sunt 250 m, iar de la casa Ioanei până la școală sunt 450 m.



a Ce distanță parcurge Horia când merge de acasă până la școală?
Răspuns: 250 m + 450 m = 700 m

b Ce distanță parcurge Horia când se întoarce de la școală acasă?
Răspuns: 450 m + 250 m = 700 m

Ce observăm?
Suma a două numere naturale este aceeași, indiferent de ordinea în care apar cei doi termeni.
Această proprietate a adunării se numește *comutativitate*.

$$\underbrace{250 + 450}_{700} = \underbrace{450 + 250}_{700}$$ sau, în general, $$a + b = b + a$$ pentru orice numere naturale *a* și *b*.

Mate practică

Horia a citit, de vineri până duminică, cartea sa preferată.
Vineri a citit 24 de pagini, sâmbătă 67, iar duminică 48.

a Câte pagini a citit Horia vineri și sâmbătă?
Răspuns: $24 + 67 = 91$ de pagini

b Câte pagini a citit Horia sâmbătă și duminică?
Răspuns: $67 + 48 = 115$ pagini

c Câte pagini a citit Horia în weekend?
Răspuns 1: $91 + 48 = 139$ de pagini (am adunat cât a citit în primele două zile cu cât a citit duminică)
Răspuns 2: $24 + 115 = 139$ de pagini (am adunat cât a citit vineri cu cât a citit în ultimele două zile)

Ce observăm?
Când adunăm trei numere naturale, se obține același rezultat fie că adunăm mai întâi primele două numere și apoi adunăm suma obținută cu al treilea număr, fie că adunăm primul număr la suma ultimelor două. Această proprietate a adunării se numește *asociativitate*.

$$\underbrace{(\underbrace{24+67}_{91})+48}_{139}=\underbrace{24+(\underbrace{67+48}_{115})}_{139}$$

sau, în general, $(a + b) + c = a + (b + c)$
pentru orice numere naturale a, b și c.

De reținut

Proprietățile adunării numerelor naturale

1 Adunarea numerelor naturale este comutativă:
$a + b = b + a$, pentru orice numere naturale a și b.

2 Adunarea numerelor naturale este asociativă:
$(a + b) + c = a + (b + c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.

3 Numărul natural 0 este element neutru la adunarea numerelor naturale:
$a + 0 = 0 + a = a$, pentru orice număr natural a.

Știați că...

Adunarea reprezintă, de fapt, o numărare succesivă. De exemplu, pentru a-l aduna pe 5 cu 3 vom număra, în șirul numerelor naturale, încă 3 numere pornind de la 5:

0 1 2 3 4 5 → 6 → 7 → 8 9 10 ...

La fel, a aduna pe 3 cu 5 înseamnă a număra, în șirul numerelor naturale, 5 numere pornind de la 3:

0 1 2 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 9 10 ...

Din acest exemplu deducem că $5 + 3 = 8$ și $3 + 5 = 8$, deci $5 + 3 = 3 + 5$.
Această interpretare a adunării, ca numărare succesivă, oferă încă o justificare a faptului că suma a două numere naturale este aceeași, indiferent de ordinea termenilor (altfel spus, a proprietății de comutativitate a adunării numerelor naturale).

3.3. Legătura dintre operația de adunare și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1 Adunând un număr natural în ambii membri ai unei egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$, pentru orice număr natural c.

2 Adunând un număr natural în ambii membri ai unei inegalități, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$, pentru orice număr natural c.

3 Adunând termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$.

4 Adunând termen cu termen două inegalități de același sens, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$;
- dacă $a > b$ și $c > d$, atunci $a + c > b + d$;
- dacă $a \le b$ și $c \le d$, atunci $a + c \le b + d$;
- dacă $a \ge b$ și $c \ge d$, atunci $a + c \ge b + d$.

Exemplu

Numerele naturale a și b verifică relațiile $a + b = 11$ și $b + 2a = 15$.
Determinați numerele $x = (a + 2) + (b + 3)$ și $y = 3a + 2b$.

Rezolvare:

a Deoarece $x = a + b + 5$, vom aduna 5 în ambii membri ai egalității $a + b = 11$. Obținem: $a + b + 5 = 16$, adică $x = 16$.

b Adunând membru cu membru egalitățile $a + b = 11$ și $b + 2a = 15$, obținem: $(a + b) + (b + 2a) = 11 + 15$, de unde rezultă $3a + 2b = 26$, adică $y = 26$.

Gândire critică. Suma primelor *n* numere naturale nenule

De reținut

Pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$$1 + 2 + ... + n = n \cdot (n + 1) : 2.$$

Demonstrație: Notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n \\ S &= n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 2 + 1 \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru cele două relații, obținem:

$$2 \cdot S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + ... + (n - 1 + 2) + (n + 1),$$

adică $2 \cdot S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n\text{ paranteze}} = n \cdot (n+1)$, de unde rezultă: $S = n \cdot (n + 1) : 2$.

Exemple

1 Suma primelor zece numere naturale nenule este:
$1 + 2 + ... + 10 = 10 \cdot 11 : 2 = 110 : 2 = 55$.

2 Suma numerelor naturale de la 1 la 100 este:
$1 + 2 + ... + 100 = 100 \cdot 101 : 2 = 10\,100 : 2 = 5\,050$.

Observație

Sumele de tipul celei din exemplul anterior se numesc sume Gauss, după numele marelui matematician german Karl Friedrich Gauss, despre care se spune că, în clasele primare, a primit ca pedeapsă de la profesorul său J.G. Büttner să calculeze suma numerelor de la 1 la 100. Procedând ca în demonstrația de mai sus, el a reușit să determine rezultatul în câteva secunde, spre uimirea profesorului și a asistentului acestuia.

Studiu individual

Karl Friedrich Gauss (1777–1855) a fost un matematician, fizician și astronom german, considerat unul dintre cei mai mari oameni de știință germani. Folosind ca sursă un dicționar de personalități științifice ori site-uri de internet recomandate de profesorul vostru, documentați-vă despre contribuția lui Gauss la dezvoltarea științei.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Folosind asociativitatea și comutativitatea adunării, calculați mai rapid sumele:

a $S = 22 + 23 + 24 + 100 + 76 + 77 + 78$; **b** $S = (24 + 36) + 73 + 22 + 87 + (88 + 44) + 66$.

Rezolvare:

a $S = 22 + 23 + 24 + 100 + 76 + 77 + 78 = (22 + 78) + (23 + 77) + (24 + 76) + 100 =$
$= 100 + 100 + 100 + 100 = 400$;

b $S = (24 + 36) + 73 + 22 + 87 + (88 + 44) + 66 = (24 + 36) + (73 + 87) + (22 + 88) + (44 + 66) =$
$= 60 + 160 + 110 + 110 = 220 + 220 = 440$.

2 Calculați rapid, înlocuind unul dintre termenii adunării cu o sumă neefectuată, după modelul:

$$529 + 780 = 509 + 20 + 780 = 509 + (20 + 780) = 509 + 800 = 1\,309$$

a $675 + 388$;
b $937 + 677$.

Rezolvare:
a $675 + 388 = 675 + (25 + 363) = (675 + 25) + 363 = 700 + 363 = 1\,063$;
b $937 + 677 = (900 + 37) + (600 + 77) = (900 + 600) + (37 + 77) = 1\,500 + 114 = 1\,614$.

3 Știind că $x + 2y + 13 = 24$, determinați numerele $a = 18 + 2y + x$ și $b = 2x + 77 + 4y$.

Rezolvare:
$a = 18 + 2y + x = (x + 2y + 13) + 5 = 24 + 5 = 29$
$b = 2x + 77 + 4y = x + x + 2y + 2y + 77 = (x + 2y + 13) + (x + 2y + 13) + 51 = 99$.

4 Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care are loc egalitatea $\overline{17ab} + \overline{ab57} = 5\,191$.

Rezolvare:
Metoda 1. Scriem termenii din sumă unul sub altul:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 7 & a & b \; + \\ a & b & 5 & 7 \\ \hline 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}$$

Suma dintre b și 7 are ultima cifră 1, deci $b = 4$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 7 & a & 4 \; + \\ a & 4 & 5 & 7 \\ \hline 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}$$

Ultima cifră a sumei dintre a, 5 și 1 este 9, deci $a = 3$. Deci $\overline{ab} = 34$, iar egalitatea este $1\,734 + 3\,457 = 5\,191$, adevărată.

Metoda 2. Folosind scrierea zecimală, avem:
$\overline{17ab} + \overline{ab57} = 1\,700 + \overline{ab} + \overline{ab00} + 57 = 1\,757 + \overline{abab}$, deci $1\,757 + \overline{abab} = 5\,191$.
Rezultă că $\overline{abab} = 5\,191 - 1\,757 = 3\,434$, de unde $\overline{ab} = 34$.

5 Fie $n \geq 3$ un număr natural. Ordonați crescător numerele $2n + 8$, $4n + 3$, $n + 10$.

Rezolvare:
Adunând numărul natural $n + 7$ la fiecare dintre membrii inegalității $n \geq 3$, obținem $2n + 7 \geq n + 10$, deci $n + 10 \leq 2n + 7 < 2n + 8$. Apoi, adunând membru cu membru inegalitățile $n \geq 3$ și $n \geq 3$, obținem $2n \geq 6$. Adunând acum $2n + 3$ în ambii membri, obținem $4n + 3 \geq 2n + 9 > 2n + 8$.
Așadar, $n + 10 < 2n + 8 < 4n + 3$.

Probleme propuse

1 Calculați:
a $241 + 347$;
b $127 + 234$;
c $6\,453 + 1\,200$;
d $678 + 5\,438$;
e $4\,539 + 496$;
f $134 + 739$;
g $1\,020 + 3\,057 + 59$;
h $219\,908 + 1\,005 + 12$;
i $42\,008 + 21\,007 + 674$;
j $378 + 324 + 5\,002$;
k $92\,367 + 195 + 6\,792$;
l $210 + 2\,011 + 20\,012$.

2 Folosind asociativitatea și comutativitatea adunării, calculați sumele:
a $S = 3 + 12 + 45 + 97 + 17 + 83 + 55 + 88 + 100$;
b $S = 200 + 175 + 113 + 37 + 25 + 87 + 163$;
c $S = 19 + 32 + 58 + 91 + 42 + 81 + 55 + 9 + 100$.

3 Calculați:
a $24 + 68 + 76 + 32$;
b $224 + 29 + 32 + 76 + 71 + 24$;
c $90 + 900 + 100 + 10$;
d $450 + 327 + 550 + 673$;
e $444 + 999 + 556 + 1$;
f $25 + 58 + 175 + 142$.

4 Calculați următoarele sume:
a $1 + 2 + 3 + ... + 30$;
b $2 + 3 + 4 + ... + 30$;
c $9 + 10 + 11 + ... + 30$.

5 **a** Suma a două numere naturale consecutive este 43. Determinați numerele.
b Suma a trei numere naturale consecutive este 48. Determinați numerele.
c Suma a două numere naturale pare consecutive este 26. Determinați numerele.
d Suma a trei numere impare consecutive este 57. Determinați numerele.

6 **a** Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{7ab} + \overline{ab2} = 977$.
b Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{4ab} + \overline{ba9} = 852$.

7 Efectuați:
a $\overline{a105} + \overline{3b3}$; **b** $\overline{a00d} + \overline{b00} + 60$; **c** $\overline{ab0000} + \overline{cd00} + \overline{ef}$.

8 Dacă a este un număr par și b este un număr impar, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
a $a + b + 11$ este un număr par; **b** $a + b + 12$ este un număr par;
c $a + 4 + b + 9$ este un număr impar; **d** $50 + a + b + 36$ este un număr impar.

9 **a** Dacă n este cea mai mare cifră pară, atunci determinați numerele pare cuprinse între $n + 11$ și $n + 24$.
b Dacă n este cea mai mare cifră impară, atunci determinați numerele impare cuprinse între $n + 17$ și $n + 39$.

10 Ioana și Horia folosesc computerul pentru a crea un program care să citească datele de intrare și să producă datele de ieșire cerute. Identificați rezultatele greșite și indicați răspunsurile corecte, după model:

	Date de intrare	Valoare	Date de ieșire	Valoare	Verificare rezultate
a	$5 + 3a + 2b$	22	$2b + 3a + 45$	62	*corect*
b	$2a + 4b + 19$	51	$60 + 4b + 15 + 2a$	701	*incorect*/rezultatul *corect* este 107
c	$5a + 3b + 99$	158	$34 + 10a + 78 + 6b$	230	...
d	$3a + 5b$	26	$7a + 8b$	35	...
	$4a + 3b$	20			
e	$a + 2b$	25	$5a + 9b + 7$	122	...
	$2a + 3b$	40			

11 Reconstituiți adunările, scriind toate variantele posibile.

a
$$\begin{array}{r} 1\,\ast\,6\,+ \\ 2\,\ast \\ \hline \ast\,1\,3 \end{array}$$

b
$$\begin{array}{r} \ast\,\ast\,3\,\ast\,+ \\ 7\,9\,4\,\ast \\ \hline 1\,3\,7\,8\,3 \end{array}$$

c
$$\begin{array}{r} 4\,\ast\,+ \\ 5\,\ast\,2 \\ \hline \ast\,2\,9 \end{array}$$

12 Prețul unui caiet este 3 lei, 4 lei sau 6 lei, în funcție de numărul de pagini. Sergiu trebuie să cumpere cel puțin câte un caiet de fiecare tip.
a Care este suma minimă de care are nevoie Sergiu pentru a cumpăra 7 caiete? Dar cea maximă?
b Care este numărul maxim de caiete pe care îl poate cumpăra cu 35 de lei astfel încât să cheltuie toți banii? Indicați câte caiete de fiecare tip va cumpăra Sergiu în acest caz.

13 Suma a două numere naturale m și n este 183, iar suma răsturnatelor lor este 705.
a Este posibil ca m și n să aibă același număr de cifre? Argumentați răspunsul!
b Determinați numerele m și n.

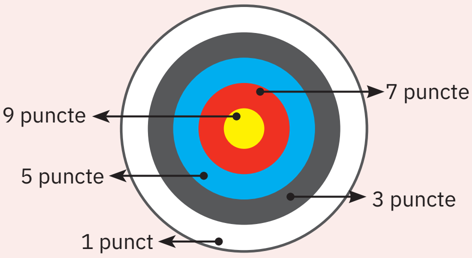
14 Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la 25. Radu alege la întâmplare fie două, fie trei numere de pe tablă, le șterge și scrie în loc suma numerelor șterse. Repetând procedeul de câteva ori, pe tablă rămâne un singur număr. Care este acesta?

15 Suma a 40 de numere naturale este egală cu 779. Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.

Indicație. Calculați suma celor mai mici 40 de numere naturale distincte.

16 În tabăra medievală, Radu și Ioana trag la țintă cu arcul. Desemnați câștigătorul concursului, știind că punctajul final al fiecărui concurent se calculează însumând punctele de pe fiecare zonă.

Nr. săgeți Concurent	Galben	Roșu	Albastru	Negru	Alb
Ioana	2	3	4	5	1
Radu	3	1	5	4	2



Portofoliu

Rezolvă problemele din cadrul rubricilor Portofoliu *întâlnite pe parcursul fiecărei unități de învățare și adaugă-le la portofoliul (dosarul) personal.*
Evaluarea, efectuată la final de unitate sau la final de semestru, va urmări cele două funcții ale portofoliului: ca suport al învățării, respectiv ca instrument pentru validarea achizițiilor.

1 Horia scrie pe tablă numărul 19 și îi propune Ioanei să taie cu creta numărul 19 și să scrie în locul lui două numere naturale nenule a căror sumă să fie 19. Apoi, Horia scrie fiecare număr ales de Ioana ca o sumă de două numere naturale nenule. Când jocul se oprește, ce numere sunt pe tablă?

2 Mă gândesc la un număr de două cifre. Adun la numărul meu cifra unităților, apoi cifra zecilor. Obțin numărul 79. Care este numărul la care m-am gândit?

3 Determinați numărul natural n, știind că poate fi scris doar în 7 moduri ca sumă de două numere naturale nenule, a și b, astfel încât a este mai mic decât b.

4 Identificați regula și determinați numărul care lipsește.

715	919	...	1 327

5 Horia spune un număr de două cifre. Dacă este mai mic decât 50, Ioana adună 3. Dacă este mai mare decât 50, Ioana adună 4. Apoi Horia face același lucru. Câștigă cel care obține primul un număr de 3 cifre. Dacă Horia începe jocul cu numărul 39, atunci cine câștigă jocul? Imaginează-ți și tu un astfel de joc între tine și colegul de bancă și descrie pașii dacă începi tu cu numărul 47. Cine câștigă?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dacă $\overline{ab}+\overline{a3}=85$, atunci $\overline{ab}+\overline{ba}$ este egal cu:
A 45; **B** 66; **C** 84; **D** 130.

2 Dacă $A=1+2+3+...+11$ și $B=12+13+14+...+20$, atunci $A+B$ este:
A 210; **B** 276; **C** 400; **D** 420.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Pe o tablă sunt scrise numerele 7, 4 și 11. Orice elev poate scrie pe tablă suma a două numere aflate pe tablă.
a Este posibil ca pe tablă să apară scris numărul 14?
b Prezintă o modalitate de calcul pentru ca pe tablă să fie scris numărul 63.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 4: Scăderea numerelor naturale

4.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

În colecția sa, Horia are 27 de bancnote din diferite țări de pe glob. El dorește să completeze un clasor întreg, prevăzut cu 40 de spații pentru bancnote. Câte bancnote îi mai sunt necesare?

Analiză:
Pentru a rezolva problema, ar trebui să aflăm un număr care adunat cu 27 dă 40. Un astfel de număr există, deoarece 40 se află după 27 în șirul numerelor naturale sau, altfel spus, deoarece 40 este mai mare decât 27. Vom numi acest număr diferența numerelor 40 și 27.

Răspuns: $40 - 27 = 13$ bancnote îi sunt necesare lui Horia

De reținut

Fie *a* și *b* două numere naturale, cu $a \geq b$. Numărul natural *d* cu proprietatea că $a = b + d$ se numește *diferența* numerelor *a* și *b*.
Operația prin care din numerele naturale *a* și *b* se obține diferența lor, $a - b$, se numește *scădere*.

Se notează: $d = a - b$.
Numerele *a* și *b* se numesc *termenii* scăderii; *a* se numește *descăzut*, iar *b* se numește *scăzător*.
Scrierea $a - b$ se numește *diferența neefectuată*, iar *d* este *diferența efectuată*.

Exemplu

534	–	319	=	215	534 – 319	este *diferența neefectuată*
descăzut	minus	scăzător	egal	diferență	215	este *diferența efectuată*

Regulă

Pentru a scădea două numere naturale, se scad unitățile de același ordin și, dacă nu sunt suficiente unități la descăzut, se ia o unitate de ordin imediat superior și se transformă în zece unități de ordin imediat inferior.

Exemple

Exemplul 1:

$$\begin{array}{cccl} -1 & & & \\ 6 & 5 & 4 & - \\ 2 & 7 & 3 & \\ \hline 3 & 8 & 1 & \end{array}$$

unități: $4 - 3 = 1$
zeci: $5 + 10 - 7 = 8$
sute: $6 - 1 - 2 = 3$

Exemplul 2:

$$\begin{array}{ccccl} -1 & -1 & -1 & & \\ 5 & 4 & 6 & 1 & - \\ 3 & 7 & 6 & 9 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & 2 & \end{array}$$

unități: $1 + 10 - 9 = 2$
zeci: $6 - 1 + 10 - 6 = 9$
sute: $4 - 1 + 10 - 7 = 6$
mii: $5 - 1 - 3 = 1$

Știați că...

Scăderea, fiind operația inversă adunării, reprezintă o numărare succesivă, în sens descrescător. De exemplu, pentru a scădea din 9 pe 6, vom număra, în sens descrescător, 6 numere pornind de la 9:

... 10 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 3 2 1 0

Privind scăderea astfel, constatăm de ce este necesar ca scăzătorul să fie cel mult egal cu descăzutul[1].

---

[1] În clasa a VI-a vom învăța cum putem scădea dintr-un număr natural *a* un număr natural $b > a$. Evident, rezultatul unei astfel de scăderi nu este număr natural. Pentru a putea efectua scăderea, este nevoie să *inventăm* noi numere, numite *numere întregi negative*, aflate pe axa numerelor la stânga lui 0, pe care să le putem număra descrescător.

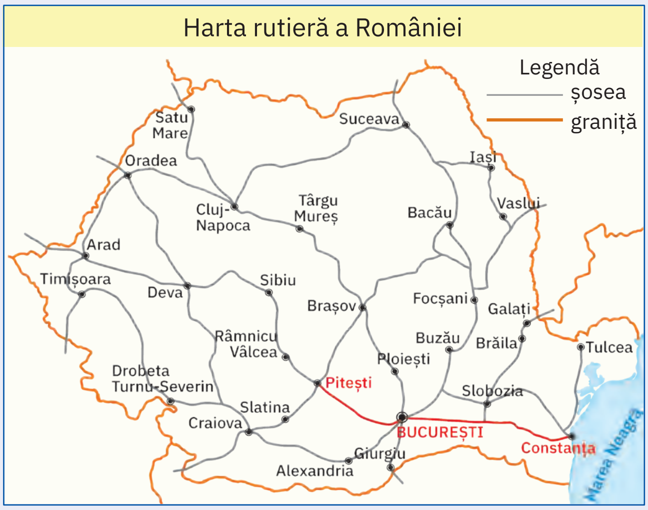
Mate practică

1 Autostrada A1 București – Pitești are lungimea de 112 km, iar autostrada A2 București – Constanța are lungimea de 202 km. Ce distanță trebuie să parcurgă un automobilist care dorește să meargă de la Pitești la Constanța, pe autostrăzile A1 și A2?

Rezolvare: 112 km + 202 km = 314 km

2 Mergând pe autostrăzile A1 București – Pitești și A2 București – Constanța, de la Constanța la Pitești sunt 314 km. Știind că lungimea autostrăzii A2 București – Constanța este de 202 km, determinați ce lungime are autostrada A1.

Răspuns: 314 km – 202 km = 112 km



Scăderea este operația inversă adunării. În general, dacă $a + b = s$, atunci $\begin{cases} a = s - b \\ b = s - a \end{cases}$.

De reținut

Proba adunării se efectuează prin scădere, astfel:
- suma – un termen = celălalt termen.

Proba scăderii se efectuează fie printr-o altă scădere, fie printr-o adunare, astfel:
- descăzutul – diferența = scăzătorul (proba scăderii prin altă scădere);
- descăzutul = scăzătorul + diferența (proba scăderii prin adunare).

4.2. Legătura dintre operația de scădere și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1 Scăzând un număr natural din ambii membri ai unei egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$, pentru orice număr natural $c \leq a$.

2 Scăzând un număr natural din ambii membri ai unei inegalități, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a \leq b$, atunci $a - c \leq b - c$, pentru orice număr natural $c \leq a$.

3 Egalitatea se păstrează când se scad două egalități termen cu termen:
- dacă $a = b$, $c = d$ și $a \geq c$, atunci $a - c = b - d$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 La nașterea lui Radu, tatăl său avea 28 de ani. Determinați:
  a Ce vârstă va avea Radu când tatăl său va avea 40 de ani?
  b Câți ani va avea tatăl său atunci când Radu va împlini 18 ani?

Rezolvare: **a** 40 – 28 = 12, deci Radu va avea 12 de ani
b 18 + 28 = 46, deci tatăl său va avea 46 de ani

2 Determinați numărul cu 176 mai mic decât suma numerelor 98 și 99.

Rezolvare: Suma este 98 + 99 = 197, iar numărul căutat este 197 – 176 = 21.

3 Determinați diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre numerele naturale care se scriu folosind câte patru cifre diferite.

Rezolvare: Cel mai mare număr care se scrie folosind patru cifre diferite este 9 876, iar cel mai mic este 1 023. Diferența lor este 9 876 – 1 023 = 8 853.

4 Horia și Radu au împreună 794 de lei. Radu și Clara au împreună 676 de lei. Cei trei au împreună 1 250 de lei. Determinați ce sumă are fiecare.

Rezolvare:
1 250 lei – 794 lei = 456 de lei are Clara (din suma tuturor am scăzut cât au Horia și Radu)
1 250 lei – 676 lei = 574 de lei are Horia (din suma tuturor am scăzut cât au Radu și Clara)
794 lei – 574 lei = 220 de lei are Radu (din suma lui Horia și Radu am scăzut cât are Horia)

Probleme propuse

1 Calculați:
a 2 537 – 1 322; **b** 6 795 – 3 063; **c** 3 172 – 2 183; **d** 2 105 – 1 537;
e 25 002 – 7 279; **f** 40 010 – 17 073; **g** 23 002 – 8 792; **h** 20 030 – 15 086.

2 Calculați diferența dintre:
a cel mai mare și cel mai mic număr de patru cifre identice;
b cel mai mare și cel mai mic număr de trei cifre diferite;
c cel mai mare număr de patru cifre diferite și cel mai mic număr de trei cifre identice;
d cel mai mic număr par de patru cifre identice și cel mai mare număr impar de trei cifre identice.

3 Determinați, în fiecare caz, termenul necunoscut, știind că:
a dacă îl adunăm pe x cu 577, obținem 867; **b** adunând pe 529 cu un număr natural x, obținem 630;
c dacă îl adunăm pe x cu 1 286, se obține 5 875; **d** suma dintre x și 44 561 este 894 552.

4 Determinați termenul necunoscut:
a $247 + x = 783$; **b** $x + 318 = 2\,467$; **c** $735 - x = 517$; **d** $x - 482 = 267$;
e $23\,536 - x = 10\,039$; **f** $873 - x = 243$; **g** $x - 215 = 772$; **h** $7\,815 - x + 737 = 3\,511$.

5 Calculați, ținând cont de folosirea parantezelor.
a (789 – 542) – 15; **b** 1 299 – (234 – 199);
c 16 801 – [5 622 – (1 240 – 559)]; **d** 78 952 – (568 – 422) – (4 587 – 2 559).

6. Suma a două numere este 98, iar diferența lor este 82. Determinați cele două numere.

7 Un autocar parcurge 349 de kilometri în prima zi, cu 52 de kilometri mai puțin în a doua zi, iar în cea de-a treia zi, parcurge cu 276 de kilometri mai puțin decât în primele două zile la un loc. Ce lungime are traseul parcurs de autocar în cele trei zile la un loc?

8 Suma a trei numere naturale este 2 002. Dacă din fiecare se scade același număr, atunci se obțin numerele: 175, 318, 723. Care sunt numerele inițiale?

9 Se consideră numerele naturale x, y, z.
a Știind că $x + 2y = 24$ și $x + y = 19$, determinați y.
b Știind că $3x + 2y = 18$ și $2x + 2y = 14$, determinați x.
c Știind că $x + 2y + z = 17$ și $x + y = 10$, determinați $y + z$.

10 Se consideră numerele naturale a, b, c.
a Dacă $a - b = 215$ și $b - c = 132$, determinați $a - c$.
b Dacă $a - c = 138$ și $b - c = 129$, calculați $a - b$.
c Dacă $a - b = 72$ și $(a - c) - (b + c) = 18$, determinați numărul c.

11 Efectuați:
a 10 + 15 + 20 + ... + 2 010 – 9 – 13 – 17 – ... – 1 609;
b 10 + 20 + 30 + ... + 2 020 – 9 – 18 – 27 – ... – 1 818;
c 400 000 + 40 000 + 4 000 + 400 + 40 + 4 – 3 – 30 – 300 – 3 000 – 30 000 – 300 000.

12 Determinați câte numere de forma $\overline{abcd}$ verifică egalitatea următoare: $\overline{abcd} - \overline{b53} - 7\,000 = 2\,000$.

Investigație

Având în portofel suma de 250 de lei, Horia cumpără mai întâi o carte de 45 de lei, apoi un joc video de 125 de lei. Determinați suma de bani care i-a rămas lui Horia.

Rezolvare 1: 250 lei $-$ 45 lei $=$ 205 lei (mai avea după ce a cumpărat cartea)
205 lei $-$ 125 lei $=$ 80 lei (i-au rămas lui Horia)

Rezolvare 2: 45 lei $+$ 125 lei $=$ 170 lei (a cheltuit Horia pe cele două produse)
250 lei $-$ 170 lei $=$ 80 lei (i-au rămas lui Horia)

Ce observăm?

Cele două rezolvări de mai sus arată că are loc egalitatea: $250 - 45 - 125 = 250 - (45 + 125)$.

1 Analizând cele două moduri de rezolvare ale problemei, comentați și argumentați afirmația: *Dacă dintr-un număr natural* a *se scad succesiv mai multe numere naturale* b, c, d *etc., se obține același rezultat ca atunci când din* a *se scade suma numerelor respective.*
Lucrând pe echipe, compuneți o problemă asemănătoare și prezentați colegilor rezolvarea acesteia.

2 Analizați următoarele modalități de a efectua scăderea atunci când scăzătorul este o sumă sau o diferență de numere scrisă într-o paranteză. Arătați că egalitățile scrise în stânga sunt adevărate și verificați, prin exemple proprii, valabilitatea afirmațiilor scrise în dreapta.

a $97 - (31 + 25) = 97 - 31 - 25$ → dacă $a \geq b + c$, atunci $a - (b + c) = a - b - c$;
b $20 - (15 - 5) = 20 - 15 + 5$ → dacă $a \geq b \geq c$, atunci $a - (b - c) = a - b + c$.

Pentru evaluarea investigației, se va ține cont de:

1 originalitatea în compunerea problemei;
2 modul de aplicare a cunoștințelor;
3 modul de prezentare și argumentare;
4 calitatea prelucrării datelor obținute;
5 atitudinea colegilor pe parcursul prezentării.

Calcul mental

1 Mărind descăzutul și scăzătorul cu același număr natural, diferența se păstrează:
$a - b = (a + c) - (b + c)$, pentru orice numere naturale a, b, c, cu $a \geq b$.

Exemple: $67 - 39 = (67 + 1) - (39 + 1) = 68 - 40 = 28$
$854 - 256 = (854 + 4) - (256 + 4) = 858 - 260 = 598$

2 Micșorând descăzutul și scăzătorul cu același număr natural, diferența se păstrează:
$a - b = (a - c) - (b - c)$, pentru orice numere naturale a, b, c, cu $a \geq b \geq c$.

Exemple: $131 - 83 = (131 - 3) - (83 - 3) = 128 - 80 = 48$
$572 - 106 = (572 - 6) - (106 - 6) = 566 - 100 = 466$

Joc

Înlocuiți steluțele cu cifrele de la 0 la 9, folosind fiecare cifră o singură dată, astfel încât scăderea să fie corectă.

$$\begin{array}{r} * \; * \; * \; * \; - \\ * \; * \; * \\ \hline * \; * \; * \end{array}$$

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dacă $A - B = C$, atunci:
A $A = B - C$; **B** $B + C = A$; **C** $C = B - A$; **D** $B = A + C$.

2 Dacă $A = 56 - (27 - 18)$ și $B = (56 - 27) - 18$, atunci:
A $A = B$; **B** $A < B$; **C** $A - B = 36$; **D** $A = 9$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Un tată a avut 29 de ani la nașterea fiului său.
a Câți ani va avea fiul când tatăl său va avea 52 de ani?
b Calculează diferența dintre vârsta tatălui și vârsta fiului, după 7 ani de la nașterea fiului.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 5: Înmulțirea numerelor naturale, proprietăți

5.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

Într-o cutie de bomboane de ciocolată se află 24 de bomboane.
Câte bomboane se găsesc în 6 cutii?
Răspuns: $\underbrace{24+24+24+24+24+24}_{6\text{ termeni}}=144$ de bomboane.

Analiză:
În rezolvarea problemei propuse, am avut de efectuat o adunare cu 6 termeni, fiecare termen fiind egal cu 24. Cu alte cuvinte, l-am adunat pe 24 cu el însuși de 6 ori.

De reținut

Produsul numărului natural $a \geq 2$ cu numărul natural b este un număr natural p obținut prin adunarea lui b cu el însuși de a ori, sau, altfel spus, prin adunarea unui număr de a termeni, fiecare dintre aceștia egal cu b.
Operația prin care din numerele naturale a și b se obține produsul lor $a \cdot b$ se numește *înmulțire*.

$$p=a\cdot b=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{ termeni}}.$$

Numerele a și b se numesc *factorii* înmulțirii.
Scrierea $a \cdot b$ se numește *produs neefectuat*, iar p este *produsul efectuat* numerelor a și b.

Prin convenție, $1 \cdot a = a$ și $0 \cdot a = 0$, pentru orice număr natural a.

Observăm că au loc relațiile: $a\cdot 0=\underbrace{0+0+\ldots+0}_{a\cdot 0\text{ termeni}}=0$ și $a\cdot 1=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a\cdot 1\text{ termeni}}=a$.

Exemplu

5	·	14	=	70	5 · 14 este *produsul neefectuat*
factor	ori	factor	egal	produs	70 este *produsul efectuat*

Regulă

Pentru a înmulți două numere naturale, înmulțim fiecare cifră a primului factor cu al doilea factor, obținând produse parțiale a căror sumă este rezultatul înmulțirii.

$$\begin{array}{r} 267\,\cdot \\ 32 \\ \hline 534 \\ 801 \\ \hline 8544 \end{array}$$

267 · 2 = 534 → produs parțial
267 · 3 = 801 → produs parțial
534 + 8 010 = 8 544 → suma produselor parțiale

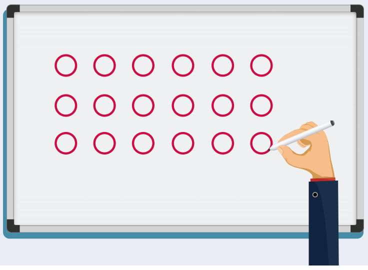
$$\begin{array}{r} 273\,\cdot \\ 649 \\ \hline 2457 \\ 1092 \\ 1638 \\ \hline 177177 \end{array}$$

5.2. Proprietățile înmulțirii

Pentru a pune în evidență diferitele reguli care se respectă atunci când efectuăm operația de înmulțire, reguli pe care le vom numi *proprietăți*, vom rezolva câteva probleme practice, urmând, de fiecare dată, câte două metode de rezolvare.

Mate practică

Profesorul de matematică cere elevilor să afle câte cercuri sunt desenate pe tabla din figura alăturată. În justificarea răspunsului, profesorul le cere să folosească operația de înmulțire.
Horia: *Fiind 3 rânduri, fiecare a câte 6 cercuri, pe tablă sunt 3 · 6 = 18 cercuri.*
Ioana: *Fiind 6 coloane, fiecare a câte 3 cercuri, în total sunt 6 · 3 = 18 cercuri.*



Ce observăm?

Am obținut același rezultat în două moduri: $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$.

Produsul a două numere naturale este același, indiferent de ordinea în care apar cei doi termeni. Această proprietate a înmulțirii se numește *comutativitate*.

În general, $a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice numere naturale a și b.

Mate practică

O miniatură a unei mașini de curse costă 10 lei. Un set cuprinde 4 mașinuțe. Ce sumă trebuie să cheltuim pentru a cumpăra 5 seturi?

Horia: *Mai întâi, aflăm câte mașinuțe sunt în 5 seturi:* $5 \cdot 4 = 20$ de mașinuțe.
Pentru a cumpăra 5 seturi, vom cheltui: $20 \cdot 10 = 200$ lei.

Ioana: *Mai întâi, aflăm cât costă un set:* $4 \cdot 10 = 40$ lei.
Pentru a cumpăra 5 seturi, vom cheltui: $5 \cdot 40 = 200$ lei.

Ce observăm?

Am obținut același rezultat în două moduri:

$$(5 \cdot 4) \cdot 10 = 5 \cdot (4 \cdot 10).$$

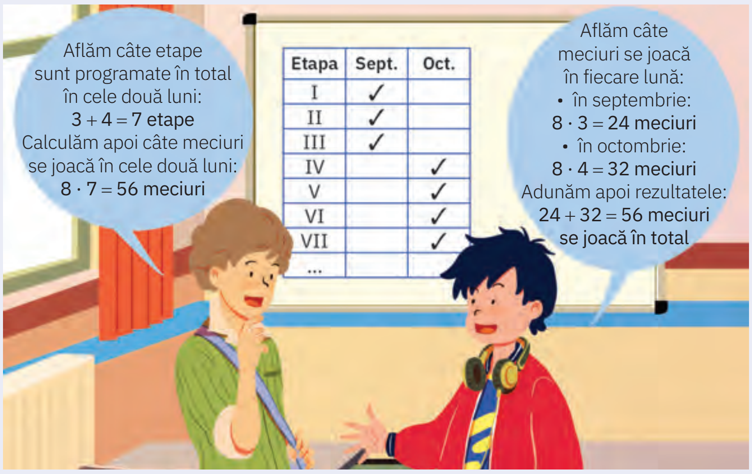
Când înmulțim trei numere naturale, se obține același rezultat fie că produsul primelor două numere se înmulțește cu al treilea, fie că primul număr se înmulțește cu produsul ultimelor două. Această proprietate a înmulțirii se numește *asociativitate*.

În general, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.

Mate practică

În fiecare etapă a campionatului național de handbal se joacă 8 meciuri.

În septembrie sunt programate 3 etape, iar în octombrie sunt programate 4 etape. Câte meciuri se joacă în campionat în septembrie și octombrie?



Etapa	Sept.	Oct.
I	✓	
II	✓	
III	✓	
IV		✓
V		✓
VI		✓
VII		✓
...		

Ce observăm?

Horia și Radu au obținut același rezultat în două moduri:

$8 \cdot (3 + 4) = 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4$.

Când înmulțim o sumă cu un număr, se obține același rezultat ca atunci când adunăm produsele dintre fiecare termen al sumei cu acel număr. Această proprietate se numește *distributivitatea înmulțirii față de adunare*.

În general, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, pentru orice numere naturale a, b și c.

De reținut

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale

1 Înmulțirea numerelor naturale este comutativă:

$a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice numere naturale a și b.

2 Înmulțirea numerelor naturale este asociativă:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.

3 Numărul natural 1 este element neutru la înmulțirea numerelor naturale:

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, pentru orice număr natural a.

4 Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare și față de scădere:
Pentru orice numere naturale a, b, c, avem:

a $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;

b $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$, dacă $b \geq c$.

5 Dacă unul dintre factorii unui produs este 0, atunci produsul este 0:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \text{ pentru orice număr natural } a.$$

Observație:
Dacă un produs de două numere naturale este egal cu 0, atunci cel puțin unul dintre factori este egal cu 0:

$$\text{dacă } a \cdot b = 0, \text{ atunci } a = 0 \text{ sau } b = 0.$$

5.3. Legătura dintre operația de înmulțire și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1 Înmulțind ambii membri ai unei egalități cu un număr natural, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$, pentru orice număr natural c.

2 Înmulțind ambii membri ai unei inegalități cu un număr natural nenul, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$, pentru orice număr natural nenul c.

3 Înmulțind termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot d$.

4 Înmulțind termen cu termen două inegalități de același sens, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a \cdot c < b \cdot d$;
- dacă $a > b$ și $c > d$, atunci $a \cdot c > b \cdot d$;
- dacă $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot d$;
- dacă $a \geq b$ și $c \geq d$, atunci $a \cdot c \geq b \cdot d$.

Exemplu

Matei are 9 cartonașe galbene, pe care sunt scrise numerele de la 11 la 19 și 8 cartonașe roșii, pe care sunt scrise numerele de la 23 la 30 (pe fiecare cartonaș este scris un singur număr). Ioana amestecă toate cartonașele, apoi le așază pe bancă, cu numerele în jos, și trage un cartonaș galben și un cartonaș roșu. Care este cea mai mică valoare posibilă a produsului numerelor de pe cele două cartonașe? Dar cea mai mare valoare a dublului produsului acelorași numere?

Rezolvare:
Notând cu a numărul aflat pe cartonașul galben și cu b numărul scris pe cartonașul roșu extras, rezultă că $11 \leq a \leq 19$ și $23 \leq b \leq 30$.

Înmulțind membru cu membru inegalitățile $a \geq 11$ și $b \geq 23$ obținem $a \cdot b \geq 11 \cdot 23$, adică $a \cdot b \geq 253$. Așadar, cea mai mică valoare a produsului numerelor de pe cele două cartonașe este 253 și se obține când se extrage cartonașul galben pe care este scris numărul 11, respectiv cartonașul roșu pe care se află numărul 23.

În mod asemănător, înmulțind membru cu membru inegalitățile $a \leq 19$ și $b \leq 30$, obținem $a \cdot b \leq 19 \cdot 30$, iar de aici, înmulțind ambii membri cu 2, obținem $2 \cdot a \cdot b \leq 2 \cdot 19 \cdot 30$, adică $2 \cdot a \cdot b \leq 1\,140$. Cea mai mare valoare a dublului produsului numerelor de pe cele două cartonașe este 1 140 și se obține când se extrage cartonașul galben pe care este scris numărul 19, respectiv cartonașul roșu pe care se află numărul 30.

Investigație

Paritatea produsului. Ultima cifră a unui produs de numere

1 Dacă cel puțin un factor al unei înmulțiri este număr par, atunci și produsul este număr par.
Exemplu: Produsul $3 \cdot 4 \cdot 5$ este par, deoarece factorul 4 este par.
Produsul a două sau mai multe numere naturale impare este un număr impar.
Exemplu: Produsul $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 123$ este impar, deoarece toți factorii sunt impari.
Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

2 Ultima cifră a unui produs este ultima cifră a produsului obținut prin înmulțirea ultimelor cifre ale fiecărui factor.
Exemplu: Ultima cifră a produsului $1\,234 \cdot 567$ este ultima cifră a produsului $4 \cdot 7$, adică 8.

Portofoliu

Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ și se citește „n factorial”.
Prin convenție, $0! = 1$.

Exemple: $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $7! = 5\,040$
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

1 Fie n un număr natural nenul. Determinați ultima cifră a numărului $n!$ Discuție după valorile lui n.

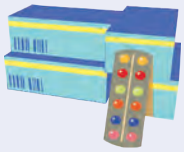
2 Determinați ultima cifră a numărului $2\,022!$.

3 Determinați ultimele cinci cifre ale numărului $24! + 62\,378$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Într-un flacon de medicamente sunt 7 folii cu comprimate. Fiecare folie conține 12 comprimate. Flacoanele sunt ambalate câte 10 într-o cutie. Determinați numărul de comprimate existente în 15 cutii.

Rezolvare: Un flacon conține $7 \cdot 12 = 84$ de comprimate.
O cutie conține $84 \cdot 10 = 840$ de comprimate.
15 cutii conțin $840 \cdot 15 = 12\,600$ de comprimate.



2 Determinați numerele naturale x și y, știind că $(x + 2) \cdot (y + 1) = 15$.

Rezolvare:
Perechile de numere naturale cu produsul 15 sunt (1,15), (3,5), (5,3) și (15,1).
Deoarece $x + 2 > 1$, sunt posibile trei cazuri:
- dacă $x + 2 = 3$ și $y + 1 = 5$, atunci $x = 1$, $y = 4$;
- dacă $x + 2 = 5$ și $y + 1 = 3$, atunci $x = 3$, $y = 2$;
- dacă $x + 2 = 15$ și $y + 1 = 1$, atunci $x = 13$, $y = 0$.

3 Produsul a două numere naturale este 405. Mărind unul dintre termeni cu 5, produsul numerelor devine 450. Determinați cele două numere naturale.

Rezolvare:
Notând cele două numere cu a și b, condițiile din enunț se scriu $a \cdot b = 405$ și $(a + 5) \cdot b = 450$.
Întrucât $(a + 5) \cdot b = a \cdot b + 5 \cdot b = 405 + 5 \cdot b$, obținem $405 + 5 \cdot b = 450$, adică $b = 9$, de unde $a = 45$.

4 Într-un produs de două numere naturale, un factor este cuprins între 8 și 15, iar celălalt între 16 și 23. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare posibilă a acestui produs.

Rezolvare:
Notăm cu a și b cei doi factori. Dacă numărul natural a este cuprins între 8 și 15, atunci $9 \le a \le 14$; la fel, dacă b este cuprins între 16 și 23, atunci $17 \le b \le 22$. Înmulțind termen cu termen cele două inegalități, obținem $9 \cdot 17 \le a \cdot b \le 14 \cdot 22$, adică $153 \le a \cdot b \le 308$.
Așadar, cea mai mică valoare posibilă a produsului este 153, iar cea mai mare valoare este 308.

Observație. Înmulțind termen cu termen inegalitățile $8 < a < 15$ și $16 < b < 23$, se obține relația $128 < a \cdot b < 345$. Am putea fi tentați să credem că cea mai mică valoare a produsului este 129, ceea ce nu este adevărat, întrucât, deși inegalitatea $128 < a \cdot b < 345$ este adevărată, produsul $a \cdot b$ nu poate fi egal cu 129 pentru nicio valoare a numerelor a și b care să respecte enunțul.

Probleme propuse

1 Calculați:
a $12 \cdot 35$; **b** $35 \cdot 25$; **c** $128 \cdot 45$; **d** $324 \cdot 15$; **e** $128 \cdot 204$; **f** $305 \cdot 207$.

2 Calculați:
a $11 \cdot 17 \cdot 19$; **b** $13 \cdot 25 \cdot 8$; **c** $40 \cdot 28 \cdot 17$; **d** $13 \cdot 14 \cdot 15$; **e** $37 \cdot 35 \cdot 12$; **f** $16 \cdot 26 \cdot 14$.

3 Folosind asociativitatea și comutativitatea înmulțirii, efectuați:
a $2 \cdot 37 \cdot 5$; **b** $2 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 4$; **c** $250 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 579 \cdot 5$.

4 Efectuați:
a $104 \cdot 52 - 179$; **b** $49 \cdot 28 - 31 \cdot 14$; **c** $567 \cdot 3 + 45 \cdot 11$;
d $2\,107 - 11 \cdot 12 + 91 \cdot 13$; **e** $3\,021 - 113 \cdot 19 + 74 \cdot 86$; **f** $67 \cdot 34 - 24 \cdot 25 + 22 \cdot 11$.

5 Calculați, după modelul prezentat:

$$\mathbf{12 \cdot 99 = 12 \cdot (100 - 1) = 12 \cdot 100 - 12 \cdot 1 = 1\,200 - 12 = 1\,188}$$

a $35 \cdot 99$; **b** $27 \cdot 101$; **c** $15 \cdot 102$;
d $31 \cdot 98$; **e** $4 \cdot 999$; **f** $5 \cdot 1\,004$

6 **a** Știind că $x = 4$, determinați produsul $p = (x + 1) \cdot (2x + 11) \cdot (3x - 7)$.
b Știind că $y = 9$, determinați produsul $p = (y + 5) \cdot (2y - 4) \cdot (3y + 3)$.

7 Un biciclist parcurge un traseu în 4 zile astfel: în prima zi 19 kilometri, în a doua zi de 4 ori mai mulți kilometri decât în prima zi, în a treia zi se întoarce 11 kilometri, iar în ultima zi parcurge de 5 ori mai mulți kilometri decât a parcurs în a treia zi. Determinați lungimea traseului.

8 Într-un penar sunt 9 pixuri, 5 creioane, două radiere și o ascuțitoare. Penarul gol a costat 12 lei, un pix a costat 5 lei, un creion 3 lei, o radieră 2 lei și ascuțitoarea 7 lei. Determinați prețul penarului cu rechizitele achiziționate.

9 Unul dintre factorii unei înmulțiri de doi factori este cuprins între 9 și 17, iar celălalt factor între 11 și 22. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare posibilă a acestui produs.

10 Determinați cea mai mare valoare posibilă a produsului a două numere naturale cu suma 9.

11 Determinați numerele naturale x și y, știind că $(x - 1) \cdot (y + 4) = 20$.

12 Produsul a două numere naturale este 414. Mărind unul dintre factori cu 10, produsul numerelor devine 644. Determinați cele două numere naturale.

13 Identificați o regulă de formare a următoarelor secvențe de numere şi completați secvențele cu câte trei termeni:
a 5; 15; 25; ...; ...; ... **b** 7; 14; 21; ...; ...; ... **c** 15; 30; 90; ...; ...; ...
d 122; 3 124; 5 306; ...; ...; ... **e** 122; 3 412; 4 520; ...; ...; ... **f** 3; 4; 12; 48; ...; ....; ...

14 Determinați în câte zerouri se termină produsul primelor 57 de numere naturale nenule.

15 Dacă produsul a două numere naturale a și b este 72, atunci care dintre următoarele afirmații este cu siguranță falsă:
a a și b pot fi numere naturale pare; **b** a și b sunt numere naturale impare;
c a și b pot avea parități diferite; **d** a și b pot fi numere naturale formate din două cifre.

16 Dacă a este un număr par și b este un număr impar, stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
a $a \cdot b \cdot 23$ este un număr impar; **b** $a \cdot b \cdot 24$ este un număr par;
c $a \cdot b + 4b$ este un număr impar; **d** $a \cdot b \cdot 5$ are ultima cifră 5.

17 Folosiți paranteze pentru a obține enunțuri corecte:
a $13 + 2 \cdot 5 = 25 \cdot 3$; **b** $19 - 5 \cdot 3 - 2 = 6$; **c** $19 - 5 \cdot 3 - 2 = 14$.

18 Înlocuiți casetele cu unul dintre semnele +, – sau · pentru a obține enunțuri corecte:

a 15 ☐ 7 ☐ 2 = 1; **b** 128 ☐ 22 ☐ 4 ☐ 38 = 2; **c** 24 ☐ 5 ☐ 3 ☐ 2 = 7.

19 Determinați cifrele lipsă din următoarele înmulțiri:

a
$$\begin{array}{r} 472\ \cdot \\ ** \\ \hline 1416 \\ 944 \\ \hline ***** \end{array}$$

b
$$\begin{array}{r} 362\ \cdot \\ ** \\ \hline *** \\ 3**8 \\ \hline **3*4 \end{array}$$

c
$$\begin{array}{r} 45*6\ \cdot \\ *2* \\ \hline **144 \\ 9*7* \\ 13*08 \\ \hline 1*69*6* \end{array}$$

20 Determinați numerele naturale a și b, știind că suma lor este 431 și $2 \cdot a + 5 \cdot b = 1\,696$.

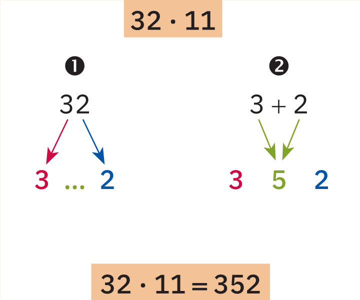
21 **a** Determinați numerele naturale de forma $\overline{2x34}$, știind că produsul cifrelor sale este 24.

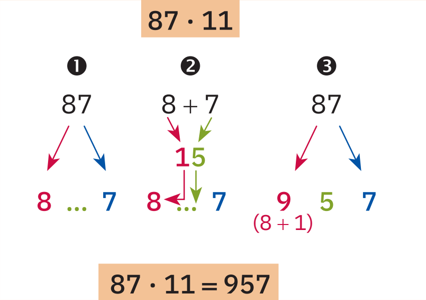
b Determinați numerele naturale de forma $\overline{2xy4}$, știind că produsul cifrelor sale este 48.

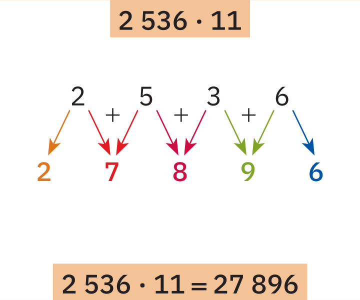
22 **a** Arătați că ultima cifră a produsului a două numere naturale consecutive poate fi 0, 2 sau 6.

b Există numere naturale n astfel încât $n \cdot (n + 1) = 2\,017$? Justificați răspunsul.

Calcul mental







Calculați:

a 45 · 11; **b** 123 · 11; **c** 708 · 11; **d** 1 958 · 11; **e** 2 174 · 11.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Ultima cifră a produsului 32 · 34 · 37 este:

A 2; **B** 4; **C** 7; **D** 6.

2 Produsul a două numere naturale este 36. Mărind unul dintre termeni cu 5, produsul numerelor devine 81. Suma celor două numere este:

A 5; **B** 13; **C** 45; **D** 2 916.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Dina are 7 cutii. În fiecare dintre cele șapte cutii sunt 12 borcane, iar în fiecare borcan sunt 9 bile.

a Câte borcane sunt în 5 cutii?

b Determină numărul bilelor din cele 7 cutii.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
Timp de lucru: 30 de minute	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Lecția 6: Factor comun

Situație problemă

Lotul de volei al școlii, format din 12 jucători, are nevoie de echipamente noi, compuse din șort și tricou. Un tricou costă 80 de lei, iar un șort 50 de lei. Câți bani sunt necesari pentru a cumpăra noile echipamente?

Horia: *Ideea mea este să calculăm cât costă tricourile, apoi cât costă șorturile, după care să adunăm rezultatele:*
$12 \cdot 80$ *lei* $= 960$ *de lei costă tricourile*
$12 \cdot 50$ *lei* $= 600$ *de lei costă șorturile*
960 *lei* $+ 600$ *lei* $= 1\,560$ *de lei costă noile echipamente*

Ioana: *Ar fi mai bine să aflăm mai întâi cât costă echipamentul pentru un jucător, după care să calculăm costul pentru toată echipa:*
80 *lei* $+ 50$ *lei* $= 130$ *de lei costă un set compus dintr-un șort și un tricou*
$12 \cdot 130$ *lei* $= 1\,560$ *de lei costă tot echipamentul*
Are loc egalitatea $12 \cdot 80\ lei + 12 \cdot 50\ lei = 12 \cdot (80\ lei + 50\ lei)$.

Observații

Deși am obținut același rezultat, metoda Ioanei este mai rapidă și mai ușoară, deoarece necesită doar două operații, în timp ce Horia are nevoie de trei operații.
În lecția anterioară am învățat următoarele proprietăți:
- distributivitatea înmulțirii față de adunare: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- distributivitatea înmulțirii față de scădere: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

De reținut

În suma de doi termeni $a \cdot b + a \cdot c$ numărul a este factor la fiecare produs, de aceea îl vom numi *factor comun*. Același lucru se observă și în cazul diferenței. Prin urmare, scriind egalitățile de mai sus sub forma: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ sau $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, spunem că am scos pe a factor comun. Avantajul scoaterii factorului comun este că, în loc să efectuăm trei operații în membrul stâng (două înmulțiri și o adunare sau o scădere), efectuăm numai două operații în membrul drept (o adunare/scădere și o înmulțire).

Observații

1 Se poate scoate factor comun și în cazul unei sume/diferențe de mai multe produse:

$$m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c - m \cdot d = m \cdot (a + b + c - d).$$

2 Pentru a scoate factor comun, putem înlocui numărul m cu produsul neefectuat $m \cdot 1$:
Exemple: $m \cdot a + m = m \cdot a + m \cdot 1 = m \cdot (a + 1)$;
$m \cdot a - m \cdot b - m = m \cdot a - m \cdot b - m \cdot 1 = m \cdot (a - b - 1)$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Scrieți fiecare dintre următoarele numere ca produs de două numere naturale, apoi calculați:
a $A = 125 \cdot 14 + 125 \cdot 19 - 125 \cdot 25$;
b $B = 2\,017 \cdot 188 - 2\,017 \cdot 89 + 2\,017$;
c $C = 63 \cdot 78 - 63 \cdot 33 + 45 \cdot 39 - 45 \cdot 15$.

Rezolvare: **a** $A = 125 \cdot 14 + 125 \cdot 19 - 125 \cdot 25 = 125 \cdot (14 + 19 - 25) = 125 \cdot 8 = 1\,000$;
b $B = 2\,017 \cdot 188 - 2\,017 \cdot 89 + 2\,017 = 2\,017 \cdot (188 - 89 + 1) = 2\,017 \cdot 100 = 201\,700$;
c $C = 63 \cdot 78 - 63 \cdot 33 + 45 \cdot 39 - 45 \cdot 15 = 63 \cdot (78 - 33) + 45 \cdot (39 - 15) =$
$= 63 \cdot 45 + 45 \cdot 24 = 45 \cdot 63 + 45 \cdot 24 = 45 \cdot (63 + 24) = 45 \cdot 87 = 3\,915$.

2 Știind că $a = 7$, $b + c = 18$ și $c - d = 11$, calculați:
a $ab + 2ac - ad$; **b** $a + 2ab + 5ac - 3ad$.

Rezolvare: **a** $ab + 2ac - ad = a(b + 2c - d) = a(b + c + c - d) = 7 \cdot (18 + 11) = 7 \cdot 29 = 203$;
b $a + 2ab + 5ac - 3ad = a + 2ab + 2ac + 3ac - 3ad = a + 2a(b + c) + 3a(c - d) =$
$= 7 + 7 \cdot 2 \cdot 18 + 7 \cdot 3 \cdot 11 = 7 \cdot (1 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 11) = 7 \cdot 70 = 490$.

Probleme propuse

1 Efectuați, utilizând factorul comun:

a $3 \cdot 45 + 3 \cdot 15$; **b** $20 \cdot 48 + 20 \cdot 2$; **c** $28 \cdot 521 - 28 \cdot 21$;
d $23 \cdot 718 - 162 \cdot 23$; **e** $15 \cdot 38 + 15 \cdot 162$; **f** $702 \cdot 65 + 35 \cdot 702$;
g $2\,413 \cdot 1\,001 - 2\,413$; **h** $2\,029 \cdot 599 + 2\,029$; **i** $1\,289 \cdot 337 + 1\,289 \cdot 663$.

2 Efectuați, utilizând factorul comun:

a $12 \cdot 13 + 12 \cdot 15 + 12 \cdot 72$; **b** $125 \cdot 234 - 125 \cdot 28 + 125 \cdot 194$;
c $702 \cdot 256 - 702 \cdot 55 + 702 \cdot 799$; **d** $1\,000 \cdot 372 + 259 \cdot 1\,000 - 153 \cdot 1\,000$.

3 Dacă $x = 5$ și $a + b = 13$, calculați:

a $3 \cdot x + 7 \cdot a + 7 \cdot b$; **b** $x \cdot a + x \cdot b - 50$;
c $10 \cdot x + (4 \cdot a + 4 \cdot b)$; **d** $(4 \cdot a + 4 \cdot b - 2 \cdot x) \cdot (2 \cdot a + 2 \cdot b + x)$.

4 Calculați:

a $ab + ac$, știind că $b + c = 50$ și $a = 2$; **b** $xy + xz + 15$, știind că $x = 9$ și $y + z = 11$;
c $ab - ac$, știind că $a = 7$ și $b - c = 100$; **d** $5xy + 5xz + 21$, știind că $x = 4$ și $y + z = 100$.

5 Determinați numărul x, știind că $a - b = 6$ și:

a $x + 3 \cdot a - 3 \cdot b = 20$; **b** $x \cdot a - x \cdot b + 9a - 9b = 654$;
c $7 \cdot a - 7 \cdot b + x = 55$; **d** $13 + x - (5 \cdot a - 5 \cdot b) = 2\,011$.

6 Dați factor comun, apoi calculați:

a $10 + 20 + 30 + ... + 800$; **b** $13 + 26 + 39 + ... + 715$;
c $21 + 42 + 63 + ... + 1\,890$; **d** $101 + 202 + 303 + ... + 909 + 1\,010 + ... + 9\,898 + 9\,999$.

Indicație: **a** $10 + 20 + ... + 800 = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + ... + 10 \cdot 80 = 10 \cdot (1 + 2 + ... + 80) = 10 \cdot 80 \cdot 81 : 2 = 32\,400$.

7 Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab21} + \overline{7ab} - \overline{3ab5} = 3\,904$.

Joc

Elevii unei clase joacă *Identifică greșeala*. Fiecare elev primește un cartonaș pe care sunt scrise relațiile de mai jos:

1 $43 \cdot 5 + 43 \cdot 4 + 43 = 43 \cdot (5 + 4) = 43 \cdot 9 = 387$
2 $28 \cdot 7 + 28 \cdot 12 - 19 \cdot 18 = 28 \cdot (7 + 12 - 19) = 0$
3 $121 \cdot 9 - 121 + 121 \cdot 2 = 121 \cdot (9 + 2) = 121 \cdot 11 = 1\,331$

Câștigă concursul elevul care identifică primul greșelile din fiecare relație și efectuează corect cele trei calcule.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dacă $a + b = 20$ și $b + c = 30$, atunci $3a + 7b + 4c$ este:
A 50; **B** 90; **C** 110; **D** 180.

2 La care dintre următoarele calcule nu este utilizat corect factorul comun?
A $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 4 \cdot (10 + 12 - 2)$; **B** $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 8 \cdot (5 + 6 - 1)$;
C $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 8 \cdot (5 + 6)$; **D** $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 2 \cdot (20 + 24 - 4)$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numerele naturale a, b, c, astfel încât $9a + 9b + 9c = 72$.
a Determină suma numerelor a, b, c.
b Dacă $4a + 4b = 12$ și $5a + 5c = 35$, atunci determină numerele naturale a, b, c.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Scrierea și citirea numerelor naturale • Compararea și ordonarea numerelor naturale • Adunarea și scăderea numerelor naturale • Înmulțirea numerelor naturale • Factor comun

1 Scrierea în baza 10 a numărului două sute patru mii cinci sute opt este:
a 240 508 **b** 204 580
c 200 458 **d** 204 508

2 Aproximarea numărului 4 567, prin adaos, la sute este:
a 4 600 **b** 4 000
c 4 500 **d** 5 000

3 Rezultatul calculului $47\,596 + 219\,847$ este egal cu:
a 256 333 **b** 267 443
c 695 807 **d** 684 707

4 Rezultatul calculului $7\,456 - 567$ este egal cu:
a 8 023 **b** 1 786
c 6 889 **d** 7 913

5 Suma numerelor de forma $\overline{a4b}$ cu produsul cifrelor 24 este egală cu:
a 787 **b** 1 372
c 585 **d** 1 030

6 Știind că $a \cdot b + a \cdot c = 100$ și $b + c = 20$, atunci a este egal cu:
a 4 **b** 200
c 5 **d** 80

7 Care dintre următoarele două numere au suma egală cu 72?
a 20 și 52 **b** 34 și 43
c 7 și 2 **d** 45 și 29

8 Care dintre următoarele două numere au produsul cu ultima cifră 4:
a 32 și 16 **b** 44 și 54
c 86 și 94 **d** 47 și 48

9 Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

$1\,234 < 1\,229$
Ultima cifră a produsului $69 \cdot 58$ este 2
Dacă $\overline{abc} = 3 \cdot 100 + 9$, atunci $a + b + c = 12$

10 Asociați fiecărei expresii din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**.

A	B
$5 \cdot 23 - 5 \cdot 3$	**a** 2 700
$27 + 27 \cdot 99$	**b** 400
$35 \cdot 12 - 35 \cdot 2$	**c** 100
	d 350

11 Tabelul alăturat prezintă oferta unei librării pentru câteva produse.

Calculați cât costă un set de rechizite format din: 4 radiere, 7 pixuri și 3 capsatoare.

Produs	Preț
Radieră	2 lei
Pix	15 lei
Agendă	18 lei
Capsator	44 lei

12 Determinați numerele A, B, C și D din tabelul de mai jos.

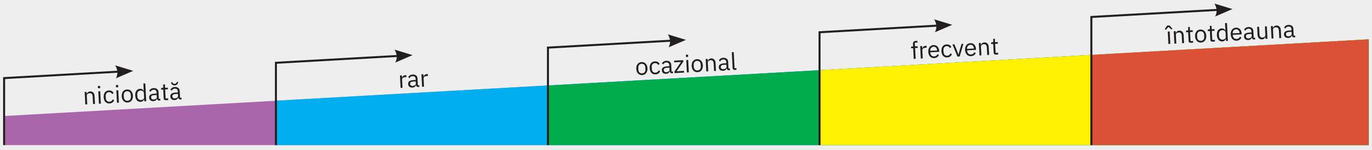
$5x + 3y = 27$	$A = 100 + 10x + 6y$
$4 + 2x + 7y = 15$	$B = 20 + 10x + 35y$
$x + 5y = 23$	$C = 3x + 15y - 42$
$3x - 2y - 4 = 18$	$D = 12x - 8y$

13 Determinați numărul natural de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{1a5b} + \overline{a3b7} = 3\,590$.

14 Se consideră numărul $A = 1234567 \ldots 9899100$. Determinați numărul cifrelor numărului A.

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



Lecția 7: Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

7.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

Pentru cercul de lectură, Horia are de citit o carte de 60 de pagini. Poate termina cartea citind câte 15 pagini pe zi? Câte zile îi sunt necesare?

Rezolvare 1: Horia citește în prima zi 15 pagini și mai are $60 - 15 = 45$ de pagini de citit. A doua zi citește încă 15 pagini și rămâne cu $45 - 15 = 30$ de pagini de citit. A treia zi citește încă 15 pagini și rămâne cu $30 - 15 = 15$ pagini de citit. În a patra zi citește ultimele 15 pagini și îi rămân $15 - 15 = 0$ pagini, adică termină cartea. Așadar, îi sunt necesare patru zile.
Observăm că $60 - 15 - 15 - 15 - 15 = 0$ sau că 15 *se cuprinde* de 4 ori în 60.
Spunem că 60 dă *câtul* 4 la *împărțirea* cu 15.

Rezolvare 2: Pentru a distribui cele 60 de pagini câte 15 pe zi, ar trebui să existe un număr natural care înmulțit cu 15 să dea 60. Întrucât $15 \cdot 4 = 60$, numărul căutat este 4. Așadar, 60 *se împarte* (*exact*) la 15, iar *câtul* împărțirii lui 60 la 15 este 4.
Răspuns: $60 : 15 = 4$ zile sunt necesare.

Observații

Deoarece $15 \cdot 4 = 60$ și $15 \cdot 5 = 75$, observăm că dacă acea carte ar fi avut, de exemplu, 65 de pagini, atunci repartizarea lor *în mod egal* în 4 zile nu ar fi fost posibilă. Într-adevăr, deoarece $15 \cdot 4 = 60 < 65 < 75$, nu există niciun număr natural care înmulțit cu 15 să dea 65. Acest fapt ne arată că 65 *nu se împarte exact* la 4.

Împărțirea (exactă) este operația inversă înmulțirii. A afla câtul împărțirii lui a la b înseamnă a afla un număr natural c care înmulțit cu b să dea a.

De reținut

Numărul natural a se *împarte exact* la numărul natural nenul b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.
Se notează: $a : b = c$.
Numerele care se împart se numesc *factori*; a se numește *deîmpărțit*, b se numește *împărțitor*, iar rezultatul împărțirii, adică c, se numește *cât*.

Știați că...

Împărțirea poate fi privită ca o scădere repetată. Operația de împărțire a numărului natural a la numărul natural $b \neq 0$ este transpunerea în limbaj matematic a activității de distribuire repetată a unei grămezi de a obiecte în părți formate din b obiecte până când distribuirea nu se mai poate efectua. Dacă la finalul distribuirii nu rămâne niciun obiect, se spune că *a se împarte exact la b*, iar împărțirea este *exactă* sau *cu rest zero*.

Numărul a, din care se scade, este *deîmpărțitul*, numărul b, care se scade (numărul de obiecte care se distribuie), este *împărțitorul*, iar numărul c, care ne arată de câte ori se poate efectua scăderea (de câte ori a avut loc acțiunea de distribuire), este *câtul*.

Observații

1. Împărțirea la 0 (zero) nu este posibilă, de aceea se pune condiția ca împărțitorul să fie nenul.
2. Câtul dintre 0 și orice număr natural nenul este 0, adică: $0 : b = 0$, pentru orice număr natural $b \neq 0$.
3. Proba împărțirii exacte se efectuează fie printr-o altă împărțire, fie printr-o înmulțire:
   - proba împărțirii prin înmulțire: împărțitor × cât = deîmpărțit;
   - proba împărțirii prin altă împărțire: deîmpărțit : cât = împărțitor.

Exemplu

112	:	8	=	14	Proba prin înmulțire:	$8 \cdot 14 = 112$
deîmpărțit		împărțitor		cât	Proba prin împărțire:	$112 : 14 = 8$

7.2. Împărțirea numerelor naturale când împărțitorul are două sau mai multe cifre

Să ne amintim cum se efectuează împărțirea când împărțitorul are o singură cifră (este un număr natural mai mic decât 10). Spre exemplu, dacă deîmpărțitul are trei cifre, atunci se împart la împărțitor mai întâi sutele, apoi zecile și, în final, unitățile deîmpărțitului.

Dacă la împărțirea sutelor rămâne rest, acesta se transformă în zeci, se adună la numărul de zeci ale deîmpărțitului, iar suma se împarte la împărțitor.

Dacă la împărțirea zecilor rămâne rest, acesta se transformă în unități, se adună la numărul de unități ale deîmpărțitului și suma obținută se împarte la împărțitor.

Cele trei câturi succesive dau cifrele câtului împărțirii. Dacă la împărțirea sutelor se obține câtul 0, această cifră nu se trece la câtul împărțirii.

```
 8 2 8 | 6
 6 ↓   |------
 -     | 1 3 8
 2 2   ↓
 1 8
 ---
 = 4 8
   4 8
   ---
   = =
```

828 : 6 = 138

De reținut

Dacă împărțitorul are două (trei, patru, ...) cifre, prima cifră a câtului se află împărțind (prin cuprindere) numărul format de grupul primelor două (trei, patru, ...) cifre ale deîmpărțitului la împărțitor.

Restul obținut (dacă există) se transformă în unități de ordin imediat inferior ultimei cifre luate în grup și se adună cu unitățile de ordinul respectiv ale deîmpărțitului; se obține un nou număr, care se împarte la împărțitor. Câtul obținut este a doua cifră a câtului împărțirii.

Pentru determinarea celorlalte cifre ale câtului se continuă în același fel.

Exemplu

```
 5 9 3 4 | 2 3
 4 6 ↓   |------
 -----   | 2 5 8
 1 3 3   ↓
 1 1 5
 -----
 = 1 8 4
   1 8 4
   -----
   = = =
```

5 934 : 23 = 258

- 23 se cuprinde în 59 de câte ori se cuprinde 2 în 5, adică de două ori
- 59 : 23 = 2, rest 13 → prima cifră a câtului este 2

- 13 sute = 130 zeci; 130 + 3 = 133
- 23 se cuprinde în 133 de cel mult 6 ori (de câte ori se cuprinde 2 în 13)
  verificare: 23 · 6 = 138 > 133, deci 6 e prea mare
  23 · 5 = 115 < 133, deci 5 este câtul parțial căutat
- 133 : 23 = 5, rest 18 → a doua cifră a câtului este 5

- 18 zeci = 180 unități; 180 + 4 = 184
- 23 se cuprinde în 184 cel mult de 9 ori (de câte ori se cuprinde 2 în 18)
  verificare: 23 · 9 = 207 > 184, deci 9 e prea mare
  23 · 8 = 184, deci 8 este câtul parțial căutat
- 184 : 23 = 8, rest 0 → a treia cifră a câtului este 8

Observații

1 Urmărind schema, observăm că numărul obținut prin transformarea restului obținut la împărțirea sutelor în zeci și adunarea cu zecile deîmpărțitului (adică 133) se formează alăturând cifra zecilor deîmpărțitului (3) la restul respectiv (13). Grafic, se „coboară” cifra 3 lângă restul găsit (13). La fel, la pasul 3, se coboară cifra unităților (4) lângă restul obținut la împărțirea anterioară (18).

2 Dacă la prima împărțire se obține câtul 0, această cifră nu se trece la cât. Practic, dacă, spre exemplu, împărțitorul are două cifre, iar numărul format de primele două cifre este mai mic decât împărțitorul, prima cifră a câtului se găsește împărțind numărul format de grupul primelor trei cifre ale deîmpărțitului.

Exemplu

```
 6 7 3 9 2 | 3 2 4
 6 4 8     |-------
 -----     | 2 0 8
   2 5 9 2
   2 5 9 2
   -------
   = = = =
```

67 392 : 324 = 208

Numărul format de primele trei cifre ale deîmpărțitului se împarte la 324
- 673 : 324 = 2, rest 25 → prima cifră a câtului este 2

Se obține restul 25; se coboară cifra următoare (9) și se obține 259
- 259 : 324 = 0, rest 259 → a doua cifră a câtului este 0

Se obține restul 259; se coboară cifra următoare (2) și se obține 2 592
- 2 592 : 324 = 8, rest 0 → a treia cifră a câtului este 8

7.3. Legătura între împărțirea numerelor naturale și relațiile de egalitate/inegalitate

În egalitățile care urmează, vom presupune că toate împărțirile se efectuează exact (cu rest zero). Fie a, b și c trei numere naturale, cu $c \neq 0$, astfel încât a și b se împart exact la c. Atunci:

1 Împărțind ambii membri ai unei egalități cu un număr natural nenul, egalitatea se păstrează:

$$\text{dacă } a = b, \text{ atunci } a : c = b : c.$$

2 Împărțind ambii membri ai unei inegalități cu un număr natural nenul, inegalitatea se păstrează:

$$\text{dacă } a < b, \text{ atunci } a : c < b : c.$$

3 Împărțind termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:

$$\text{dacă } a = b \text{ și } c = d \neq 0, \text{ atunci } a : c = b : d.$$

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 În cadrul unui spectacol organizat pentru atragerea de fonduri în vederea dotării bibliotecii școlii, fiecare bilet costă 12 lei.

a Câți spectatori ar trebui să participe pentru a se strânge suma de 2 688 de lei?

b Câte cărți se pot adăuga la fondul de carte al bibliotecii, folosind suma obținută, știind că o carte costă 16 lei?

c Impresionați de spectacol, membrii unei organizații caritabile se decid să doneze 13 560 de cărți tuturor celor 113 școli din județ. Câte cărți revin fiecărei școli?

Rezolvare:

a $2\,688 : 12 = 224$ de spectatori;

b $2\,688 : 16 = 168$ de cărți;

c $13\,560 : 113 = 120$ de cărți.

2 La o fabrică de ciocolată, în fiecare pachet se pun câte 12 batoane de ciocolată, iar în fiecare cutie se ambalează câte 28 de pachete. Câte cutii se pot umple din producția zilnică de 107 520 de batoane?

Rezolvare:

Metoda 1. Aflăm câte pachete se formează din producția zilnică: $107\,520 : 12 = 8\,960$.
Calculăm câte cutii sunt necesare pentru a pune pachetele: $8\,960 : 28 = 320$.

Metoda 2. Aflăm câte batoane intră într-o cutie: $12 \cdot 28 = 336$.
Determinăm câte cutii sunt necesare: $107\,520 : 336 = 320$.

Ce observăm?

Din calculele de mai sus a rezultat egalitatea: $107\,520 : 12 : 28 = 107\,520 : (12 \cdot 28)$.
În general, dacă împărțirile se efectuează exact, atunci $a : b : c = a : (b \cdot c)$.

Probleme propuse

1 Efectuați:

a $624 : 4$; **b** $258 : 3$; **c** $549 : 9$; **d** $324 : 6$;
e $240 : 12$; **f** $1\,960 : 70$; **g** $3\,115 : 35$; **h** $55\,272 : 12$;
i $42\,000 : 100$; **j** $6\,496 : 112$; **k** $157\,541 : 257$; **l** $174\,515 : 835$.

2 Efectuați următoarele împărțiri și apoi efectuați proba prin înmulțire:

a $1\,560 : 65$; **b** $735 : 35$; **c** $864 : 18$; **d** $2\,268 : 63$;
e $14\,700 : 210$; **f** $14\,191 : 617$; **g** $60\,606 : 481$; **h** $457\,900 : 1\,900$.

3 Efectuați următoarele împărțiri și apoi efectuați proba prin împărțire:

a $47\,160 : 72$; **b** $6\,441 : 113$; **c** $26\,136 : 99$; **d** $17\,800 : 200$;
e $24\,624 : 81$; **f** $1\,476 : 41$; **g** $2\,010 : 30$; **h** $2\,295 : 85$.

4 4 860 kg de cartofi au fost puși în mod egal în 108 lăzi. Câte kilograme de cartofi sunt în fiecare ladă?

5 Un club de fotbal a cumpărat echipament sportiv identic pentru toți cei 78 de elevi înscriși și a plătit suma de 6 396 de lei. Care este prețul unui echipament?

6 La o cantină s-au cumpărat 18 kg salam, pe care s-au plătit 414 lei. Cât costă un kilogram de salam?

7 În tabelul alăturat este prezentată oferta specială a unui magazin de carduri cu mesaje personalizate.
Determinați cât costă fiecare tip de felicitare.

Denumirea produsului	Cantitatea	Preț total
Felicitare zi de naștere	225	900 lei
Felicitare „cel mai bun prieten”	120	360 lei
Carduri de mulțumire	96	384 lei
Card urări de sănătate	76	228 lei

8 Verificați dacă au loc egalitățile:

a $256 : 16 + 384 : 16 = (256 + 384) : 16$;
b $646 : 19 + 361 : 19 = (646 - 361) : 19$;
c $864 : 12 : 6 = 864 : (12 \cdot 6)$;
d $1\,024 : 16 \cdot 4 = 1\,024 : (16 : 4)$;
e $960 : 12 \cdot 5 = 960 : (12 \cdot 5)$;
f $1\,274 : 14 : 7 = 1\,274 : 7 : 14$.

9 La o fabrică de lactate pachetele de unt se ambalează câte 28 într-o cutie. Într-o mașină sunt încărcate 40 de cutii. Pachetele de unt se distribuie apoi în mod egal la 35 de magazine. Câte pachete de unt primește fiecare magazin?

10 Determinați câtul și restul împărțirii numărului A la B, unde $A = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ și $B = a + b + c$.

Activitate pe grupe

Pentru a determina cel mai mic număr natural de trei cifre și cel mai mare număr natural de trei cifre care se împarte exact la 35 se poate proceda astfel:

1 efectuăm înmulțiri ale lui 35 cu numere naturale pentru identificarea celui mai mic număr natural de trei cifre care se împarte exact la 35
$35 \cdot 2 = 70$ are două cifre, deci nu convine
$35 \cdot 3 =$ **105** are trei cifre și este cel mai mic număr de trei cifre care se împarte exact la 35

2 pentru a obține cel mai mare număr natural de trei cifre care se împarte exact la 35 pornind de la observația că $35 \cdot 3 = 105$. Dacă înmulțim relația cu 10 obținem $35 \cdot 3 \cdot 10 = 1\,050$ sau $35 \cdot 30 = 1\,050$ care nu are 3 cifre. Scădem 35 din 1 050 și obținem 1 015 care va fi $35 \cdot 29$. Intuim imediat că numărul căutat va fi $1\,015 - 35 = 35 \cdot 28 =$ **980**.

Lucrând în echipe, determinați cel mai mic și cel mai mare număr de trei cifre, respectiv de patru cifre, care se împarte exact la 36, 60, respectiv 98.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului 792 792 : 72 este:
A 101; **B** 1 111; **C** 11 011; **D** 110 011.

2 Suma a două numere naturale este 742. Unul dintre numere este câtul împărțirii celuilalt număr la 13. Produsul celor două numere este:
A 742; **B** 689; **C** 9 646; **D** 36 517.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Într-un depozit sunt 75 de cutii cu medicamente. Fiecare cutie conține 5 flacoane, iar fiecare flacon conține 18 pastile. Pastilele s-au împărțit în mod egal la 25 de farmacii.
a Pot fi împărțite în mod egal flacoanele celor 25 de farmacii?
b Determină câte pastile primește fiecare farmacie.

Grila de evaluare:

Subiectul 1	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 8: Împărțirea cu rest a numerelor naturale

Situație problemă

Ioana are o cutie cu 19 bomboane. Ea împarte colegilor din echipa ei câte 5 bomboane. Câți copii sunt în echipa Ioanei? Câte bomboane îi rămân Ioanei?

Rezolvare:
După ce servește primul coleg, mai sunt în cutie 19 – 5 = 14 bomboane.
După ce servește al doilea coleg mai are în cutie 14 – 5 = 9 bomboane.
După ce servește al treilea coleg mai sunt în cutie 9 – 5 = 4 bomboane.
A rămas un număr insuficient de bomboane pentru un alt copil (4 < 5), deci Ioana are 3 colegi în echipă, iar ei îi rămân 4 bomboane.

Ce observăm?
Are loc egalitatea: $19 = 3 \cdot 5 + 4$ și $4 < 5$.

Mai general, considerând un număr de a obiecte (unde a este un număr natural), eliminăm succesiv câte b obiecte, unde b este un număr natural diferit de 0. Când operația de eliminare a obiectelor din colecție nu se mai poate efectua, numărul r de obiecte rămase este mai mic decât b. Notând cu c numărul care ne arată de câte ori am putut scoate câte b obiecte din colecție, are loc egalitatea $a = b \cdot c + r$.

De reținut

Pentru orice două numere naturale a și b, cu $b \neq 0$, există și sunt unice numerele naturale c și r, astfel încât:

$$a = b \cdot c + r \text{ și } r < b.$$

Scriem: $a : b = c$, rest r.
Operația prin care se obțin numerele c și r se numește *împărțirea cu rest a lui a la b*. Numărul natural a se numește *deîmpărțit*, b se numește *împărțitor*, c se numește *cât*, iar r se numește rest.
Proprietatea de mai sus este cunoscută sub numele de *teorema împărțirii cu rest*.

Exemple

1. Prin împărțirea lui 47 la 9, se obține câtul 5 și restul 2 deoarece: $47 = 9 \cdot 5 + 2$ și $2 < 9$.
   Scriem $47 : 9 = 5$, rest 2.
2. Prin împărțirea lui 261 la 11, se obține câtul 23 și restul 8 deoarece: $261 = 11 \cdot 23 + 8$ și $8 < 11$.
   Scriem $261 : 11 = 23$, rest 8.
3. Prin împărțirea lui 14 la 37, se obține câtul 0 și restul 14 deoarece: $14 = 37 \cdot 0 + 14$ și $14 < 37$.
   Scriem $14 : 37 = 0$, rest 14.

Observații

1. Restul împărțirii unui număr natural la 2 poate fi 0 sau 1, deci un număr natural este fie de forma $2k$ (număr par), fie de forma $2k + 1$ (număr impar), unde k este număr natural.
   Similar, cum restul împărțirii unui număr natural la 3 poate fi 0, 1 sau 2, un număr natural se poate scrie sub una dintre formele $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2$, unde k este număr natural.
   Mai general, deoarece prin împărțirea la un număr natural nenul n se poate obține unul dintre resturile $0, 1, 2, ..., n - 1$, un număr natural poate avea una din formele $nk, nk + 1, nk + 2, ..., nk + n - 1$.
2. Două numere naturale dau același rest prin împărțirea la n dacă diferența lor se împarte exact la n.
   Într-adevăr, dacă a și b dau restul r prin împărțirea la n, atunci există numerele naturale x și y astfel încât $a = n \cdot x + r$ și $b = n \cdot y + r$, deci $a - b = n(x - y)$, adică $a - b$ se împarte exact la n.
3. Pentru a determina câtul și restul împărțirii a două numere naturale, se utilizează același procedeu de la împărțirea exactă.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
2&2&3&1&2&2&1&8\\ \cline{6-8}
\underline{2}&\underline{1}&\underline{8}&&&1&0&2\\
=&=&5&1&2&&&\\
&&\underline{4}&\underline{3}&\underline{6}&&&\\
&&=&7&6&&&
\end{array}$$

22 312 : 218 = 102, rest 76

Numărul format de primele trei cifre ale deîmpărțitului se împarte la 218
• 223 : 218 = 1, rest 5 → prima cifră a câtului este 1

Se obține restul 5; se *coboară* cifra următoare (1) și se obține 51
• 51 : 218 = 0, rest 51 → a doua cifră a câtului este 0

Se obține restul 51; se *coboară* cifra următoare (2) și se obține 512
• 512 : 218 = 2, rest 76 → a treia cifră a câtului este 2 și restul este 76

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați numerele naturale care împărțite la 5 dau câtul 4.

Rezolvare:
Din teorema împărțirii cu rest avem $a = 5 \cdot 4 + r$ și $r < 5$. Numărul natural r poate lua valorile 0, 1, 2, 3, sau 4, deci a poate lua valorile 20, 21, 22, 23 sau 24.

2 Determinați cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 3 058.

Rezolvare:
Pentru a obține cel mic număr natural n cu suma cifrelor 3 058, este necesar ca n să aibă cât mai puține cifre; așadar, numărul căutat trebuie să aibă cât mai multe cifre egale cu 9.
Deoarece 3 058 : 9 = 339, rest 7, cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 3 058 este $7\underbrace{99\ldots9}_{399 \text{ de } 9}$.

3 **a** Suma a două numere naturale este 474. Împărțind unul dintre numere la celălalt, obținem câtul 21 și restul 12. Determinați cele două numere.
b Diferența a două numere naturale este egală cu 56. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic, obținem câtul 5 și restul 8. Determinați cele două numere.

Rezolvare:
a Notând cele două numere cu a și b, din enunț rezultă că $a + b = 474$ și $a = 21 \cdot b + 12$.
Obținem $21 \cdot b + 12 + b = 474$ sau $22 \cdot b = 462$, de unde $b = 21$ și $a = 453$.
b Condițiile din enunț se scriu $a - b = 56$ și $a = 5b + 8$. Atunci $5b + 8 - b = 56$, egalitate din care obținem $b = 12$, de unde $a = 68$.

4 Suma a trei numere naturale este 121. Împărțind primul număr la al treilea, obținem câtul 10 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea, obținem câtul 5 și restul 4. Determinați cele trei numere.

Rezolvare:
Notând cele trei numere cu a, b și c, din teorema împărțirii cu rest obținem $a = 10 \cdot c + 5$ și $b = 5 \cdot c + 4$.
Deoarece $a + b + c = 121$, înlocuind pe a și pe b rezultă $10 \cdot c + 5 + 5 \cdot c + 4 + c = 121$ sau $16 \cdot c = 112$.
Obținem $c = 7$, $a = 75$ și $b = 39$.

Probleme propuse

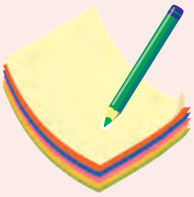
1 Determinați câtul și restul împărțirilor:
a 104 : 5; **b** 235 : 7; **c** 566 : 9; **d** 1 117 : 12;
e 2 314 : 15; **f** 1 325 : 18; **g** 2 843 : 22; **h** 3 785 : 45;
i 1 726 : 11; **j** 5 675 : 205; **k** 74 928 : 123; **l** 10 452 : 102.

2 Verificați egalitățile scrise în coloana **A** a tabelului de mai jos și indicați valoarea de adevăr a concluziilor corespunzătoare scrise în coloana **B**. Aveți în vedere corectitudinea efectuării operației de împărțire cu rest!

	A	B
a	$36 = 9 \cdot 4$	restul împărțirii lui 36 la 9 este 0
b	$36 = 5 \cdot 7 + 1$	restul împărțirii lui 36 la 5 este 1
c	$36 = 8 \cdot 3 + 12$	restul împărțirii lui 36 la 8 este 12
d	$36 = 7 \cdot 4 + 8$	câtul împărțirii lui 36 la 7 este 4

3 **a** Determinați numărul natural care dă câtul 36 și restul 28 la împărțirea cu 32.
b Determinați numărul natural care dă restul 7 și câtul 29 la împărțirea cu 49.

4 **a** Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 13.
b Calculați suma numerelor naturale care împărțite la 8 dau câtul 5.
c Determinați suma tuturor resturilor împărțirii numerelor de două cifre la 7.



5 Suma a trei numere naturale este 135. Împărțind primele două numere la al treilea, obținem câturile 12 și 31, iar resturile 1 și respectiv 2. Determinați cele trei numere naturale.

6 Un număr este cu 72 mai mare decât alt număr. Împărțind suma lor la diferența lor, obținem câtul 5 și restul 2. Determinați cele două numere.

7 **a** Determinați toate numerele care împărțite la 13 dau restul egal cu câtul.
b Determinați toate numerele care împărțite la 15 dau restul egal cu dublul câtului.
c Determinați cel mai mare număr natural care împărțit la 2 009 să dea un cât de 10 ori mai mic decât restul.

8 **a** Determinați cel mai mare și cel mai mic număr natural de 3 cifre care dau restul 8 la împărțirea cu 11.
b Determinați câte numere de trei cifre împărțite la 37 dau restul 9 și calculați suma acestor numere.

9 **a** Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 6 să dea restul 3 și împărțite la 3 să dea restul 2.
b Verificați dacă există numerele naturale a, b, c cu suma 42, astfel încât a împărțit la b să dea câtul c și restul 2, iar b împărțit la 5 să dea restul 3.

10 Fie a și b două numere naturale.
a Determinați restul împărțirii numărului $A = 17a + 17b + 25$ la 17.
b Determinați restul împărțirii numărului $B = 16a + 28b + 13$ la 4.

11 Restul obținut prin împărțirea numărului natural x la 30 este 8, iar restul obținut prin împărțirea numărului natural y la 35 este 34. Determinați restul împărțirii numărului $3x + 2y$ la 10.

12 Suma a trei numere naturale a, b, c este 232. Împărțind a la b, obținem câtul 14 și restul 5, iar împărțind pe b la c, obținem câtul 7 și restul 1. Determinați numerele.

13 Suma a trei numere naturale este 297. Împărțind primul număr la al doilea, obținem câtul 2 și restul 25, iar împărțind primul număr la al treilea, obținem câtul 11 și restul 8. Determinați cele trei numere.

14 Diferența a două numere naturale este 139. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic, obținem restul 6 și câtul 10. Determinați numerele.

15 **a** Determinați toate numerele naturale $\overline{abc}$ știind că împărțind $\overline{abc}$ la $\overline{bc}$ obținem câtul 5 și restul 4.
b Câte numere naturale de forma $\overline{abad}$ dau restul 5 la împărțirea cu $\overline{ab}$?

16 **a** Determinați câtul și restul împărțirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 203 + 2\,003$ la 2 002.
b Determinați câtul și restul împărțirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 125 + 250$ la 126.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Suma numerelor naturale care împărțite la 3 dau câtul 2 este:
A 6; **B** 11; **C** 15; **D** 21.

2 Dintre scrierile de mai jos, teorema împărțirii cu rest este:
A $25 = 2 \cdot 8 + 9$; **B** $25 = 50 : 2 + 0$; **C** $25 = 2 \cdot 9 + 7$; **D** $25 = 5 \cdot 6 - 5$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Radu are un număr de bomboane, format din trei cifre, pe care le împarte în mod egal celor 7 prieteni ai săi.
a Care este cel mai mic număr de bomboane pe care Radu le poate avea, astfel încât, după împărțirea bomboanelor, Radu să rămână cu 3 bomboane?
b Care este cel mai mare număr de bomboane pe care Radu le poate avea, astfel încât, după împărțirea bomboanelor, Radu să rămână cu 3 bomboane?

Grila de evaluare:

Subiectul 1	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 9: Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural

9.1. Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Mate practică

Horia citește o revistă de cultură generală în 5 zile. În prima zi citește două pagini, iar în fiecare din zilele următoare citește de două ori mai multe pagini decât în ziua anterioară. Determinați câte pagini citește Horia în a cincea zi.

Rezolvare: În prima zi citește 2 pagini.
În a doua zi citește $2 \cdot 2 = 4$ pagini.
În a treia zi citește $2 \cdot 4 = 8$ pagini.
În a patra zi citește $2 \cdot 8 = 16$ pagini.
În a cincea zi citește $2 \cdot 16 = 32$ pagini.

Ce observăm?

Soluția problemei se obține efectuând calculul: $\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{\text{5 factori}}=32$.

Acest calcul presupune o înmulțire cu 5 factori, fiecare dintre ei egal cu 2, sau, altfel spus, înmulțirea repetată a lui 2 cu el însuși de 5 ori. Se spune că l-am ridicat pe 2 la *puterea a cincea*.

De reținut

Fie a și n două numere naturale, cu $n \geq 2$.
Produsul a n factori egali cu a se numește puterea a n-a a numărului natural a și se notează a^n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}.$$

Prin convenție, $a^1 = a$ și $a^0 = 1$, pentru orice număr natural $a \neq 0$. Nu are sens 0^0.
În scrierea a^n, a se numește *baza* puterii, iar n se numește *exponentul* puterii.

Exemple

1 $101^2 = 101 \cdot 101 = 10\,201$;

2 $11^3 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1\,331$;

3 $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\,401$;

4 $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3\,125$;

5 $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$;

6 $2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$.

Știați că...

O veche legendă indiană povestește cum regele indian Shirham a oferit inventatorului jocului de șah, Sissa ben Dahir, o recompensă, la alegere, drept răsplată pentru minunata invenție.

Maiestate, nu vreau cine știe ce bogății lumești, dați-mi doar un bob de grâu pentru prima pătrățică a tablei de șah, două boabe pentru a doua, 4 boabe pentru a treia, 8 pentru a patra pătrățică... și tot așa, până ce toate cele 64 de pătrate ale tablei vor fi acoperite de grâu, a spus înțeleptul inventator.

Când au calculat câte boabe ar trebui să dea în total, vistiernicii regelui au văzut că nici într-o sută de ani în hambarele întregii Indii nu poate fi adunat atâta grâu!

Vi se pare imposibil?

Numărul de boabe de grâu pe care ar fi trebuit să îl plătească regele este $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$.

Acest număr se scrie în baza 10 cu 20 de cifre și este egal cu 18 446 744 073 709 551 615.

Deoarece 30 de boabe de grâu cântăresc aproximativ un gram, iar o tonă are un milion de grame, numărul de boabe de mai sus ar cântări peste 600 de miliarde de tone. Având în vedere că producția mondială de grâu este sub 600 de milioane de tone anual, numărul boabelor cerute de Sissa ben Dahir ar însemna grâul produs în întreaga lume, la nivelul actual de dezvoltare a agriculturii, timp de peste 1 000 de ani.

Investigație

Ultima cifră a puterii unui număr natural

Să analizăm ultima cifră a primelor 12 puteri ale lui 2:

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$2^9 = 512$	$2^{10} = 1\,024$	$2^{11} = 2\,048$	$2^{12} = 4\,096$

Observăm că ultima cifră a puterilor nenule ale lui 2 se repetă din 4 în 4, iar pe fiecare coloană toate puterile au aceeași ultimă cifră. De exemplu, împărțind pe 1 234 la 4 obținem restul 2, deci numărul 2^{1234} se scrie în coloana a doua, iar ultima cifră a lui 2^{1234} este aceeași cu ultima cifră a lui 2^2, adică 4.

Întrucât ultima cifră a unui produs de numere este ultima cifră a produsului ultimelor cifre ale numerelor date, rezultă că:

1. Dacă ultima cifră a unui număr natural este 0, 1, 5 sau 6, prin ridicarea la o putere nenulă ultima cifră rămâne aceeași.
2. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 4 sau 9 se repetă din 2 în 2, mai exact:
   - **a** numerele terminate în 4
     - ridicate la puteri impare → se termină în 4
     - ridicate la puteri pare nenule → se termină în 6
   - **b** numerele terminate în 9
     - ridicate la puteri impare → se termină în 9
     - ridicate la puteri pare → se termină în 1
3. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 2, 3, 7 sau 8 se repetă din 4 în 4.

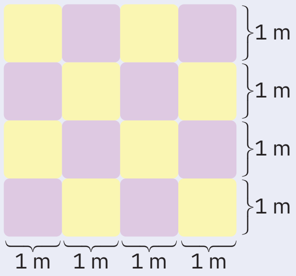
Exemple

1. Numerele 21^{42}, 71^{399}, 101^{2017} au ultima cifră 1, deoarece ultima cifră a bazei este, în fiecare caz, 1. Ultima cifră a fiecăruia dintre numerele 5^{27}, 35^{48} și 645^{62} este egală cu 5, iar ultima cifră a numerelor 6^{72}, 26^{84} și 456^{126} este 6.
2. Deoarece ultima cifră a puterilor unui număr terminat cu cifra 9 se repetă din 2 în 2, ultima cifră a numărului 19^{42} este aceeași cu ultima cifră a lui 9^2, care este 1.
3. Ultima cifră a numărului 7^{95} este 3. Într-adevăr, cum ultima cifră a puterilor unui număr terminat cu cifra 7 se repetă din 4 în 4, iar restul împărțirii lui 95 la 4 este 3, ultima cifră a lui 7^{95} este aceeași cu ultima cifră a lui $7^3 = 343$, adică 3.

9.2. Pătratul unui număr natural

Mate practică

Pentru a pava o curte în formă de pătrat cu latura de 4 metri, utilizăm dale de travertin în formă de pătrat, cu latura de 1 metru. Determinați numărul dalelor necesare pavării.



Rezolvare:
Pe fiecare latură a pătratului se pot pune câte patru dale. Prin linii orizontale și verticale pătratul cu latura de 4 metri se împarte în $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ pătrate cu latura de 1 metru.

Ce observăm?
Puterea a doua a unui număr natural *n* reprezintă numărul de pătrate cu latura de o unitate în care se poate împărți un pătrat cu latura de *n* unități.
În același timp, un număr natural nenul *x* poate fi scris ca pătratul unui număr natural, dacă cu *x* pătrate de latură 1 se poate forma un pătrat.

De reținut

Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și pătratul acelui număr natural.
Un număr natural care se poate scrie ca puterea a doua a unui număr natural se numește *pătrat perfect.*

Exemplu:
- 9 este puterea a doua a lui 3, deoarece cu 9 pătrate de latură 1 se poate forma un pătrat de latură 3;
- 13 nu este egal cu puterea a doua a niciunui număr natural, deoarece cu 13 pătrate de latură 1 nu putem forma un pătrat.

Exemple

1 Utilizând tabla înmulțirii, cele mai mici 11 pătrate ale unor numere naturale sunt: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 și 100.

2 Pătratele numerelor de la 11 la 20 sunt:
$11^2 = 121$ $12^2 = 144$ $13^2 = 169$ $14^2 = 196$ $19^2 = 361$
$15^2 = 225$ $16^2 = 256$ $17^2 = 289$ $18^2 = 324$ $20^2 = 400$

3 900 și 1 156 sunt pătrate perfecte, pentru că $900 = 30^2$ și $1\,156 = 34^2$.

4 Numărul $2017 + 2016 \cdot 2017$ este pătrat perfect, deoarece utilizând factorul comun 2017, obținem $2017 \cdot (1 + 2016) = = 2017 \cdot 2017 = 2017^2$, care este pătrat perfect.

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

Observații

1 Produsul a două sau mai multe pătrate a unor numere naturale este pătratul unui număr natural.
$9 \cdot 25 \cdot 36 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = (3 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 6) = (3 \cdot 5 \cdot 6)^2 = 90^2$.

2 Pătratul unui număr natural are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.
Într-adevăr, analizând exemplele date mai sus, prin ridicarea la pătrat a numerelor 0, 1, 2, 3, ..., 9 obținem numere naturale cu ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Ținând cont de faptul că ultima cifră a unei puteri este egală cu puterea ultimei cifre, obținem că orice pătrat al unui număr natural are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

Atenție! Nu orice număr natural care are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 este pătratul unui număr natural (de exemplu, 10, 11, 14, 15, 19 sau 26 nu sunt pătrate perfecte).

3 Dacă un număr natural are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8, atunci nu este pătratul unui număr natural.
Exemplu: 1 234 567 nu este pătratul unui număr natural, deoarece ultima sa cifră este 7.

4 Dacă un număr natural se află între două pătrate ale unor numere naturale consecutive, atunci numărul nu este pătratul unui număr natural.
Exemplu: Numărul 115 nu este pătratul unui număr natural, deoarece $100 < 115 < 121$, adică $10^2 < 115 < 11^2$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați ultima cifră a numărului $a = 192^{203} + 703^{203} + 457^{203} + 368^{203}$.
Rezolvare:
Pentru a simplifica scrierea, notăm cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n.
Deoarece restul împărțirii lui 203 la 4 este 3, rezultă că:
$u(192^{203}) = u(2^{203}) = u(2^3) = 8$ $u(703^{203}) = u(3^{203}) = u(3^3) = 7$
$u(457^{203}) = u(7^{203}) = u(7^3) = 3$ $u(368^{203}) = u(8^{203}) = u(8^3) = 2$
Atunci ultima cifră a lui a este ultima cifră a sumei $8 + 7 + 4 + 3$, adică este 2.

2 Arătați că $2^{42} + 3^{42}$ nu este pătratul unui număr natural.
Rezolvare:
Ca la problema anterioară, notăm cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n.
Deoarece restul împărțirii lui 42 la 4 este 2, au loc relațiile: $u(2^{42}) = u(2^2) = 4$ și $u(3^{42}) = u(3^2) = 9$, deci ultima cifră a numărului $2^{42} + 3^{42}$ este ultima cifră a sumei $4 + 9$, adică 3.
Ultima cifră a pătratului unui număr natural poate fi doar 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, deci numărul $2^{42} + 3^{42}$ nu este pătratul niciunui număr natural.

3 Determinați numerele naturale x și y pentru care $2^x + 2^y = 65$.
Rezolvare:
Dacă x și y sunt diferite de 0, atunci 2^x și 2^y sunt pare, iar suma lor este număr par, deci nu poate fi egală cu 65.
Ca urmare, unul dintre numerele x sau y este 0. Dacă $x = 0$, atunci $2^x = 1$, deci $2^y = 64$, adică $y = 6$. Dacă $y = 0$ se obține $x = 6$. Soluțiile sunt $x = 0, y = 6$ sau $x = 6, y = 0$.

Probleme propuse

1 Determinați numerele naturale a, b, c, d, e, f și g din tabelul de mai jos.

Puterea	7^9	c	3^e	f^{18}
Baza puterii	a	11	d	31
Exponentul puterii	b	4	37	g

2 Analizați tabelul de mai jos și determinați numerele naturale a, b, c, d, e.

5	7	a	25	c	32	60	99
25	49	100	b	576	d	3 600	e

3 Scrieți sub formă de puteri cu exponent număr natural:

a $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; **b** $12 \cdot 12 \cdot 12$; **c** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$;
d $8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3$; **e** $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$; **f** $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{\text{2017 factori}}$.

4 Efectuați:

a $0^5 + 5^0$; **b** $5^3 + 7^0$; **c** $1^{200} + 0^{200} + 6^3$; **d** $2^7 - 3^4$; **e** $4^3 - 1^{20}$; **f** $7^3 - 4^4$;
g $15^2 \cdot 0^9$; **h** $2^4 : 4^2$; **i** $2^3 \cdot 5^3$; **j** $5^2 \cdot 2^4$; **k** $7^2 : 5^0$; **l** $18^2 : 3^4$.

5 **a** Scrieți numărul 31 ca o sumă de puteri ale lui 2.
b Arătați că numărul 49 se poate scrie ca o sumă de 12 pătrate ale unor numere naturale.

6 Determinați ultima cifră a numerelor:

a 2^{2017}; **b** 3^{2017}; **c** 5^{2018}; **d** 6^{2019}; **e** 7^{2020}; **f** 8^{2021}; **g** 9^{2022}; **h** 4^{2023}.

7 Determinați ultima cifră a numărului $x = 12^{200} + 23^{201} + 34^{302} + 45^{403}$.

8 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate ale unor numere naturale, încadrându-le între pătratele a două numere naturale consecutive: **a** 39; **b** 700; **c** 160; **d** 123.

9 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate ale unor numere naturale, studiind ultima cifră:

a 1 234 567; **b** $2^{403} + 2^{402}$; **c** $3^{12} + 3^{11}$; **d** 248^{17}.

10 **a** Determinați numerele naturale x și y, pentru care $2^x + 2^y = 257$.
b Determinați numerele naturale x, y și z, pentru care $2^x + 2^y + 2^z = 97$.

Calcul mental

$15^2 = 225$ $\quad$ $1 \cdot (1 + 1) = 2$

$25^2 = 625$ $\quad$ $2 \cdot (2 + 1) = 6$

$75^2 = 5\,625$ $\quad$ $7 \cdot (7 + 1) = 56$

$115^2 = 13\,225$ $\quad$ $11 \cdot (11 + 1) = 132$

Calculați și voi: 45^2, 55^2, 95^2, 105^2, 995^2.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $5^2 - 2^3$ este: **A** 29; **B** 17; **C** 4; **D** 2.

2 Ultima cifră a numărului $B = 5^{200} + 6^{201} + 10^{202}$ este: **A** 11; **B** 1; **C** 21; **D** 2.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numărul natural $A = 4a + 9b$, unde a și b sunt numere naturale nenule.
a Dacă $a = 2\,023$ și $b = 2\,022$, atunci determină ultima cifră a lui A.
b Produsul numerelor a și b este impar. Arată că numărul A nu este pătratul unui număr natural.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 10: Reguli de calcul cu puteri

Situație problemă

Horia și Ioana se iau la întrecere: cine calculează 7^5, efectuând cât mai puține calcule.

Horia: Folosind asociativitatea înmulțirii, am nevoie de 4 calcule:

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7) \cdot 7 = 7^2 \cdot 7 = 49 \cdot 7 = 343$

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7^3 \cdot 7 = 343 \cdot 7 = 2\,401$

$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7^4 \cdot 7 = 2\,401 \cdot 7 = 16\,807$

Ioana: În loc de ultimele două calcule rezultatul se poate obține mai rapid astfel:

$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^2 \cdot 7^3 = 49 \cdot 343 = 16\,807$

Ce observăm?

Ioana a calculat mai rapid, sesizând că are loc relația $7^5 = 7^2 \cdot 7^3$. Să privim și următorul calcul:

$$7^3 \cdot 7^5 = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{3 factori}} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{5 factori}} = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{3+5=8 \text{ factori}} = 7^{3+5} = 7^8.$$

Se observă că, în ambele cazuri, prin înmulțirea celor două puteri ale lui 7 s-a obținut tot o putere a lui 7, al cărei exponent este suma exponenților celor două puteri.

De reținut

1 Înmulțirea a două puteri cu aceeași bază

Produsul a două puteri cu aceeași bază este tot o putere, cu aceeași bază și cu exponent egal cu suma exponenților puterilor respective.

Altfel spus, pentru a înmulți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se adună exponenții.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemple: **a** $2^7 \cdot 2^9 = 2^{7+9} = 2^{16}$; **b** $6^7 \cdot 6^5 = 6^{7+5} = 6^{12}$; **c** $13^{11} \cdot 13^{23} = 13^{11+23} = 13^{34}$.

2 Împărțirea a două puteri cu aceeași bază

Câtul a două puteri cu aceeași bază este tot o putere, cu aceeași bază și cu exponent egal cu diferența exponenților puterilor respective:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (\text{unde } m \geq n)$$

Cu alte cuvinte, pentru a împărți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se scad exponenții.

Exemple: **a** $5^8 : 5^7 = 5^{8-7} = 5^1 = 5$; **b** $9^{14} : 9^6 = 9^{14-6} = 9^8$; **c** $23^7 : 23^7 = 23^{7-7} = 23^0 = 1$.

3 Puterea unei puteri

Puterea unei puteri a unui număr natural este puterea acelui număr natural al cărei exponent este egal cu produsul exponenților:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Așadar, pentru a ridica o putere la o altă putere, se păstrează baza și se înmulțesc exponenții.

Exemple: **a** $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$; **b** $(3^5)^6 = 3^{5 \cdot 6} = 3^{30}$; **c** $(17^5)^0 = 17^{5 \cdot 0} = 17^0 = 1$.

4 Puterea unui produs sau a unui cât

Pentru a ridica la putere un produs, respectiv un cât, se ridică fiecare factor la acea putere, apoi se efectuează produsul, respectiv câtul:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a : b)^n = a^n : b^n$$

Cu alte cuvinte, exponentul unui produs/cât se distribuie fiecărui factor al produsului/câtului.

Exemple: **a** $(4 \cdot 7)^2 = 4^2 \cdot 7^2$; **b** $(8 \cdot 10)^3 = 8^3 \cdot 10^3$; **c** $(32 : 8)^4 = 32^4 : 8^4$.

Scriind egalitățile de mai sus de la dreapta spre stânga, obținem:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (regula de înmulțire a puterilor cu același exponent)

$a^n : b^n = (a : b)^n$ (regula de împărțire a puterilor cu același exponent)

Exemple: **a** $7^3 \cdot 5^3 = (7 \cdot 5)^3 = 35^3$; **b** $8^9 \cdot 6^9 = (8 \cdot 6)^9 = 48^9$; **c** $12^{10} : 6^{10} = (12 : 6)^{10} = 2^{10}$.

Observații

Folosind regulile de calcul cu puteri, se pot da următoarele criterii pentru a indica dacă o putere poate fi scrisă ca pătratul unui număr natural (altfel spus, dacă o putere este sau nu pătrat perfect):

1 Orice număr natural scris ca o putere cu exponentul par este pătrat perfect.
Exemplu: Deoarece $5^{24} = (5^{12})^2$, numărul 5^{24} este pătratul unui număr natural.

2 O putere cu exponent impar este pătrat perfect dacă baza se poate scrie ca putere cu exponent par.
Exemplu: $16^{15} = (2^4)^{15} = 2^{60} = (2^{30})^2$, deci 16^{15} este pătratul unui număr natural.

3 O putere cu exponent impar, a cărei bază nu poate fi scrisă ca o putere cu exponentul par, nu este pătrat perfect.
Exemplu: $27^{19} = (3^3)^{19} = 3^{57}$, care nu este pătratul unui număr natural.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Scrieți următoarele numere sub forma unei singure puteri cu exponent număr natural:
a $4^{16} \cdot 8^{12} \cdot 16^{25}$; **b** $9^5 \cdot 27^4 : 3^5$; **c** $5^5 \cdot 25^7 : 125^4$.

Rezolvare:

a Observăm că: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ și $16 = 2^4$.
Aplicând regula de ridicare la putere a unei puteri, obținem:
$4^{16} = (2^2)^{16} = 2^{32}$, $8^{12} = (2^3)^{12} = 2^{36}$ și $16^{25} = (2^4)^{25} = 2^{100}$.
Folosind regula de înmulțire a puterilor cu aceeași bază, rezultă:
$4^{16} \cdot 8^{12} \cdot 16^{25} = 2^{32} \cdot 2^{36} \cdot 2^{100} = 2^{32+36+100} = 2^{168}$.
b $9^5 \cdot 27^4 : 3^5 = (3^2)^5 \cdot (3^3)^4 : 3^5 = 3^{10} \cdot 3^{12} : 3^5 = 3^{17}$;
c $5^5 \cdot 25^7 : 125^4 = 5^5 \cdot (5^2)^7 : (5^3)^4 = 5^5 \cdot 5^{14} : 5^{12} = 5^{19} : 5^{12} = 5^7$.

2 Scrieți următoarele numere sub forma unui produs, utilizând factorul comun:
a $S_1 = 2^6 + 2^7 + 2^8$; **b** $S_2 = 3^{11} + 5 \cdot 3^{13} + 2 \cdot 3^{14}$; **c** $S_3 = 6^8 + 2^9 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 6^{11}$.

Rezolvare:

a $S_1 = 2^6 + 2^7 + 2^8 = 1 \cdot 2^6 + 2^1 \cdot 2^6 + 2^2 \cdot 2^6 = 2^6 \cdot (1 + 2^1 + 2^2) = 2^6 \cdot 7$
b $S_2 = 3^{11} + 5 \cdot 3^{13} + 2 \cdot 3^{14} = 1 \cdot 3^{11} + 5 \cdot 3^2 \cdot 3^{11} + 2 \cdot 3^3 \cdot 3^{11} = 3^{11}(1 + 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3) = 3^{11} \cdot 100$
c $S_3 = 6^8 + 2^9 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 6^{11} = 6^8 + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 3^1 + 4 \cdot 6^{11} = 6^8 + 6^9 \cdot 3^1 + 6^{11} \cdot 4 = 6^8 \cdot 1 + 6^8 \cdot 6 \cdot 3 + 6^8 \cdot 6^3 \cdot 4 =$
$= 6^8 \cdot (1 + 6 \cdot 3 + 6^3 \cdot 4) = 6^8 \cdot 883$.

3 Determinați numărul natural n care verifică egalitățile:
a $6 \cdot 3^{41} + 4 \cdot 3^{42} + 3^{43} = n \cdot 3^{40}$; **b** $7^{n+1} - 2 \cdot 7^n = 245$.

Rezolvare:

a Folosind factorul comun, avem:
$6 \cdot 3^{41} + 4 \cdot 3^{42} + 3^{43} = 6 \cdot 3^{41} + 4 \cdot 3 \cdot 3^{41} + 3^2 \cdot 3^{41} = 3^{41} \cdot (6 + 12 + 9) = 3^{41} \cdot 27 = 3^{41} \cdot 3^3 = 3^{44}$.
Atunci: $n \cdot 3^{40} = 3^{44}$, deci $n = 3^{44} : 3^{40} = 3^4 = 81$.
b Membrul stâng al egalității se scrie $7^{n+1} - 2 \cdot 7^n = 7^n \cdot 7^1 - 2 \cdot 7^n = 7^n(7 - 2) = 7^n \cdot 5$
Din egalitatea $7^n \cdot 5 = 245$ rezultă $7^n = 49$, de unde $n = 2$.

Probleme propuse

1 Efectuați, utilizând regula de înmulțire a două puteri cu aceeași bază:
a $7^{14} \cdot 7^{31}$; **b** $16^{11} \cdot 16^{22}$; **c** $3^3 \cdot 3^8$; **d** $5^9 \cdot 5^{14}$; **e** $23^{12} \cdot 23^{45}$; **f** $5^{32} \cdot 5^{121}$.

2 Calculați, utilizând regula de împărțire a două puteri cu aceeași bază:
a $2^{91} : 2^{21}$; **b** $75^{84} : 75^{81}$; **c** $3^{25} : 3^{18}$; **d** $5^{91} : 5^{52}$; **e** $7^{34} : 7^9$; **f** $14^{45} : 14^{20}$.

3 Scrieți următoarele numere sub forma unei singure puteri, folosind regula de ridicare a unei puteri la o altă putere:
a $(3^4)^7$; **b** $(13^8)^9$; **c** $(17^3)^{18}$; **d** $(7^{11})^4$; **e** $(16^8)^6$; **f** $(5^4)^3$.

4 Aplicând regula de înmulțire a puterilor cu același exponent, scrieți sub forma unei singure puteri numerele:
a $3^{16}\cdot 7^{16}$; **b** $7^{10}\cdot 5^{10}$; **c** $2^{34}\cdot 5^{34}\cdot 7^{34}$; **d** $5^4\cdot 2^4$; **e** $15^{12}\cdot 11^{12}$; **f** $6^{30}\cdot 7^{30}\cdot 2^{30}$.

5 Utilizând regula de împărțire a puterilor cu același exponent, scrieți sub forma unei singure puteri numerele:
a $12^{24}:3^{24}$; **b** $125^{45}:5^{45}$; **c** $18^{17}:9^{17}$; **d** $9^{36}:3^{36}$; **e** $9^{21}:3^{21}$; **f** $125^8:5^8$.

6 Scrieți sub forma unei singure puteri cu exponent număr natural:
a $25^{10}\cdot 5^{32}\cdot 125^5$; **b** $9^4\cdot 27^5\cdot 3^{14}$; **c** $2^{15}\cdot 4^{12}\cdot 8^6$.

7 Scrieți următoarele numere sub formă de produs, utilizând factorul comun:
a $2^{76}+2^{78}+2^{80}$; **b** $3\cdot 5^{47}+2\cdot 5^{48}+6\cdot 5^{49}$; **c** $13^{14}\cdot 3-13^{13}\cdot 2-13^{12}$.

8 Arătați că următoarele numere sunt pătrate ale unor numere naturale:
a 5^{46}; **b** 23^{100}; **c** $(7^6)^5$; **d** 25^{37}; **e** 4^{75};
f 625^7; **g** $16\cdot 25$; **h** $2^{18}\cdot 3^6$; **i** $25\cdot 3^{18}$.

9 Se consideră numerele naturale $a, b\geq 2$, a impar și b par. Menționați pentru fiecare enunț de mai jos dacă este adevărat (**A**), fals (**F**) sau dacă nu se poate preciza exact (**N**):

Enunț	A/F/N
a^b este pătratul unui număr natural	...
a^b nu este pătratul unui număr natural	...
$(a+b)^b$ este pătratul unui număr natural	...
$(a+b)^a$ este pătratul unui număr natural	...
$(2\cdot a)^b$ nu este pătratul unui număr natural	...

Pentru enunțurile a căror valoare de adevăr nu poate fi precizată cu exactitate, dați un exemplu pentru care enunțul respectiv devine adevărat și un exemplu pentru care devine fals.

10 Asociați fiecărui număr x din coloana **A** un singur număr y din coloana **B**, astfel încât x^y să fie pătratul unui număr natural:

A	B
13	2
36	5
7	7
25	8

11 **a** Arătați că $13^2=12^2+5^2$ și, folosind această egalitate, demonstrați că 13^{100} se poate scrie ca o sumă de două pătrate ale unor numere naturale.
b Arătați că 5^{200} este suma pătratelor a două numere naturale.
Indicație: **a** Din $13^2=12^2+5^2$ putem scrie: $13^{100}=13^2\cdot 13^{98}=(12^2+5^2)\cdot 13^{98}=(12\cdot 13^{49})^2+(5\cdot 13^{49})^2$.

12 **a** Arătați că numărul $n=3^{23}\cdot 4^{23}-2^{21}\cdot 6^{23}$ este pătratul unui număr natural.
b Arătați că numărul $n=3^{2011}+2\cdot 3^{2010}+3^{2009}+3^{2008}$ este pătratul unui număr natural.

AUTO
evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $8^{20}\cdot 4^7:2^{16}$ este: **A** 4^{29}; **B** 16^{12}; **C** 2^{90}; **D** 2^{12}.

2 Numărul natural 16^{20} nu este pătratul numărului: **A** 16^{10}; **B** 4^{20}; **C** 2^{40}; **D** 8^{20}.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Un grădinar plantează un bulb de lalea, iar după un an el obține 3 bulbi. Grădinarul continuă să planteze în fiecare an bulbii obținuți în anul anterior. În al patrulea an nu s-au prins 3 bulbi.
a Determină în câți ani grădinarul va avea 6 318 bulbi de lalea.
b Calculează ce pierdere a avut la final grădinarul ca urmare a pierderii celor 3 bulbi în al patrulea an.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 11: Compararea puterilor

Situație problemă

Horia și Ioana au de rezolvat un test de inteligență (matematică!). Se dau următoarele indicii:

- cea mai mare putere a lui 2 care se scrie cu o singură cifră este $2^3 = 8$;
- cea mai mică putere a lui 2 pentru scrierea căreia se folosesc patru cifre este $2^{10} = 1\,024$.

Câte cifre sunt necesare pentru scrierea numărului 2^{30}?

Ce observăm?

Pentru a afla numărul de cifre ale lui 2^{30}, trebuie să încadrăm acest număr între două puteri consecutive ale lui 10. Primul indiciu sugerează scrierea $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$.

Deoarece $8 < 10$, atunci $\underbrace{8\cdot 8\cdot \ldots \cdot 8}_{\text{de 10 ori}} < \underbrace{10\cdot 10\cdot \ldots \cdot 10}_{\text{de 10 ori}}$, adică $8^{10} < 10^{10}$.

Cum 10^{10} se scrie cu 11 cifre, numărul 2^{30}, fiind mai mic decât 10^{10}, are cel mult 10 cifre.
În mod asemănător, cum $1\,024 > 1\,000$, rezultă că $1\,024^3 > 1\,000^3$ și, cum $1\,024 = 2^{10}$ și $1\,000 = 10^3$, obținem $(2^{10})^3 > (10^3)^3$, deci $2^{30} > 10^9$. Așadar 2^{30} se scrie cu cel puțin 10 cifre.

Răspuns: Pentru scrierea numărului 2^{30} se folosesc 10 cifre.

De reținut

Compararea a două puteri cu aceeași bază

Dintre două puteri cu aceeași bază, este mai mare cea cu exponentul mai mare:

dacă $m < n$, atunci $a^m < a^n$, pentru orice numere naturale m, n și $a \geq 2$.

Exemple: **a** $2^4 < 2^5$ deoarece $4 < 5$; **b** $2^5 < 2^7$ deoarece $5 < 7$; **c** $3^{11} > 3^7$ deoarece $11 > 7$.

Compararea a două puteri cu același exponent

Dintre două puteri cu același exponent nenul, este mai mare cea cu baza mai mare:

dacă $a < b$, atunci $a^m < b^m$, pentru orice numere naturale $a, b \geq 2$, $m \geq 1$.

Exemple: **a** $2^4 < 3^4$ deoarece $2 < 3$; **b** $3^4 < 5^4$ deoarece $3 < 5$; **c** $10^{11} > 9^{11}$ deoarece $10 > 9$.

Observație

Pentru a compara două puteri cu baze diferite și exponenți diferiți, folosind regulile de calcul se aduc puterile la aceeași bază sau la același exponent, sau se compară cu alte puteri care au aceeași bază sau același exponent cu puterile considerate.

Exemple

1 Pentru a compara numerele 8^{37} și 4^{55}, le aducem la aceeași bază, deoarece 8 și 4 sunt puteri ale lui 2. Avem $8^{37} = (2^3)^{37} = 2^{3\cdot 37} = 2^{111}$ și $4^{55} = (2^2)^{55} = 2^{2\cdot 55} = 2^{110}$. Întrucât $111 > 110$, folosind regula de comparare a puterilor cu aceeași bază, rezultă $2^{111} > 2^{110}$, adică $8^{37} > 4^{55}$.

2 Pentru a compara numerele 2^{30} și 3^{20}, le aducem la același exponent, observând că 30 și 20 se pot scrie ca produse de factori, dintre care unul este comun. Avem $2^{30} = 2^{3\cdot 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ și $3^{20} = 3^{2\cdot 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$.
Cum $8 < 9$, utilizând regula de comparare a puterilor cu același exponent, rezultă $8^{10} < 9^{10}$, deci $2^{30} < 3^{20}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Ordonați descrescător numerele 81^{20}, 9^{39}, 27^{27} și 3^{82}.

Rezolvare:
Bazele puterilor de ordonat sunt puteri ale lui 3: $81 = 3^4$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$.
Utilizând regulile de calcul, obținem $81^{20} = (3^4)^{20} = 3^{80}$, $9^{39} = (3^2)^{39} = 3^{78}$ și $27^{27} = (3^3)^{27} = 3^{81}$.
Deoarece $78 < 80 < 81 < 82$, rezultă $3^{82} > 3^{81} > 3^{80} > 3^{78}$, deci ordinea descrescătoare a numerelor date este 3^{82}, 27^{27}, 81^{20}, 9^{39}.

2 Stabiliți care dintre numerele 11^{12} și 3^{27} este mai mare.

Rezolvare:
Strategia de rezolvare se bazează pe utilizarea unei puteri intermediare.
Pe de o parte, avem $11^2 < 5^3$, deci $(11^2)^6 < (5^3)^6$, adică $11^{12} < 5^{18}$.
Pe de altă parte, $5^2 < 3^3$, deci $(5^2)^9 < (3^3)^9$, adică $5^{18} < 3^{27}$.
În concluzie, $11^{12} < 5^{18} < 3^{27}$, deci 3^{27} este mai mare decât 11^{12}.

Probleme propuse

1 Stabiliți care dintre numerele următoare este mai mare, observând că puterile au aceeași bază:
- **a** 25^{27} și 25^{28};
- **b** 26^{123} și 26^{1234};
- **c** $2\,011^3$ și $2\,011^5$;
- **d** 393^{23} și 393^{100};
- **e** 125^{125} și 125^{126};
- **f** 111^{44} și 111^{33}.

2 Indicați care dintre numerele următoare este mai mic, observând că puterile au același exponent:
- **a** 15^{27} și 17^{27};
- **b** 26^{123} și 24^{123};
- **c** $2\,011^{14}$ și $2\,010^{14}$;
- **d** 989^{123} și 987^{123};
- **e** 25^{125} și 225^{125};
- **f** $1\,010^{201}$ și $1\,011^{201}$.

3 Comparați numerele următoare, aducând mai întâi puterile la aceeași bază:
- **a** 5^{87} și 25^{36};
- **b** 4^{333} și 8^{122};
- **c** 2^{65} și 16^{20};
- **d** 125^{34} și 25^{75};
- **e** 36^{224} și 6^{363};
- **f** 27^{303} și 9^{502}.

4 Comparați numerele următoare, aducând puterile la același exponent:
- **a** 3^{22} și 2^{33};
- **b** 4^{33} și 3^{44};
- **c** 11^{22} și 22^{11};
- **d** 2^{39} și 3^{26};
- **e** 5^{45} și 6^{30};
- **f** 15^{90} și 6^{135}.

5 Asociați fiecărei inegalități din coloana **A** o pereche din coloana **B**, pentru a obține propoziții adevărate:

A	B
$2^a < 2^b$	$a = 8, b = 8$
$a^{21} > b^{21}$	$a = 5, b = 3$
$4^a < 2^b$	$a = 4, b = 6$

6 **a** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $12^{\overline{ab}} > 12^{97}$.

b Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab}^{12} < 13^{12}$.

c Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care verifică relația $2^{\overline{abc}} < 64^{22}$.

7 Scrieți în ordine crescătoare numerele:
- **a** 25^{18}, 125^{15} și 5^{40};
- **b** 9^{51}, 27^{48} și 3^{95};
- **c** 8^{12}, 32^7 și 27^8.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Ordinea crescătoare a numerelor $A = 824$, $B = 1\,625$ și $C = 432$ este:
A *B, A, C*; **B** *A, C, B*; **C** *A, B, C*; **D** *C, A, B*.

2 Dintre numerele 2^{55}, 3^{44}, 4^{33} și 5^{22} cel mai mare este:
A 5^{22}; **B** 4^{33}; **C** 3^{44}; **D** 2^{55}.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numerele naturale de forma $25^{\overline{ab}}$.

a Determină numărul natural $\overline{ab}$, știind că $25^{\overline{ab}} = 5^{26}$.

b Determină toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $25^{\overline{ab}} < 5^{26}$.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 12: Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2

12.1. Noțiuni introductive

De reținut

Ce observăm?

Urmăriți cu atenție următoarele scrieri:

1 $23 = 20 + 3 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

2 $1\,203 = 1\,000 + 200 + 3 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

3 $23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 = 10\,111$

4 $123 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 = 1\,111\,011$

Scrierile **1** și **2** utilizează cifre de la 0 la 9 și puteri ale lui 10. Ele se numesc *scrieri în baza 10.* Scrierile **3** și **4** utilizează cifrele 0 și 1 și puteri ale lui 2. Ele se numesc *scrieri în baza 2*.

12.2. Sistemul de numerație zecimal

De reținut

Orice număr natural se poate scrie ca o sumă de produse în care un factor este o putere a lui 10 (*descompunere în baza 10*). Aceste scrieri, împreună cu operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere constituie *sistemul de numerație zecimal*. Numărul natural 10 se numește *baza* sistemului de numerație zecimal. Pentru scrierea unui număr natural în baza 10 se folosesc cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.

Exemple

1 $2\,345 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;

2 $98\,735 = 9 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$;

3 $236\,483 = 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$;

4 $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$; $\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$, $a \neq 0$ etc.

12.3. Sistemul de numerație binar

De reținut

Scrierea unui număr natural în *sistemul de numerație binar* (sau în baza 2) are ca suport faptul că două unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior. Numărul natural 2 se numește *baza* sistemului de numerație binar. Pentru scrierea unui număr natural în baza 2 se folosesc cifrele 0 și 1.

Mate practică

O cifră binară conține cantitatea de informație de 1 **bit** (*binary digit*). Sistemul binar este cel mai natural mod de stocare a informațiilor în domeniul **informaticii**. Un bit reprezintă unitatea de măsură a cantității de informație.

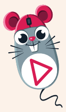
Valoarea unui bit este ori 0, ori 1. Unități mai mari pentru stocarea informației sunt:

1 octet (byte)	=	8 biți		
1 kilooctet (ko)	=	2^{10} octeți		
1 megaoctet (Mo)	=	2^{10} ko	=	2^{20} octeți
1 gigaoctet (Go)	=	2^{10} Mo	=	2^{30} octeți
1 teraoctet (To)	=	2^{10} Go	=	2^{40} octeți
1 petaoctet (Po)	=	2^{40} To	=	2^{50} octeți

De exemplu, pentru scrierea unui cuvânt în *word* se utilizează, în funcție de tipul calculatorului, 16/32/64 biți.

Știați că... ?

Numărarea în sistemul binar, comparativ cu cel zecimal, se face astfel:



Zecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Binar	0	1	10	11	100	101	110	111	1 000	1 001

Exemple

1 $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 5_{(10)}$;

2 $10\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 21_{(10)}$;

3 $1\,001\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 77_{(10)}$;

4 $11\,001\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 205_{(10)}$.

Pentru scrierea unui număr natural în sistemul de numerație binar, se poate utiliza următorul procedeu (bazat pe împărțiri succesive la 2):

18	2			
0	9	2		
	1	4	2	
		0	2	2
			0	**1**

În concluzie,
$18_{(10)} = 10\,010_{(2)}$.
(se scriu resturile
împărțirii în ordine inversă)

27	2			
1	13	2		
	1	6	2	
		0	3	2
			1	**1**

În concluzie,
$27_{(10)} = 11\,011_{(2)}$.
(se scriu resturile
împărțirii în ordine inversă)

În același timp putem utiliza și scrierea ca sume de puteri ale lui 2:
$35_{(10)} = 32 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 100\,011_{(2)}$ (scriem cifrele de 0 și 1 de la puterea cu exponentul cel mai mare);
$68_{(10)} = 64 + 4 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 = 10\,001\,100_{(2)}$

Știați că... ?

1 Scrierea unui număr natural în baza x (x număr natural, $x > 1$) are ca suport faptul că x unități de un anumit ordin formează o unitate imediat superioară. Pentru scrierea în baza x se utilizează numerele 0, 1, 2,..., $x - 2$, $x - 1$, care formează și baza sistemului de numerație. Trecerile din baza x în baza 10 se realizează urmând același algoritm prezentat la sistemul de numerație binar.

Exemple: **a** $112_{(3)} = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 = 14_{(10)}$;
b $2\,131_{(5)} = 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 291_{(10)}$;
c $\overline{abc}_{(x)} = a \cdot x^2 + b \cdot x^1 + c$, unde $a, b, c < x$.

2 În funcție de numărul cifrelor din baza de numerație, sistemele de numerație utilizate în mod frecvent poartă denumirile:

Baza	2	3	4	8	10	12	16	20	60
Sistem	binar	ternar	cuaternar	octal	zecimal	duodecimal	hexazecimal	vigesimal	sexagesimal

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Descompuneți în baza 10:
a $257 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7$; **b** $2\,317 = 2\,000 + 300 + 10 + 7 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7$.

2 Scrieți numerele naturale care au următoarele descompuneri:
a $5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 = 5\,000 + 300 + 9 = 5\,309$; **b** $8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 = 8\,000 + 500 + 70 + 5 = 8\,575$.

3 Scrieți în baza 10:
a $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 = 5_{(10)}$; **b** $1\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 13_{(10)}$;
c $1\,010\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 85_{(10)}$.

4 Scrieți în baza 2:

a $21_{(10)} = 10\,101_{(2)}$;

21	2			
1	10	2		
	0	5	2	
		1	2	2
			0	**1**

b $26_{(10)} = 11\,010_{(2)}$.

26	2			
0	13	2		
	1	6	2	
		0	3	2
			1	**1**

sau $21_{(10)} = 16 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 10\,101_{(2)}$.

5 **a** Dacă $\overline{ab} + \overline{ba} = 132$, atunci calculați $a + b$.

b Dacă $\overline{aa} + \overline{bb} = 143$, atunci calculați $a + b$.

c Dacă $\overline{abc}_{(10)} = 11\,001\,011_{(2)}$, atunci calculați $a + b + c$.

Rezolvare:

a $\overline{ab} + \overline{ba} = 132$ sau $10a + b + 10b + a = 132$ sau $11a + 11b = 132$. Obținem $a + b = 12$.

b $\overline{aa} + \overline{bb} = 143$ sau $10a + a + 10b + b = 143$ sau $11a + 11b = 143$. Obținem $a + b = 13$.

c $11\,001\,011_{(2)} = (2^7 + 2^6 + 2^3 + 2 + 1)_{(10)} = 203_{(10)} = \overline{abc}_{(10)}$. Atunci $a + b + c = 2 + 0 + 3 = 5$.

Probleme propuse

1 Descompuneți următoarele numere naturale în baza 10:
a 812; **b** 1 121; **c** 67 008; **d** 12 014; **e** $\overline{a7b}$; **f** $\overline{a19b}$.

2 Determinați numerele naturale care au următoarele descompuneri în baza 10:
a $4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8$; **b** $6 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10$; **c** $8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10 + 5$;
d $7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3$; **e** $4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6$; **f** $5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8$.

3 Scrieți următoarele numere naturale în baza 10:
a $101_{(2)}$; **b** $1\,101_{(2)}$; **c** $10\,110_{(2)}$; **d** $11\,001_{(2)}$.

4 Scrieți următoarele numere în baza 2:
a 27; **b** 38; **c** 45; **d** 57; **e** 61; **f** 72; **g** 85; **h** 97.

5 **a** Arătați că numărul natural 2 010 se poate scrie ca o sumă de puteri cu baza 2.
b Arătați că numărul natural 1 999 se poate scrie ca o sumă de puteri cu baza 2.

6 Determinați numerele $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ și l din tabelul de mai jos:

Număr în baza 10	Număr în baza 2	Sumă de puteri ale lui 2	Sumă de puteri ale lui 10
18	a	b	c
d	1 010	e	f
g	h	$2^5 + 2^2 + 1$	i
j	k	l	$5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10 + 7$

7 Determinați x pentru care au loc egalitățile:
a $121_{(10)} = x_{(2)}$; **b** $34_{(10)} = x_{(2)}$; **c** $11\,011_{(2)} = x_{(10)}$; **d** $101\,011_{(2)} = x_{(10)}$.

8 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a $29_{(10)} = 10\,001_{(2)}$; **b** $111_{(2)}$ nu este pătratul unui număr natural;
c $1\,101_{(2)} > 3^4 : 3^2$; **d** $11\,001_{(2)}$ este pătratul unui număr natural.

Lecția 13: Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate și acolade

13.1. Ordinea efectuării operațiilor

Situație problemă

De luni până vineri, Ioana citește câte 6 pagini din cartea sa preferată. Sâmbătă și duminică, având mai mult timp, ea citește câte 12 pagini pe zi. Câte pagini citește Ioana într-o săptămână?

Rezolvare:
De luni până vineri, Ioana citește: $5 \cdot 6 = 30$ (pagini)
Sâmbătă și duminică ea citește: $2 \cdot 12 = 24$ (pagini)
Într-o săptămână, Ioana citește: $30 + 24 = 54$ de pagini

Ce observăm?
Soluția problemei se obține mai rapid efectuând calculul:

$$5 \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 30 + 24 = 54.$$

Pentru a ajunge la rezultatul corect, trebuie efectuate mai întâi înmulțirile, apoi adunarea.

De reținut

1. Adunarea și scăderea sunt operații aritmetice de ordinul întâi, înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al doilea, iar ridicarea la putere este operație de ordinul al treilea.
2. Dacă într-un exercițiu apar numai operații de ordinul întâi (adunări și scăderi) sau numai de ordinul al doilea (înmulțiri sau împărțiri), ele se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.
3. Dacă într-un exercițiu există operații de ordine diferite, mai întâi efectuăm operațiile de ordinul al treilea, apoi operațiile de ordinul al doilea și, în final, operațiile de ordinul întâi, în ordinea în care fiecare dintre acestea sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple

1. $235 + 17 - 43 = 252 - 43 = 209.$
2. $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 = 32 \cdot 3 \cdot 10 = 96 \cdot 10 = 960.$
3. $32 + 5 \cdot 14 - 7 \cdot 12 = 32 + 70 - 84 = 102 - 84 = 18.$
4. $5 \cdot 3^4 - 7 \cdot 2^5 + 6^2 \cdot 5 = 5 \cdot 81 - 7 \cdot 32 + 36 \cdot 5 = 405 - 224 + 180 = 361.$

13.2. Utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate, acolade

Mate practică

De ziua ei de naștere, Eva invită 5 fete și 6 băieți. Ea vrea să ofere fiecărui invitat un mic cadou: pentru fete, câte un jurnal personalizat, iar pentru băieți câte o brățară. Sponsorul este bunicul, cu 100 de lei. Ioana și Horia o ajută cu planul.

Horia: La magazinul de manufacturi de lângă casa mea, un jurnal costă 8 lei. Dar dacă adaugi și câte un pix personalizat, care costă 3 lei, prețul jurnalului scade la 6 lei. Iar brățările sunt 7 lei.

Ioana: E o idee bună! Mai ales că azi au o ofertă specială: 2 lei reducere pentru orice brățară sau colier. Să vedem dacă ne ajung banii.

• *setul format dintr-un jurnal și un pix costă*	$6 + 3 = 9$ *lei*
deci pentru fete avem nevoie de	$5 \cdot 9 = 45$ *de lei*
• *fiecare colier, luat la preț redus costă*	$7 - 2 = 5$ *lei*
deci cadourile pentru băieți costă	$6 \cdot 5 = 30$ *de lei*
• *așa că vor rămâne*	$100 - 45 - 30 = 25$ *de lei*

Horia: Ioana, acum după ce am învățat ordinea operațiilor, cred că am putea ajunge la rezultat dintr-un singur calcul. Priviți:

$$100 - 5 \cdot 6 + 3 - 6 \cdot 7 - 2 = 100 - 30 + 3 - 42 - 2 = 29 \text{ lei}$$

Eva: Horia, nu ai procedat corect! Prețul unui set se află efectuând mai întâi adunarea, iar pentru colier ar trebui să efectuezi mai întâi scăderea. Abia apoi poți să faci înmulțirile!

Horia: Ai dreptate! Am uitat de... paranteze!

$100 - 5 \cdot (6 + 3) - 6 \cdot (7 - 2) = 100 - 5 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 100 - 45 - 30 = 25$ lei.

Acum este corect!

Ce observăm?

Pentru a efectua operații de adunare și/sau de scădere, înaintea unor operații de înmulțire sau, în general, pentru a efectua operații de ordin mai mic înaintea unor operații de ordin mai mare, trebuie să se scrie între paranteze termenii adunării/scăderii.

De reținut

1. Parantezele sunt de trei feluri: *rotunde*, *pătrate* și *acolade*.
2. Dacă un exercițiu conține mai multe tipuri de paranteze, se efectuează mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele pătrate și în final operațiile din acolade (dacă acestea există).
3. Într-un exercițiu care conține mai multe tipuri de paranteze, după efectuarea calculelor din toate parantezele rotunde, parantezele pătrate se transformă în paranteze rotunde; în același mod, acoladele se transformă în paranteze pătrate.

Exemplu

$10 + 9 \cdot \{8 + 7 \cdot [6 + 5 \cdot (4 + 3 \cdot 2)]\} =$ efectuăm înmulțirea din paranteza rotundă

$= 10 + 9 \cdot \{8 + 7 \cdot [6 + 5 \cdot (4 + 6)]\} =$ efectuăm adunarea din paranteza rotundă și transformăm parantezele pătrate în rotunde iar acoladele în paranteze pătrate

$= 10 + 9 \cdot [8 + 7 \cdot (6 + 5 \cdot 10)] =$ efectuăm înmulțirea din paranteza rotundă

$= 10 + 9 \cdot [8 + 7 \cdot (6 + 50)] =$ efectuăm adunarea din paranteza rotundă

$= 10 + 9 \cdot (8 + 7 \cdot 56) =$

$= 10 + 9 \cdot (8 + 392) = 10 + 9 \cdot 400 = 10 + 3\,600 = 3\,610$

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Mama cumpără 3 kilograme de căpșuni a câte 7 lei și 5 kilograme de mere a câte 3 lei. Ce rest primește de la 50 de lei? Rezolvați problema folosind un singur exercițiu și utilizând paranteze.

Rezolvare:

$50 - (3 \cdot 7 + 5 \cdot 3) = 50 - (21 + 15) = 50 - 36 = 14$ lei.

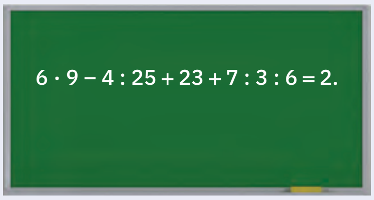
2 La un magazin de jucării au fost aduse 40 de mașinuțe, de 3 ori mai multe păpuși și cu 50 mai puține jocuri de construcție decât păpuși. O mașinuță costă 11 lei, o păpușă 8 lei, iar un joc de construcție 14 lei. Care este valoarea obiectelor aduse la magazin?

Rezolvați problema folosind un singur exercițiu și utilizând paranteze!

Rezolvare:

$40 \cdot 11 + 40 \cdot 3 \cdot 8 + (40 \cdot 3 - 50) \cdot 14 = 440 + 960 + 70 \cdot 14 = 1\,400 + 980 = 2\,380$ lei.

3 Horia a scris pe tablă egalitatea din imaginea alăturată, însă a uitat să pună parantezele. Ajutați-l, astfel încât egalitatea să devină corectă.



Rezolvare:

Deoarece 4 nu se împarte la 25, expresia $6 \cdot 9 - 4$ trebuie delimitată de paranteze. La fel, 7 nu se împarte (exact!) la 3, deci suma $23 + 7$ trebuie separată și ea prin paranteze.

Efectuând calculele parțiale $(6 \cdot 9 - 4) : 25 = 2$ și $(23 + 7) : 3 = 10$, deducem că mai este nevoie de o paranteză pătrată, iar expresia corectă este: $[(6 \cdot 9 - 4) : 25 + (23 + 7) : 3] : 6 = 2$.

Probleme propuse

1 Efectuați:
a $15 + 43 - 27$; **b** $413 - 395 + 11$; **c** $642 + 423 - 999$;
d $725 - 696 + 37$; **e** $2\,138 - 809 + 57$; **f** $521 - 99 + 17 - 47$.

2 Efectuați:
a $22 \cdot 2 : 11$; **b** $360 : 10 \cdot 6$; **c** $3^2 \cdot 8 : 12 \cdot 13 : 39$;
d $5 \cdot 12 \cdot 17 : 255$; **e** $12 \cdot 11 : 44 \cdot 16 : 24$; **f** $456 : 24 \cdot 5^2 : 19 \cdot 20$.

3 Calculați:
a $10^{60} : (2 \cdot 5)^{58}$; **b** $(7^{14} \cdot 5)^2 : 7^{26}$; **c** $(7^6)^8 : 49^{24}$;
d $(3^4)^9 : (9^6)^3$; **e** $(11^{2011} \cdot 4^{1005}) : [(22^2)^5]^{201}$; **f** $2^{23} : 2^{21} : 2 + 3^{32} : 3^{31} \cdot 3$.

4 Efectuați:
a $(7\,503 : 61 + 877) : 500 + 53 \cdot 11$; **b** $207 \cdot 9 - (19^2 + 3^2) : 74 + 2\,296 : 41$;
c $5 \cdot 230 - 7 \cdot (512 : 32 + 2^2) + 4\,687 : 43$; **d** $[493 : 17 - (128 : 2^3 + 224 : 8) : 22] : 27 - 1$.

5 Calculați:
a $10 \cdot \{18^2 : 324 + 2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^{15} : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1^{24}]\}$; **b** $\left[2^{12} \cdot 2^{18} + 5^{70} : 5^{10} - (3^{25})^2\right] : \left[4^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{23} + (5^{15})^{2^2} - (3^2)^{5^2}\right]$.

6 Determinați câte numere naturale sunt cuprinse între numerele a și b, unde:
$a = 6 + 8 \cdot [32 : 4 - 5 \cdot (4^3 - 7 \cdot 3^2)]$; $b = 15 \cdot 2 + (256 : 16 + 4) : 5 + 2\,121 : 21$.

7 Puneți paranteze pentru a obține egalități adevărate:
a $5 \cdot 4 : 2 + 8 - 2 = 48$; **b** $6 \cdot 9 : 3 + 5 - 2 = 36$; **c** $3 \cdot 8 : 4 + 6 \cdot 2 - 18 = 24$

8 Ce sumă de bani a avut la început Andrei, dacă după ce mai primește de la mama 75 de lei, de la bunic 40 de lei și își achită datoria de 80 de lei, îi mai rămân 400 de lei?

9 Determinați cifra a, știind că $(\overline{abcde} - 100 \cdot \overline{bc} - \overline{de}) : 10^4 = 7$.

10 Determinați $a + b + c$, astfel încât:
a $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 88$; **b** $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$;
c $\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca} = 777$; **d** $\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb} = 110$.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $869 - 363 : 11 + 25 \cdot 36$ este:
A 1 466; **B** 30 996; **C** 946; **D** 1 736.

2 Rezultatul calculului $2^7 - 11 \cdot \{91 - 5 \cdot [22 - 5 \cdot (40^2 - 41 \cdot 39)]\}$ este:
A 2; **B** 62; **C** 117; **D** 1 599.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Toate cele 828 de ciocolate au fost ambalate în cutii mici și în cutii mari. În fiecare cutie mică s-au așezat câte 12 ciocolate, iar în fiecare cutie mare, câte 18.
a Determină câte cutii mari au fost folosite, dacă din cele mici au fost 24. Rezolvă problema folosind un singur exercițiu și utilizând parantezele.
b Dacă numărul cutiilor mici este cu 6 mai mic decât numărul cutiilor mari, determină numărul cutiilor mici. Rezolvă problema folosind un singur exercițiu și utilizând parantezele.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Împărțirea numerelor naturale • Puteri. Pătratul unui număr natural. Reguli de calcul cu puteri • Compararea puterilor • Scrierea în baza 10; scrierea în baza 2 • Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor

1 Pătratul unui număr natural cuprins între 17 și 34 este egal cu:

a 16 **b** 49 **c** 25 **d** 36

2 Câtul și restul împărțirii numărului 217 la 14 sunt numerele:

a 14 și 5 **b** 15 și 5 **c** 15 și 7 **d** 14 și 7

3 Scrierea în baza 10 a numărului $101\,011_{(2)}$ este:

a 32 **b** 35 **c** 8 **d** 43

4 Scrierea în baza 2 a numărului 19 este egală cu:

a 10 011 **b** 111 **c** 1 011 **d** 1 101

5 Rezultatul calculului $15^{26} : 15^{25}$ este:

a 1 **b** 15^{51} **c** 225 **d** 15

6 Știind că $2^{34} \cdot 2^{15} = 2^{n}$, atunci n este egal cu:

a 2^{49} **b** 19 **c** 49 **d** 2^{19}

7 Câte numere naturale dau câtul 3 la împărțirea cu 5?

a 1 **b** 2 **c** 3 **d** 5

8 Pătratele a două numere naturale consecutive între care se află 114 sunt:

a 81 și 121 **b** 100 și 121
c 100 și 144 **d** 121 și 144

9 Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

$3^{24} < 3^{42}$

$5^{10} \cdot 5^{4} = 5^{40}$

123 este pătratul unui număr natural

10 Asociați fiecărei expresii din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**.

A	B
$2 \cdot [14 - 2 \cdot (3^2 - 2^3)]$	**a** 208
$2 \cdot (14 - 2) \cdot 3^2 - 2^3$	**b** 24
$2 \cdot 14 - 2 \cdot (3^2 - 2^3)$	**c** 224
	d 26

11 Determinați numerele *a*, *b*, *c* din tabelul de mai jos:

Puterea	Ultima cifră a puterii
6^{2017}	*a*
125^{2018}	*b*
$2\,021^{2019}$	*c*

12 Determinați numerele *a*, *b*, *c* și *d* din tabelul de mai jos.

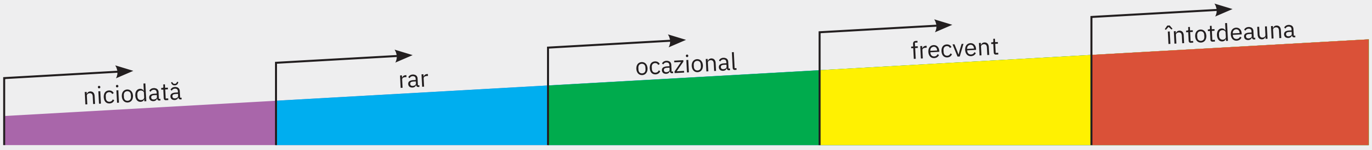
D	I	C	R
546	13	*a*	*b*
c	27	8	12
129	*d*	16	1

13 Suma a două numere naturale este egală cu 53. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic, obținem câtul 4 și restul 8. Determinați cele două numere naturale.

14 Arătați că $10^2 = 6^2 + 8^2$, apoi că 10^{22} se poate scrie ca o sumă de două pătrate ale unor numere naturale.

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U2

Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Lecția 1: Metoda reducerii la unitate

Această metodă este utilă, în special, prin faptul că se aplică la multe probleme întâlnite în practică. Algoritmul de rezolvare constă în aflarea mărimii cerute printr-o fază intermediară de comparare cu unitatea. Singura dificultate este stabilirea dependenței dintre mărimi.

Mate practică

Opt kilograme de mere costă 24 de lei.
Cât costă 5 kilograme de mere de aceeași calitate?

A. Rezolvare cu plan:

1 Cât costă un kilogram de mere?
24 lei : 8 = 3 lei

2 Cât costă 5 kilograme de mere?
3 lei · 5 = 15 lei

B. Rezolvare cu metoda reducerii la unitate:

8 kg .... 24 lei
1 kg .... 24 lei : 8 = 3 lei
5 kg .... 3 lei · 5 = 15 lei

Analiză:
8 kilograme de mere costă 24 de lei, iar un kilogram de mere costă 3 lei: o cantitate de 8 ori mai mică costă de 8 ori mai puțin. Dacă un kilogram de mere costă 3 lei, atunci 5 kilograme de mere costă 15 lei: o cantitate de 5 ori mai mare costă de 5 ori mai mult.

Mate practică

Șase robinete, care au același debit, curg împreună și umplu o piscină în 3 ore. În câte ore pot umple aceeași piscină 9 robinete cu același debit?

A. Rezolvare cu plan:

1 În câte ore poate fi umplută piscina de un singur robinet?
3 ore · 6 = 18 ore

2 În câte ore pot umple piscina 9 robinete?
18 ore : 9 = 2 ore

B. Rezolvare cu metoda reducerii la unitate:

6 robinete .... 3 ore
1 robinet .... 3 ore · 6 = 18 ore
9 robinete .... 18 ore : 9 = 2 ore

Analiză:
6 robinete curg împreună și umplu o piscină în 3 ore, iar un robinet în 18 ore: numărul robinetelor s-a micșorat de 6 ori, iar timpul necesar s-a mărit de 6 ori. Un robinet deschis umple o piscină în 18 ore, iar 9 robinete în 2 ore: numărul robinetelor s-a mărit de 9 ori, iar timpul necesar s-a micșorat de 9 ori.

De reținut

Sunt cazuri în care, dacă o mărime *scade* (crește) de un număr de ori, atunci și cealaltă mărime *scade* (crește) de același număr de ori (vezi prima problemă).
Sunt cazuri în care, dacă o mărime *scade* (crește) de un număr de ori, atunci cealaltă mărime *crește* (scade) de același număr de ori (vezi a doua problemă).

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 „Și-n vreme cât s-au cununat
S-a-ntins poporul adunat
Să joace-n drum după tilinci:
Feciori la zece fete, cinci,
Cu zdrăngăneii la opinci
Ca-n port de sat.”

(George Coșbuc — *Nunta Zamfirei*)

Presupunând că-n uriașa horă formată erau 30 de feciori, să se afle numărul fetelor.

Rezolvare:

5 feciori .... 10 fete
1 fecior .... 10 fete : 5 = 2 fete
30 de feciori .... 2 fete · 30 = 60 de fete

2 Dacă un elev ar lucra suplimentar câteva probleme pe zi, ar termina de rezolvat problemele dintr-o culegere în 25 de zile. În câte zile ar termina rezolvarea tuturor problemelor lucrând câte 5 probleme pe zi?

Ce observăm? Se poate rezolva problema?

Ce ar trebui schimbat în enunțul problemei ca să avem următoarea rezolvare?

4 probleme pe zi .... 25 de zile
1 problemă pe zi .... 25 de zile · 4 = 100 de zile
5 probleme pe zi .... 100 zile : 5 = 20 de zile.

Răspuns:

În enunț, în loc de *câteva probleme pe zi*, trebuia precizat *4 probleme pe zi*.

Investigație

- ▶ Formați echipe de 3 – 4 colegi. Citiți următoarea problemă:

Dintr-o bucată lungă de sârmă, pentru a obține bucăți de sârmă de 4 metri lungime fiecare, un muncitor face 12 tăieturi cu un clește. Dintr-o bucată de sârmă de aceeași lungime trebuie să obțină bucăți de 8 metri lungime fiecare. Câte tăieturi ar trebui să facă?

- ▶ În cadrul grupei, analizați legătura dintre numărul tăieturilor și numărul bucăților de sârmă obținute.
- ▶ Consultați-vă și rezolvați problema.
- ▶ Comparați rezolvarea voastră cu următoarele două rezolvări.

Ioana a propus următoarea rezolvare:

4 m .... 12 tăieturi
1 m .... 12 tăieturi · 4 = 48 de tăieturi
8 m .... 48 de tăieturi : 8 = 6 tăieturi

Horia a propus următoarea rezolvare, prin care problema este descompusă în două probleme mai simple.

Prin 12 tăieturi se obțin 13 bucăți de sârmă.

1 bucată .... 4 m
13 bucăți .... 4 m · 13 = 52 m

Rezolvăm, în continuare, a doua problemă.

8 m .... 1 bucată
52 m .... 52 m : 8 m/bucată = 6 bucăți și rămâne rest o bucată de 4 m.

Sunt necesare 6 tăieturi.

- ▶ Alegeți rezolvarea corectă.
- ▶ Verificați dacă celelalte grupe au ales aceeași rezolvare. În cazul în care nu ați ales aceeași rezolvare, argumentați rezolvarea aleasă. Eventual, apelați la profesorul vostru.
- ▶ Compuneți o problemă despre o acțiune de plantare a unor pomi pe marginea unei străzi, cu distanța dintre doi pomi consecutivi egală cu 4 m, respectiv 8 m.

Ca să obțineți o rezolvare asemănătoare, ar trebui să fie unsprezece, doisprezece sau 13 pomi?

Probleme propuse

1 Priviți imaginea alăturată și alegeți răspunsul corect. Un litru de ulei costă:

a 6 lei; **b** 8 lei; **c** 9 lei; **d** 18 lei.

2 Determinați valorile care lipsesc din tabelul următor, apoi răspundeți la întrebările de mai jos.

Lungimea laturii	5 cm	6 cm	9 cm	4 cm	3 cm	2 cm
Perimetrul pătratului	20 cm	24 cm	...	...	...	...

a Cum se modifică perimetrul pătratului, dacă lungimea laturii se mărește?
b Cum se modifică perimetrul pătratului, dacă lungimea laturii se micșorează?

3 Inima unui om bate de aproximativ 210 ori în 3 minute. Afirmația că, într-o oră, inima bate de aproximativ 4 200 de ori este: **a** adevărată; **b** falsă.

4 Din 200 de litri de apă de mare se obțin 8 grame de sare.
a Este posibil ca din 400 de litri de apă de mare să se obțină 16 grame de sare? Justificați răspunsul dat.
b Ce cantitate de apă este necesară pentru a obține un kilogram de sare?

5 Peștele-spadă înoată mai rapid decât oricare alt pește! Știind că parcurge 300 de metri în 6 secunde, să se afle câți kilometri parcurge într-o oră.

6 Cifra de afaceri a unei societăți s-a ridicat în acest an la 9 000 000 €, realizându-se un profit de 360 000 €. Pentru anul următor se estimează o cifră de afaceri de 10 000 000 €.
Ce profit ar realiza societatea, păstrând rentabilitatea (posibilitatea de câștig) din acest an?

7 Compuneți o problemă folosind datele următoare:
3 robinete .... 600 litri de apă
5 robinete .... *x* litri de apă

8 Produsul a două numere naturale *x* și *y* este egal cu 60. Determinați valorile lui *y* din tabelul alăturat, apoi completați, astfel încât enunțurile obținute să fie adevărate.

x	2	3	4	12	10	6
y	30	...	...	...	...	...

a Dacă valoarea lui *x* se mărește, atunci valoarea lui *y* se ... .
b Dacă valoarea lui *x* se micșorează, atunci valoarea lui *y* se ... .

9 Pentru a termina o lucrare în 5 zile, sunt necesari 12 muncitori.
a Pot termina lucrarea, în 10 zile, 6 muncitori cu aceeași îndemânare? Justificați răspunsul dat.
b Câți muncitori, cu aceeași îndemânare, sunt necesari pentru a termina, aceeași lucrare, în 3 zile?

10 De Ziua Pământului, cei 20 de elevi ai unei clase au plantat puieți de stejar în 3 ore. În cât timp ar planta același număr de puieți 30 de elevi, lucrând cu aceeași îndemânare?

11 Compuneți o problemă folosind datele următoare:
3 robinete .... 8 ore
4 robinete .... *x* ore

12 Din 10 decigrame de sămânță de viermi de mătase se obțin, în medie, 1 500 de gogoși. Știind că dintr-o gogoașă se trag 900 de metri de fir de mătase, să se afle câți metri de fir se obțin din 6 grame de sămânță.

13 Clopotele unei biserici bat de 3 ori în 12 secunde. În câte secunde vor bate de 12 ori?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Din 60 de litri de lapte se obțin 12 kg de smântână. Cantitatea de lapte necesară pentru a obține 10 kg de smântână este egală cu: **A** 35 de litri; **B** 40 de litri; **C** 45 de litri; **D** 50 de litri.

2 Templul zeiței Artemis din Efes a fost un edificiu antic grec din care au rămas puține relicve. Suma înălțimilor celor 127 de coloane ce susțineau acoperișul era de 2 286 m. Împreună, 103 coloane aveau înălțimea egală cu: **A** 234 m; **B** 1 824 m; **C** 1 854 m; **D** 2022 m.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 O pompă poate umple o piscină cu capacitatea de 30 000 de litri în 8 ore și 20 de minute, iar o a doua pompă o poate umple în 12 ore și 30 de minute.
a Calculează debitul primei pompe, exprimat în litri pe minut.
b În cât timp se va umple piscina, dacă vor funcționa simultan cele două pompe?

Grila de evaluare:

Subiectul 1	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

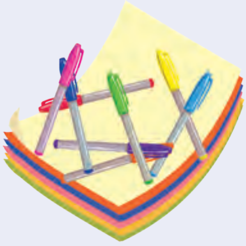
Lecția 2: Metoda comparației

Algoritmul rezolvării problemelor constă în a compara două situații diferite, eliminarea unei necunoscute și determinarea celeilalte necunoscute. Prin înlocuire într-una din situațiile inițiale se determină și cealaltă necunoscută. După modul cum se realizează eliminarea unei necunoscute, distingem două tipuri de abordări: eliminarea unei necunoscute prin scădere, precedată, eventual, de aducerea la același termen de comparație, și, respectiv, eliminarea unei necunoscute prin înlocuire.

2.1. Eliminarea unei necunoscute prin scădere (metoda reducerii)

Mate practică

Ca să realizeze pliante pentru proiectul de biologie, Clara a cumpărat 6 coli de hârtie colorată și 8 carioci, pentru care a plătit 58 de lei, iar Ioana a cumpărat 6 coli de hârtie colorată și 12 carioci, pentru care a plătit 78 de lei. Cât a costat o coală și cât a costat o cariocă?



Analiză:
Numărul colilor cumpărate de cele două fete este același. Atunci Ioana a plătit mai mult, pentru că a cumpărat mai multe carioci.

Rezolvare:
Pentru a compara mai ușor, transcriem datele problemei:
6 coli .... 8 carioci .... 58 lei
6 coli .... 12 carioci............................ 78 lei

Comparând cele două situații, observăm că **au deja același termen de comparație**: 6 coli. Reiese că diferența dintre sumele de bani (78 lei – 58 lei = 20 lei) provine din diferența dintre numărul cariocilor, 12 carioci – 8 carioci = 4 carioci. Așadar, o cariocă a costat 20 lei : 4 = 5 lei.

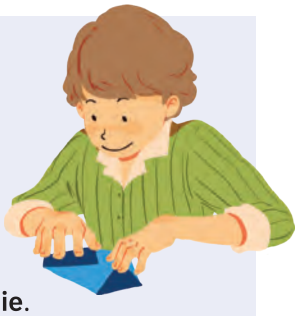
Obținem: 6 coli .... 5 lei · 8............................ 58 lei,
ceea ce înseamnă că 6 coli au costat 58 lei – 5 lei · 8 = 18 lei, iar o coală a costat 18 lei : 6 = 3 lei.

Răspuns: O coală a costat 3 lei, iar o cariocă a costat 5 lei.

Verificare: 6 coli și 8 carioci au costat împreună 3 lei · 6 + 5 lei · 8 = 18 lei + 40 lei = 58 lei;
6 coli și 12 carioci au costat împreună 3 lei · 6 + 5 lei · 12 = 18 lei + 60 lei = 78 lei.

Mate practică

Pentru proiectul de biologie, Horia a cumpărat 2 coli de hârtie colorată și 7 carioci, pentru care a plătit 41 de lei, iar Radu a cumpărat 7 coli de hârtie colorată și 2 carioci, pentru care a plătit 31 de lei. Cât au costat 6 coli și 6 carioci?



Rezolvare:
Transcriem datele problemei:
2 coli .... 7 carioci .... 41 lei
7 coli .... 2 carioci .... 31 lei
Comparând cele două situații, observăm că **nu au același termen de comparație**.

Metoda 1
Îl *obligăm* pe Horia să cumpere de șapte ori mai mult, pentru care va și plăti de șapte ori mai mult, iar pe Radu să cumpere și să plătească de două ori mai mult și obținem:

14 coli .... 49 carioci.................... 287 lei
14 coli .... 4 carioci .... 62 lei

Deducem că diferența de 287 lei – 62 lei = 225 lei provine din diferența celor 49 carioci – 4 carioci = = 45 carioci cumpărate în plus.
Atunci o cariocă a costat 225 lei : 45 = 5 lei. Obținem:
2 coli .... 5 lei · 7.................... 41 lei,
ceea ce înseamnă că 2 coli au costat 41 lei – 5 lei · 7 = 6 lei.
Atunci o coală a costat 6 lei : 2 = 3 lei.
Putem calcula cât au costat 6 carioci și 6 coli în două moduri:
6 · (5 lei + 3 lei) = 6 · 8 lei = 48 lei sau 3 lei · 6 + 5 lei · 6 = 18 lei + 30 lei = 48 lei.

Metoda 2

2 coli	7 carioci	41 lei
7 coli	2 carioci	31 lei

Prin însumare deducem:

9 coli	9 carioci	72 lei

ceea ce conduce la:

1 coală	1 cariocă	72 lei : 9 = 8 lei
6 coli	6 carioci	8 lei · 6 = 48 lei

Răspuns: 6 coli și 6 carioci au costat 48 lei.

Verificare: două coli și 7 carioci au costat împreună 3 lei · 2 + 5 lei · 7 = 6 lei + 35 lei = 41 lei;
7 coli și două carioci au costat împreună 3 lei · 7 + 5 lei · 2 = 21 lei + 10 lei = 31 lei.

2.2. Eliminarea unei necunoscute prin înlocuire (metoda substituției)

Mate practică

În cadrul unui proiect ecologic, o școală a colectat 7 containere cu maculatură și 6 containere cu plastic, care cântăresc împreună 720 de kilograme. Știind că 6 containere cu plastic cântăresc cât 5 containere cu maculatură, să se afle cât cântărește un container cu maculatură și cât cântărește un container cu plastic.

Rezolvare:
Conform enunțului, putem scrie:

7 containere cu maculatură	6 containere cu plastic	720 kg

Înlocuim (substituim) 6 containere cu plastic cu 5 containere cu maculatură și obținem:

7 containere cu maculatură	5 containere cu maculatură	720 kg,

ceea ce înseamnă că 12 containere cu maculatură cântăresc 720 kg.

Un container cu maculatură cântărește 720 kg : 12 = 60 kg.
Atunci, 5 containere cu maculatură cântăresc 60 kg · 5 = 300 kg.

Echivalând cele 5 containere cu maculatură cu 6 containere cu plastic, reiese că un container cu plastic cântărește 300 kg : 6 = 50 kg.

Observații

În anumite situații, folosind metoda comparației putem verifica dacă datele problemei sunt contradictorii sau insuficiente pentru rezolvarea problemei.

1 Patru pixuri și 3 creioane costă 41 de lei, iar 8 pixuri și 6 creioane costă 82 de lei. Cât costă un pix?

Rezolvare:

4 pixuri	3 creioane	41 lei
8 pixuri	6 creioane	82 lei

Ce observăm?
Dacă dublăm numerele din prima situație, obținem datele din a doua situație și, de aceea, nu putem determina prețul unui pix.

2 Trei cărți și 4 caiete costă 62 de lei, iar 3 cărți și 6 caiete costă 30 de lei. Cât costă o carte?

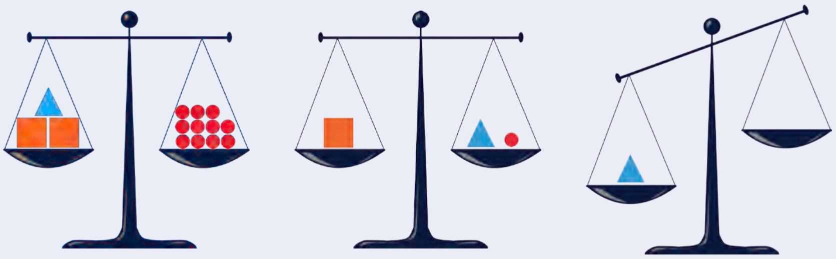
Rezolvare:

3 cărți	4 caiete	62 lei
3 cărți	6 caiete	30 lei

Ce observăm?
Au același termen de comparație, 3 cărți, dar problema nu are soluție, pentru că 6 caiete nu pot avea prețul mai mic decât 4 caiete!

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Desenul schematic alăturat ne sugerează că primele două balanțe sunt în echilibru. Prima are pe talerul din stânga două cuburi și o piramidă, iar pe talerul din dreapta 11 bile. A doua are pe talerul din stânga un cub, iar pe cel din dreapta o piramidă și o bilă.
Câte bile vor echilibra ultima balanță?



Analiză:
Privim a doua balanță: un cub cântărește cât o piramidă și o bilă la un loc. Atunci, două cuburi cântăresc cât două piramide și două bile la un loc.
Privim prima balanță: două cuburi și o piramidă cântăresc cât 11 bile.

Rezolvare:
Înlocuim cele două cuburi de pe talerul stâng al primei balanțe și obținem: două piramide și două bile plus încă o piramidă cântăresc cât 11 bile și atunci trei piramide cântăresc cât 9 bile. Deducem că o piramidă cântărește cât trei bile. În concluzie, trei bile vor echilibra ultima balanță.

2 Un ogar urmărește o vulpe, care are 12 sărituri înaintea lui. Câte sărituri va face ogarul până să o ajungă pe vulpe, știind că el face 7 sărituri în timp ce vulpea face 8 sărituri și că, în 5 sărituri, ogarul parcurge aceeași distanță pe care o parcurge vulpea în 6 sărituri?

Rezolvare:

	Ogarul	Vulpea
Timp	7 sărituri în timpul a...	... 8 sărituri
Distanță	5 sărituri măsoară cât...	... 6 sărituri

Aducem la același termen de comparație:

	Ogarul	Vulpea
Timp	35 sărituri în timpul a...	... 40 sărituri
Distanță	35 sărituri măsoară cât...	... 42 sărituri

La fiecare 35 de sărituri, ogarul micșorează distanța față de vulpe cu două sărituri de vulpe. Convenim să numim *perioadă* timpul necesar ogarului să facă 35 de sărituri. Vulpea avea, față de ogar, un avans egal cu 12 sărituri de vulpe. Deoarece 12 : 2 = 6, deducem că după 6 *perioade* ogarul prinde vulpea.
Ogarul ajunge vulpea după 35 de sărituri · 6 = 210 sărituri.

Probleme propuse

1 Două caiete și un pix costă 24 de lei. Două caiete și două pixuri costă 40 de lei. Un pix costă:
a 4 lei; **b** 8 lei; **c** 16 lei; **d** 18 lei.

2 Bunicul lui Adi a constatat că 3 saci cu grâu și 4 saci cu porumb cântăresc împreună 240 kg. Fără a-i mai pune pe cântar, a afirmat că 9 saci cu grâu și 12 saci cu porumb, de același tip, cântăresc 720 kg. Afirmația bunicului este:
a adevărată; **b** falsă.

3 Prin 6 robinete și două pompe curg 456 de litri de apă. Câtă apă curge, în același timp, prin 3 robinete și o pompă, știind că toate robinetele, respectiv, toate pompele au același debit?

4 Cinci pungi cu mălai și 7 pungi cu făină cântăresc 31 kg, iar 7 pungi cu mălai și 7 pungi cu făină cântăresc 35 kg. (Pungile cu mălai, respectiv pungile cu făină, au aceeași masă.)
a Este posibil ca 10 pungi cu mălai și 15 pungi cu făină să cântărească 62 kg? Justificați răspunsul dat.
b Cât cântărește o pungă cu mălai, respectiv o pungă cu făină?

5 Cu ocazia zilei de 1 Martie, 4 băieți și 6 fete au confecționat împreună 26 de mărțișoare. Lucrând cu aceeași îndemânare, 5 băieți și 3 fete au confecționat împreună 19 mărțișoare.
  a Câte mărțișoare au confecționat, împreună, un băiat și o fată?
  b Câte mărțișoare a confecționat o fată? Dar un băiat?

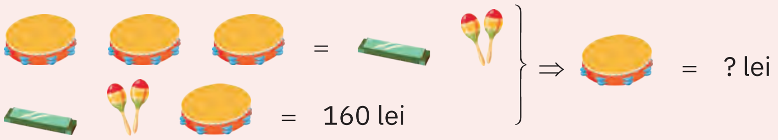
6 Cinci sărituri ale unui ogar și 7 sărituri ale unei vulpi măsoară împreună 17 m. Două sărituri ale unui ogar și 5 sărituri ale unei vulpi măsoară împreună 9 m. Ce distanță parcurge fiecare după 30 de sărituri?

7 Compuneți o problemă, apoi rezolvați-o, folosind datele:
5 cărți .... 3 caiete .... 105 lei
3 cărți .... 5 caiete .... 79 lei

8 Cinci sărituri ale unui ogar și 7 sărituri ale unei vulpi măsoară împreună 17 m. Două sărituri ale unui ogar măsoară tot atât cât 4 sărituri ale vulpii. Ce lungime are săritura vulpii?

9 Cinci trandafiri și 6 garoafe costă 42 de lei. Un trandafir costă tot atât cât 3 garoafe.
  a Este posibil ca 3 trandafiri să coste tot atât cât 10 garoafe? Justificați răspunsul dat.
  b Cât costă un trandafir? Dar o garoafă?

10



11 S-a constatat că 9 bivoli și 8 boi aveau aceeași forță cât 6 boi și 12 bivoli. Cine era mai puternic, bivolul sau boul?
Indicație: Echivalăm 9 bivoli și 8 boi cu (6 boi și 9 bivoli) + 2 boi.

12 ☐ + ▭ + ○ + ☐ + △ + ○ = 20
☐ + ▭ + ○ = 12
⇒ ▭ − △ = ?

Joc

Patru dansatori și 6 dansatoare execută un dans tematic în 5 minute.
În cât timp vor executa 8 dansatori și 12 dansatoare același dans tematic?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Trei robinete și două pompe umplu un bazin cu capacitatea de 31 hl într-o oră. Trei robinete și 8 pompe umplu un bazin cu capacitatea de 79 hl într-o oră. Robinetele au același debit, respectiv pompele au același debit. O pompă are debitul egal cu:
A 4 hl; **B** 5 hl; **C** 6 hl; **D** 8 hl.

2 Doi cocoși cântăresc tot atât cât 3 găini. Opt cocoși și 9 găini cântăresc 42 kg. Cât cântărește un cocoș, știind că toți cocoșii au aceeași greutate, respectiv toate găinile cântăresc la fel?
A 1 kg; **B** 2 kg; **C** 3 kg; **D** 4 kg.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Trei kilograme de mere, 4 kg de pere și 5 kg de gutui costă 50 de lei. Cinci kilograme de mere și 6 kg de pere costă 39 de lei. Trei kilograme de mere și 4 kg de pere costă tot atât cât 5 kg de gutui.
  a Cât costă un kilogram de gutui?
  b Cât costă un kilogram de mere și cât costă un kilogram de pere?

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 3: Metoda figurativă

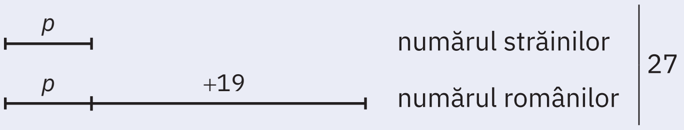
Metoda figurativă sau grafică este cea mai sugestivă metodă prin care o situație reală se poate transpune în limbaj matematic. Reprezentarea datelor se face, de regulă, prin segmente de dreaptă, care vor fi luate ca părți egale dintr-un întreg. Prin această metodă se pot afla două numere când se cunosc **suma și diferența**, **suma și câtul**, respectiv **diferența și câtul** lor.

3.1. Metoda figurativă: se cunosc suma și diferența a două numere

Mate practică

Într-o tabără de schi s-au înscris cu 19 mai mulți români decât străini. Pot fi 27 de participanți? Dar 24?

Rezolvare:
Numărul străinilor, fiind mai mic, se reprezintă cu un segment de dreaptă (*o parte*). Vom obține reprezentarea:



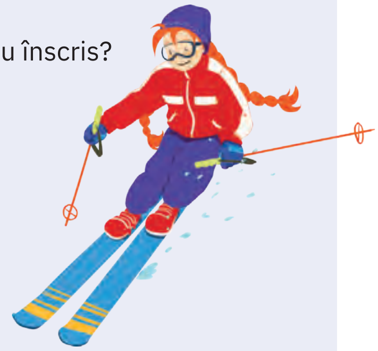
1 Cât reprezintă 2 părți?
$27 - 19 = 8$

2 Cât reprezintă o parte?
$8 : 2 = 4$

Deci pot fi 27 de participanți.

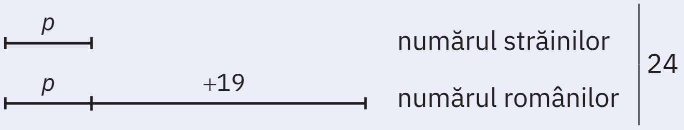
3 Câți străini s-au înscris?
$4 \cdot 1 = 4$

4 Câți români s-au înscris?
$4 \cdot 1 + 19 = 23$



Verificare: $23 - 4 = 19$ și $23 + 4 = 27$.

Conform celei de-a doua situații, avem:



1 Cât reprezintă 2 părți?
$24 - 19 = 5$

2 Cât reprezintă o parte?
$5 : 2$ nu este număr natural.

În acest caz, problema nu are soluție, deoarece *o parte* reprezintă numărul străinilor și nu este număr natural.

De reținut

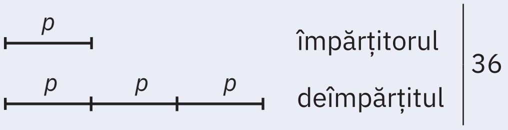
Problemele se încadrează în acest tip, dacă în conținutul lor se afirmă că o mărime este *cu… mai mare* (*mai mică*) decât cealaltă (semnificând diferența dintre cele două mărimi), iar expresii precum *în total, la un loc, împreună* ș.a. sugerează suma.

3.2. Metoda figurativă: se cunosc suma și câtul a două numere

Situație problemă

Împărțind un număr natural la un alt număr natural, Radu obține câtul 3 și restul 0.
Să se afle cele două numere, știind că suma lor este 36.

Rezolvare:
Câtul 3 sugerează că primul număr (deîmpărțitul) este *de 3 ori mai mare* decât al doilea (împărțitorul).
Se obține reprezentarea grafică următoare:



1 Cât reprezintă o parte?
$36 : 4 = 9$

2 Care sunt cele două numere?
$9 \cdot 3 = 27$, respectiv $9 \cdot 1 = 9$

Verificare: $27 : 9 = 3$ și $27 + 9 = 36$.

De reținut

Câtul dintre două mărimi este sugerat de expresii de tipul: *de atâtea ori mai mult*, *de atâtea ori mai puțin*, *de ... ori mai mare*, *de ... ori mai mic*, *de ... ori mai în vârstă*, *de ... ori mai tânăr*, *de ... ori mai scump*, *de ... ori mai ieftin* ș.a., iar uneori este precizat direct.

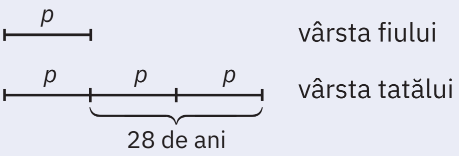
3.3. Metoda figurativă: se cunosc diferența și câtul a două numere

Situație problemă

Peste doi ani, tatăl va fi *de 3 ori mai în vârstă* decât fiul său. Acum doi ani, tatăl era *mai în vârstă cu 28 de ani* decât fiul. Ce vârstă are fiecare în prezent?

Observație. *Cheia* rezolvării problemelor de acest tip este sesizarea faptului că diferența de vârstă este aceeași în trecut, prezent, respectiv viitor.

Rezolvare:
Din primele două propoziții ale enunțului deducem reprezentarea:



Ea ne sugerează, prin *părți*, vârsta fiului, respectiv a tatălui, peste doi ani. Ca reprezentare grafică, diferența de vârstă este de două părți. Conform *cheii*, diferența de vârstă va fi peste doi ani tot de 28 de ani.

1 Cât reprezintă o parte?
28 ani : 2 = 14 ani

2 Ce vârstă vor avea peste doi ani?
14 ani · 1 = 14 ani, respectiv 14 ani · 3 = 42 ani

3 Ce vârstă au în prezent?
14 ani – 2 ani = 12 ani, respectiv 42 ani – 2 ani = 40 ani.

Răspuns: În prezent, fiul are 12 ani, iar tatăl are 40 de ani.

Verificare: 42 ani : 14 ani = 3 și 40 ani – 12 ani = 28 ani sau 38 ani – 10 ani = 28 ani.

De reținut

Diferența este sugerată, de regulă, prin expresia *cu ... mai mare* (*mai mică*), dar și prin *mai în vârstă cu ...*, *mai scump cu ...*, mai ieftin cu ... etc.

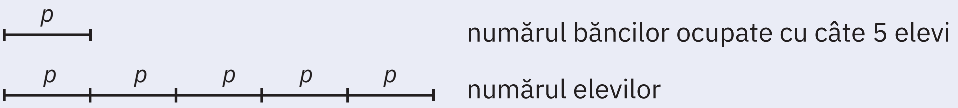
3.4. Metoda figurativă folosind simboluri

Mate practică

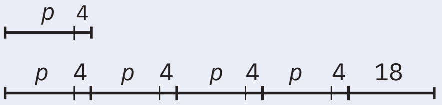
La un eveniment în sala de sport a școlii asistă mai mulți elevi. Dacă pe fiecare bancă se așază câte 4 elevi, atunci 18 nu mai au loc. Dacă se așază câte 5 elevi pe fiecare bancă, atunci rămân 4 bănci libere.
Câte bănci și câți elevi sunt în sală?

I Rezolvare cu ajutorul segmentelor de dreaptă

Deoarece, în final, pe o bancă se află 5 elevi, deducem că numărul elevilor este de 5 ori mai mare decât al băncilor ocupate. Vom avea următoarea reprezentare grafică:



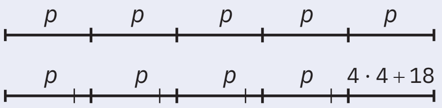
Numărul total al băncilor este cu 4 mai mare, deoarece 4 bănci sunt libere. Dacă toate băncile sunt ocupate cu câte 4 persoane, rămân fără loc 18 elevi. Deci numărul elevilor este cu 18 mai mare decât numărul obținut prin înmulțirea cu 4 a numărului total de bănci:



numărul total al băncilor

numărul elevilor

Numărul elevilor fiind același, rezultă că reprezentările de mai jos sunt echivalente:



Atunci, un segment de dreaptă (o parte) este echivalent cu numărul $4 \cdot 4 + 18 = 16 + 18 = 34$. Numărul băncilor este egal cu $34 + 4 = 38$, iar numărul elevilor este egal cu $34 \cdot 5 = 170$ sau $38 \cdot 4 + 18 = 170$.

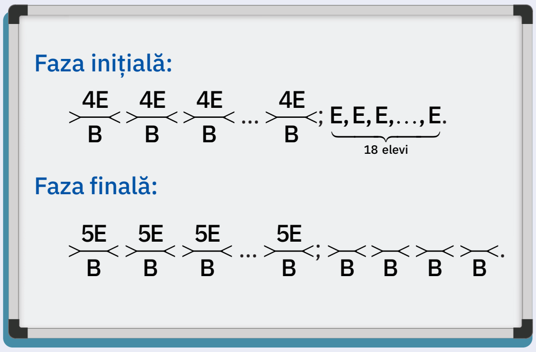
II Rezolvarea problemei folosind simboluri

- **Faza inițială**

Pe fiecare bancă, simbolizată cu B, figurăm câte 4 elevi, simbolizați cu 4E, și 18 elevi fără loc.

- **Faza finală**

Figurăm câte 5 elevi pe o bancă și 4 bănci libere. Pentru a trece de la prima fază la cea de-a doua, gândim *o fază intermediară* (imaginară). Dacă am fi în sală, ar trebui să procedăm astfel: eliberăm 4 bănci de la faza inițială și, astfel, alți 16 elevi se alătură celor 18 care stau în picioare:



Faza inițială:

$$>\!\frac{4E}{B}\!<\ >\!\frac{4E}{B}\!<\ >\!\frac{4E}{B}\!<\ \ldots\ >\!\frac{4E}{B}\!<;\ \underbrace{E, E, E, \ldots, E}_{18\text{ elevi}}.$$

Faza finală:

$$>\!\frac{5E}{B}\!<\ >\!\frac{5E}{B}\!<\ >\!\frac{5E}{B}\!<\ \ldots\ >\!\frac{5E}{B}\!<;\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<.$$

$$>\!\frac{4E}{B}\!<\ >\!\frac{4E}{B}\!<\ >\!\frac{4E}{B}\!<\ \ldots\ >\!\frac{4E}{B}\!<;\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<;\ \underbrace{E, E, E, \ldots, E}_{18+16=34}.$$

Cei 34 de elevi trebuie să se așeze în băncile în care deja se află câte 4 elevi. În fiecare bancă se mai așază doar câte un elev și atunci deducem că, în final, există 34 de bănci cu câte 5 elevi fiecare și 4 bănci libere.
Atunci numărul elevilor este egal cu $34 \cdot 5 = 170$, iar cel al băncilor este egal cu $34 + 4 = 38$.
Putem rezolva problema gândind și de la faza finală spre faza inițială!

- **Faza finală**

$$>\!\frac{5E}{B}\!<\ >\!\frac{5E}{B}\!<\ >\!\frac{5E}{B}\!<\ \ldots\ >\!\frac{5E}{B}\!<;\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<\ >\!\frac{\ }{B}\!<.$$

- **Faza intermediară**

Toți elevii sunt așezați, în final câte 5, iar inițial câte 4. Sunt necesari 16 elevi pentru a-i așeza câte 4 în cele 4 bănci libere și încă 18 elevi pentru a sta *în picioare*. Așadar, ar trebui ridicați de pe bănci elevi al căror număr este egal cu $16 + 18 = 34$.

De la fiecare aranjament de tipul $>\!\frac{5E}{B}\!<$ putem lua doar un singur elev pentru a forma un aranjament de tipul $>\!\frac{4E}{B}\!<$.

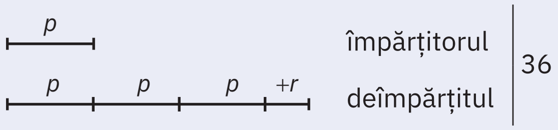
Deducem că există 34 de grupări de tipul $>\!\frac{5E}{B}\!<$ și atunci numărul băncilor este egal cu $34 + 4 = 38$, iar cel al elevilor este egal cu $34 \cdot 5 = 170$.

Verificare: $38 \cdot 4 + 18 = 152 + 18 = 170$ și $34 \cdot 5 = 170$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Împărțind un număr natural la un alt număr natural obținem câtul 3. Să se afle cele două numere, știind că suma lor este 36.

Rezolvare:
Fie numărul natural d deîmpărțitul și $î$, un număr natural nenul, împărțitorul. Din *teorema împărțirii cu rest*, $d = î \cdot c + r$, cu condiția $r < î$, unde c și r sunt numere naturale. Datele din enunț se transpun în următoarea reprezentare grafică:



Deoarece $4p + r = 36$, restul trebuie să fie un număr natural care se împarte exact la 4.

Cazul I. Dacă $r = 0$, atunci $î = 9$ și, ținând cont că îndeplinește condiția $r < î$, avem $d = 27$.

Cazul al II-lea. Dacă $r = 4$, atunci $î = 8$ și, ținând cont că îndeplinește condiția $r < î$, avem $d = 28$.

Cazul al III-lea. Dacă $r = 8$, atunci $î = 7$ nu îndeplinește condiția $r < î$ și, în consecință, nu avem soluție.

Cazul al IV-lea. Dacă $r > 8$, cu atât mai mult condiția $r < î$ nu este îndeplinită. Deci problema admite două soluții:
A $d = 27$; $î = 9$; $c = 3$ și $r = 0$; **B** $d = 28$; $î = 8$; $c = 3$ și $r = 4$.

Verificare: $27 = 9 \cdot 3 + 0$ cu $0 < 9$ și $27 + 9 = 36$, respectiv, $28 = 8 \cdot 3 + 4$ cu $4 < 8$ și $28 + 8 = 36$.

Ce observăm?
S-au combinat *suma*, *câtul* și *diferența*.
Am reluat problema de la cazul în care se cunosc *suma* și *câtul* a două numere, pentru a evidenția că uneori rezolvarea se modifică semnificativ, chiar dacă există doar o mică modificare în enunț.

2 „Foaie verde de arțari,
Câte ciori sunt și câți pari?
Dacă ele sunt răzlețe,
Ca s-avem un par și-o cioară,
Una *din cinstite fețe*
S-ar roti pe dinafară...
Iar dacă cumva ar vrea
Câte două-n par să stea,
Alt neajuns apare iar:
Va rămâne gol un par.”

(*GAZETA MATEMATICĂ*, 1912)

Rezolvare:
Simbolizăm cu P și C un par, respectiv o cioară.

Faza inițială: $\succ\frac{C}{P}\prec \quad \succ\frac{C}{P}\prec \quad \succ\frac{C}{P}\prec \quad \ldots \quad \succ\frac{C}{P}\prec$ 1C

Faza finală: $\succ\frac{CC}{P}\prec \quad \succ\frac{CC}{P}\prec \quad \succ\frac{CC}{P}\prec \quad \ldots \quad \succ\frac{CC}{P}\prec$ 1P

Faza intermediară
Ca să trecem de la faza inițială spre cea finală, ne imaginăm că *obligăm* o cioară așezată pe un par să-l *elibereze*.

Avem: $\underset{1P}{\succ\frac{C}{P}\prec} \quad \underset{2C}{\succ\frac{C}{P}\prec} \quad \succ\frac{C}{P}\prec \quad \ldots \quad \succ\frac{C}{P}\prec$

Obligăm cele 2 ciori răzlețe să se așeze pe câte un par, pe care deja era o cioară, pentru a avea configurația $\succ\frac{CC}{P}\prec$. În final vom avea doar 2 configurații de tipul $\succ\frac{CC}{P}\prec$, $\succ\frac{CC}{P}\prec$.

Răspuns: Erau 4 ciori și 3 pari.

Verificare: $3 \cdot 1 + 1 = 4$ și $(3 - 1) \cdot 2 = 4$.

Probleme propuse

1 Doi frați gemeni împreună cu părinții lor cântăresc 238 kg. Copiii au câte 40 kg, iar tatăl lor are cu 14 kg mai mult decât mama. Cât cântărește mama?
a 84 kg; **b** 76 kg; **c** 74 kg; **d** 72 kg.

2 Iulia brodează pe un șervețel, în două zile, 24 de flori. În prima zi, a brodat cu două flori mai puțin ca în a doua zi. Afirmația „În prima zi a brodat 13 flori” este:
a adevărată; **b** falsă.

3 Crina a citit o carte în trei zile, astfel: a doua zi a citit cu 5 pagini mai mult decât în prima zi, iar în a treia zi a citit un sfert din cele 100 de pagini ale cărții.
a Este posibil ca în primele două zile să fi citit 75 de pagini? Justificați răspunsul dat.
b Câte pagini a citit a doua zi?

4 Cu ocazia zilei de 8 Martie, Clara i-a dăruit mamei ei un buchet de trandafiri, Radu a pregătit pentru mama lui un buchet de frezii, iar Horia un buchet de lalele. Știind că erau 39 de flori și că lalele erau cu două mai multe decât freziile, ca și freziile față de trandafiri, determinați numărul florilor de fiecare fel.

5 Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 444 m. Lățimea este cu 12 m mai mică decât lungimea. Determinați perimetrul unui pătrat a cărui latură măsoară cât lungimea dreptunghiului.

6 O decoratoare de la muzeu înșiră 60 de pietre prețioase pe două coliere, astfel încât pe al doilea sunt de 4 ori mai multe pietre prețioase decât pe primul.
a Este posibil ca pe primul colier să fie 15 pietre prețioase? Justificați răspunsul dat.
b Câte pietre prețioase sunt pe al doilea colier?

7 Treizeci și șapte de copii au participat la un concurs de matematică. Numărul copiilor care au obținut punctaje mai mici decât Horia este de trei ori mai mare decât al celor care au obținut punctaje mai mari. Pe ce loc s-a clasat Horia?

8 Adrian are 3 ani, iar tatăl lui are 34 de ani. Peste câți ani Adrian va fi de două ori mai tânăr decât tatăl său?

9 Prin împărțirea unui număr natural la alt număr natural obținem câtul 5 și restul 14.
a Este posibil ca cele două numere să fie 74 și 12? Justificați răspunsul dat.
b Determinați cele două numere, știind că suma lor este egală cu 110.

10 Determinați două numere, știind că diferența lor este egală cu 78, iar dacă împărțim unul din ele la celălalt obținem câtul 5 și restul 14.

11 Un număr natural are cifra unităților egală cu 7. Dacă ștergem această cifră, numărul se micșorează cu 1 816. Determinați numărul inițial.
Indicație: Dacă mărim de 10 ori numărul obținut prin tăierea cifrei 7 și adunăm 7, obținem numărul inițial.

12 Un teren în formă de dreptunghi, cu lungimea de 3 ori mai mare decât lățimea, are perimetrul egal cu 1 200 de metri. Pe marginea terenului se plantează pomi la o distanță de 6 metri unul față de celălalt.
a Câți pomi s-au plantat pe una dintre lungimile terenului?
b Câți pomi s-au plantat în total?

13 Suma a două numere naturale este 206. Așezându-i unuia dintre ele cifra 1 în stânga, obținem un număr egal cu celălalt. Determinați cele două numere.

14 Dacă mărim primul factor al unui produs de 3 ori, iar pe al doilea îl micșorăm cu 750, produsul rămâne neschimbat. Determinați cei doi factori, știind că unul este de 5 ori mai mare decât celălalt.
Indicație: Dacă mărim primul factor de 3 ori și pe al doilea îl micșorăm cu 750, iar produsul rămâne neschimbat, deducem, că de fapt, al doilea factor s-a micșorat de 3 ori.

15 Pentru a câștiga mâna fetei de împărat, Făt-Frumos a primit următoarea poruncă:
„Să-mi aduci două zile la rând un buchet de trandafiri în care să fie cel puțin 17 trandafiri și cel mult 31. Să fie trandafiri galbeni de 6 ori mai puțini decât trandafiri albi și roșii la un loc, iar trandafiri roșii de două ori mai puțini decât cei albi. Să nu-mi aduci în ambele zile același număr de trandafiri!”
Făt-Frumos a îndeplinit porunca. Cum a procedat?

16 Dacă elevii unei clase ar fi așezați câte doi în bancă, ar mai fi necesare 3 bănci, iar dacă ar fi așezați câte 3 în bancă, ar rămâne 2 bănci libere. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă?

17 Pe o masă, la care stau 5 persoane, este așezată o fructieră, în care se află de 3 ori mai multe prune decât mere. După ce fiecare persoană ia câte un măr și o prună, rămân în fructieră de 5 ori mai multe prune decât mere.
Câte mere și câte prune erau inițial?

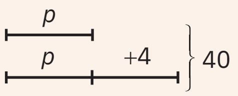
18 La aniversarea zilei sale de naștere, Horia și-a invitat jumătate dintre colegi. Atât invitaților, cât și sărbătoritului li s-au servit câte 3 fursecuri și 5 bomboane de fiecare, după care au rămas 12 fursecuri și 40 de bomboane. La început, pe platoul mare se aflau de două ori mai multe bomboane decât fursecuri.

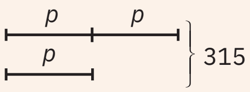
a Câți elevi erau în clasă?

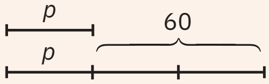
b Câte fursecuri și câte bomboane erau inițial pe platou?

Activitate pe grupe

Formați trei grupe de elevi. Fiecare grupă compune o problemă după una dintre reprezentările grafice:

a


b


c


După aceea, fiecare grupă rezolvă o problemă compusă de altă grupă.

Joc

Claudiu s-a întors de la pescuit tare posomorât.
„— De ce ești supărat? l-au întrebat ai lui.
— Cum să nu fiu, când știu câți pești am prins de data aceasta: 6 fără cap, 9 fără coadă și încă 8 pe jumătate!”
Câți pești a prins șugubățul pescar?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Un pescar a prins 20 de pești: păstrăv și clean. Numărul păstrăvilor era cu 4 mai mare decât cel al clenilor. Numărul păstrăvilor era egal cu:
A 4; **B** 6; **C** 8; **D** 12.

2 În curtea unei familii sunt 40 de păsări: găini și rațe. Câte rațe sunt, știind că numărul găinilor este de 4 ori mai mare decât al rațelor?
A 5; **B** 8; **C** 25; **D** 32.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Împărțind două numere naturale, obținem câtul 4 și restul 15.
a Este posibil ca cele două numere să fie 63 și 12? Justifică răspunsul dat.
b Află cele două numere, știind că diferența lor este egală cu 69.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 4: Metoda mersului invers

4.1. Exerciții sau probleme cu o singură necunoscută

Situație problemă

Determinați numărul natural x din egalitatea: $2022 : [20 \cdot (22 - x) + 871] = 2$.

Rezolvare:
Mai întâi considerăm că am avea de rezolvat un exercițiu în care trebuie să respectăm ordinea efectuării operațiilor. Dacă x ar fi un număr cunoscut, atunci operațiile ar trebui efectuate în ordinea indicată de cifrele din cerculețele plasate deasupra fiecăreia:

$$2022 \overset{4}{:} [20 \overset{2}{\cdot} (22 \overset{1}{-} x) \overset{3}{+} 871] = 2.$$

Aplicând *metoda mersului invers*, vom pune în evidență, succesiv, ultima operație:

$2022 \overset{4}{:} [20 \cdot (22 - x) + 871] = 2$.
Este o împărțire cu împărțitorul $20 \cdot (22 - x) + 871$ necunoscut. Îl aflăm împărțind deîmpărțitul la cât: $20 \cdot (22 - x) + 871 = 2022 : 2 = 1\,011$.

Punem în evidență a treia operație: $20 \cdot (22 - x) \overset{3}{+} 871 = 1\,011$
Este o adunare cu primul termen $20 \cdot (22 - x)$. Aplicăm regula de aflare a unui termen necunoscut și obținem: $20 \cdot (22 - x) = 1\,011 - 871 = 140$.

Punem în evidență a doua operație: $20 \overset{2}{\cdot} (22 - x) = 140$
Este o înmulțire cu al doilea factor egal cu $22 - x$. Îl aflăm împărțind produsul la primul factor și obținem: $22 - x = 140 : 20 = 7$.

Punem în evidență prima operație: $22 \overset{1}{-} x = 7$.
Este o scădere cu scăzătorul egal cu x. Aplicăm regula de aflare a acestuia și obținem $x = 22 - 7 = 15$.

Verificare: $2\,022 : [20 \cdot (22 - 15) + 871] = 2\,022 : (20 \cdot 7 + 871) =$
$= 2022 : (140 + 871) = 2\,022 : 1\,011 = 2$.

Observație. Există și exerciții la care mai întâi efectuăm operațiile posibile, după care aplicăm *metoda mersului invers*.

Exemplu

Determinați numărul natural x din $2\,022 : [20^{21} : 20^{20} \cdot (22 - x) + 871] = 8^5 : 4^7$.
Respectând ordinea efectuării operațiilor, se pot efectua $20^{21} : 20^{20} = 20$ și $8^5 : 4^7 = (2^3)^5 : (2^2)^7 = 2^{15} : 2^{14} = 2$, obținându-se exercițiul rezolvat anterior, cu *metoda mersului invers*.

Situație problemă

Ioana s-a gândit la un număr pe care l-a înmulțit cu 5. A mărit numărul obținut cu 5, a împărțit noul rezultat la 5 și a obținut 11. La ce număr s-a gândit Ioana?

Descompunem problema în trei probleme mai simple

1 Ioana a înmulțit numărul cu 5 și a obținut un produs pe care nu-l cunoaștem.

2 A mărit produsul cu 5 și a obținut o sumă pe care nu o știm.

3 A împărțit suma la 5 și a obținut câtul 11.

$$\text{Numărul Ioanei} \xrightarrow{\text{se înmulțește cu 5}} \text{produs} \xrightarrow{\text{se adună cu 5}} \text{sumă} \xrightarrow{\text{se împarte la 5}} \text{câtul} = 11$$

Rezolvăm problemele în ordinea inversă apariției lor

$$\text{Numărul Ioanei} \xleftarrow[\text{se împarte la 5}]{} \text{produs} \xleftarrow[\text{se scade 5}]{} \text{sumă} \xleftarrow[\text{se înmulțește cu 5}]{} \text{câtul} = 11$$

▶ **Rezolvăm a treia problemă:**
Deoarece este o operație de împărțire cu împărțitorul 5 și câtul 11, iar suma ține locul deîmpărțitului, deducem că suma este egală cu 5 · 11 = 55.

▶ **Rezolvăm a doua problemă**, ținând cont că suma este 55:
A mărit produsul cu 5 și a obținut 55.
Este o operație de adunare dintre un produs (primul termen) și numărul 5 (al doilea termen), obținându-se suma 55. Atunci produsul este egal cu 55 – 5 = 50.

▶ **Rezolvăm prima problemă**, ținând cont că produsul este 50:
Ioana a înmulțit numărul cu 5 și a obținut produsul 50.
Este o operație de înmulțire cu primul factor necunoscut, al doilea factor fiind egal cu 5.
Primul factor se află împărțind produsul la celălalt factor: 50 : 5 = 10.

Răspuns: Ioana s-a gândit la numărul 10.

Verificare: (10 · 5 + 5) : 5 = (50 + 5) : 5 = 55 : 5 = 11.

Mate practică

Ioana și Tudor, fratele ei, își petrec vacanța la bunici. Bunica îi anunță pe cei doi nepoți că le-a lăsat pe masă, în bucătărie, niște bomboane, pe care trebuie să le împartă frățește. Tudor vine primul și ia jumătate din bomboane. După un timp vine și Ioana și, neștiind că fratele și-a luat deja bomboanele, ia jumătate și se întoarce la joacă. Pe masă au rămas 3 bomboane.
Câte bomboane le-a lăsat bunica?

Descompunem problema în două probleme mai simple

1 Tudor vine primul și ia jumătate din bomboane. Atunci pe masă rămân jumătate din bomboane.
2 Ioana ia jumătate din bomboanele de pe masă. Mai rămân 3 bomboane.

Rezolvăm problemele în ordinea inversă apariției

▶ **Rezolvăm a doua problemă:**
Ioana ia jumătate din bomboanele de pe masă. Mai rămân 3 bomboane.
Este o operație de împărțire la 2, obținându-se câtul 3. Atunci Ioana a găsit pe masă 3 bomboane · 2 = 6 bomboane.

▶ **Rezolvăm prima problemă:**
Tudor ia jumătate din bomboane și pe masă rămân 6 bomboane.
Raționând analog sau observând că cele 6 bomboane rămase reprezintă „cealaltă jumătate” deducem că Tudor a găsit pe masă 12 bomboane.

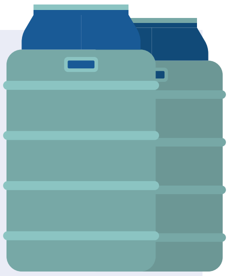
Răspuns: Bunica a lăsat pe masă 12 bomboane.

Verificare: 12 : 2 = 6 și 12 – 6 = 6; 6 : 2 = 3 și 6 – 3 = 3.

4.2. Exerciții sau probleme cu cel puțin două necunoscute

Mate practică

Avem două vase, **A** și **B**, umplute parțial cu apă. Turnăm a treia parte din **A** în **B**. Apoi turnăm a treia parte din **B** în **A**. După aceste operații constatăm că în fiecare vas se află 36 de litri de apă.
Câți litri de apă erau inițial în fiecare vas, știind că toate operațiile au fost posibile?



Rezolvare

Descompunem problema dată în trei probleme mai simple

1 Turnăm a treia parte din **A** în **B**. Atunci în **A** rămân două părți, iar în **B** se adaugă a treia parte din **A**.
2 Turnăm a treia parte din **B** în **A**. Atunci în **B** rămân două părți, iar în **A** se adaugă a treia parte din **B**.
3 În fiecare vas sunt 36 ℓ de apă (*problemă rezolvată*).

Rezolvăm problemele în ordinea inversă apariției
A treia problemă este rezolvată și folosim rezultatul obținut, 36 ℓ, în a doua problemă:
*Turnăm a treia parte din **B** în **A**. Atunci în **B** rămân două părți (adică 36 ℓ), iar în **A** se adaugă a treia parte din **B** și se obțin 36 ℓ.*
Deducem că 36 ℓ de apă reprezintă două părți din **B**, ceea ce înseamnă că 18 ℓ de apă reprezintă o parte. Atunci, înainte de a turna a treia parte din **B** în **A**, în **B** erau 18 ℓ · 3 = 54 ℓ.
Deoarece în **A** s-a turnat a treia parte din **B**, adică 18 ℓ, și s-au făcut 36 ℓ, atunci, înainte de această operație, în **A** erau 36 ℓ – 18 ℓ = 18 ℓ.

A doua problemă este rezolvată și folosim rezultatele obținute în prima problemă:
*Turnăm a treia parte din **A** în **B**. Atunci în **A** rămân două părți (adică 18 ℓ), iar în **B** se adaugă a treia parte din **A** și se obțin 54 ℓ.*
În **A**, cei 18 ℓ reprezintă două părți, ceea ce înseamnă că 9 ℓ de apă reprezintă o parte. Atunci, înainte de a turna a treia parte din **A** în B, în **A** erau 9 ℓ · 3 = 27 ℓ.
În B s-au obținut 54 l după ce s-a adăugat o parte din **A**, adică 18 ℓ.
Atunci în B erau 54 ℓ – 9 ℓ = 45 ℓ.

Răspuns: Inițial, în A erau 27 ℓ, iar în B, 45 ℓ de apă.

Verificare: 27 ℓ : 3 = 9 ℓ. În **A** rămân 27 ℓ – 9 ℓ = 18 ℓ, iar în **B** se află 45 ℓ + 9 ℓ = 54 ℓ. Din **B** se toarnă 54 ℓ : 3 = 18 ℓ. În **B** rămân 54 ℓ – 18 ℓ = 36 ℓ, iar în **A** se află 18 ℓ + 18 ℓ = 36 ℓ.

Probleme rezolvate: strategii și metode

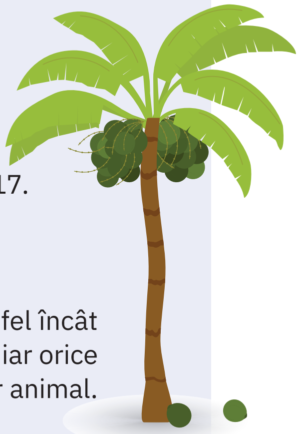
1 Mă gândesc la un număr, pe care îl micșorez cu 3 de trei ori. Împart rezultatul la 8 și, dacă măresc noul rezultat cu 5, obțin pătratul lui 16. La ce număr m-am gândit?

Rezolvare:
În primul rând, să observăm că a micșora un număr cu 3 de trei ori înseamnă să-l micșorăm cu 3 · 3 = 9, iar pătratul lui 16 este $16^2 = 256$.

Descompunem problema dată în trei probleme mai simple
1 Micșorez numărul la care m-am gândit cu 9 și obțin un rest al scăderii, necunoscut.
2 Împart restul la 8 și obțin un cât necunoscut.
3 Măresc câtul cu 5 și obțin 256.

Rezolvăm în ordinea inversă apariției
▶ **Rezolvăm a treia problemă:**
Măresc câtul cu 5 și obțin 256.
Este o operație de adunare, în care primul termen este *câtul*, al doilea este 5, iar suma este egală cu 256. Atunci câtul este egal cu 256 – 5 = 251.

▶ **Rezolvăm a doua problemă:**
Împart restul la 8 și obțin câtul 251.
Este o operație de împărțire și pentru a afla deîmpărțitul efectuăm 251· 8 = 2008.
Deci restul este 2008.



▶ **Rezolvăm prima problemă:**
Micșorez numărul la care m-am gândit cu 9 și obțin restul 2008.
Este o operație de scădere în care lipsește descăzutul, pe care îl aflăm calculând 2 008 + 9 = 2 017.

Răspuns: Numărul la care m-am gândit este 2017.

Verificare: $(2\,017 - 3 - 3 - 3) : 8 + 5 = 2\,008 : 8 + 5 = 251 + 5 = 256 = 16^2$.

2 Pe o insulă sunt numai arici, șerpi și vulpi. Fiecare animal mănâncă o singură dată pe zi, astfel încât orice arici mănâncă la micul dejun câte un șarpe, orice vulpe mănâncă la prânz câte un arici, iar orice șarpe mănâncă la cină câte o vulpe. La sfârșitul zilei de miercuri, pe insulă a rămas un singur animal. Câte animale existau pe insulă luni, înainte de micul dejun?

Rezolvare:
Deoarece, miercuri, la cină, orice șarpe mănâncă o vulpe, deducem că singurul animal rămas este un șarpe. După prânz mai erau două animale: șarpele și vulpea, pe care șarpele a mâncat-o seara.
După micul dejun erau 3 animale: șarpele, vulpea și un arici, pe care l-a mâncat vulpea la prânz. Marți seara, după cină, erau 4 animale: o vulpe, un arici și 2 șerpi (unul care a rămas până la sfârșit și unul pe care l-a mâncat ariciul dimineață).
Continuăm raționamentul sintetizând datele într-un tabel, pe care îl completăm folosind *metoda mersului invers*: după cină până înainte de micul dejun (pe coloane de sus în jos), pentru fiecare zi de miercuri până luni, folosind *metoda mersului invers*.

	Miercuri	**Marți**	**Luni**
După cină	1 S	2 S + 1 V + 1 A	6 S + 3 V + 4 A
După prânz	1 S + 1 V	2 S + 3 V + 1 A	6 S + 9 V + 4 A
După micul dejun	1 S + 1 V + 1 A	2 S + 3 V + 4 A	6 S + 9 V + 13 A
Înainte de micul dejun	2 S + 1 V + 1 A	6 S + 3 V + 4 A	19 S + 9 V + 13 A

Probleme propuse

1 Determinând numărul natural x din egalitatea $(2\,100 - x) \cdot 5 = 390$, obținem că x este egal cu:
a 78; **b** 2 022; **c** 2 178; **d** 5 850.

2 Patricia afirmă că numărul natural x trebuie înlocuit cu 2 862 pentru a obține egalitatea $(x + 54) : 54 = 54$. Afirmația Patriciei este:
a adevărată; **b** falsă.

3 Calculează $2022 - x$, știind că $x \xrightarrow{\cdot 24} \bigcirc \xrightarrow{+18} \bigcirc \xrightarrow{:15} = 102$

4 Pentru Statuia Libertății, ridicată la Paris, în anul 1884, s-au folosit 91 de tone de folii de cupru. Dăruită peste doi ani americanilor, a fost descompusă în n bucăți. Determinați n, știind că $9\,100 : (2 \cdot n - 570) + 1\,814 = 1\,884$.

5 Află numărul natural x, în fiecare caz, știind că:
a $[920 : (30 - x) + 222] \cdot 6 = 2\,022$; **b** $6^4 : 6^2 + 6 \cdot (66 - x : 6) = 6^3$.

6 Mărind un număr cu 5 și împărțind rezultatul la 6, obținem 11. Stabiliți dacă micșorând numărul inițial cu 6 și împărțindu-l la 5 obținem același rezultat, 11.

7 Un număr se mărește cu 4, iar rezultatul se mărește de 4 ori. Noul rezultat micșorat cu 4 se împarte la 4 și se obține 4. Determinați numărul.

8 Mă gândesc la un număr. După ce îl dublez de două ori, îl micșorez cu 5 de cinci ori. Rezultatul îl măresc de 18 ori și obțin numărul 3438. La ce număr m-am gândit?

9 Dintre exercițiile de mai jos:
a $71 - (3 \cdot x + 5) : 6 = 10$; **b** $[71 - (3 \cdot x + 5)] : 6 = 10$,
alege-l pe cel care transpune problema:
Mărim un număr, notat cu x, de 3 ori și la rezultat se adaugă 5. Rezultatul obținut se scade din 71. Micșorăm noul rezultat de 6 ori și obținem 10.

10 La sfârșitul fiecărei săptămâni, Ioana iese în mijlocul naturii lângă un lac cu nuferi. „În a doua săptămână erau de două ori mai mulți nuferi și încă 2. În a treia săptămână am numărat de trei ori mai mulți nuferi, minus 3, față de săptămâna precedentă. Dacă-n a treia săptămână am numărat 57 de nuferi, câți nuferi au fost la sfârșitul primei săptămâni?”

11 Doi colegi ce îndrăgesc matematica vorbeau între ei:
— *Când e data ta de naștere?*
— *Îți spun: dublez data zilei de naștere și măresc numărul obținut cu pătratul lui 8. Măresc rezultatul obținut cu numărul ce indică ordinea lunii între cele 12 luni ale anului și obțin rezultatul 443. Poți să-mi spui care este ziua și luna când aniversez ziua mea de naștere?*
Colegul a răspuns corect. Aflați ce răspuns i-a dat.

12 Adi și Ana practică următorul joc cu bile: Adi ia jumătate din numărul bilelor, iar Ana ia jumătate din rest și mai rămân 16 bile. Continuă să ia bile pe rând până rămâne o singură bilă. Cine ia ultima bilă câștigă. Să se afle câte bile erau inițial și cine câștigă jocul.

13 Elevii unei școli au stabilit traseul unei excursii cu 3 obiective turistice. Până la primul obiectiv autocarul a parcurs jumătate din lungimea traseului, până la al doilea a parcurs o treime din rest, iar până la al treilea a parcurs restul de 80 km.
a Este posibil ca distanța dintre primele două obiective să fie egală cu 40 km? Justificați răspunsul dat.
b Determinați lungimea traseului turistic.

14 În săptămâna *Școala Altfel*, elevii unei școli au pornit într-o drumeție până la Poiana Stănișoarei. După ce au parcurs jumătate din distanță, au luat o pauză. Alex a calculat că, după ce parcurg trei sferturi din restul traseului, mai au doar 1 km până la destinație.
a Este posibil ca distanța dintre școală și Poiana Stănișoarei să fie egală cu 16 km? Justificați răspunsul dat.
b Ce lungime are traseul de la școală până la Poiana Stănișoarei?

15 Patruzeci și opt de mere se împart în două grămezi. Se iau din prima câte sunt în a doua și se adaugă la a doua. Se iau din a doua câte au rămas în prima și se adaugă la prima. Se iau din prima câte au rămas în a doua și se adaugă la a doua. În urma acestor operații, grămezile au același număr de mere. Câte mere au fost la început în fiecare grămadă?

Joc

Cere colegului să scrie un număr de două cifre, cu ambele cifre mai mici decât 5, fără ca tu să vezi acest număr. După aceea, cere-i să mărească prima cifră de 5 ori și la rezultat să adune a doua cifră. Roagă-l să înmulțească suma cu 4 și să comunice rezultatul obținut. Folosind rezultatul comunicat, poți să-l uimești ghicind numărul scris inițial. Cum procedezi?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Numărul natural x pentru care $(x + 512) \cdot 7 = 4\,200$ este egal cu:
A 78; **B** 88; **C** 98; **D** 600.

2 Mă gândesc la un număr, pe care-l măresc de 5 ori, apoi îl măresc cu 4. Împart numărul 2 018 la rezultatul anterior și obțin câtul 2 și restul zero. La ce număr m-am gândit?
A 5 016; **B** 1 009; **C** 1 005; **D** 201.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Vlad și Ștefan sunt la joacă. Bunica îi anunță pe cei doi nepoți că le-a lăsat pe masă, în bucătărie, niște nuci. Vlad vine primul și ia jumătate din nuci. După un timp vine și Ștefan și, neștiind că fratele și-a luat deja nucile, ia jumătate și se întoarce la joacă. Pe masă au rămas 6 nuci.
a Este posibil ca bunica să fi lăsat pe masă 20 de nuci? Justifică răspunsul dat.
b Află câte nuci a luat fiecare nepot.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 5: Metoda falsei ipoteze

Algoritmul de rezolvare prin această metodă începe cu *ipoteza* (presupunerea) că sunt *toate de același fel*. Se continuă cu un raționament care se finalizează cu o comparație cu una dintre datele problemei, în urma căruia se stabilește *cu cât* sau, mai rar, *de câte ori* este nepotrivită ipoteza făcută. Această nepotrivire dintre presupunere și enunț explică denumirea de *metodă a falsei ipoteze*.

Mate practică

În 10 bidoane, unele cu capacitatea de 3 litri, iar altele cu capacitatea de 10 litri, erau 72 de litri de apă. Câte bidoane erau de fiecare fel?

Rezolvare:
Presupunem că toate bidoanele aveau capacitatea de 3 litri. Atunci în cele 10 bidoane am avea $3\ \ell \cdot 10 = 30\ \ell$. Rezultă că ipoteza este falsă, deoarece ne conduce la o nepotrivire cu $72\ \ell - 30\ \ell = 42\ \ell$. Deci sunt și vase de 10 litri.
Pentru a afla cu cât trebuie să modificăm ipoteza făcută, observăm că la 3 litri trebuie să adăugăm 7 litri pentru a obține 10 litri. Diferența de 42 de litri se compensează printr-un număr de înlocuiri egal cu $42 : 7 = 6$.

Răspuns: Erau 6 bidoane a 10 litri și 4 bidoane a 3 litri fiecare.

Verificare: În cele 10 bidoane erau $3\ \ell \cdot 4 + 10\ \ell \cdot 6 = 12\ \ell + 60\ \ell = 72\ \ell$.

Ce observăm?
Ipoteza făcută în această problemă corespunde următorului caz practic: mai întâi turnăm în fiecare dintre cele 10 bidoane câte 3 litri, apoi cantitatea rămasă o împărțim, în mod egal, în vasele de 10 litri. Cum mai dispunem de încă 42 de litri, sunt 6 bidoane în care mai pot fi puși câte 7 litri.

Observații

1. Problema se poate rezolva și în ipoteza că toate bidoanele au capacitatea de $10\ \ell$ și atunci am fi avut $10\ \ell \cdot 10 = 100\ \ell$. Rezultă că ipoteza e falsă, deoarece duce la o nepotrivire cu $100\ \ell - 72\ \ell = 28\ \ell$. *Vom înlocui mintal* bidoanele de 10 l cu bidoane de 3 l. Diferența la o *înlocuire* este de $10\ \ell - 3\ \ell = 7\ \ell$. Deoarece $28\ \ell : 7\ \ell = 4$, deducem că sunt necesare 4 *înlocuiri*. Atunci sunt 4 bidoane de 3 litri fiecare și, respectiv, 6 bidoane de 10 litri.
2. Un raționament analog putem face pornind de la o ipoteză oarecare.
Presupunem că erau 7 bidoane de 3 litri și 3 bidoane de 10 litri. Capacitatea acestor bidoane este egală cu $3\ \ell \cdot 7 + 10\ \ell \cdot 3 = 51\ \ell$. Deducem că ipoteza este falsă, deoarece duce la o nepotrivire cu $72\ \ell - 51\ \ell = 21\ \ell$. Cum $51\ \ell < 72\ \ell$, rezultă că unele bidoane de 3 litri trebuie *înlocuite* cu bidoane de 10 litri. Diferența la o *înlocuire* fiind de 7 litri, trebuie făcut un număr de înlocuiri egal cu $21 : 7 = 3$. Atunci, numărul bidoanelor de 3 litri este egal cu $7 - 3 = 4$, iar numărul bidoanelor de 10 litri este egal cu $3 + 3 = 6$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1. La un concurs de matematică fiecare elev a avut de rezolvat 7 probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect elevul primește 4 puncte, iar pentru fiecare problemă greșit rezolvată i se scade un punct. Determinați câte probleme a rezolvat corect Elena, știind că obținut 18 puncte.

Rezolvare:
Presupunem că Elena a rezolvat toate problemele corect. Atunci ar fi trebuit să obțină 4 puncte $\cdot\ 7 = 28$ de puncte. Deducem că ipoteza făcută este greșită cu 28 de puncte – 18 puncte = 10 puncte, ceea ce înseamnă că a avut și rezolvări greșite. Subtilitatea acestei probleme constă în faptul că pentru o problemă greșit rezolvată elevul pierde 5 puncte: pe lângă un punct penalizare, pierde și pe cele 4 puncte pe care le-ar fi primit în cazul unei rezolvări corecte. Împărțind pe 10 la 5, deducem că Elena a rezolvat greșit două probleme și corect, restul de 5 probleme.

Verificare: 4 puncte $\cdot\ 5 - 1$ punct $\cdot\ 2 = 20$ puncte – 2 puncte = 18 puncte.

2 La un eveniment, în sala de sport a școlii, asistă mai mulți elevi. Dacă pe fiecare bancă se așază câte 4 elevi, atunci 18 nu mai au loc. Dacă se așază câte 5 elevi pe fiecare bancă, atunci rămân 4 bănci libere. Câte bănci și câți elevi sunt în sală?

Rezolvare:
Deoarece rămân 4 bănci libere, ipoteza pe care o facem, privind numărul băncilor existente în sală, trebuie să depășească acest număr.
Presupunem că sunt 10 bănci. În cazul în care pe fiecare bancă se așază câte 4 elevi, numărul elevilor care stau pe bănci este egal cu $4 \cdot 10 = 40$ și, adăugând pe cei 18 elevi fără loc, deducem că în sală sunt 58 de elevi. În cazul în care rămân 4 bănci libere, numărul elevilor ce ocupă cele 10 de bănci – 6 bănci = 4 bănci este egal cu $5 \cdot 4 = 20$. Deoarece există o nepotrivire cu 58 de elevi – 20 de elevi = 28 de elevi, rezultă că ipoteza făcută este falsă. Mărind numărul băncilor cu o unitate, numărul elevilor, în prima situație, se mărește cu 4 (deoarece stăteau 4 pe o bancă), iar în a doua situație se mărește cu 5 (deoarece stăteau 5 pe o bancă). Deci nepotrivirea scade cu un elev. Ținând cont că trebuie să dispară o nepotrivire de 28 de elevi, numărul presupus al băncilor trebuie să crească cu $28 : 1 = 28$. Atunci numărul inițial al băncilor este egal cu $10 + 28 = 38$, iar numărul elevilor din sală este egal cu $4 \cdot 38 + 18 = 170$.

Verificare: $38 \cdot 4 + 18 = 152 + 18 = 170$ și $34 \cdot 5 = 170$.

Observații
Marele matematician german Carl Friederich Gauss a afirmat că „Matematica este regina științelor, iar Aritmetica este regina matematicii!”
În sprijinul acestei afirmații am reluat problema de la 3.5. Metoda figurativă *folosind simboluri* și am rezolvat-o, folosind metoda falsei ipoteze.

Probleme propuse

1 Un fermier spune: „Am găini și iepuri. Când număr capetele găsesc 100. Când număr picioarele găsesc 240.” Câte găini are fermierul?
a 20; **b** 50; **c** 60; **d** 80.

2 În blocul în care locuiește Clara sunt 18 apartamente cu două sau trei camere fiecare, în total 42 de camere. Afirmația Clarei: „Sunt 12 apartamente cu două camere fiecare.” este:
a adevărată; **b** falsă.

3 Olivia a cumpărat de la piață mere și pere, în total 8 kg, și a plătit 42 de lei. Prețul unui kilogram de mere a fost 4 lei, iar al unui kilogram de pere a fost 6 lei. Câte kilograme de pere a cumpărat? (Rezolvați în două moduri: prin metoda falsei ipoteze și prin metoda comparației.)

4 Într-o poieniță se jucau veverițe și vrăbiuțe: 11 căpșoare și 30 de piciorușe.
a Este posibil să fi fost 6 veverițe? Justificați răspunsul dat.
b Câte vrăbiuțe erau în poieniță?

5 Ina are 65 de lei în bancnote de 5 lei sau 10 lei, în total 9 bancnote. Determinați numărul bancnotelor de 5 lei.

6 Pentru a culege nectar, 60 de albine au vizitat, într-o singură expediție, unele 20 de flori, iar altele 25 de flori. Știind că au vizitat împreună 1 310 flori, determinați câte albine au vizitat câte 25 de flori.

7 Tatăl lui Horia a cumpărat 18 acțiuni: unele de la o fabrică textilă, cu 25 de euro bucata, și altele de la o fabrică de pâine, cu 12 euro bucata, plătind în total 346 de euro. Câte acțiuni a cumpărat de fiecare fel?

8 „Atunci cocoșul i-a zis:
— Stăpâne, așterne un țol aici în mijlocul ogrăzii.
Moșneagul, iute ca un prâsnel, așterne țolul. Cocoșul atunci se așază pe țol, scutură puternic din aripi și îndată se umplu ograda și livada moșneagului, pe lângă paseri și de cirezi de vite.”
(Ion Creangă — *Punguța cu doi bani*)
Câte păsări și câte vite a adus cocoșul, știind că aveau 320 de capete și 880 de picioare?

9 În 7 vase sunt 89 ℓ de apă: unele de 3 ℓ fiecare, iar altele de 20 ℓ. Câte vase a 3 ℓ fiecare sunt?

10 La fotbal, pentru alcătuirea clasamentului, se acordă 3 puncte pentru victorie, un punct pentru meci egal și zero puncte pentru înfrângere. Echipa favorită a lui Marius a obținut 72 de puncte, după 30 de meciuri în care a fost înfrântă de 4 ori. Câte victorii a obținut echipa respectivă?

11 O gospodină ducea într-un coș la târg, spre vânzare, rațe și iepuri de casă: 5 capete și 14 picioare.
a Câte rațe și câți iepuri erau în coș?
b În total, câte picioare mergeau spre târg?

12 La un concurs de matematică, fiecare elev a avut de rezolvat 6 probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect elevul primește 10 puncte, iar pentru fiecare problemă greșit rezolvată i se scad 2 puncte. Determinați câte probleme a rezolvat corect elevul situat pe locul I, dacă el a obținut 48 de puncte.

13 La un concurs de tir cu arcul un concurent primea 10 puncte, dacă săgeata era trasă în interiorul cercului, și era penalizat cu 3 puncte, dacă țintea în afara cercului. Florin a totalizat 54 de puncte.
Câte din cele 8 săgeți trimise și-au atins ținta?

14 Un melc urcă spre vârful unui copac înalt de 16 metri. În fiecare zi însorită urcă 3 metri, iar în fiecare zi ploioasă *alunecă* înapoi un metru. După 8 zile ajunge în vârf.
a Câte zile au fost însorite?
b Cum a fost a opta zi?

15 Un scamator isteț promitea între două reprezentații la circ:
— *Voi plăti* 1 000 *de euro celui care va reuși să-mi dea* 100 *de euro în* 27 *de monede, dar să fie numai monede de* 2 *euro și respectiv, de* 5 *euro! Cine dorește?*
Se făcea liniște. Publicul socotea, dar nimeni nu reușea. De ce?

16 Cinci kilograme de roșii și 2 kg de castraveți costă 36 de lei. Știind că 1 kg de roșii costă tot atât cât două kilograme de castraveți, determinați prețul unui kilogram de roșii.
(Rezolvați în 3 moduri: prin *metoda falsei ipoteze*, prin *metoda comparației* și prin *metoda figurativă*.)

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 În ograda bunicilor sunt găini și iepuri: 20 de capete și 44 de picioare. Numărul găinilor este egal cu:
A 2; **B** 4; **C** 16; **D** 18.

2 Se toarnă 90 de litri de apă în 13 recipiente: unele cu capacitatea de 2 litri, iar altele cu capacitatea de 10 litri. Numărul recipientelor de 10 litri este egal cu:
A 4; **B** 5; **C** 8; **D** 10.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 La un concurs de matematică, elevii au avut de rezolvat 7 probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect s-au acordat 4 puncte, iar pentru fiecare problemă greșit rezolvată s-a scăzut un punct. Simona a obținut 23 de puncte.
a Este posibil ca Simona să fi rezolvat greșit 3 probleme? Justifică răspunsul dat.
b Află câte probleme a rezolvat corect Simona.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Metoda reducerii la unitate • Metoda comparației • Metoda figurativă • Metoda mersului invers • Metoda falsei ipoteze

1 Numărul natural n din egalitatea $44 + n : 24 = 50$ este:
a 144 **b** 120 **c** 6 **d** 8

3 Dacă 4 cărți costă 60 de lei, atunci 6 cărți de același fel costă:
a 40 lei **b** 20 lei **c** 90 lei **d** 80 lei

5 Trei jocuri puzzle și 4 rummy costă 250 de lei. Șase jocuri puzzle și 7 rummy costă 460 de lei. Un rummy costă:
a 40 lei **b** 20 lei **c** 100 lei **d** 80 lei

7 Într-o poieniță se jucau veverițe și vrăbiuțe, în total 15 capete și 50 de picioare. Numărul veverițelor este:
a 7 **b** 10 **c** 8 **d** 9

9 Împărțind un număr natural la un alt număr natural, obținem câtul 3 și restul 7. Să se afle cele două numere, știind că suma lor este egală cu 631.

11 În tabelul de mai jos este prezentată oferta unui aprozar pentru câteva produse.

Produs	**Prețul/1 kg**
Roșii	5 lei
Castraveți	3 lei
Fasole lată	12 lei
Căpșuni	6 lei

Calculează suma de bani necesară achiziționării a 3 kg de roșii, 2 kg de castraveți, 2 kg de fasole lată și 3 kg de căpșuni.

2 Numărul natural n din egalitatea $27 - (n \cdot 24 + 1) : 7 = 20$ este:
a 5 **b** 8 **c** 6 **d** 2

4 Dacă 4 robinete umplu un bazin în 60 de minute, atunci 6 robinete de același tip umplu bazinul în:
a 40 min. **b** 20 min.
c 90 min. **d** 80 min.

6 Trei covrigi și 4 pâini cântăresc 2 300 g, iar 7 covrigi și 7 pâini cântăresc 4 200 g. Un covrig cântărește:
a 40 g **b** 20 g **c** 100 g **d** 80 g

8 În 12 vase avem 71 de litri de apă. Unele vase au capacitatea de 3 litri, iar altele de 10 litri. Numărul vaselor de 3 litri este egal cu:
a 7 **b** 10 **c** 8 **d** 9

10 Într-o clasă sunt 30 de elevi. Dacă lipsesc doi băieți, atunci numărul fetelor devine de trei ori mai mare ca al băieților. Câți băieți și câte fete erau în clasă?

12 Determină numerele A, B, și C din tabelul de mai jos.

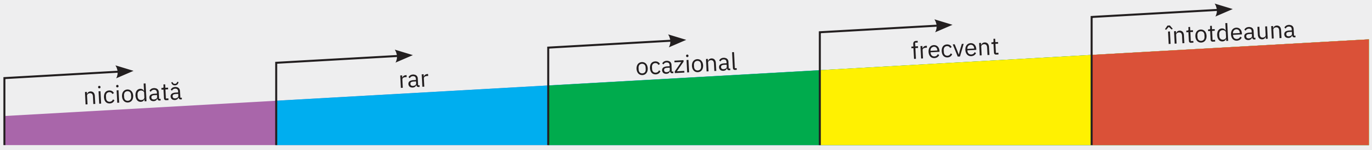
A	**B**
$94 + x = 100$ și $y : 17 = 6$	$A = 43 + 3x + 3y$
$56 - 28 : (x + 2) = 54$ și $(38 + y) \cdot 3 = 168$	$B = [152 - 5(x + y)]$
$28 \cdot (x + 235) = 6\,860$ și $y - 37 = 13$	$C = 300 - (5y - 3x)$

13 Bunica îi anunță pe cei doi nepoți, aflați la fotbal, că le-a lăsat pe masă niște fursecuri pe care trebuie să le împartă frățește. Radu vine primul și ia jumătate. După un timp vine Horia și, neștiind că fratele și-a luat deja porția, ia jumătate și se întoarce la joc. Pe masă au rămas 4 fursecuri. Câte fursecuri le-a lăsat bunica?

14 Dacă persoanele ce se aflau, în acel moment, în parcul „Mircea cel Bătrân”, s-ar fi așezat câte 3 pe o bancă, atunci ar fi rămas 22 de persoane în picioare, iar dacă s-ar fi așezat câte 5 pe o bancă, ar fi rămas 6 bănci libere. Câte bănci și câte persoane erau în acel moment în parcul „Mircea cel Bătrân”?

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U3

Divizibilitatea numerelor naturale

Lecția 1: Divizibilitatea numerelor naturale

1.1. Divizor. Multiplu

Mate practică

Ioana vrea să planteze 120 de fire de flori în grădină. Horia, ca un bun prieten, o ajută la proiectarea rondurilor.

Ioana: *Horia, vreau să pun același număr de flori în fiecare rond. Și să am cel puțin patru ronduri.*

Horia: *Sunt mai multe posibilități, Ioana. Ai putea să îți organizezi grădina în 4, 5 sau 6 ronduri.*
Poți face 4 ronduri, cu 30 de flori fiecare, deoarece $120 = 4 \cdot 30$. *La fel, poți face 5 ronduri cu câte 24 de flori sau 6 ronduri cu câte 20 de flori, pentru că* $120 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20$.

Ioana: *Horia, sunt și alte variante. Asta pentru că 120 poate fi scris ca produs de două numere naturale și astfel:* $120 = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12$.

Ce observăm?

Soluțiile problemei sunt numerele naturale n pentru care 120 poate fi scris ca produsul dintre n și un alt număr natural. Altfel spus, numerele la care 120 se împarte exact (cu rest 0).

De reținut

Un număr natural a este divizibil cu numărul natural b dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$.

Numărul a se numește *multiplu* al numărului b, iar b se numește *divizor* al lui a.

Se folosesc scrierile matematice:

$a \,\vdots\, b$ – citim „a este divizibil cu b” sau $b \mid a$ – citim „b divide pe a”.

Exemple

14 este divizibil cu 7, deoarece există numărul natural 2, astfel încât $14 = 7 \cdot 2$.

Scriem: $14 \,\vdots\, 7$

multiplu ← 14; 7 → divizor

13 divide pe 143, deoarece există numărul natural 11, astfel încât $143 = 13 \cdot 11$.

Scriem: $13 \mid 143$

divizor ← 13; 143 → multiplu

Observații

Numărul natural a este divizibil cu numărul natural nenul b dacă restul împărțirii lui a la b este 0.

Exemple:
1 68 este divizibil cu 4, deoarece $68 : 4 = 17$, rest 0 (68 se împarte exact la 4).
2 59 nu este divizibil cu 7, deoarece $59 : 7 = 8$, rest 3 (59 nu se împarte exact la 7).
3 5 divide pe 100, deoarece $100 : 5 = 20$, rest 0.
4 11 nu divide pe 79, deoarece $79 : 11 = 7$, rest 2.

1.2. Divizori comuni

Situație problemă

Pentru proiectul la geografie, Ioana trebuie să confecționeze cel puțin trei planșe, folosind 40 de fotografii și 24 de decupaje din reviste. Ea ar vrea ca fiecare planșă să aibă aceeași combinație de fotografii și decupaje, utilizând toate materialele. Câte planșe poate realiza?

Ce observăm?

Numărul de planșe trebuie să se cuprindă exact atât în numărul de fotografii, cât și în numărul de decupaje, deci divide atât pe 40, cât și pe 24. Cu alte cuvinte, numărul de planșe este un *divizor comun* al numerelor 40 și 24.

Răspuns:

Divizorii lui 40 sunt: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 și 40, iar divizorii lui 24 sunt:1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 și 24.
Divizorii comuni sunt 1, 2, 4 și 8, și, întrucât Ioana are nevoie de cel puțin trei planșe, ar putea face fie 4, fie 8 planșe.

De reținut

Numărul natural d este un divizor comun a două sau mai multe numere naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dacă d divide fiecare dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Exemple:

1 4 este divizor comun al numerelor 8 și 20, deoarece $4 \mid 8$ și $4 \mid 20$ (avem $8 = 4 \cdot 2$ și $20 = 4 \cdot 5$).
2 9 este divizor comun al numerelor 27, 36 și 108, deoarece $27 = 9 \cdot 3$, $36 = 9 \cdot 4$ și $108 = 9 \cdot 12$.
3 7 este un divizor comun al numerelor 0, 7 și 1 001, deoarece $0 = 7 \cdot 0$, $7 = 7 \cdot 1$ și $1\,001 = 7 \cdot 143$.
4 3 nu este divizor comun al numerelor 9 și 14, deoarece 3 nu divide 14 (avem $14 : 3 = 4$, rest 2).

1.3. Multipli comuni

Mate practică

Horia își organizează cele aproape 100 de DVD-uri cu filme în cutii egale ca dimensiune. Observă că, fără a lăsa vreun disc pe dinafară, acestea ar încăpea în cutii de câte 8 DVD-uri, sau în cutii mai mari, de câte 12 DVD-uri. Câte DVD-uri are Horia?

Ce observăm?

Numărul de DVD-uri se împarte exact atât la 8, cât și la 12, adică este atât multiplu al lui 8, cât și multiplu de 12. El este un *multiplu comun* al numerelor 8 și 12.

Răspuns:

Multiplii lui 8 mai mici decât 100 sunt: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96.
Multiplii lui 12 mai mici decât 100 sunt: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 și 96.
Multiplii comuni sunt 24, 48, 72 și 96 și, deoarece cunoaștem o estimare a numărului de DVD-uri – aproape 100, putem afirma că Horia are 96 de DVD-uri.

De reținut

Numărul natural m este un multiplu comun a două sau mai multe numere naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dacă m este divizibil cu fiecare dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Exemple:

1 48 este un multiplu comun al numerelor 8 și 6, deoarece $48 \vdots 8$ și $48 \vdots 6$ (avem $48 = 8 \cdot 6$).
2 120 este un multiplu comun al numerelor 8, 12 și 30, deoarece $120 = 8 \cdot 15 = 12 \cdot 10 = 30 \cdot 4$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Eva candidează pentru Consiliul Elevilor. Echipa ei, formată din Horia și Ioana, vrea să distribuie materialele de campanie: 60 de fluturași și 48 de insigne, la cel puțin 4 clase din școală.
  a La câte clase se pot împărți materialele, dacă fiecare clasă primește un set identic?
  b Care este cel mai mare număr de clase la care se pot distribui materialele și câte obiecte din fiecare fel va conține un set în acest caz?

Rezolvare:

a Numărul de clase este un divizor comun al numerelor 60 și 48.
Divizorii lui 60 sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 și 60.
Divizorii lui 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 și 48.
Divizorii comuni sunt 1, 2, 3, 4, 6 și 12, deci, pentru a respecta condiția ca distribuirea să se facă la minim 4 clase, putem împărți materialele la 4 clase, la 6 clase sau la 12 clase.

b Dacă materialele se distribuie la 12 clase (numărul maxim posibil), fiecărei clase îi va reveni un set compus din 5 fluturași și 4 insigne, deoarece $60 : 12 = 5$ și $48 : 12 = 4$.

2 Pe un circuit cu mașini teleghidate, mașina roșie face un tur complet în 15 secunde, iar mașina albastră în 18 secunde. Știind că pleacă în același timp, de câte ori se vor afla cele două mașini în același moment la linia de start de-a lungul unei curse care durează 7 minute?

Rezolvare:

Pentru fiecare mașină, timpul scurs după un număr complet de tururi este multiplu de timpul necesar parcurgerii unui tur.

Multiplii lui 15 sunt: 15, 30, 45, 60, 75, **90**, 105, 120,...
Multiplii lui 18 sunt: 18, 36, 54, 72, **90**, 108, 126,...
Ca urmare, cele două mașini se află din nou una lângă alta la start după 90 de secunde (cel mai mic dintre multiplii comuni ai numerelor 15 și 18). Același lucru se va întâmpla și după $2 \cdot 90 = 180$ de secunde, și după $3 \cdot 90 = 270$ de secunde și așa mai departe.
Întrucât 7 minute au $7 \cdot 60 = 420$ de secunde și $420 : 90 = 4$, rest 60, rezultă că cele două mașini se vor întâlni la linia de start de 4 ori (după 90, 180, 270 și 360 de secunde).

3 Determinați numerele naturale n care verifică simultan relațiile $21 \mid (n + 4)$ și $131 \leq n \leq 215$.

Rezolvare:
Cum 21 divide $n + 4$, există un număr natural k astfel încât $n + 4 = 21k$.
Din inegalitățile $131 \leq n \leq 215$ obținem $135 \leq n + 4 \leq 219$, deci $135 \leq 21k \leq 219$.
Întrucât $135 : 21 = 6$, rest 9 și $215 : 21 = 10$, rest 5, rezultă $7 \leq k \leq 10$, deci $n + 4$ poate lua valorile $21 \cdot 7 = 147$, $21 \cdot 8 = 168$, $21 \cdot 9 = 189$ sau $21 \cdot 10 = 210$.
Soluțiile problemei sunt: 143, 164, 185 și 206.

4 Demonstrați că numărul $N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \ldots + 2^{2017}$ se divide cu 3.

Rezolvare:
Grupând termenii sumei câte doi, putem scrie:

$$N = (2^0 + 2^1) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + \ldots + (2^{2016} + 2^{2017}) =$$
$$= (1 + 2) + 2^2 \cdot (1 + 2) + 2^4 \cdot (1 + 2) + \ldots + 2^{2016} \cdot (1 + 2) =$$
$$= 3 + 2^2 \cdot 3 + 2^4 \cdot 3 + \ldots + 2^{2016} \cdot 3 = 3 \cdot (1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2016}).$$

Întrucât N se poate scrie ca produsul dintre 3 și un număr natural, N se divide cu 3.

Probleme propuse

1 Verificați dacă:
a 16 este divizibil cu 4; **b** 30 este divizibil cu 5; **c** 27 este divizibil cu 13;
d 42 se divide cu 7; **e** 22 se divide cu 4; **f** 72 se divide cu 9;
g 7 divide pe 65; **h** 10 divide pe 90; **i** 6 divide pe 0.

2 Scrieți toți divizorii numărului:
a 5; **b** 16; **c** 23; **d** 27; **e** 28;
f 33; **g** 42; **h** 63; **i** 64; **j** 80.

3 **a** Scrieți multiplii numerelor 4, 6 și 9, cuprinși între 21 și 77.
b Scrieți multiplii numerelor 7, 15 și 29, mai mari decât 19 și mai mici decât 98.

4 **a** Arătați că 18 este un divizor al lui 108 și un multiplu al lui 6.
b Arătați că 91 este un divizor al lui 2 184, dar nu este un multiplu al lui 21.
c Arătați că $11 \cdot 12$ este un multiplu al lui $2 \cdot 3$, dar nu este un divizor al lui $22 \cdot 33$.

5 **a** Determinați divizorii lui 34 și determinați numerele naturale n știind că 34 este divizibil cu $3n - 1$.
b Determinați divizorii lui 98 și determinați numerele naturale n știind că $5n - 1$ divide 98.

6 **a** Determinați numerele naturale m pentru care $m + 1$ este multiplu de 7 și $34 \leq m \leq 69$.
b Determinați numerele naturale n pentru care 45 este un divizor al lui $2n + 1$ și $0 \leq n \leq 89$.

7 Fie a, b, c trei numere naturale.
a Dacă $x = 35 \cdot a + 63 \cdot b$, arătați că x este divizibil cu 7.
b Dacă $u = 5 \cdot a + 3 \cdot b + 2 \cdot c$ și $v = 4 \cdot a + 6 \cdot b + 7 \cdot c$, arătați că $u + v$ este multiplu de 9.

8 **a** Restul împărțirii numărului natural a la 12 este 9. Arătați că a se divide cu 3.
b Restul împărțirii numărului natural b la 57 este 38. Arătați că b se divide cu 19.

9 Arătați că $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2015} + 3^{2016}$ este divizibil cu 4.

10 **a** Determinați divizorii comuni ai numerelor 60 și 72. Precizați care este cel mai mare dintre divizorii comuni ai celor două numere.
b Determinați multiplii comuni ai numerelor 9 și 12, mai mici decât 121. Precizați cel mai mic multiplu comun nenul al celor două numere.

11 Radu pregătește pachete pentru o petrecere. Baloanele se vând în seturi de câte 18, fluierele în seturi de câte 12 și coifurile în seturi de câte 8. Câte seturi din fiecare ar trebui să cumpere Radu pentru a putea pune în fiecare pachet un număr egal de baloane, fluiere și coifuri?

12 Bogdan și Corina parcurg un circuit oval: Bogdan cu bicicleta, Corina cu rolele. Bogdan face un tur în 9 minute, Corina face un tur în 12 minute. Dacă pleacă în același timp, determinați câte tururi efectuează fiecare până când se întâlnesc din nou la linia de start.

13 La intrarea într-un parc de distracții, fiecare vizitator primește câte un săculeț cadou, unii conținând și câte un mic cadou. Diana observă anunțul afișat.
a Arătați că dacă un vizitator primește rucsac, atunci primește și insignă.
b Cât de des va conține săculețul cadou insignă și tricou? Dar insignă și ochelari de soare?
c Câți vizitatori din primii 1 000 primesc toate cele patru obiecte cadou?

Ofertă promoțională!

insignă	din 4 în 4 vizitatori
tricou	din 9 în 9 vizitatori
ochelari de soare	din 15 în 15 vizitatori
rucsac	din 24 în 24 vizitatori

14 Matei vrea să trimită prin curier 12 DVD-uri cu filme de comedie, 24 cu desene animate și 30 cu concerte de muzică, împachetate în cutii identice, astfel încât în fiecare cutie să se afle DVD-uri cu același tip de conținut. Care este cel mai mic număr de cutii de care are nevoie?

15 Olimpia are 30 de portocale, 24 de piersici și 18 pere. Ea vrea să pună fructele în coșuri astfel încât fiecare coș să aibă același număr de fructe, toate de același fel.
a Poate pune Olimpia câte trei fructe în fiecare coș? Dar câte patru fructe?
b Care este cel mai mare număr de fructe care ar putea fi puse într-un coș? De câte coșuri are Olimpia nevoie în acest caz?

16 Tabelul alăturat prezintă numărul elevilor din corul școlii. Profesorul dorește să îi așeze în rânduri egale numeric, astfel încât să fie îndeplinite două condiții:
a pe fiecare rând să se afle fie numai băieți, fie numai fete, indiferent de la ce clasă provin;
b numărul total de rânduri să fie mai mic decât numărul elevilor de pe un rând.
Determinați numărul elevilor de pe fiecare rând și numărul rândurilor.

Clasa	a V-a A	a V-a B	a V-a C	a V-a D
Fete	7	8	12	9
Băieți	6	7	3	8

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Numărul de multipli de 6 din secvența 24, 30, 36, 42, ..., 84, 90 este egal cu:
A 10; **B** 11; **C** 12; **D** 13.

2 Numărul de numere naturale de forma $\overline{2ab}$ divizibile cu 11 este egal cu:
A 7; **B** 9; **C** 11; **D** 13.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Două proiectoare de scenă pornesc în același timp. Proiectorul cu lumină albastră clipește o dată după fiecare 7 secunde, cel cu lumină albă clipește o dată după fiecare 5 secunde.
a De câte ori va clipi fiecare dintre cele două proiectoare în primul minut?
b De câte ori vor clipi simultan cele două proiectoare în primele 10 minute?

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 2: Criterii de divizibilitate

2.1. Criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10, 10^n

Mate practică

La campionatul de fotbal între școli, fiecare echipă gazdă, vinde în loc de bilete, carduri cadou.
Din vânzarea cardurilor s-au strâns următoarele fonduri:

Etapa	Vulturii	Șoimii	Cocoșii de munte
Suma (lei)	720	575	628

Cum putem afla ce valoare are fiecare dintre cele trei carduri?

Ioana: Deoarece $720 = 72 \cdot 10$, numărul 720 este divizibil cu 10.

Horia: Corect! De fapt, dacă înmulțim un număr cu 10, ultima cifră a produsului este 0, deci un număr se divide cu 10 doar dacă ultima cifră a sa este 0. Așadar numerele 575 și 628 nu sunt divizibile cu 10, deci cardul pentru parcul de distracții este al vulturilor.

Ioana: Atunci e simplu! Separând unitățile, fiecare număr natural se scrie ca suma dintre un număr întreg de zeci și ultima sa cifră, pentru că aceasta reprezintă numărul de unități. Cum zecile se pot împărți și în grupe de câte două și de câte cinci, rămâne de analizat ultima cifră.

Horia: Putem organiza cele 8 unități ale numărului 628 în grupe de câte două, dar nu și de câte 5, deci 628 este divizibil cu 2, dar nu și cu 5. Așadar echipa cocoșilor a oferit cardurile verzi!

Ioana: Iar șoimii au dat biletele pentru cinema, pentru că unitățile lui 575 formează o grupă de 5, dar nu pot fi împărțite în grupe de câte 2, deci 575 este divizibil cu 5, dar nu și cu 2!

Ce observăm?
Pentru a verifica divizibilitatea unor numere cu 2, 5 sau 10, nu este neapărat nevoie să efectuăm împărțirile, ci este suficient să studiem ultima cifră a numărului respectiv. De exemplu, am observat că 628 se divide cu 2 pentru că ultima sa cifră se divide cu 2.

O metodă prin care putem indica dacă un număr se divide printr-un alt număr fără a efectua împărțirea se numește *criteriu de divizibilitate*.

De reținut

Criteriul de divizibilitate cu 2
Un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8 (o cifră pară).

Criteriul de divizibilitate cu 5
Un număr natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.

Criteriul de divizibilitate cu 10
Un număr natural este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0.

Criteriul de divizibilitate cu 10^n ($n \geq 1$)
Un număr natural este divizibil cu 10^n dacă ultimele sale n cifre sunt egale cu 0.
Pentru $n = 2$, respectiv $n = 3$, rezultă că:
- un număr natural este divizibil cu 100 dacă ultimele două cifre ale sale sunt egale cu 0;
- un număr natural este divizibil cu 1 000 dacă ultimele trei cifre ale sale sunt egale cu 0.

Exemple

1 Se consideră numerele: 48, 73, 90, 115, 224, 349, 401, 636, 777, 875, 1 002. Dintre acestea:
- numerele divizibile cu 2 sunt: 48, 90, 224, 636 și 1 002;
- numerele divizibile cu 5 sunt: 90, 115 și 875.
- numerele 73, 349, 401 și 777 nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 5.

2 Numerele 400, 1 010, 3 400, 12 000 și 40 910 sunt divizibile cu 10, deoarece ultima lor cifră este 0. Dintre acestea, numerele 400, 3 400 și 12 000 sunt divizibile și cu 100, deoarece au ultimele două cifre egale cu 0, iar 12 000 este divizibil cu 1 000, întrucât ultimele trei cifre ale sale sunt 0.

2.2. Criteriile de divizibilitate cu 3 și cu 9

De reținut

Criteriul de divizibilitate cu 3
Un număr natural este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.

Criteriul de divizibilitate cu 9
Un număr natural este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.

Exemple

1. Numărul natural 6 498 are suma cifrelor $6 + 4 + 9 + 8 = 27$, deci 6 498 se divide și cu 3, și cu 9.
2. 741 este multiplu de 3, dar nu este multiplu de 9, deoarece suma cifrelor sale este $7 + 4 + 1 = 12$, care se divide cu 3, dar nu se divide cu 9.
3. 3 nu este un divizor al numărului 9 085, întrucât suma cifrelor numărului 9 085 este 22, care nu este divizibil cu 3. Evident, 9 085 nu este nici multiplu de 9.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați cifrele *a* și *b*, știind că numărul $\overline{7ab}$ este divizibil cu 10, iar numărul $\overline{a5b}$ este divizibil cu 9.

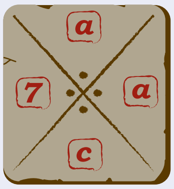
Rezolvare:

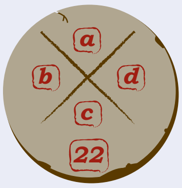
Numărul $\overline{7ab}$ este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0, deci $b = 0$. Apoi, $\overline{a5b}$ este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale, adică $a + 5 + b$, este și ea divizibilă cu 9. Obținem că 9 divide $a + 5$, deci $a = 4$.

2 Arătați că numărul $10^n + 461$ este divizibil cu 3, pentru orice valoare a numărului natural *n*.

Rezolvare:
Dacă $n \geq 3$, atunci numărul 10^n are cel puțin patru cifre, deci $10^n + 461 = 10...0461$, unde cifra 0 apare de $n - 3$ ori. Suma cifrelor acestui număr este 12, deci $10^n + 461$ se divide cu 3, pentru orice $n \geq 3$. Verificăm valorile rămase: dacă $n = 0$: $10^0 + 461 = 462$; pentru $n = 1$: $10^1 + 461 = 471$; pentru $n = 2$: $10^2 + 461 = 561$. Numerele 462, 471 și 561 sunt toate divizibile cu 3, având suma cifrelor 12, deci $10^n + 461$ este divizibil cu 3, pentru orice număr natural *n*.

3 În tabăra de arheologie, Horia și Ioana încearcă să descifreze tăblițele alăturate, pe care este inscripționat codul $\overline{abcd}$, format din patru cifre. Studiind detaliile, ei află că suma celor patru cifre este egală cu 22, *a* și *d* sunt egale, iar numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 2.
Ajutați-i să descopere codul! Determinați toate posibilitățile!





Rezolvare:
Comparând imaginile, rezultă că $b = 7$. Deoarece $\overline{abcd}$ se divide cu 2, *d* este cifră pară, deci *d* poate fi 2, 4, 6, 8 (*d* nu poate fi 0, deoarece $d = a$). Dacă $a = d = 2$, atunci $2 + 7 + c + 2 = 22$, de unde $c = 11$, care nu este cifră. Pentru $a = d = 4$ se obține $c = 7$, iar pentru $a = d = 6$ se găsește $c = 3$. Dacă $a = d = 8$, s-ar obține $23 + c = 22$, imposibil. Așadar, sunt două soluții posibile: 4 774 și 6 736.

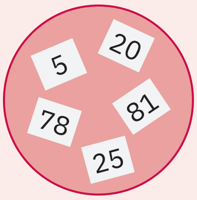
Probleme propuse

1 Copiați tabelul următor pe caiet și completați-l, folosind semnele (✓) și (✗).

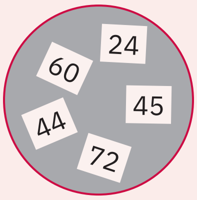
Numărul	10	36	40	135	300	978	2 400	22 500
divizibil cu 2	✓	...	...	✗	...	...	...	...
divizibil cu 3	...	✓	✗	...	...	...	...	...
divizibil cu 5	✓	...	...	...	✓	✗	...	✓

Numărul	10	36	40	135	300	978	2 400	22 500
divizibil cu 9	...	...	...	✓	...	...	...	...
divizibil cu 10	...	✗	...	...	...	...	✓	...

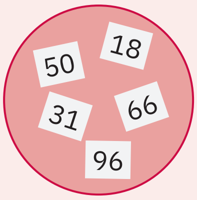
2 Horia, Ioana, Eva și Radu au ales, la întâmplare, câte un set de 5 bilețele, pe care sunt scrise numere de la 1 la 100.



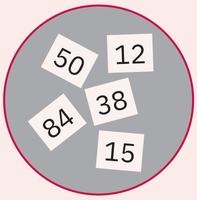
Horia



Eva



Ioana



Radu

Aplicând criteriile de divizibilitate, identificați:

a numerele divizibile cu 2 din setul lui Radu;
b multiplii lui 5 din setul lui Horia;
c multiplii de 3, dar nu de 9 din setul Evei;
d numerele divizibile cu 9 din setul Ioanei;
e numerele din seturile băieților care se divid și cu 2, și cu 3;
f multiplii de 3 și de 5 din seturile fetelor.

3 Folosind cifrele 0, 1, 5, 6 și 9 se formează numere de trei cifre distincte. Scrieți numerele care verifică proprietățile indicate:

a sunt divizibile cu 5, dar nu cu 10;
b au prima cifră 9 și se divid cu 2;
c se divid cu 3, dar nu cu 2;
d se divid și cu 5, și cu 3.

4 Știind că a și b sunt cifre distincte, determinați numerele divizibile cu 10 de forma:

a $\overline{12a}$; **b** $\overline{a4b}$; **c** $\overline{63a0}$; **d** $\overline{9ab}$.

5 Scrieți toate numerele divizibile cu 2 de forma:

a $\overline{19a}$; **b** $\overline{5aa}$; **c** $\overline{7a8}$; **d** $\overline{a0a}$.

6 Determinați toate numerele divizibile cu 5 de forma:

a $\overline{74a}$; **b** $\overline{8a0}$; **c** $\overline{4a2a}$; **d** $\overline{a5ab}$.

7 Scrieți toate numerele divizibile cu 3 de forma:

a $\overline{7a5}$; **b** $\overline{98a}$; **c** $\overline{4a8a}$; **d** $\overline{a45a}$.

Rezolvare: **b** Dacă numărul $\overline{98a}$ este divizibil cu 3, atunci suma cifrelor sale este divizibilă cu 3. Așadar, 3 divide $17 + a$, relație care este verificată de $a = 1$, $a = 4$ și $a = 7$. Numerele căutate sunt 981, 984 și 987.

8 Determinați numerele naturale divizibile cu 9, de forma:

a $\overline{15a}$; **b** $\overline{2a9}$; **c** $\overline{333a}$; **d** $\overline{12ab0}$.

9 Determinați cifra x pentru care următoarele propoziții sunt adevărate:

a $\overline{44x} \vdots 10$; **b** $\overline{88x} \vdots 3$; **c** $\overline{29x} \vdots 5$; **d** $\overline{65xx}$ se divide cu 2;
e $9 \mid \overline{30x}$; **f** $3 \mid \overline{407x}$; **g** $100 \mid \overline{780x}$; **h** 9 divide pe $\overline{45x2}$.

10 **a** Determinați numerele de forma $\overline{87ab}$ divizibile cu 2 și care au suma cifrelor egală cu 29.
b Determinați numerele de forma $\overline{aa97b}$ divizibile cu 5 și care au suma cifrelor egală cu 22.
c Determinați numerele de forma $\overline{45abc}$ divizibile cu 10 și care au suma cifrelor egală cu 11.

11 **a** Determinați toate numerele de forma $\overline{7ab}$ care se divid simultan cu 3 și 10.
b Scrieți toate numerele de forma $\overline{9a6b}$ care sunt atât multipli de 3, cât și multipli de 5.
c Determinați numerele de forma $\overline{a26ab}$ divizibile atât cu 2, cât și cu 9.

12 Determinați numerele naturale n pentru care numărul $A = 2 \cdot 6^n + 7 \cdot 4^n + 1$ se divide cu 5.

Investigație

Analizați cu atenție explicațiile de mai jos.
Împărțind numerele 10, 100, 1 000 etc., atât la 3, cât și la 9, se obține de fiecare dată restul 1:

10 : 3 = 3, rest 1	10 : 9 = 1, rest 1
100 : 3 = 33, rest 1	100 : 9 = 11, rest 1
1 000 : 3 = 333, rest 1	1 000 : 9 = 111, rest 1

Împărțirile cu rest arată că din fiecare 10, 100 sau 1 000 de obiecte putem da unul la o parte pentru a forma atât grupe de câte 3 cât și grupe de câte 9 obiecte.
Atunci, dacă după formarea grupelor de câte 3 sau de câte 9, din 10, 100 sau 1 000 de obiecte rămâne unul, înseamnă că din 20, din 200 sau 2 000 rămân 2 obiecte negrupate (rest), din 70 sau 700 rămân 7 obiecte negrupate și tot așa.
Să analizăm ce se întâmplă cu 2 745 de obiecte, respectiv cu 3 965 de obiecte:

$$\boxed{2\,748}$$

$$\underbrace{\underbrace{2 \cdot 1\,000}_{\boxed{2}} + \underbrace{7 \cdot 100}_{\boxed{7}} + \underbrace{4 \cdot 10}_{\boxed{4}} + \underbrace{8}_{\boxed{8}}}_{\text{obiecte negrupate: } 2+7+4+8=21}$$

21 este divizibil cu 3 → 2 748 este divizibil cu 3

21 nu se divide cu 9 → 2 748 nu se divide cu 9

$$\boxed{3\,965}$$

$$\underbrace{\underbrace{3 \cdot 1\,000}_{\boxed{3}} + \underbrace{9 \cdot 100}_{\boxed{9}} + \underbrace{6 \cdot 10}_{\boxed{6}} + \underbrace{5}_{\boxed{5}}}_{\text{obiecte negrupate: } 3+9+6+5=23}$$

23 : 3 = 7, rest 2 → restul împărțirii lui 3 965 la 3 este 2

23 : 9 = 2, rest 5 → restul împărțirii lui 3 965 la 9 este 5

1 Argumentați valabilitatea afirmațiilor:
  a Restul împărțirii unui număr natural *n* la 3 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor lui *n* la 3.
  b Restul împărțirii unui număr natural *n* la 9 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor lui *n* la 9.

2 Exemplificați, prin câte 5 exemple, afirmațiile de mai sus.

3 Creați un model asemănător pentru a justifica afirmația:
Restul împărțirii unui număr natural *n* la 5 este egal cu restul împărțirii la 5 a ultimei cifre a lui *n*.

4 Lucrând pe echipe, fără a efectua împărțirile, stabiliți ce rest dau numerele 415, 611, 503, 937, 746, 2 017, dacă le împărțim, pe rând, la: **a** 2; **b** 3; **c** 5; **d** 9.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Se consideră numerele naturale 28, 35, 49, 120, 1 294, 2 375, 5 401, 145 340, 225 035. Dintre acestea, sunt divizibile cu 5:
A 2 numere; **B** 3 numere; **C** 4 numere; **D** 5 numere.

2 Numărul multiplilor de 3 de forma $\overline{123ab}$ care sunt, în același timp, și multipli de 10 este egal cu:
A 4; **B** 3; **C** 2; **D** 1.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Stadionul unei echipe are 7 374 de locuri pe scaune. Sponsorul echipei dorește ca scaunele să fie colorate, astfel încât să aibă același număr de scaune de fiecare culoare.
  a Este posibil ca scaunele stadionului să fie colorate folosind 9 culori?
  b Stadionul se extinde cu o tribună nouă, care conține $\overline{a68a}$ scaune, împărțite în 5 standuri cu același număr de locuri. Arată că scaunele de pe întregul stadion (format din tribuna veche și tribuna nouă) pot fi colorate cu 9 culori, astfel încât să fie îndeplinită cerința sponsorului.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 3: Numere prime. Numere compuse

3.1. Numere prime. Numere compuse

Situații problemă

Profesorul de matematică le propune elevilor clasei a V-a următoarea activitate în perechi: să scrie divizorii tuturor numerelor de la 1 la 20 și, atunci când este posibil, să exprime aceste numere ca produs al cât mai multor numere naturale diferite de 1.

Horia și Ioana rezolvă sarcina primită în următoarele tabele:

Numărul	Divizorii	Exprimarea ca produs
1	1	–
2	1, 2	–
3	1, 3	–
4	1, 2, 4	2 · 2
5	1, 5	–
6	1, 2, 3, 6	2 · 3
7	1, 7	–
8	1, 2, 4, 8	2 · 2 · 2
9	1, 3, 9	3 · 3
10	1, 2, 5, 10	2 · 5

Numărul	Divizorii	Exprimarea ca produs
11	1, 11	–
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	2 · 2 · 3
13	1, 13	–
14	1, 2, 7, 14	2 · 7
15	1, 3, 5, 15	3 · 5
16	1, 2, 4, 8, 16	2 · 2 · 2 · 2
17	1, 17	–
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	2 · 3 · 3
19	1, 19	–
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	2 · 2 · 5

Ce observăm?

Fiecare dintre numerele naturale 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sau 19 admite doar doi divizori: pe 1 și pe el însuși. Cu excepția lui 1, celelalte numere (4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20) au cel puțin trei divizori și se pot exprima ca produs de cel puțin două numere naturale mai mari decât 1.

De reținut

Un număr natural diferit de 1 care are ca divizori numai pe 1 și pe el însuși se numește *număr prim*.
Numerele naturale diferite de 1 care nu sunt prime se numesc numere *compuse*.
Numărul natural 1 nu este *nici prim*, *nici compus*, deoarece admite un singur divizor.
Singurul număr prim par este 2. Toate numerele prime mai mari ca 2 sunt impare.

Numerele prime sunt cele care au exact doi divizori (numiți divizori *improprii*). Un număr este compus dacă are cel puțin trei divizori (altfel spus, un număr compus admite cel puțin un divizor *propriu*).

Exemple

Din studiul efectuat mai sus pentru numerele de la 1 la 20, se constată că:

1 Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 și 19 sunt prime.
2 Numerele 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 și 20 sunt numere compuse.
3 Numerele compuse mai mici sau egale cu 20 se pot scrie ca produs de două sau mai multe numere prime, nu neapărat distincte.

3.2. Recunoașterea numerelor prime

Observații

Numerele prime mai mici decât 20 sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 și 19. Este ușor de verificat că aceste numere nu se divid prin numere mai mici decât ele. Pentru numere mai mari, efectuarea tuturor împărțirilor poate crește foarte mult volumul calculelor. De aceea, pentru a stabili dacă un număr este prim sau nu, vom proceda astfel:

- împărțim, pe rând, numărul dat la toate numerele prime mai mici decât el, în ordine crescătoare, până când câtul devine mai mic decât împărțitorul;
- dacă la toate împărțirile se obține rest nenul, numărul dat este prim;
- în caz contrar, el este număr compus, deoarece, dacă o împărțire se efectuează exact, atunci împărțitorul este divizor propriu al numărului dat.

Exemple

71 : 2 = 35, rest 1
71 : 3 = 23, rest 2
71 : 5 = 14, rest 1
71 : 7 = 10, rest 1
71 : 11 = 6, rest 5
6 < 11
↓
71 este număr prim

157 : 2 = 78, rest 1
157 : 3 = 52, rest 1
157 : 5 = 31, rest 2
157 : 7 = 22, rest 3
157 : 11 = 14, rest 3
157 : 13 = 12, rest 1
12 < 13
↓
157 este număr prim

221 : 2 = 110, rest 1
221 : 3 = 73, rest 2
221 : 5 = 44, rest 1
221 : 7 = 31, rest 4
221 : 11 = 20, rest 1
221 : 13 = 17, rest 0
↓
221 este număr compus
221 = 13 · 17

Observații

1 Numerele prime până la 100 sunt:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

2 În loc de împărțiri, putem aplica, acolo unde este cazul, criteriile de divizibilitate. Spre exemplu, considerând numărul 467, acesta nu este divizibil cu 2 sau cu 5, deoarece ultima sa cifră nu este nici pară, nici egală cu 5. În plus, suma cifrelor lui 467 este 17, care nu se divide cu 3, deci 467 nu este divizibil cu 3. În continuare, efectuând împărțiri, constatăm că:

467 : 7 = 66, rest 5
467 : 11 = 42, rest 5
467 : 13 = 35, rest 12
467 : 17 = 27, rest 8
467 : 19 = 24, rest 11
467 : 23 = 20, rest 7

La ultima împărțire, am obținut câtul mai mic decât împărțitorul, deci 467 este număr prim.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați numerele prime a și b, cu $a < b$, știind că suma lor este 2 019.

Rezolvare:
Suma numerelor a și b este un număr impar, deci unul dintre numere este par, iar celălalt număr este impar. Întrucât singurul număr prim par este 2, rezultă $a = 2$. Efectuând diferența, se obține $b = 2\,017$. Se verifică, prin împărțiri, că 2 017 este număr prim, deci soluția problemei este $a = 2$, $b = 2\,017$.

2 Verificați dacă există numere prime a, b, c care îndeplinesc simultan condițiile:
i $a - b = 41$;
ii $a + b + c = 180$.

Rezolvare:
Dacă ar exista două numere prime care verifică relația **i**, atunci din $a - b = 41$ și 41 număr impar, rezultă că unul dintre numerele a și b este par și, fiind prim, este egal cu 2.
Ca urmare, $b = 2$ (scăzătorul este mai mic decât descăzutul) și atunci $a = 43$, care este prim. Înlocuind $a = 43$ și $b = 2$ în egalitatea $a + b + c = 180$, se obține $c = 135$, care nu este număr prim, fiind divizibil cu 5.
Așadar, nu există numere prime care să verifice condițiile date.

Probleme propuse

1 Verificați că următoarele numere naturale sunt prime:
a 241; **b** 317; **c** 179; **d** 421; **e** 521; **f** 617.

2 Indicați câte un divizor propriu pentru a arăta că următoarele numere sunt compuse:
a 219; **b** 117; **c** 675; **d** 308; **e** 299; **f** 731.

3 Determinați cifrele a, b, c, d, e, f pentru care următoarele numere sunt prime:

a $\overline{4a}$; **b** $\overline{7b}$; **c** $\overline{c3}$; **d** $\overline{10d}$; **e** $\overline{21e}$; **f** $\overline{f17}$.

4 Înlocuiți literele cu cifre pentru a obține numere compuse:

a $\overline{5a}$; **b** $\overline{4b}$; **c** $\overline{6c}$; **d** $\overline{d1}$; **e** $\overline{11e}$; **f** $\overline{2ff}$.

5 Exprimați următoarele numere ca suma, diferența sau produsul a două numere prime, după caz:

a $30 = \square + \square$; **b** $22 = \square + \square$; **c** $46 = \square - \square$;

d $26 = \square - \square$; **e** $77 = \square \cdot \square$; **f** $39 = \square \cdot \square$.

6 Scrieți următoarele numere ca suma, diferența sau produsul a două numere compuse, după caz:

a $31 = \square + \square$; **b** $13 = \square - \square$; **c** $36 = \square \cdot \square$;

d $38 = \square + \square$; **e** $23 = \square - \square$; **f** $84 = \square \cdot \square$.

7 **a** Suma dintre un număr prim și un număr par este egală cu 15. Determinați cele două numere.
b Suma a două numere prime este 75. Determinați cele două numere.
c Diferența a două numere prime este 41. Determinați cele două numere.
d Produsul a două numere prime este 85. Determinați cele două numere.

8 **a** Determinați numerele prime a și b, care verifică relația $5a + 12b = 89$.
b Determinați numerele prime a și b știind că $15a + 3b = 180$.
c Determinați numerele prime a, b, c știind că $6a + 2b + 9c = 99$.

9 **a** Determinați numărul natural n știind că $A = (n + 1)(n + 13)$ este număr prim.
b Determinați numărul natural n știind că $B = n^2 + 30n$ este număr prim.
c Determinați numărul natural n știind că $C = n^2 - 6n$ este număr prim.

10 Arătați că numerele următoare sunt compuse pentru orice valoare a numărului natural n:
a $A = 6^n + 3^n + 2^n + 1$; **b** $B = 15^n + 5^{n+1} + 3^n + 5$.

11 Determinați numerele naturale n pentru care fiecare dintre numerele $n + 1, n + 11$ și $n + 27$ este număr prim.

Proiect

Numărul natural 6 este numit *număr perfect* deoarece el este egal cu suma tuturor divizorilor săi mai mici decât el însuși. Astfel, divizorii lui 6 sunt 1, 2, 3, 6 și are loc egalitatea: $1 + 2 + 3 = 6$.

1. Determinați un alt număr perfect.
2. Pot fi numerele prime numere perfecte? Explicați!
3. Folosiți internetul sau biblioteca pentru a defini alte două tipuri de numere:
   a numere deficiente; **b** numere abundente.

Discutați în clasă rezultatele găsite.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dintre numerele 138, 183, 318, 381, 813 și 831, este număr prim:
A 813; **B** 381; **C** 183; **D** niciunul.

2 Numărul de numere compuse de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 5 este egal cu:
A 0; **B** 1; **C** 2; **D** 3.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Raluca și Victor participă la un joc numit „camera de evadare”. Unul dintre indicii este un cod format din trei numere prime a, b, c, cu proprietatea că $2a + 7b + 6c = 78$.
a Este posibil ca b să fie egal cu 5?
b Află numerele a, b, c, știind că suma celor trei numere este un număr cuprins între 20 și 25.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
Timp de lucru: 30 de minute	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Divizor; multiplu; divizori comuni; multipli comuni • Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 • Numere prime; numere compuse

1 Un divizor propriu al lui 72 este egal cu:
a 72 **b** 9 **c** 5 **d** 1

2 Un multiplu nenul al lui 15 este egal cu:
a 25 **b** 35 **c** 50 **d** 45

3 Care dintre următoarele numere au pe 9 ca divizor:
a 123 **b** 246 **c** 468 **d** 680

4 Care dintre următoarele numere nu este multiplu al lui 3?
a 1 209 **b** 2 340
c 6 309 **d** 7 913

5 Un multiplu comun al numerelor 12 și 18 este egal cu:
a 48 **b** 72 **c** 24 **d** 60

6 Care dintre următoarele două numere au ca divizor comun pe 5?
a 20 și 37 **b** 45 și 15
c 25 și 32 **d** 84 și 35

7 Care dintre următoarele numere este număr compus?
a 17 **b** 43 **c** 75 **d** 31

8 Care dintre următoarele numere este număr prim?
a 91 **b** 29 **c** 85 **d** 39

9 Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

Orice număr natural de forma $\overline{aa}$ este număr compus.
Există două numere compuse a căror sumă este un număr prim.
Suma divizorilor improprii ai lui 12 este 13.

10 Asociați fiecare literă din coloana **A** cu cifra din coloana **B** corespunzătoare răspunsului corect.

A	B
	1 $n = 36$
a 15 este divizor al lui *n*	**2** $n = 45$
b 18 este multiplu al lui *n*	**3** $n = 12$
c 12 este divizor propriu al lui *n*	**4** $n = 9$

11 Asociați fiecărui număr din coloana **A** un divizor al său din coloana **B**.

A	B
36	2
45	9
	5
84	3

12 Asociați fiecărui număr din coloana **A** un multiplu al său din coloana **B**.

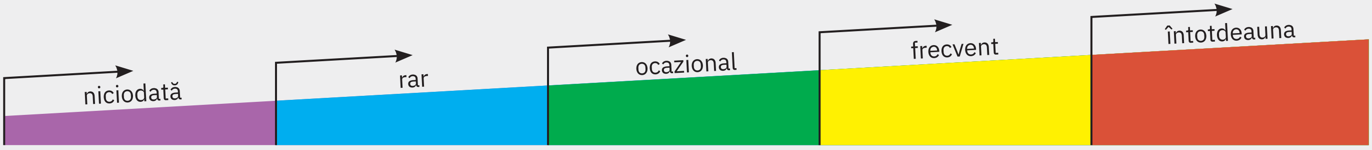
A	B
2	80
3	39
	75
5	37

13 Determinați numerele prime *a* și *b* care verifică relația $3a + 5b = 36$.

14 Restul împărțirii numărului natural *n* la 24 este egal cu 15. Arătați că numărul natural *n* este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 2.

Fișa de observare sistematică

- Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U4

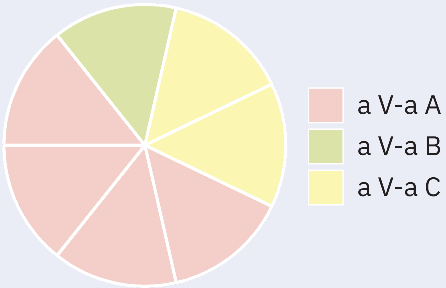
Fracții ordinare

Lecția 1: Fracții ordinare. Fracții echivalente. Procente

1.1. Fracții ordinare

Mate practică

În *Săptămâna legumelor și fructelor donate*, elevii clasei a V-a B au donat morcovi. Elevii clasei a V-a C au donat cartofi, în cantitate dublă față de morcovi, iar elevii clasei a V-a A mere, în cantitate dublă față de cartofi. Diagrama alăturată arată, comparativ, cantitățile strânse.
Determinați cât reprezintă contribuția fiecărei clase din cantitatea totală.



Ioana: *Cantitatea totală se poate împărți în 7 părți egale, întrucât, dacă morcovii reprezintă o parte, atunci cartofii, fiind în cantitate dublă, reprezintă două părți, iar merele patru părți.*

Horia: *Atunci putem da răspunsul sub formă de fracții, așa cum am învățat în clasa a IV-a: morcovii donați de clasa a V-a B reprezintă* $\frac{1}{7}$ *din total, cartofii* $\frac{2}{7}$*, iar merele* $\frac{4}{7}$.

De reținut

O parte dintr-un întreg împărțit în părți de mărimi egale se numește *unitate fracționară*.
O *fracție ordinară* (numită, pe scurt, *fracție*) reprezintă una sau mai multe din părțile de mărimi egale în care a fost împărțit un întreg, adică una sau mai multe unități fracționare.

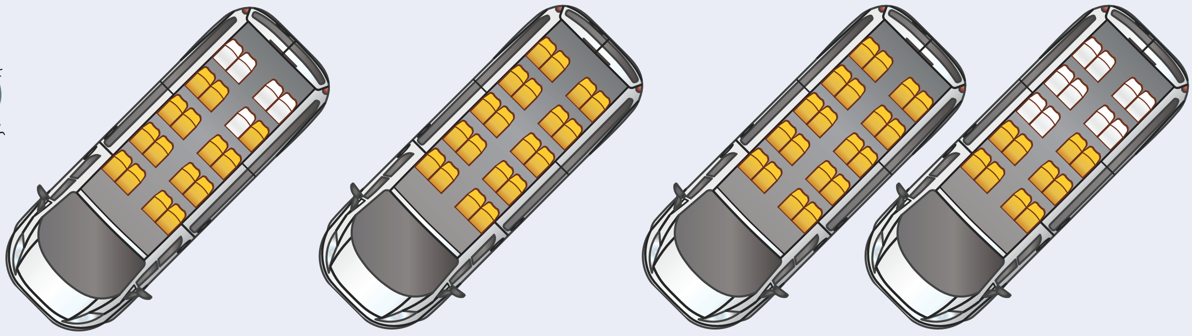
O fracție se reprezintă printr-o pereche de numere naturale, a și b, cu $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$.

a → a se numește *numărător* — arată câte unități fracționare s-au luat
b → b se numește *numitor* — arată în câte părți egale a fost împărțit întregul

1.2. Fracții subunitare, echiunitare, supraunitare

Mate practică

O firmă organizatoare de tabere școlare a primit 15 cereri de înscriere pentru tabăra de la Alba Iulia, 20 de cereri pentru tabăra de la Hațeg și 30 de cereri pentru cea de la Hunedoara. Dacă transportul se face cu microbuze de 20 de locuri, scrieți sub formă de fracție gradul de ocupare al fiecărui microbuz.



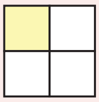
Alba Iulia $\frac{15}{20}$ Hațeg $\frac{20}{20}$ Hunedoara $\frac{30}{20}$

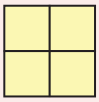
De reținut

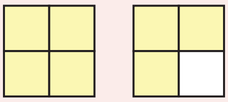
O fracție se numește
- *subunitară* dacă numărătorul este mai mic decât numitorul.
- *echiunitară* dacă numărătorul este egal cu numitorul.
- *supraunitară* dacă numărătorul este mai mare decât numitorul.

O fracție subunitară exprimă o cantitate mai mică decât un întreg, o fracție echiunitară arată o cantitate *egală* cu un întreg, iar o fracție supraunitară indică o cantitate *mai mare* decât un întreg.

Exemple


$\frac{1}{4}$
fracție subunitară


$\frac{4}{4}$
fracție echiunitară


$\frac{7}{4}$
fracție supraunitară

1.3. Fracții echivalente

Mate practică

Bunica lui Horia a făcut plăcintă cu mere. Ioana și Horia o ajută la porționat.

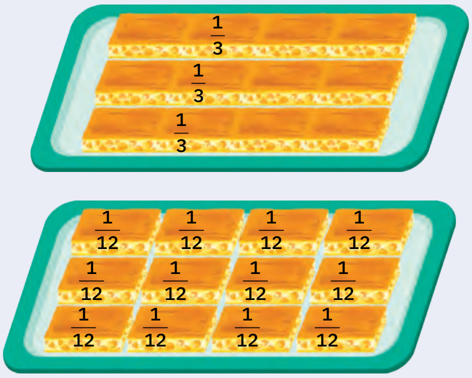
Horia: *Am împărțit plăcinta în 3 porțiuni egale, tăind pe orizontală. Fiecare porțiune reprezintă o treime din plăcintă.*

Ioana: *Iar eu, tăind pe verticală, am împărțit fiecare felie tăiată de tine în câte patru bucăți egale. Întrucât am obținut 12 bucăți, fiecare dintre acestea reprezintă* $\frac{1}{12}$ *din întreaga plăcintă.*

Horia: *Așadar,* $\frac{1}{3}$ *și* $\frac{4}{12}$ *reprezintă aceeași parte.*

Am putea scrie $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$.

Ioana: *Chiar așa! Te rog să observi că între numitorii și numărătorii celor două fracții există o relație specială:* $1 \cdot 12 = 3 \cdot 4$.



De reținut

Două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt *echivalente* dacă $a \cdot d = b \cdot c$. Se notează $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Două fracții *echivalente* reprezintă aceeași cantitate dintr-un întreg.

Exemple

1 Fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{6}{21}$ sunt echivalente, deoarece $2 \cdot 21 = 7 \cdot 6$. Scriem $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$.

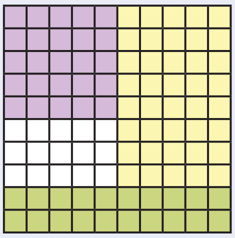
2 Fracțiile $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{9}$ sunt echivalente, întrucât $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$. Scriem $\frac{4}{3}=\frac{12}{9}$.

3 Fracțiile $\frac{3}{5}$ și $\frac{7}{11}$ nu sunt echivalente, pentru că $3 \cdot 11 \neq 5 \cdot 7$. Vom nota $\frac{3}{5}\neq\frac{7}{11}$.

1.4. Procente

Mate practică

Ioana, Horia și Clara au colorat unele dintre cele 100 de pătrățele identice în care a fost împărțit pătratul 10 × 10 alăturat.
Ce fracție este reprezentată prin fiecare dintre zonele colorate?



Răspuns:

Din cele 100 de pătrățele, 25 sunt colorate cu mov, ceea ce reprezintă $\frac{25}{100}$.

Ne amintim că fracția $\frac{25}{100}$ se mai notează și 25%, care se citește 25 de procente sau douăzeci și cinci la sută. Păstrând notația, cele 40 de pătrățele galbene reprezintă $\frac{40}{100}$ sau 40%, iar cele 20 de pătrățele colorate cu verde înseamnă $\frac{20}{100}$ sau 20% din întregul pătrat.

De reținut

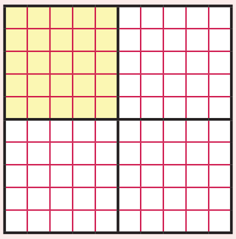
Dacă p este un număr natural, fracția $\frac{p}{100}$ se notează $p\%$ și se citește *p procente* sau *p la sută*.

Procentul este o fracție cu numitorul 100.

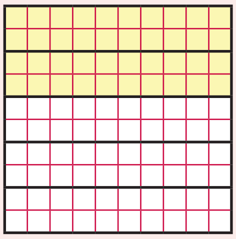
Exemple

1 Zona albă din pătratul 10 × 10 colorat de cei trei copii conține 15 pătrățele, deci reprezintă 15% din întregul pătrat.

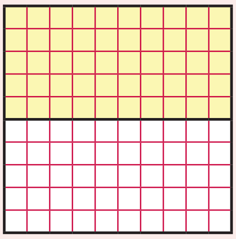
2 Pentru a scrie procentele sub formă de fracții ordinare, pot fi folosite și fracții echivalente, așa cum rezultă din imaginile de mai jos:



$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$



$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$



$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați numerele naturale n pentru care:

a fracția $\frac{12}{7n+6}$ este supraunitară; **b** fracția $\frac{3n+2}{2n+5}$ este subunitară.

Rezolvare:

a Fracția $\frac{12}{7n+6}$ este supraunitară dacă $12 > 7\,n + 6$, adică $7n < 6$. Singura soluție este $n = 0$.

b Fracția $\frac{3n+2}{2n+5}$ este subunitară dacă $3n + 2 < 2n + 5$, adică $n < 3$. Soluțiile problemei sunt 0, 1, 2.

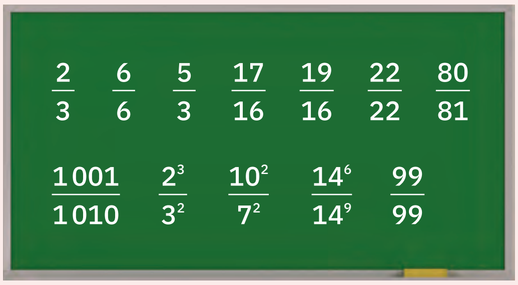
2 Determinați numărul natural n pentru care fracțiile $\frac{50}{55}$ și $\frac{n+1}{n+2}$ sunt echivalente.

Rezolvare:
Cele două fracții sunt echivalente dacă $50 \cdot (n + 2) = 55 \cdot (n + 1)$, adică $50n + 100 = 55n + 55$. Scăzând $55n + 55$ din ambii membri ai acestei egalități, obținem $5n = 45$, de unde $n = 9$.

Probleme propuse

1 Scrieți:
a trei fracții supraunitare cu numitorul 7; **b** trei fracții subunitare cu numărătorul 7.

2 Grupați pe trei coloane distincte fracțiile subunitare, echiunitare, respectiv supraunitare scrise pe tablă:



$$\frac{2}{3} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{17}{16} \quad \frac{19}{16} \quad \frac{22}{22} \quad \frac{80}{81}$$

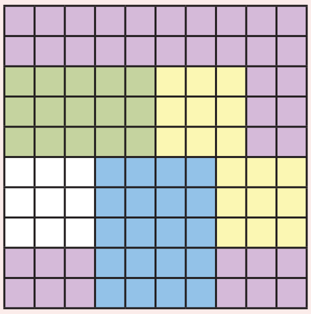
$$\frac{1\,001}{1\,010} \quad \frac{2^3}{3^2} \quad \frac{10^2}{7^2} \quad \frac{14^6}{14^9} \quad \frac{99}{99}$$

3 Determinați numerele naturale n pentru care afirmațiile următoare sunt adevărate:

a fracția $\frac{4}{n+1}$ este echiunitară;
b fracția $\frac{5}{3n+1}$ este supraunitară;
c fracția $\frac{4n+2}{13}$ este subunitară;
d fracția $\frac{7n+2}{4n+11}$ este echiunitară.

4 Horia, Ioana, Radu și Eva au colorat un pătrat format din 100 de pătrățele. Horia a folosit culoarea mov, Ioana verde, Eva albastru și Radu a colorat cu galben. Scrieți ca procent fracțiile care indică:

a partea colorată de fiecare;
b partea colorată de băieți;
c partea colorată de fete;
d partea rămasă necolorată.



5 Verificați care dintre următoarele perechi de fracții sunt formate din fracții echivalente:

a $\frac{1}{3}$ și $\frac{3}{9}$;
b $\frac{12}{7}$ și $\frac{36}{21}$;
c $\frac{11}{41}$ și $\frac{22}{84}$;
d $\frac{28}{42}$ și $\frac{4}{6}$;
e $\frac{3}{5}$ și $\frac{39}{75}$;
f $\frac{9}{10}$ și $\frac{99}{100}$;
g $\frac{24}{30}$ și $\frac{28}{35}$;
h $\frac{13}{31}$ și $\frac{12}{21}$.
i $\frac{7}{4}$ și $\frac{49}{2^4}$.

6 Determinați numărul natural n știind că următoarele propoziții sunt adevărate:

a $\frac{6}{5}=\frac{n}{25}$;
b $\frac{n}{12}=\frac{4}{6}$;
c $\frac{24}{n}=\frac{14}{28}$;
d $\frac{60}{40}=\frac{9}{n}$;
e $\frac{n}{3}=\frac{48}{n}$;
f $\frac{4}{n+1}=\frac{24}{30}$;
g $\frac{2n+1}{7}=\frac{15}{21}$;
h $\frac{3n-2}{n}=\frac{5}{2}$.
i $\frac{n}{n+1}=\frac{12}{15}$.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Numărul natural n pentru care fracțiile $\frac{6}{n}$ și $\frac{18}{15}$ sunt echivalente este:

A 15; **B** 5; **C** 6; **D** 18.

2 Fracția $\frac{121}{19}$ este:

A echiunitară; **B** subunitară; **C** supraunitară; **D** nu se poate preciza.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră fracția $\frac{15}{n+2}$, unde n este număr natural.

a Determină numerele naturale n, astfel încât fracția să fie supraunitară.
b Determină numărul natural n, astfel încât fracția să fie egală cu 15%.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 2: Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător. Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor

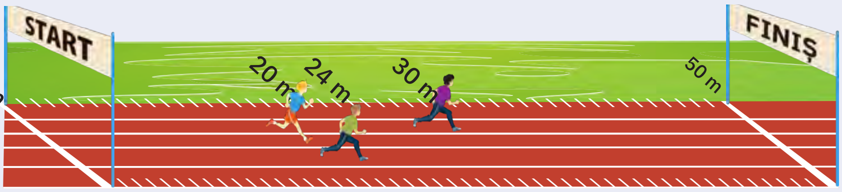
2.1. Compararea fracțiilor cu același numitor

Mate practică

Ioana, Horia și Radu se antrenează pentru cursa de 50 de metri. La un moment dat, după start, Ioana se afla la marcajul de 20 de metri, Horia la cel de 30 de metri, iar Radu la marcajul de 24 de metri. Exprimați, cu ajutorul fracțiilor, ce parte din întreaga pistă a parcurs fiecare dintre cei trei concurenți. Care dintre ei a parcurs o porțiune mai mare de pistă?

Răspuns:

Ioana a parcurs $\frac{20}{50}$ din pistă, Horia $\frac{30}{50}$, iar Radu $\frac{24}{50}$. Ioana a alergat mai puțin decât Horia, deci $\frac{20}{50}<\frac{30}{50}$. Horia a parcurs o distanță mai mare decât Radu, deci $\frac{30}{50}>\frac{24}{50}$.

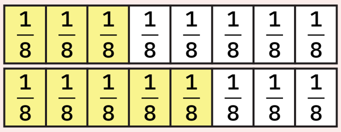


De reținut

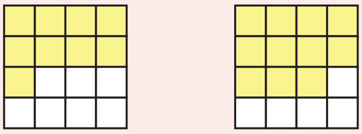
Dintre două fracții care au același numitor, este mai mare fracția cu numărătorul mai mare.

Regula 1. dacă $a<b$, atunci $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$ **Regula 2.** dacă $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$, atunci $a<b$

Exemple



$3<5 \longrightarrow \frac{3}{8}<\frac{5}{8}$



$\frac{9}{16}<\frac{11}{16} \longrightarrow 9<11$

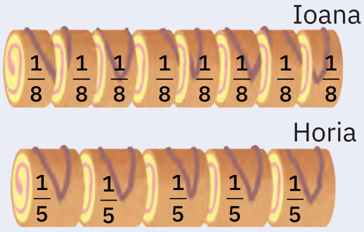
2.2. Compararea fracțiilor cu același numărător

Mate practică

Dintr-o ruladă împărțită în 8 felii egale, Ioana a mâncat 3 felii, iar Horia a mâncat $\frac{3}{5}$ dintr-o ruladă identică. Cine a mâncat mai mult?

Analiză: Când numitorul fracției este mai mic, întregul este împărțit în mai puține părți, deci părțile sunt mai mari.

Răspuns: Horia a mâncat mai mult, deci $\frac{3}{5}>\frac{3}{8}$.

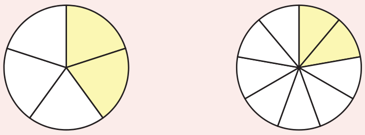


De reținut

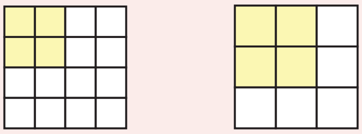
Dintre două fracții care au același numărător, este mai mare fracția cu numitorul mai mic.

Regula 1. Dacă $m<n$, atunci $\frac{a}{m}>\frac{a}{n}$. **Regula 2.** Dacă $\frac{a}{m}<\frac{a}{n}$, atunci $m>n$.

Exemple



$5<9 \longrightarrow \frac{2}{5}>\frac{2}{9}$



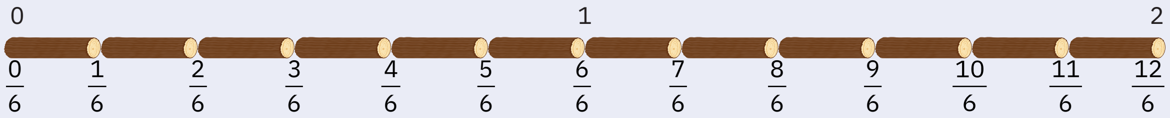
$\frac{4}{16}<\frac{4}{9} \longrightarrow 16>9$

2.3. Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor

Mate practică

La clubul de navomodelism, Horia și Radu confecționează catarge pentru goeleta *La Volla*. Unde trebuie executate marcajele pentru decupaj pe o bucată de lemn de doi metri, știind că dintr-un metru se pot realiza 6 catarge?

Răspuns: Fiecare lungime de catarg reprezintă $\frac{1}{6}$ dintr-un metru.



De reținut

Ne amintim că *axa numerelor* este o dreaptă pe care se fixează:

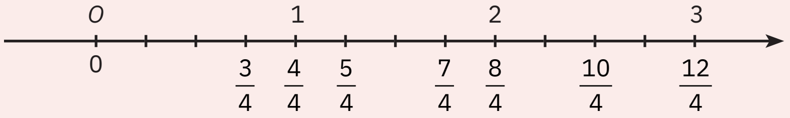
- un punct numit *origine*;
- un sens de parcurgere de la stânga la dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*;
- o *unitate de măsură* indicată de un segment.

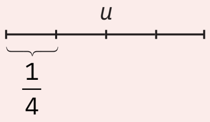
Știm că fiecărui număr natural îi corespunde, pe axa numerelor, un punct, numit *coordonata punctului*. Originea are coordonata 0 (zero).

Pentru a reprezenta o fracție pe axa numerelor, împărțim unitatea de măsură în atâtea părți egale câte arată numitorul și considerăm, începând din origine, atâtea părți câte arată numărătorul.

Exemple

Pentru a reprezenta pe axa numerelor fracția $\frac{3}{4}$, împărțim unitatea de măsură în 4 părți egale și luăm, începând din origine, trei astfel de părți. Pe aceeași axă, putem reprezenta mai multe fracții cu numitorul 4:





Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați numerele naturale n pentru care $\frac{n+1}{5}<\frac{3}{5}$.

Rezolvare: Dintre două fracții cu același numitor, este mai mică cea cu numărătorul mai mic. Rezultă că $n+1<3$, adică n poate fi 0 sau 1.

2 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{13}{2n+3}$, unde n este număr natural, știind că $\frac{13}{2n+3}>\frac{13}{10}$.

Rezolvare: Dintre două fracții cu același numărător, este mai mare cea cu numitorul mai mic. Obținem $2n+3<10$, adică n poate fi 0, 1, 2 sau 3. Fracțiile căutate sunt $\frac{13}{3}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{13}{7}$ și $\frac{13}{9}$.

Probleme propuse

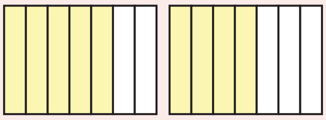
1 Ordonați crescător fracțiile:

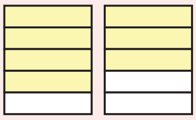
a $\frac{12}{7}, \frac{2}{7}, \frac{7}{7}, \frac{14}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$;

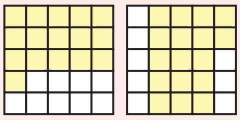
b $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}, \frac{4}{9}, \frac{16}{9}, \frac{9}{9}$;

c $\frac{4}{11}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{91}, \frac{4}{4}$.

2 Comparați fracțiile reprezentate prin desene:







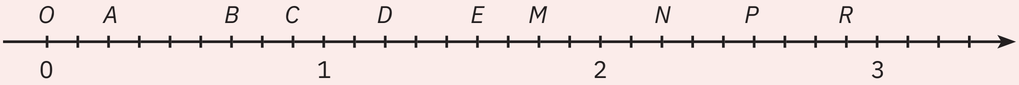
3 Reprezentați prin desene și comparați următoarele perechi de fracții cu același numitor:

a $\frac{2}{7}$ și $\frac{3}{7}$; **b** $\frac{4}{9}$ și $\frac{5}{9}$; **c** $\frac{3}{2}$ și $\frac{5}{2}$.

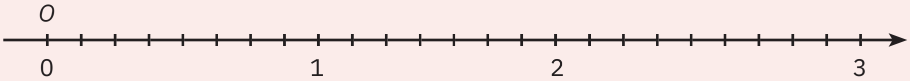
4 Reprezentați prin desene și comparați următoarele perechi de fracții cu același numărător:

a $\frac{3}{5}$ și $\frac{3}{7}$; **b** $\frac{5}{5}$ și $\frac{5}{6}$; **c** $\frac{5}{4}$ și $\frac{5}{8}$.

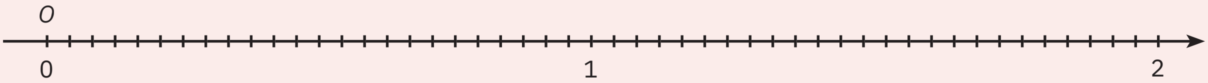
5 Determinați coordonata fiecăruia dintre punctele A, B, C, D, E, M, N, P, R, reprezentate pe axa de mai jos:



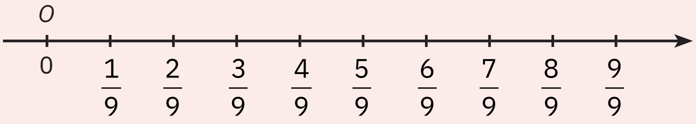
6 Pe axa numerelor de mai jos reprezentați fracțiile: $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{15}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{20}{8}$.



7 Copiați axa de mai jos pe caiet și reprezentați fracțiile $\frac{7}{24}$; $\frac{15}{24}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{31}{24}$; $\frac{13}{24}$; $\frac{8}{24}$ pe axă:



8 Folosind axa numerelor alăturată, ordonați descrescător fracțiile: $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{9}$ și $\frac{4}{9}$.



9 Reprezentați pe aceeași axă a numerelor următoarele fracții: $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{2}{4}$.

10 Determinați numerele naturale n pentru care:

a $\frac{n}{3}<\frac{2}{3}$; **b** $\frac{7}{4}>\frac{4n+5}{4}$; **c** $\frac{7}{n}>\frac{7}{2}$; **d** $\frac{11}{17}<\frac{11}{5n+4}$.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Utilizând reprezentarea pe axa numerelor, ordinea crescătoare a fracțiilor $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{3}$ este:

A $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$; **B** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; **C** $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$; **D** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

2 Un număr natural n pentru care $\frac{8}{n}>\frac{8}{5}$ este: **A** 4; **B** 5; **C** 6; **D** 8.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră fracția $\frac{11}{2n+1}$, unde n este număr natural.

a Determină n, astfel încât fracția să fie mai mică decât 1.

b Scrie toate fracții de forma $\frac{k+2}{2n+1}$ mai mici decât $\frac{7}{2n+1}$, unde k este număr natural.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

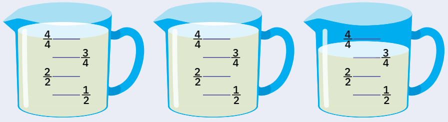
Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 3: Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție

3.1. Introducerea întregilor în fracție

Mate practică

Cantitatea de lapte prevăzută de rețetă pentru prepararea prăjiturii „Fractino” este de 2 căni și trei sferturi. Exprimați această cantitate cu ajutorul unei fracții.



$1 = \frac{4}{4}$ $1 = \frac{4}{4}$ $\frac{3}{4}$

Răspuns:
Fiecare cană are patru sferturi, deci cantitatea de lapte necesară este de 11 sferturi de cană, adică $\frac{11}{4}$.

Ce observăm?

Cantitatea necesară, reprezentată de 2 întregi și $\frac{3}{4}$ poate fi descrisă, echivalent, prin fracția $\frac{11}{4}$. Numărătorul fracției poate fi obținut din relația $11 = 2 \cdot 4 + 3$.

Pentru a nota numărul alcătuit din 2 întregi și 3 pătrimi, utilizăm scrierea $2\frac{3}{4}$. Așadar, $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.

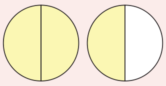
De reținut

Un număr alcătuit din *n* întregi și o fracție $\frac{a}{b}$, unde n, a, b sunt numere naturale, $b \neq 0$, $n \neq 0$, se numește *număr mixt* și se notează $n\frac{a}{b}$.

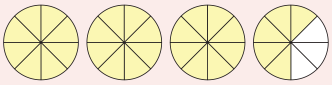
Operația de scriere a unui număr mixt sub formă de fracție se numește *introducerea întregilor în fracție*. Pentru a reprezenta un număr mixt sub forma unei singure fracții, se utilizează egalitatea:

$$n\frac{a}{b} = \frac{n \cdot b + a}{b}.$$

Exemple



$$1\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$



$$3\frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8 + 5}{8} = \frac{29}{8}$$

3.2. Scoaterea întregilor din fracție

Mate practică

Pe un platou încap 7 brioșe. Horia și Ioana calculează, folosind fracții, câte platouri se pot umple folosind un pachet care conține 18 brioșe.

Ioana: Fiecare brioșă umple $\frac{1}{7}$ dintr-un platou. Cu un pachet de 18 brioșe se pot completa $\frac{18}{7}$ platouri.

Horia: Împărțind pe 18 la 7 obținem câtul 2 și restul 4. Ca urmare, dintr-un pachet putem umple complet două platouri, deci avem doi întregi, iar pe al treilea platou se mai pot pune încă patru brioșe, adică $\frac{4}{7}$ dintr-un platou. Răspunsul este $2\frac{4}{7}$.

Ce observăm?

Deoarece $18 : 7 = 2$, rest 4, fracția $\frac{18}{7}$ poate fi reprezentată sub forma numărului mixt $2\frac{4}{7}$.

În general, deoarece o fracție supraunitară reprezintă o cantitate mai mare decât un întreg, putem pune în evidență numărul de întregi conținuți în fracție exprimând fracția dată sub forma unui număr mixt.

De reținut

Operația de scriere a unei fracții supraunitare sub forma unui număr mixt se numește *scoaterea întregilor din fracție*.

Pentru a scoate întregii dintr-o fracție, se împarte numărătorul la numitor. Câtul reprezintă întregii, iar restul se trece la numărătorul fracției subunitare, care are același numitor ca fracția inițială. Altfel spus,

$$\text{dacă } a : b = c, \text{ rest } r, \text{ atunci } \frac{a}{b} = c\frac{r}{b}.$$

Când împărțirea se face exact, fracția exprimă un număr de întregi egal cu câtul:

$$\text{dacă } a : b = c, \text{ rest } 0, \text{ atunci } \frac{a}{b} = c.$$

Exemple

1 $\frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}$, deoarece $23 : 8 = 2$, rest 7;

2 $\frac{41}{5} = 8\frac{1}{5}$, deoarece $41 : 5 = 8$, rest 1;

3 $\frac{62}{11} = 5\frac{7}{11}$, deoarece $62 : 11 = 5$, rest 7;

4 $\frac{27}{9} = 3$, deoarece $27 : 9 = 3$, rest 0.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Un buștean are 12 metri. El trebuie tăiat în 5 părți egale. Câți metri are fiecare parte? Exprimați răspunsul sub forma unui număr mixt.

Rezolvare:

Fiecare bucată rezultată după tăiere are $\frac{12}{5}$ metri. Întrucât $12 : 5 = 2$, rest 2, rezultă că $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$. Așadar, fiecare parte are $2\frac{2}{5}$ metri.

2 Precizați între ce două numere naturale consecutive se află, pe axa numerelor, fracția $\frac{13}{4}$.

Rezolvare:

Deoarece $13 : 4 = 3$, rest 1, prin scoaterea întregilor din fracție, putem scrie: $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$.

Ca urmare, fracția $\frac{13}{4}$ se află între numerele 3 și 4. Putem scrie $3 < \frac{13}{4} < 4$ sau $3 < 3\frac{1}{4} < 4$.

Probleme propuse

1 Scoateți întregii din fracțiile:

a $\frac{7}{5}$; **b** $\frac{13}{5}$; **c** $\frac{19}{5}$; **d** $\frac{26}{5}$; **e** $\frac{43}{8}$; **f** $\frac{64}{9}$.

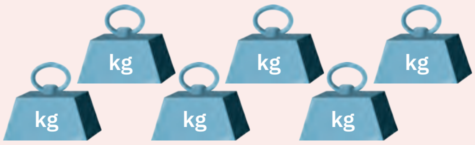
2 Introduceți întregii în fracțiile:

a $2\frac{1}{7}$; **b** $3\frac{2}{7}$; **c** $4\frac{3}{7}$; **d** $5\frac{4}{9}$; **e** $6\frac{5}{9}$; **f** $7\frac{8}{9}$.

3 Indicați între ce două numere naturale consecutive se află fracțiile:

a $\frac{13}{6}$; **b** $\frac{17}{6}$; **c** $\frac{38}{10}$; **d** $\frac{65}{21}$; **e** $\frac{165}{13}$; **f** $\frac{723}{100}$.

4 6 greutăți identice cântăresc 23 de kilograme împreună.
Cât cântărește o singură greutate?
Exprimați răspunsul sub forma unui număr mixt.



Lecția 4: Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

4.1. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale

Mate practică

Mama Evei a pregătit 18 sendvișuri cu cașcaval și 24 de sendvișuri cu șuncă pentru invitații fetei. Care este cel mai mare număr de sendvișuri care pot fi puse pe un platou, astfel încât fiecare platou să conțină același număr de sendvișuri, toate de același fel?

Răspuns:

Numărul de sendvișuri de pe fiecare platou este un *divizor comun* al numerelor 18 și 24.

Divizorii lui 18 sunt 1, 2, 3, 6, 9, 18, iar divizorii lui 24 sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, deci cel mai mare număr de sendvișuri care pot fi puse pe un platou este 6, adică cel mai mare dintre divizorii comuni ai numerelor 18 și 24.

În particular, se observă că orice alt divizor comun al numerelor 18 și 24 este divizor al lui 6.

De reținut

Cel mai mare divizor comun a două numere naturale a și b, nu ambele nule, este numărul natural d care are proprietățile:

a d divide a și d divide b;

b d este divizibil cu orice divizor comun al numerelor a și b.

Proprietățile de mai sus arată că, de fapt, cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b este cel mai mare număr natural d care divide numerele a și b.

Se notează $d = (a, b)$ sau, folosind prescurtări, $d =$ c.m.m.d.c.(a, b).

Exemple

nr.	divizori	divizori comuni	c.m.m.d.c.
5	1, 5	1	(5,13) = 1
13	1, 13		
5	1, 5	1	(5,8) = 1
8	1, 2, 4, 8		
7	1, 7	1, 7	(7,35) = 7
35	1, 5, 7, 35		

nr.	divizori	divizori comuni	c.m.m.d.c.
15	1, 3, 5, 15	1, 3, 5, 15	(15,30) = 15
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30		
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	1, 3, 9	(18,27) = 9
27	1, 3, 9, 27		
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	1, 2, 3, 4, 6, 12	(24,36) = 12
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36		

Observații

Analizând exemplele de mai sus, se constată că au loc următoarele proprietăți, general valabile:

1 Dacă a și b sunt două numere naturale astfel încât $a \mid b$, unde $a \neq 0$, atunci $(a, b) = a$.

2 Dacă p este un număr prim și a este un număr natural oarecare, atunci:

$$(p,a) = \begin{cases} p, \text{ dacă } a \text{ este multiplu de } p \\ 1, \text{ dacă } a \text{ nu este multiplu de } p \end{cases}.$$

3 Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar x și y sunt numere naturale astfel încât $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$ (x și y sunt câturile împărțirilor lui a și b la d), atunci cel mai mare divizor comun al numerelor x și y este egal cu 1.

În mod similar, prin cel mai mare divizor comun a trei sau mai multe numere naturale înțelegem acel divizor comun care se divide cu toți divizorii numerelor date. Din acest motiv, el este cel mai mare număr natural care divide numerele date.

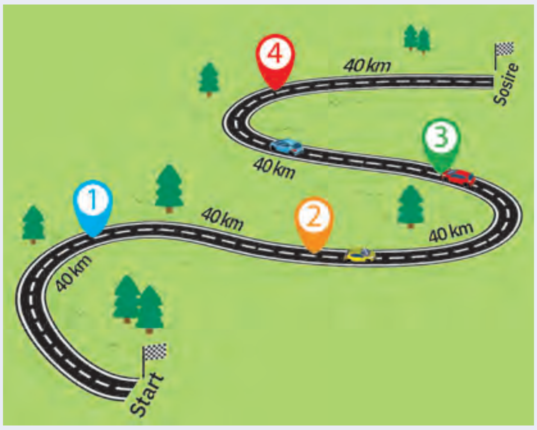
Exemplu:

Privind tabelul de mai sus și comparând listele divizorilor, deducem că:

- cel mai mare divizor comun al numerelor 24, 30 și 36 este 6.
- cel mai mare divizor comun al numerelor 15, 24, 27 și 36 este 3.

4.2. Amplificarea fracțiilor

Mate practică



La Raliul Carpaților, traseul primei etape este împărțit, prin 4 puncte de control, în 5 sectoare de câte 40 de kilometri fiecare, ca în imaginea alăturată. Pilotul preferat al lui Horia se află la al treilea punct de control.

Horia: *Până acum a parcurs trei sectoare din cele cinci ale traseului, adică* $\frac{3}{5}$ *din drumul total.*

Ioana: *Ai putea spune și astfel: întrucât* $5 \cdot 40 = 200$ *și* $3 \cdot 40 = 120$, *până acum a parcurs 120 km din cei 200 km ai traseului, adică* $\frac{120}{200}$ *din traseul total.*

Ce observăm?

Fracția $\frac{120}{200}$ este echivalentă cu fracția $\frac{3}{5}$ (ambele reprezintă aceeași porțiune a traseului) și poate fi obținută din aceasta înmulțind atât numărătorul cât și numitorul cu numărul natural 40. Spunem că fracția $\frac{120}{200}$ s-a obținut prin *amplificarea* fracției $\frac{3}{5}$ cu 40. Așadar, are loc egalitatea:

$$\frac{3}{5}=\frac{40\cdot3}{40\cdot5}=\frac{120}{200}.$$

De reținut

A *amplifica* o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a înmulți atât numărătorul, cât și numitorul fracției date cu acel număr.

Numărul natural cu care se amplifică se scrie mic, sus, în stânga fracției care se amplifică, despărțit printr-o paranteză.

Astfel, dacă a, b, n sunt numere naturale, cu $b, n \neq 0$, notăm:

$$^{n)}\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{n\cdot b}.$$

Prin amplificare se obține o fracție echivalentă cu cea dată, deoarece $a \cdot (n \cdot b) = b \cdot (n \cdot a)$.

Exemple

1 $^{2)}\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{2\cdot5}=\frac{8}{10}$;

2 $^{4)}\frac{12}{25}=\frac{4\cdot12}{4\cdot25}=\frac{48}{100}$;

3 $^{7)}\frac{5}{11}=\frac{7\cdot5}{7\cdot11}=\frac{35}{77}$;

4 $^{6)}\frac{3}{10}=\frac{6\cdot3}{6\cdot10}=\frac{18}{60}$;

5 $^{5)}\frac{7}{12}=\frac{5\cdot7}{5\cdot12}=\frac{35}{60}$;

6 $^{4)}\frac{8}{15}=\frac{4\cdot8}{4\cdot15}=\frac{32}{60}$.

4.3. Simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

Mate practică

Horia: *Din cei 30 de lei pe care îi aveam, am cheltuit 20 de lei pe un album cu formația mea preferată.*

Ioana: *Mai simplu, albumul a costat două treimi din suma pe care o aveai.*

Ce observăm?

Suma cheltuită reprezintă $\frac{20}{30}$, cât și $\frac{2}{3}$ din suma totală (cele două fracții sunt echivalente).

Fracția $\frac{2}{3}$ se obține prin împărțirea numărătorului și a numitorului fracției $\frac{20}{30}$ la 10, deci avem:

$$\frac{20}{30}=\frac{20:10}{30:10}=\frac{2}{3}.$$

Spunem că fracția $\frac{2}{3}$ s-a obținut prin *simplificarea* fracției $\frac{20}{30}$ cu numărul natural 10.

De reținut

A *simplifica* o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a împărți atât numărătorul, cât și numitorul fracției date cu acel număr.

Numărul natural prin care se efectuează simplificarea este un divizor comun, diferit de 1, al numărătorului și numitorului fracției date. Fracția obținută după simplificare este echivalentă cu cea dată.

Numărul natural cu care se simplifică se notează mic, sus, în dreapta fracției care se simplifică, despărțit printr-o paranteză. Astfel, dacă a, b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, iar $d \neq 1$ este un divizor comun al numerelor a și b, vom scrie:

$$\frac{a^{(d}}{b}=\frac{a:d}{b:d}.$$

Exemple

1 $\frac{10^{(2}}{18}=\frac{10:2}{18:2}=\frac{5}{9}$; **2** $\frac{42^{(7}}{49}=\frac{42:7}{49:7}=\frac{6}{7}$; **3** $\frac{99^{(9}}{909}=\frac{99:9}{909:9}=\frac{11}{101}$;

4 $\frac{24^{(3}}{36}=\frac{24:3}{36:3}=\frac{8}{12}$; **5** $\frac{24^{(4}}{36}=\frac{24:4}{36:4}=\frac{6}{9}$; **6** $\frac{24^{(6}}{36}=\frac{24:6}{36:6}=\frac{4}{6}$.

De reținut

O fracție care nu se poate simplifica prin niciun număr natural se numește *fracție ireductibilă*.

O fracție se numește *reductibilă* dacă se poate simplifica.

O fracție este ireductibilă dacă cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului fracției este egal cu 1.

Exemple

Fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{22}, \frac{24}{25}, \frac{25}{27}$ sunt ireductibile.

Fracțiile $\frac{6}{8}$ și $\frac{12}{18}$ sunt reductibile, deoarece se pot simplifica prin 2.

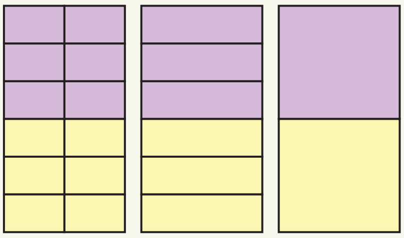
Observații

1 Pentru a obține fracții ireductibile din fracții ordinare date, simplificăm fracția prin cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului.

Exemplu: Cel mai mare divizor comun al numerelor 50 și 75 este 25, deci $\frac{50^{(25}}{75}=\frac{50:25}{75:25}=\frac{2}{3}$.

2 Alternativ, pentru a obține o fracție ireductibilă, putem simplifica fracția, succesiv, prin divizori comuni ai numărătorului și numitorului, până când aceasta nu se mai poate simplifica. Această metodă este foarte utilă când numărătorul și numitorul au valori mai mari.

Exemplu: $\frac{504^{(2}}{840}=\frac{252^{(2}}{420}=\frac{126^{(2}}{210}=\frac{63^{(3}}{105}=\frac{21^{(7}}{35}=\frac{3}{5}$.



$$\frac{6^{(2}}{12}=\frac{3^{(3}}{6}=\frac{1}{2}$$

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n+5}{12}$ este subunitară și ireductibilă.

Rezolvare:
Fracția $\frac{n+5}{12}$ este subunitară dacă $n+5<12$, adică n ia una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5 sau 6, valori pentru care verificăm dacă fracția este sau nu ireductibilă. Obținem $n=0$, $n=2$ sau $n=6$, pentru care fracțiile ireductibile corespunzătoare sunt $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ și $\frac{11}{12}$.

2 Prin amplificarea unei fracții cu un anumit număr natural s-a obținut fracția $\frac{30}{72}$. Determinați fracția.

Rezolvare:
Întrucât operația inversă amplificării este simplificarea, vom determina prin ce numere se poate simplifica fracția $\frac{30}{72}$ și care sunt fracțiile ce se pot obține. Divizorii comuni ai numerelor 30 și 72 sunt 2, 3 și 6, deci au loc simplificările: $\frac{{}^{(2}30}{72}=\frac{15}{36}$, $\frac{{}^{(3}30}{72}=\frac{10}{24}$ și $\frac{{}^{(6}30}{72}=\frac{5}{12}$. Așadar, fracția din enunț poate fi $\frac{5}{12}$, $\frac{10}{24}$ sau $\frac{15}{36}$.

Probleme propuse

1 Amplificați cu 4 următoarele fracții:

a $\frac{1}{5}$; **b** $\frac{4}{7}$; **c** $\frac{2}{25}$; **d** $\frac{29}{10}$; **e** $\frac{17}{50}$; **f** $\frac{35}{12}$.

2 Amplificați cu 6 următoarele fracții:

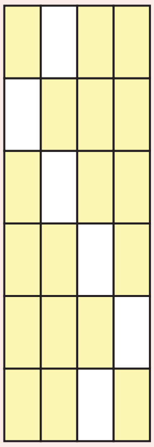
a $\frac{3}{2}$; **b** $\frac{2}{7}$; **c** $\frac{11}{3}$; **d** $\frac{4}{9}$; **e** $\frac{16}{25}$; **f** $\frac{11}{36}$.

3 Simplificați prin 3 fracțiile:

a $\frac{3}{21}$; **b** $\frac{12}{15}$; **c** $\frac{27}{6}$; **d** $\frac{39}{72}$; **e** $\frac{66}{99}$; **f** $\frac{36}{96}$.

4 Simplificați prin 5 fracțiile:

a $\frac{5}{10}$; **b** $\frac{10}{25}$; **c** $\frac{50}{15}$; **d** $\frac{40}{90}$; **e** $\frac{60}{75}$; **f** $\frac{25}{100}$.



5 Dreptunghiul alăturat este împărțit în părți egale, dintre care unele sunt colorate.

a Precizați care dintre următoarele fracții este echivalentă cu aria necolorată:
$\frac{6}{20}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{15}{50}$; $\frac{24}{84}$.

b Precizați care dintre următoarele fracții nu este echivalentă cu aria colorată:
$\frac{9}{12}$; $\frac{16}{20}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{36}{48}$; $\frac{24}{32}$.

6 Cu ce număr natural trebuie amplificată:

a fracția $\frac{3}{4}$ pentru a obține numărătorul 12?

b fracția $\frac{25}{10}$ pentru a obține numitorul 100?

7 Cu ce număr natural trebuie simplificată:

a fracția $\frac{25}{40}$ pentru a obține numărătorul 5?

b fracția $\frac{33}{84}$ pentru a obține numitorul 28?

8 Identificați care dintre următoarele fracții sunt ireductibile:
a $\frac{1}{18}$; **b** $\frac{8}{11}$; **c** $\frac{12}{10}$; **d** $\frac{49}{64}$; **e** $\frac{39}{52}$; **f** $\frac{25}{27}$.

9 Simplificați fracțiile următoare pentru a obține fracții ireductibile:
a $\frac{6}{24}$; **b** $\frac{35}{15}$; **c** $\frac{36}{60}$; **d** $\frac{35}{70}$; **e** $\frac{84}{48}$; **f** $\frac{64}{200}$.

10 Determinați numerele naturale n pentru care sunt îndeplinite, în fiecare caz indicat, condițiile:
a fracția $\frac{3n+1}{20}$ este subunitară și ireductibilă; **b** fracția $\frac{18}{n+3}$ este supraunitară și reductibilă.

11 **a** Determinați fracțiile de forma $\frac{\overline{64a}}{885}$ care se simplifică prin 5.

b Determinați fracțiile de forma $\frac{\overline{11a2}}{\overline{2b70}}$ care se pot obține în urma unei operații de amplificare cu 3.

12 Horia a scris pe tablă o fracție, iar Ioana a amplificat-o cu un număr natural. Radu a șters tabla, lăsând doar rezultatul obținut în urma amplificării: $\frac{18}{36}$. Ce fracție a scris Horia?

Investigație

1 Două numere naturale se numesc *prime între ele* (sau *relativ prime*) dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.
- **a** Verificați, prin câte trei exemple, valabilitatea afirmațiilor:
  - **(i)** Orice două numere naturale consecutive sunt prime între ele.
  - **(ii)** Orice două numere naturale impare consecutive sunt prime între ele.
- **b** Dezbateți și argumentați, cu colegii sau împreună cu profesorul, dacă afirmațiile precedente sunt valabile în cazul general.

2 Pe baza afirmațiilor de la exercițiul 1 argumentați dacă:
- **a** O fracție în care numărătorul și numitorul sunt numere naturale consecutive este ireductibilă.
- **b** O fracție în care numărătorul și numitorul sunt numere impare consecutive este ireductibilă.

3 Decideți, folosindu-vă eventual de discuțiile purtate, dacă:
a fracțiile $\frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{16}{15}, \frac{100}{99}$ sunt ireductibile; **b** fracțiile $\frac{3}{5}, \frac{9}{11}, \frac{23}{25}, \frac{51}{49}, \frac{101}{99}$ sunt ireductibile.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Amplificând cu 5 fracția $\frac{15}{20}$, se obține fracția: **A** $\frac{3}{4}$; **B** $\frac{20}{25}$; **C** $\frac{75}{100}$; **D** $\frac{10}{15}$.

2 Simplificând fracția $\frac{48}{18}$, nu se poate obține fracția: **A** $\frac{24}{9}$; **B** $\frac{16}{6}$; **C** $\frac{8}{3}$; **D** $\frac{4}{1}$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră fracțiile de forma $\frac{\overline{a2}}{\overline{2b}}$.
- **a** Dacă $a = 1$, atunci determină valorile lui b, astfel încât fracția să se poată simplifica.
- **b** Dacă $b = 4$, atunci determină a, știind că cel mai mare divizor comun al termenilor fracției este 6.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: **30 de minute**

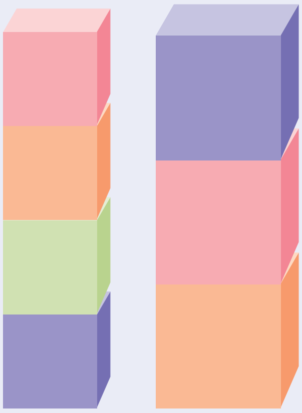
Lecția 5: Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

5.1. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale

Mate practică

Fratele lui Horia ar dori să construiască două turnuri la fel de mari: un turn format doar din piese cu înălțimea de 6 cm, iar celălalt turn din piese cu înălțimea de 8 cm. Care este înălțimea minimă a turnurilor?

Răspuns:
Înălțimea minimă este cel mai mic număr nenul care se împarte exact la fiecare dintre înălțimile celor două tipuri de piese; altfel spus, este cel mai mic dintre *multiplii comuni* ai numerelor 6 și 8.
Multiplii lui 6 sunt: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54, 60, 66, **72**, 78, 84,...
Multiplii lui 8 sunt: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, 80, 88,...
Turnurile construite de Horia au înălțimea minimă de 24 cm.
În particular, se observă că orice alt multiplu comun al numerelor 6 și 8 este multiplu de 24.



De reținut

Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale a și b este numărul natural m care are proprietățile:

a a divide m și b divide m;
b m divide orice multiplu comun al numerelor a și b.

Proprietățile de mai sus arată că cel mai mic multiplu comun a două numere naturale nenule a și b este cel mai mic număr natural *diferit de* 0 care se divide cu a și b.

Se notează $m = [a, b]$ sau $m =$ c.m.m.m.c. (a, b).

Exemple

nr.	multiplii nenuli	c.m.m.m.c.
3	3, 6, 9, 12, **15**, 18,...	$[3, 5] = 15$
5	5, 10, **15**, 20, 25,...	
6	6, 12, **18**, 24,...	$[6, 18] = 18$
18	**18**, 36, 54,...	

nr.	multiplii nenuli	c.m.m.m.c.
4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, **36**, ...	$[4, 9] = 36$
9	9, 18, 27, **36**, 45, ...	
12	12, 24, 36, 48, 60, 72, **84**, 96, ...	$[12, 28] = 84$
28	28, 56, **84**, 112, ...	

Observații

Analizând exemplele de mai sus, se constată că au loc următoarele proprietăți, valabile în caz general:

1 Deși 0 este un multiplu comun a oricăror numere nenule a și b, el nu este cel mai mic multiplu comun, deoarece 0 nu divide nici un alt multiplu al numerelor a și b (0 nu verifică proprietatea **b** de mai sus).

2 Dacă a și b sunt două numere naturale astfel încât $a \mid b$, unde $a \neq 0$, atunci $[a, b] = b$.

3 Dacă cel mai mare divizor comun a două numere este egal cu 1 (altfel spus, dacă două numere sunt *prime între ele*), atunci cel mai mic multiplu comun al celor două numere este produsul lor.

4 Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$, atunci cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este egal cu $d \cdot x \cdot y$.
Rezultă de aici că produsul dintre cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun a două numere naturale este egal cu produsul celor două numere: $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$.

5 În mod similar, prin cel mai mic multiplu comun a trei sau mai multe numere naturale nenule înțelegem cel mai mic număr natural nenul care se divide cu toate numerele date.

Exemplu:
Privind tabelul de mai sus și comparând listele multiplilor, deducem că:
- cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 4 și 12 este 12;
- cel mai mic multiplu comun al numerelor 6, 9, 12 și 18 este 36.

5.2. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

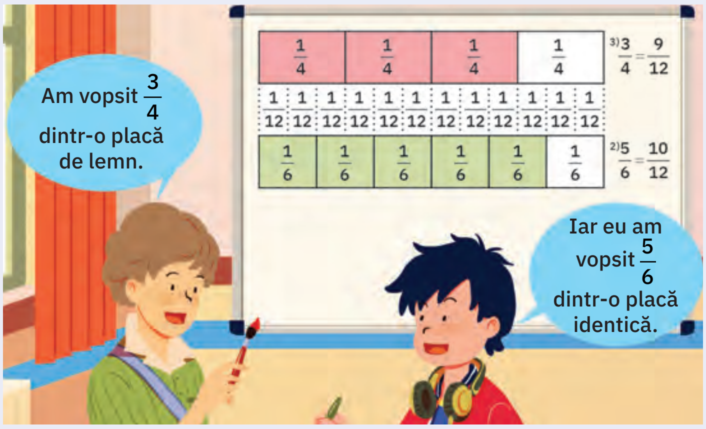
Mate practică

Horia și Radu sunt la ora de activități practice. Observați imaginea alăturată, apoi determinați care dintre cei doi băieți a vopsit mai mult.

Analiză:
Formăm fracții echivalente cu cele date, care să aibă numitori egali, astfel încât să le putem compara.

Avem $^{3)}\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, respectiv $^{2)}\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ și, întrucât $\frac{9}{12}<\frac{10}{12}$, rezultă că $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$.

În concluzie, Radu a vopsit mai mult decât Horia.



De reținut

Prin *aducerea la un numitor comun* (sau *aducerea la același numitor*) a două sau mai multe fracții se înțelege procedeul prin care se obțin fracții cu numitori egali, echivalente cu cele date.
Pentru a aduce două fracții la un numitor comun, se parcurg, de regulă, următorii pași:

- se simplifică fiecare fracție până devine ireductibilă;
- se calculează cel mai mic multiplu comun al numitorilor, adică cel mai mic numitor comun la care pot fi aduse fracțiile date;
- se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre cel mai mic multiplu comun al numitorilor și numitorul fracției respective.

Exemple

fracția	forma ireductibilă	cel mai mic numitor comun	factorul de amplificare	aducerea la același numitor
$\frac{10}{12}$	$\frac{10^{(2}}{12}=\frac{5}{6}$	$[6,15]=30$	$30:6=5$	$^{5)}\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$
$\frac{12}{45}$	$\frac{12^{(3}}{45}=\frac{4}{15}$		$30:15=2$	$^{2)}\frac{4}{15}=\frac{8}{30}$
$\frac{32}{40}$	$\frac{32^{(8}}{40}=\frac{4}{5}$	$[5,11]=55$	$55:5=11$	$^{11)}\frac{4}{5}=\frac{44}{55}$
$\frac{18}{66}$	$\frac{18^{(6}}{66}=\frac{3}{11}$		$55:11=5$	$^{5)}\frac{3}{11}=\frac{15}{55}$

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Scrieți două fracții ireductibile cuprinse între $\frac{2}{3}$ și $\frac{11}{12}$.

Rezolvare:
Pentru a putea aplica criterii de comparație, vom aduce cele două fracții la același numitor. Deoarece $[3,12]=12$, cel mai mic numitor comun este 12. Cum $^{4)}\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, trebuie să găsim două fracții cuprinse între $\frac{8}{12}$ și $\frac{11}{12}$. Observând că $\frac{8}{12}<\frac{9}{12}<\frac{10}{12}<\frac{11}{12}$ și $\frac{9^{(3}}{12}=\frac{3}{4}$, respectiv $\frac{10^{(2}}{12}=\frac{5}{6}$, putem lua, ca soluții, fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{6}$.

2 La săritura în lungime, Horia a sărit mai întâi $3\frac{1}{2}$ metri, apoi $3\frac{2}{5}$ metri, iar a treia oară a sărit $3\frac{5}{6}$ metri. Stabiliți care a fost cea mai lungă săritură.

Rezolvare:
Avem $^{15)}\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, $^{6)}\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$ și $^{5)}\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$. Cum $12<15<25$, rezultă $\frac{12}{30}<\frac{15}{30}<\frac{25}{30}$, de unde $3\frac{2}{5}<3\frac{1}{2}<3\frac{5}{6}$, deci a treia săritură a fost cea mai lungă.

Probleme propuse

1 Pentru fiecare dintre următoarele perechi de fracții, verificați că numitorul uneia dintre fracții este divizor al numitorului celeilalte fracții, apoi aduceți fracțiile la un numitor comun:
a $\frac{1}{2}$ și $\frac{5}{6}$; **b** $\frac{1}{4}$ și $\frac{3}{8}$; **c** $\frac{4}{21}$ și $\frac{13}{84}$; **d** $\frac{5}{16}$ și $\frac{49}{96}$.

2 Observând că numitorii următoarelor perechi de fracții au cel mai mare divizor comun egal cu 1, aduceți-le la cel mai mic numitor comun și apoi stabiliți care dintre ele este mai mare:
a $\frac{1}{2}$ și $\frac{7}{15}$; **b** $\frac{3}{4}$ și $\frac{16}{25}$; **c** $\frac{3}{14}$ și $\frac{2}{9}$; **d** $\frac{7}{12}$ și $\frac{8}{5}$.

3 Indicați, pentru fiecare dintre perechile de fracții următoare, cel mai mic multiplu comun al numitorilor și aduceți fracțiile la un numitor comun:
a $\frac{1}{10}$ și $\frac{11}{15}$; **b** $\frac{5}{12}$ și $\frac{9}{20}$; **c** $\frac{7}{18}$ și $\frac{8}{27}$; **d** $\frac{3}{14}$ și $\frac{5}{49}$.

4 Scrieți fracțiile următoare sub forma ireductibilă, apoi aduceți fracțiile obținute la un numitor comun:
a $\frac{6}{12}$ și $\frac{14}{21}$; **b** $\frac{5}{20}$ și $\frac{22}{55}$; **c** $\frac{9}{27}$ și $\frac{9}{36}$; **d** $\frac{48}{60}$ și $\frac{32}{56}$.

5 Într-un turneu, mai multe echipe au jucat același număr de meciuri. Dintre partidele jucate de fiecare, echipa roșie a câștigat $\frac{7}{10}$, echipa galbenă a câștigat $\frac{2}{3}$, iar echipa albastră a câștigat $\frac{4}{5}$.
Stabiliți care echipă a câștigat cele mai puține meciuri.

6 Aduceți la același numitor, apoi ordonați crescător fracțiile:
a $\frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}$; **b** $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{20}{24}$; **c** $\frac{11}{12}, \frac{6}{16}, \frac{25}{30}$; **d** $3\frac{1}{6}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}$.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dintre fracțiile $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ și $\frac{5}{12}$, mai mare este fracția: **A** $\frac{2}{3}$; **B** $\frac{3}{4}$; **C** $\frac{4}{5}$; **D** $\frac{5}{12}$.

2 Un numitor comun al fracțiilor $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}$ și $\frac{7}{15}$ este: **A** 25; **B** 20; **C** 30; **D** 40.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Trei copii au comandat câte o pizza. Primul copil a mâncat $\frac{5}{8}$ din ea, iar al doilea copil a mâncat $\frac{3}{4}$.

a Cine a mâncat mai puțin, dintre cei doi copii?

b Al treilea copil a mâncat $\frac{a}{16}$ din pizza. Determină numărul natural a, știind că al treilea copil a mâncat cel mai mult.

Grila de evaluare:

Subiectul 1	Subiectul 2	Subiectul 3		Oficiu	Total
2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 6: Adunarea și scăderea fracțiilor

6.1. Adunarea și scăderea fracțiilor cu același numitor

Mate practică

Dintr-o ruladă împărțită în porții identice, Horia a mâncat $\frac{2}{9}$, iar Radu a mâncat cu $\frac{1}{9}$ mai mult.

Ce fracție din ruladă reprezintă bucata rămasă?

Rezolvare:

Ne amintim, din clasele anterioare, că pentru a efectua suma a două fracții cu același numitor, se adună numărătorii și se păstrează numitorul comun. Astfel, obținem că:

- porția lui Radu reprezintă $\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$ din ruladă;
- împreună, cei doi băieți au mâncat $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$ din ruladă.

Asemănător, pentru a afla diferența a două fracții cu același numitor, se scad numărătorii și se păstrează numitorul comun. Scriind întregul ca pe o fracție echiunitară cu numitorul 9, fracția din ruladă reprezentată de bucata rămasă este $\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

De reținut

Suma a două fracții cu același numitor este fracția al cărei numărător este egal cu suma numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții:

$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$ pentru orice numere naturale a, b, n, cu $n \geq 1$.

Diferența a două fracții cu același numitor este fracția al cărei numărător este egal cu diferența numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții:

$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$ pentru orice numere naturale a, b, n, cu $n \geq 1$.

Altfel spus, folosind un limbaj simplificat:

- pentru a aduna două fracții cu același numitor, se adună numărătorii și se păstrează numitorul;
- pentru a scădea două fracții cu același numitor, se scad numărătorii și se păstrează numitorul.

Exemple

1 $\frac{5}{11}+\frac{16}{11}=\frac{5+16}{11}=\frac{21}{11}$;

2 $\frac{7}{18}+\frac{5}{18}=\frac{7+5}{18}=\frac{12^{(6}}{18}=\frac{2}{3}$;

3 $\frac{7}{31}-\frac{5}{31}=\frac{7-5}{31}=\frac{2}{31}$;

4 $\frac{17}{8}-\frac{5}{8}=\frac{17-5}{8}=\frac{12^{(4}}{8}=\frac{3}{2}$.

Observații

1 Egalitatea $\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$ reprezintă *descompunerea numărului* $\frac{a+b}{n}$ *ca o sumă de două fracții* (se distribuie numitorul fiecăruia din termenii sumei de la numărător).

Exemple:

1 $\frac{16+9}{7}=\frac{16}{7}+\frac{9}{7}$;

2 $\frac{17}{23}=\frac{10+7}{23}=\frac{10}{23}+\frac{7}{23}$.

2 Egalitatea $\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$ reprezintă *descompunerea numărului* $\frac{a-b}{n}$ *ca diferență de două fracții* (se distribuie numitorul fiecăruia din termenii diferenței de la numărător).

Exemple:

1 $\frac{12-4}{5}=\frac{12}{5}-\frac{4}{5}$;

2 $\frac{37}{11}=\frac{40-3}{11}=\frac{40}{11}-\frac{3}{11}$.

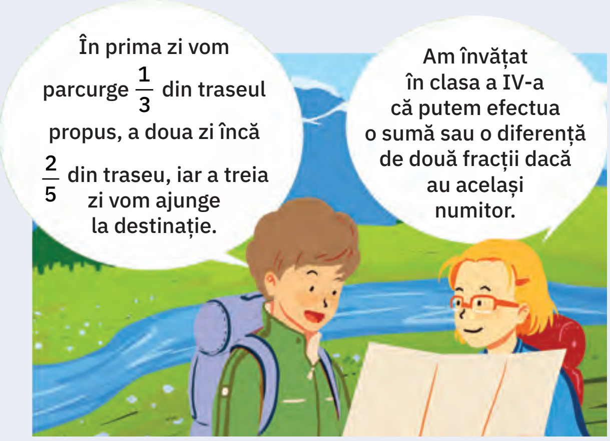
6.2. Adunarea și scăderea fracțiilor cu numitori diferiți

Mate practică

Horia și Ioana pleacă în drumeție. Observați imaginea alăturată și răspundeți la întrebări.

a Ce parte din traseu reprezintă distanța parcursă în primele două zile?

b Ce parte din traseu au parcurs în a treia zi?



${}^{5)}\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ ${}^{2)}\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$

Analiză:

Vom aduce la un numitor comun fracțiile care exprimă distanțele parcurse în cele două zile. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 3 și 5 este 15, deci:

- în prima zi au parcurs ${}^{5)}\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ din traseu;
- a doua zi au parcurs ${}^{2)}\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ din traseu;
- întregul traseu poate fi scris sub forma $1=\frac{15}{15}$.

Rezolvare:

a $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$, deci în primele două zile au parcurs $\frac{11}{15}$ din traseul propus;

b $\frac{1}{1}-\frac{11}{15}=\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$, deci în a treia zi au parcurs $\frac{4}{15}$ din traseul propus.

De reținut

Pentru a aduna, respectiv pentru a scădea două fracții cu numitori diferiți, se procedează astfel:

- se aduc mai întâi fracțiile la un numitor comun;
- se adună, respectiv se scad, fracțiile obținute folosind regulile de adunare, respectiv de scădere, a fracțiilor cu același numitor.

Exemplu

Pentru a calcula suma, respectiv diferența fracțiilor $\frac{7}{15}$ și $\frac{5}{12}$, procedăm astfel:

a determinăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor: $[12,15]=60$;

b amplificăm fracția $\frac{7}{15}$ cu câtul dintre 60 și 15, adică cu 4, și obținem ${}^{4)}\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$.

c amplificăm fracția $\frac{5}{12}$ cu câtul dintre 60 și 12, adică cu 5, și obținem ${}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$.

d Suma fracțiilor $\frac{7}{15}$ și $\frac{5}{12}$ este suma fracțiilor $\frac{28}{60}$ și $\frac{25}{60}$, adică $\frac{25}{60}+\frac{28}{60}=\frac{53}{60}$.

e Diferența fracțiilor $\frac{7}{15}$ și $\frac{5}{12}$ este diferența fracțiilor $\frac{28}{60}$ și $\frac{25}{60}$, adică $\frac{28}{60}-\frac{25}{60}=\frac{3^{(3}}{60}=\frac{1}{20}$.

Pe scurt, calculele se organizează astfel:

${}^{4)}\frac{7}{15}+{}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{28}{60}+\frac{25}{60}=\frac{53}{60}$; ${}^{4)}\frac{7}{15}-{}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{28}{60}-\frac{25}{60}=\frac{3^{(3}}{60}=\frac{1}{20}$.

Observații

Uneori, înainte de a aduce fracțiile la același numitor, este de preferat să le simplificăm pentru a obține fracții ireductibile.

Exemplu: $\frac{1\,212^{(101}}{1\,313}+\frac{143^{(13}}{169}=\frac{12}{13}+\frac{11}{13}=\frac{23}{13}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Pe toată suprafața cultivată a unei ferme, s-au repartizat culturile astfel: grâu $\frac{3}{14}$ din suprafață, porumb $\frac{11}{56}$ din suprafață, floarea-soarelui $\frac{2}{7}$, iar legume pe restul de suprafață.

a Cât reprezintă suprafața cultivată cu grâu și porumb la un loc?
b Cât reprezintă suprafața cultivată cu legume?

Rezolvare:

a Întrucât cel mai mic multiplu comun al numerelor 14 și 56 este 56, suprafețele cultivate cu grâu și porumb ocupă, împreună, $^{4)}\frac{3}{14}+\frac{11}{56}=\frac{12}{56}+\frac{11}{56}=\frac{23}{56}$ din suprafața totală.

b Cu grâu, porumb și floarea-soarelui este ocupată $\frac{3}{14}+\frac{11}{56}+\frac{2}{7}=\frac{12}{56}+\frac{11}{56}+\frac{16}{56}=\frac{39}{56}$, deci suprafața cultivată cu legume reprezintă $\frac{56}{56}-\frac{39}{56}=\frac{17}{56}$ din întreaga suprafață.

2 Suma a două fracții ireductibile ce au același numitor este o fracție echiunitară. Determinați cele două fracții, știind că unul dintre numărători este dublul celuilalt.

Rezolvare:

Cele două fracții au forma $\frac{a}{b}$, respectiv $\frac{2a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale nenule. Suma lor este $\frac{a}{b}+\frac{2a}{b}=\frac{3a}{b}$, care este o fracție echiunitară dacă $b=3a$. Fracțiile cerute sunt $\frac{a}{3a}^{(a}=\frac{1}{3}$ și $\frac{2a}{3a}^{(a}=\frac{2}{3}$.

Probleme propuse

1 Efectuați următoarele adunări și scăderi de fracții cu același numitor:

a $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$; **b** $\frac{6}{13}+\frac{2}{13}$; **c** $\frac{22}{15}-\frac{9}{15}$; **d** $\frac{31}{21}-\frac{11}{21}$.

2 Observând că numitorul uneia dintre fracții este divizor al numitorului celeilalte fracții, efectuați:

a $\frac{4}{15}+\frac{2}{3}$; **b** $\frac{16}{93}+\frac{6}{31}$; **c** $\frac{7}{32}-\frac{1}{16}$; **d** $\frac{23}{42}-\frac{5}{14}$.

3 Efectuați operațiile, scriind rezultatul sub forma unei fracții ireductibile:

a $\frac{5}{12}+\frac{5}{24}$; **b** $\frac{26}{21}+\frac{13}{14}$; **c** $\frac{4}{15}+\frac{3}{20}$; **d** $\frac{5}{24}+\frac{1}{12}+\frac{3}{8}$;

e $\frac{7}{30}-\frac{3}{20}$; **f** $\frac{8}{15}-\frac{9}{20}$; **g** $\frac{8}{21}-\frac{4}{35}$; **h** $\frac{7}{6}-\frac{3}{4}-\frac{1}{12}$.

4 Efectuați calculele, și, dacă este cazul, aduceți rezultatul la forma ireductibilă și scoateți întregii din fracția rezultată:

a $2\frac{1}{7}+1\frac{3}{7}$; **b** $1\frac{2}{5}+3\frac{1}{10}$; **c** $3\frac{1}{3}+2\frac{2}{5}$; **d** $3\frac{5}{21}+1\frac{7}{12}$;

e $5\frac{5}{6}-1\frac{1}{6}$; **f** $4\frac{5}{18}-3\frac{1}{9}$; **g** $7\frac{1}{7}-4\frac{2}{3}$; **h** $9\frac{2}{3}-8\frac{1}{4}$.

5 Efectuați:

a $\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$; **b** $\frac{7}{36}-\frac{1}{18}+\frac{3}{4}$; **c** $\frac{37}{18}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$; **d** $\frac{11}{18}-\frac{4}{9}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$.

6 Într-o grădină, merii reprezintă $\frac{8}{17}$, iar caișii reprezintă $\frac{4}{17}$ din numărul total de pomi. Restul grădinii este cultivat cu pruni. Ce fracție reprezintă prunii din numărul total de pomi?

7 Dintr-un balot de pânză, într-o zi, s-a vândut: dimineața 4 metri și încă $\frac{7}{10}$ metri, iar după amiază, $8\frac{1}{5}$ metri. Determinați lungimea totală a pânzei vândute în acea zi.

8 Pentru un proiect la biologie, Horia, Radu și Ioana experimentează creșterea plantelor în diferite tipuri de soluri. Rezultatele obținute le-au trecut în tabelul alăturat. Determinați care a fost creșterea totală de-a lungul celor două săptămâni, pentru fiecare tip de sol.

Creșterea plantelor

Perioada	Solul A	Solul B	Solul C
Săptămâna 1	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{1}{3}$ cm	$\frac{1}{4}$ cm
Săptămâna 2	$\frac{7}{12}$ cm	$\frac{3}{4}$ cm	$\frac{3}{12}$ cm

9 Dintr-un vas plin cu ulei, cu capacitatea de $25\frac{3}{4}$ litri, s-au scos $18\frac{5}{6}$ litri de ulei. Ce cantitate de ulei a rămas în vas?

10 Suma a două fracții ce au același numărător este $1\frac{1}{7}$. Determinați cele două fracții, știind că unul dintre numitori este de trei ori mai mic decât celălalt.

Portofoliu

Egiptenii priveau numerele fracționare ca pe niște numere aparte, care reprezentau o anumită parte a unității. Ei utilizau numai așa-numitele fracții *alicote*, adică fracții cu numărătorul 1. Fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{35}$ sunt fracții alicote. Celelalte fracții le descompuneau în sumă de fracții alicote; de exemplu, fracția $\frac{5}{6}$ se poate reprezenta ca o sumă de fracții alicote, scriind $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

1 Scrieți toate fracțiile subunitare cu numărătorul cel mult egal cu 4 și numitorul cel mult egal cu 5 și identificați fracțiile alicote dintre acestea.

2 Fiecare dintre fracțiile scrise la cerința anterioară poate fi scrisă ca sumă de fracții alicote, astfel încât oricare doi termeni să aibă numitori diferiți. Scrieți aceste sume.

3 Folosiți internetul sau biblioteca pentru a afla mai multe despre scrierea fracțiilor și evoluția reprezentării fracțiilor din antichitate până în timpurile moderne.

Prezentați în clasă rezultatele găsite și dezbateți pe această temă.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $\frac{11}{25}+\frac{3}{50}$ este: **A** $\frac{14}{75}$; **B** $\frac{25}{100}$; **C** $\frac{33}{1\,250}$; **D** $\frac{1}{2}$.

2 Rezultatul calculului $\frac{17}{27}-\frac{4}{9}$ este: **A** $\frac{13}{18}$; **B** $\frac{13}{9}$; **C** $\frac{1}{3}$; **D** $\frac{5}{27}$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Un ciclist a parcurs în prima zi $\frac{5}{12}$ din tot drumul, iar în a doua zi a parcurs $\frac{1}{3}$ din tot drumul.

a Determină ce fracție din tot drumul a parcurs în cele două zile.
b Ce fracție din tot drumul i-a mai rămas de parcurs?

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 7: Înmulțirea fracțiilor

7.1. Înmulțirea unui număr natural cu o fracție ordinară

Mate practică

Fiecare sesiune de lucru de o oră consumă $\frac{2}{9}$ din bateria calculatorului portabil al lui Radu. Ce fracție din baterie se consumă după 4 sesiuni de lucru?

Răspuns:

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+2+2+2}{9}=\frac{4\cdot2}{9}=\frac{8}{9}.$$

Întrucât adunarea repetată are aceeași semnificație cu operația de înmulțire, putem scrie:

$$4\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4\cdot2}{9}=\frac{8}{9}.$$

De reținut

Produsul dintre un număr natural și o fracție este o fracție în care:
- numărătorul este produsul dintre numărul natural respectiv și numărătorul fracției date;
- numitorul este același cu numitorul fracției date.

$$n\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{b}, \text{ pentru orice numere naturale } a, b, n, \text{ unde } b\neq0.$$

Altfel spus, pentru a înmulți un număr natural cu o fracție ordinară, păstrăm numitorul și înmulțim numărul dat cu numărătorul.

Exemple

1 $6\cdot\frac{4}{35}=\frac{6\cdot4}{35}=\frac{24}{35}$; **2** $9\cdot\frac{8}{18}=\frac{72^{(18}}{18}=\frac{4}{1}=4$; **3** $6\cdot\frac{5}{36}=\frac{30^{(6}}{36}=\frac{5}{6}$.

7.2. Înmulțirea a două fracții ordinare

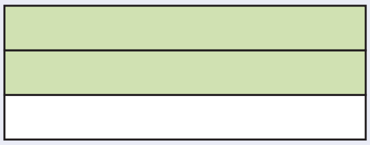
Mate practică

Horia are o tăviță de cuburi de gheață plină în proporție de $\frac{2}{3}$. El folosește $\frac{4}{5}$ din cuburi. Ce fracție din întreaga tăviță reprezintă cuburile folosite?

Analiză:

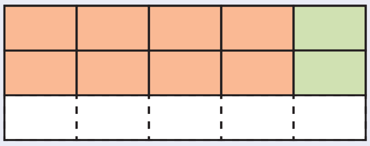
Pasul 1

Imaginându-ne tăvița sub forma unui dreptunghi, trasăm linii orizontale prin care împărțim dreptunghiul în trei părți egale și colorăm două părți, reprezentând partea plină a tăviței.



Pasul 2

Trasăm linii verticale prin care împărțim zona colorată în cinci părți egale, dintre care hașurăm patru, reprezentând fracția din tăviță folosită de Horia. Prelungind liniile, zona necolorată se împarte și ea în cinci părți egale.



În urma celei de-a doua secționări, dreptunghiul a fost împărțit în $3\times5=15$ părți egale, din care sunt hașurate $2\times4=8$ părți. Cuburile folosite de Horia ocupă $\frac{8}{15}$ din întreaga tăviță.

Observăm că $\frac{8}{15}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}$, deci putem scrie că $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15}$.

De reținut

Produsul a două fracții ordinare este o fracție în care:

- numărătorul este egal cu produsul numărătorilor celor două fracții date;
- numitorul este egal cu produsul numitorilor celor două fracții date.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}, \text{ pentru orice numere naturale } a, b, c, d, \text{ unde } b, d \neq 0.$$

Altfel spus, pentru a înmulți două fracții se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.

Exemple

1 $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{10}{21}$; **2** $\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot5}{15\cdot4}=\frac{10^{(10}}{60}=\frac{1}{6}$; **3** $\frac{9}{5}\cdot\frac{20}{27}=\frac{9\cdot20}{5\cdot27}=\frac{180^{(45}}{135}=\frac{4}{3}$.

Observații

1 **Simplificarea produsului.** Pentru calcule mai rapide, se recomandă să se efectueze simplificările înainte de a calcula produsul numitorilor sau al numărătorilor.
Termenii care se simplifică se barează cu o linie oblică, iar alăturat se scrie câtul obținut prin împărțirea la divizorul cu care se face simplificarea.

Exemple:

1 $\frac{5}{17}\cdot\frac{4}{5}=\frac{5\cdot4}{17\cdot5}=\frac{{}^{1}\cancel{5}\cdot4}{17\cdot\cancel{5}_{1}}=\frac{1\cdot4}{17\cdot1}=\frac{4}{17}$; **2** $\frac{9}{5}\cdot\frac{4}{27}=\frac{{}^{1}\cancel{9}}{5}\cdot\frac{4}{\cancel{27}_{3}}=\frac{1\cdot4}{5\cdot3}=\frac{4}{15}$.

2 **Înmulțirea cu numere mixte.** Atunci când unul dintre factorii unui produs este o fracție scrisă sub forma unui număr mixt, mai întâi se introduc întregii în fracție, apoi se efectuează înmulțirea. Dacă rezultatul este o fracție supraunitară, se pot scoate apoi întregii din fracție:

Exemple: **1** $14\cdot2\frac{5}{21}=14\cdot\frac{2\cdot21+5}{21}=\cancel{14}^{2}\cdot\frac{47}{\cancel{21}^{3}}=2\cdot\frac{47}{3}=\frac{94}{3}=31\frac{1}{3}$;

2 $4\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{33}=\frac{4\cdot5+2}{5}\cdot\frac{7}{33}=\frac{\cancel{22}^{2}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{33}_{3}}=\frac{2\cdot7}{5\cdot3}=\frac{14}{15}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați produsul dintre suma fracțiilor $2\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{3}$ și diferența fracțiilor $2\frac{1}{8}$ și $\frac{1}{4}$.

Rezolvare:

Suma fracțiilor $2\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{3}$ este $2\frac{1}{5}+2\frac{1}{3}=\frac{11}{5}+\frac{7}{3}=\frac{33}{15}+\frac{35}{15}=\frac{68}{15}$.

Diferența fracțiilor $2\frac{1}{8}$ și $\frac{1}{4}$ este $2\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{17}{8}-\frac{1}{4}=\frac{17}{8}-\frac{2}{8}=\frac{15}{8}$.

Produsul căutat este $\frac{68}{15}\cdot\frac{15}{8}=\frac{68^{(4}}{8}=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$.

2 Radu mai are $\frac{2}{3}$ din plăcinta preparată de mama lui. La desert, a servit $\frac{3}{8}$ din bucata rămasă. Ce fracție din plăcintă a mâncat? Cât din plăcintă reprezintă bucata rămasă?

Rezolvare:

La desert, Radu a mâncat $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot2^{(3\cdot2}}{8\cdot3}=\frac{1}{4}$.

Partea rămasă reprezintă $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$ din plăcintă.

Probleme propuse

1 Efectuați înmulțirile:

a $3\cdot\frac{2}{7}$; **b** $4\cdot\frac{7}{31}$; **c** $5\cdot\frac{11}{78}$; **d** $7\cdot\frac{13}{99}$;

e $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}$; **f** $\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{3}$; **g** $\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{8}$; **h** $\frac{4}{17}\cdot\frac{11}{5}$.

2 Efectuați înmulțirile, scriind rezultatul ca fracție ireductibilă:

a $16\cdot\frac{3}{40}$; **b** $14\cdot\frac{5}{84}$; **c** $\frac{2}{21}\cdot\frac{7}{5}$; **d** $\frac{12}{11}\cdot\frac{5}{36}$;

e $\frac{14}{27}\cdot\frac{9}{16}$; **f** $\frac{11}{65}\cdot\frac{13}{33}$; **g** $\frac{42}{35}\cdot\frac{25}{36}$; **h** $\frac{24}{35}\cdot\frac{14}{64}$.

3 Introduceți întregii în fracție, calculați și, unde este posibil, simplificați și scoateți întregii din fracția rezultată:

a $3\frac{1}{5}\cdot8\frac{3}{4}$; **b** $1\frac{2}{7}\cdot1\frac{13}{15}$; **c** $5\frac{5}{8}\cdot1\frac{7}{25}$; **d** $3\frac{3}{13}\cdot2\frac{11}{14}$.

4 Efectuați:

a $\frac{12}{20}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{22}$; **b** $\frac{22}{36}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{81}{11}$; **c** $\frac{50}{26}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{15}$; **d** $3\frac{1}{4}\cdot1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13}$.

5 Scrieți fiecare din fracțiile de mai jos ca produs de două fracții ireductibile:

a $\frac{18}{49}$; **b** $\frac{15}{28}$; **c** $\frac{1}{8}$; **d** $\frac{5}{7}$.

6 Ioana își organizează CD-urile. Încap 24 de CD-uri cu grosimea de $\frac{3}{2}$ cm într-o cutie cu înălțimea de 38 cm?

7 Pentru confecționarea unei perdele se folosesc $4\frac{3}{5}$ metri de material.

a Arătați că dintr-un un balot de 18 metri de material nu se pot confecționa 4 perdele.
b Este suficient un balot de 28 de metri de material pentru confecționarea a 6 perdele?

8 Determinați:

a produsul dintre numărul $\frac{13}{36}$ și suma numerelor $\frac{7}{26}$ și $\frac{1}{13}$;

b produsul dintre numărul $\frac{6}{31}$ și diferența numerelor $2\frac{1}{5}$ și $1\frac{1}{6}$.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $3\cdot\frac{7}{2}$ este: **A** $\frac{21}{6}$; **B** $\frac{21}{2}$; **C** $\frac{7}{6}$; **D** $\frac{13}{2}$.

2 Rezultatul calculului $2\frac{2}{5}\cdot3\frac{7}{2}$ este: **A** $6\frac{14}{10}$; **B** $5\frac{9}{7}$; **C** $\frac{156}{7}$; **D** $\frac{78}{5}$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Pentru a prepara o porție de sirop, sunt necesare $\frac{1}{2}$ kg zahăr, $1\frac{2}{5}$ pahare de apă și $\frac{3}{4}$ lingurițe de esență.

a Ce cantități sunt necesare pentru a prepara trei porții de sirop?
b Dar pentru a prepara $\frac{1}{3}$ dintr-o porție?

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 8: Împărțirea fracțiilor ordinare

8.1. Inversa unei fracții ordinare

Situații problemă

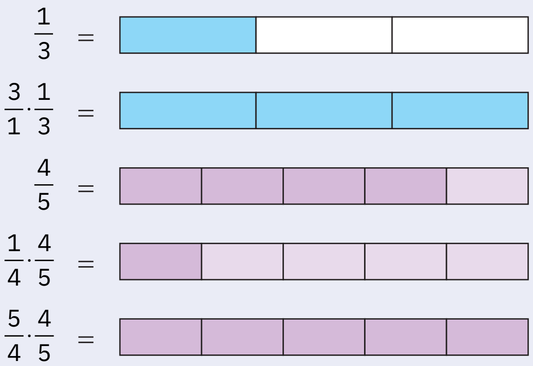
În imaginile alăturate, întregul a fost împărțit în 3 părți egale, respectiv în 5 părți egale.

Ce observăm?

Au loc egalitățile:

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{3}=1\text{, respectiv }\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}=1.$$

Mai general, produsul dintre o fracție dată și fracția obținută *schimbând între ei numărătorul și numitorul fracției date* este egal cu unitatea.



De reținut

Inversa fracției ordinare $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale nenule, este fracția ordinară $\frac{b}{a}$.

Produsul dintre o fracție și inversa ei este egal cu 1:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\text{, pentru orice numere naturale } a,\ b\neq 0.$$

Exemple

1 Inversa fracției $\frac{3}{7}$ este fracția $\frac{7}{3}$, iar inversa fracției $\frac{7}{3}$ este fracția $\frac{3}{7}$.

2 Inversa fracției $\frac{1}{3}$ este fracția $\frac{3}{1}$, care este echivalentă cu numărul natural 3.

3 Numărul natural 2 se scrie ca fracție sub forma $\frac{2}{1}$, deci inversul numărului 2 este fracția $\frac{1}{2}$.

8.2. Împărțirea a două fracții ordinare

Mate practică

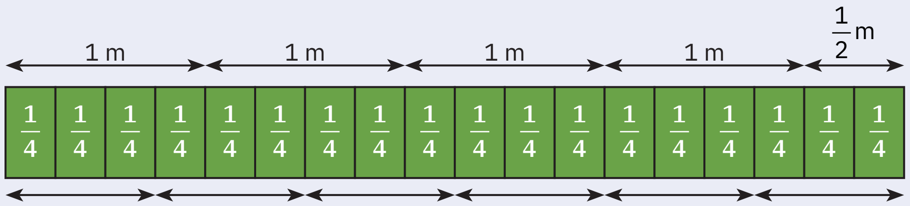
Ioana și Clara vor să confecționeze eșarfe pentru echipa de majorete. Câte eșarfe se pot realiza dintr-o bucată de pânză cu lungimea de $4\frac{1}{2}$ metri, dacă pentru fiecare eșarfă se utilizează $\frac{3}{4}$ metri?

Ce observăm?

Trebuie să aflăm de câte ori se cuprinde fracția $\frac{3}{4}$ în fracția $4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$.

Altfel spus, soluția problemei se află *împărțind* fracția $\frac{9}{2}$ la fracția $\frac{3}{4}$.

Reprezentăm bucata de pânză cu ajutorul unui dreptunghi, din care decupăm *eșarfele*:



Rezolvare:

Numărul de eșarfe n verifică egalitatea: $n\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$.

Prin înmulțirea acestei egalități cu fracția $\frac{4}{3}$, obținem: $n \cdot \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}}_{=1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}$, adică $n = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}$.

Efectuând calculele, obținem $n = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{36}{6} = \frac{6}{1} = 6$. Așadar, se pot realiza 6 eșarfe.

De reținut

Câtul a două fracții ordinare, dintre care a doua este diferită de zero, este egal cu produsul dintre prima fracție și inversa celei de-a doua fracții:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \text{ unde } b, c, d \neq 0.$$

Exemple

1 $\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{7} = \frac{55}{42}$;

2 $\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{5} = \frac{10 \cdot 7^{(5 \cdot 7}}{21 \cdot 5} = \frac{2}{3}$;

3 $2 : \frac{16}{7} = 2 \cdot \frac{7}{16} = \frac{2 \cdot 7^{(2}}{16} = \frac{7}{8}$;

4 $6\frac{4}{5} : 17 = \frac{34}{5} : 17 = \frac{34}{5} \cdot \frac{1}{17} = \frac{34^{(17}}{5 \cdot 17} = \frac{2}{5}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Ce fracție se obține prin împărțirea diferenței fracțiilor $2\frac{4}{9}$ și $\frac{1}{2}$ la suma fracțiilor $\frac{2}{3}$ și $1\frac{11}{27}$?

Rezolvare:

Diferența fracțiilor $2\frac{4}{9}$ și $\frac{1}{2}$ este: $2\frac{4}{9} - \frac{1}{2} = {}^{2)}\frac{22}{9} - {}^{9)}\frac{1}{2} = \frac{44}{18} - \frac{9}{18} = \frac{35}{18}$.

Suma fracțiilor $\frac{2}{3}$ și $1\frac{11}{27}$ este: $\frac{2}{3} + 1\frac{11}{27} = {}^{9)}\frac{2}{3} + \frac{38}{27} = \frac{18}{27} + \frac{38}{27} = \frac{56}{27}$.

Câtul dintre diferență și sumă este: $\frac{35}{18} : \frac{56}{27} = \frac{35}{18} \cdot \frac{27}{56} = \frac{{}^{5}\cancel{35}}{{}_{2}\cancel{18}} \cdot \frac{\cancel{27}^{3}}{\cancel{56}_{8}} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 8} = \frac{15}{16}$.

2 Într-un sac sunt $8\frac{2}{3}$ kilograme de boabe de cafea. Câte pungi de câte $\frac{2}{3}$ kilograme se pot umple dintr-un sac?

Rezolvare:

Numărul pungilor se află împărțind cantitatea de cafea dintr-un sac la cantitatea care intră într-o pungă.

Cum $8\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{26}{3} : \frac{2}{3} = \frac{26}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{26}{2} = 13$, se pot umple 13 pungi de cafea.

Probleme propuse

1 Scrieți inversele următoarelor numere:

a $\frac{11}{13}$; **b** $\frac{16}{7}$; **c** $5\frac{2}{9}$; **d** $7\frac{1}{7}$.

2 Efectuați împărțirile:

a $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$; **b** $\frac{4}{7} : \frac{5}{11}$; **c** $\frac{7}{25} : \frac{23}{25}$; **d** $\frac{3}{17} : \frac{8}{17}$;

e $\frac{8}{75} : \frac{11}{25}$; **f** $\frac{13}{36} : \frac{13}{11}$; **g** $\frac{16}{19} : \frac{16}{47}$; **h** $\frac{66}{13} : \frac{33}{5}$.

3 Scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a $\frac{15}{7}:3$; **b** $2:\frac{16}{9}$; **c** $\frac{16}{27}:\frac{4}{9}$; **d** $\frac{42}{55}:\frac{7}{5}$;

e $\frac{14}{15}:\frac{3}{10}$; **f** $\frac{16}{35}:\frac{8}{25}$; **g** $\frac{7}{12}:\frac{14}{3}$; **h** $\frac{45}{76}:\frac{30}{19}$.

4 Introduceți întregii în fracție, apoi efectuați împărțirile:

a $4\frac{1}{6}:\frac{5}{4}$; **b** $\frac{8}{9}:5\frac{1}{3}$; **c** $2\frac{1}{6}:4\frac{1}{3}$; **d** $5\frac{1}{7}:3\frac{3}{14}$.

5 **a** Determinați o fracție care înmulțită cu $\frac{4}{9}$ dă produsul $\frac{32}{81}$.

b Produsul dintre o fracție ireductibilă și $1\frac{4}{5}$ este egal cu $1\frac{1}{3}$. Determinați fracția.

6 Determinați:

a câtul dintre numărul $\frac{31}{12}$ și diferența fracțiilor $3\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{6}$;

b câtul dintre suma fracțiilor $\frac{7}{34}$ și $\frac{1}{17}$ și inversa fracției $\frac{17}{72}$;

c câtul dintre diferența fracțiilor $3\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{2}$ și suma fracțiilor $1\frac{1}{6}$ și $2\frac{1}{3}$.

7 Horia taie un cablu de sârmă de $2\frac{3}{10}$ metri în bucăți de $\frac{3}{5}$ metri. Determinați:

a câte bucăți întregi de cablu de lungime $\frac{3}{5}$ metri obține;

b care este lungimea porțiunii rămase.

8 Eva confecționează ecusoane de lungime egală cu $7\frac{1}{2}$ cm. Câte ecusoane poate confecționa dintr-o rolă de hârtie de 200 cm lungime?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $4:\frac{3}{5}$ este egal cu $\frac{a}{b}$. Suma numerelor a și b este:

A 17; **B** 12; **C** 23; **D** 32.

2 Forma ireductibilă a rezultatului calculului $\frac{12}{125}:\frac{9}{25}$ este:

A $\frac{12}{5}$; **B** $\frac{12}{45}$; **C** $\frac{4}{15}$; **D** $\frac{108}{3125}$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Alin aleargă $\frac{3}{4}$ km în fiecare zi.

a Câte zile trebuie să alerge pentru a parcurge o distanță totală de $7\frac{1}{2}$ km?

b În vacanță, Alin aleargă mai mulți kilometri pe zi. Dacă în 12 zile a alergat $10\frac{1}{2}$ km, atunci determină câți kilometri a alergat în fiecare zi.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 9: Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

9.1. Ridicarea la putere a unei fracții ordinare

Situație problemă

Horia împăturește o coală de hârtie în două părți egale, apoi încă o dată și încă o dată. Despăturind apoi coala, liniile formate prin îndoire împart coala în dreptunghiuri.
Ce fracție din suprafața colii de hârtie reprezintă suprafața fiecărui dreptunghi?

Răspuns:
Suprafața obținută după fiecare împăturire este o doime din suprafața anterioară. Așadar, suprafața unui dreptunghi reprezintă o fracție egală cu $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot1\cdot1}{2\cdot2\cdot2}=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$ din suprafața totală.

Ce observăm?
Pentru determinarea rezultatului, am efectuat o înmulțire a trei factori, fiecare fiind o fracție egală cu $\frac{1}{2}$. Se spune că am ridicat fracția $\frac{1}{2}$ la *puterea a treia*.

De reținut

Fie $\frac{a}{b}$ o fracție ordinară (unde a și b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$) și $n \geq 2$ un număr natural.

Produsul a n factori egali cu $\frac{a}{b}$ se numește *puterea* a n-a a fracției $\frac{a}{b}$ și se notează $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. Avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ factori}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Altfel spus, pentru a ridica o fracție la o putere, se ridică la acea putere atât numărătorul, cât și numitorul.

Prin convenție, $\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$ și $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$.

În scrierea $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, fracția $\frac{a}{b}$ se numește *baza* puterii, iar n se numește *exponentul* puterii.

Exemple

1 $\left(\frac{7}{11}\right)^2=\frac{7^2}{11^2}=\frac{49}{121}$; **2** $\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{4^4}{5^4}=\frac{256}{625}$; **3** $\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{2^6}{3^6}=\frac{64}{729}$; **4** $\left(\frac{11}{6}\right)^3=\frac{11^3}{6^3}=\frac{1\,331}{216}$.

9.2. Reguli de calcul cu puteri

Deoarece prin ridicarea la putere a unei fracții se obține o fracție al cărei numărător, respectiv numitor, sunt puteri, cu același exponent, ale unor numere naturale, regulile de calcul cu puteri ale unui număr natural se transferă la fracții, dând naștere unor reguli similare, după cum urmează:

De reținut

1 Înmulțirea puterilor cu aceeași bază
Pentru a înmulți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se adună exponenții:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}.$$

2 Împărțirea puterilor cu aceeași bază
Pentru a împărți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se scad exponenții:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m:\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}\quad(\text{unde } m \geq n).$$

3 Puterea unei puteri

Pentru a ridica o putere la o altă putere, se păstrează baza și se înmulțesc exponenții:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\right]^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}.$$

4 Puterea unui produs. Produsul a două puteri cu același exponent

Pentru a ridica un produs la o putere, se distribuie exponentul fiecărui factor al produsului:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{n}.$$

Pentru a înmulți două puteri cu același exponent, se înmulțesc bazele și se păstrează exponentul:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^{n}.$$

5 Puterea unui cât. Câtul a două puteri cu același exponent

Pentru a ridica un cât la o putere, se distribuie exponentul fiecărui factor al câtului:

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}:\left(\frac{c}{d}\right)^{n}.$$

Pentru a împărți două puteri cu același exponent, se împart bazele și se păstrează exponentul:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}:\left(\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^{n}.$$

Exemple

1 a $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3+5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$;

b $\left(\frac{7}{4}\right)^{4}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{7}=\left(\frac{7}{4}\right)^{4+7}=\left(\frac{7}{4}\right)^{11}$.

2 a $\left(\frac{9}{4}\right)^{14}:\left(\frac{9}{4}\right)^{6}=\left(\frac{9}{4}\right)^{14-6}=\left(\frac{9}{4}\right)^{8}$;

b $\left(\frac{5}{11}\right)^{8}:\left(\frac{5}{11}\right)^{7}=\left(\frac{5}{11}\right)^{8-7}=\left(\frac{5}{11}\right)^{1}=\frac{5}{11}$.

3 a $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\right]^{4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2\cdot 4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{8}$;

b $\left[\left(\frac{11}{101}\right)^{99}\right]^{0}=\left(\frac{11}{101}\right)^{99\cdot 0}=\left(\frac{11}{101}\right)^{0}=1$.

4 a $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{3}$;

b $\left(\frac{1}{11}\right)^{4}\cdot\left(\frac{11}{3}\right)^{4}=\left(\frac{1}{11}\cdot\frac{11}{3}\right)^{4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$.

5 a $\left(\frac{4}{9}:\frac{2}{7}\right)^{5}=\left(\frac{4}{9}\right)^{5}:\left(\frac{2}{7}\right)^{5}$;

b $\left(\frac{3}{13}\right)^{6}:\left(\frac{5}{13}\right)^{6}=\left(\frac{3}{13}:\frac{5}{13}\right)^{6}=\left(\frac{3}{5}\right)^{6}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Aplicând regulile de calcul scrieți sub forma unei singure puteri:

a produsul fracțiilor: $\left(\frac{144}{49}\right)^{6}$ și $\left(\frac{7}{9}\right)^{12}$;

b câtul fracțiilor: $\left(\frac{4}{5}\right)^{8}$ și $\left(\frac{8}{25}\right)^{4}$.

Rezolvare:

a $\left(\frac{144}{49}\right)^{6}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{12}=\left[\left(\frac{12}{7}\right)^{2}\right]^{6}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{12}=\left(\frac{12}{7}\right)^{12}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{12}=\left(\frac{12}{7}\cdot\frac{7}{9}\right)^{12}=\left(\frac{4}{3}\right)^{12}$;

b $\left(\frac{4}{5}\right)^{12}:\left(\frac{8}{25}\right)^{4}=\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{3}\right]^{4}:\left(\frac{8}{25}\right)^{4}=\left(\frac{64}{125}\right)^{4}:\left(\frac{8}{25}\right)^{4}=\left(\frac{64}{125}:\frac{8}{25}\right)^{4}=\left(\frac{64}{125}\cdot\frac{25}{8}\right)^{4}=\left(\frac{8}{5}\right)^{4}$.

2 **a** Scrieți fracția $\frac{1\,331}{729}$ sub forma unei puteri cu baza $\frac{11}{9}$.

b Scrieți fracția $\frac{243}{1\,024}$ sub forma unei puteri cu exponentul 5.

Rezolvare:

a Avem $11^2 = 11 \cdot 11 = 121$ și $11^3 = 11 \cdot 121 = 1\,331$. Cum $9^3 = 81 \cdot 9 = 729$, rezultă $\frac{1\,331}{729} = \frac{11^3}{9^3} = \left(\frac{11}{9}\right)^3$.

b Deoarece $243 = 3^5$ și $1\,024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$, obținem $\frac{243}{1\,024} = \frac{3^5}{4^5} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

Probleme propuse

1 Calculați:

a $\left(\frac{1}{2}\right)^7$; **b** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; **c** $\left(\frac{4}{9}\right)^3$; **d** $\left(\frac{11}{7}\right)^3$;

e $\left(\frac{5}{4}\right)^4$; **f** $\left(\frac{3}{3}\right)^{2017}$; **g** $\left(\frac{19}{43}\right)^1$; **h** $\left(\frac{2011}{2017}\right)^0$.

2 Folosind regulile de calcul, scrieți sub forma unei singure puteri:

a $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$; **b** $\left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{10}$; **c** $\left(\frac{11}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{11}{5}\right)^6$;

d $\left(\frac{3}{4}\right)^{11} : \left(\frac{3}{4}\right)^4$; **e** $\left(\frac{8}{3}\right)^9 : \left(\frac{8}{3}\right)^8$; **f** $\left(\frac{13}{17}\right)^{22} : \left(\frac{13}{17}\right)^{20}$;

g $\left[\left(\frac{2}{15}\right)^5\right]^{11}$; **h** $\left[\left(\frac{14}{27}\right)^6\right]^4$; **i** $\left[\left(\frac{3}{100}\right)^0\right]^{2017}$.

3 Scrieți rezultatul sub forma unei singure puteri:

a $\left(\frac{35}{95}\right)^6 \cdot \left(\frac{38}{14}\right)^6$; **b** $\left(\frac{33}{50}\right)^9 \cdot \left(\frac{25}{22}\right)^9$; **c** $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{49}{36}\right)^2$;

d $\left(\frac{7}{17}\right)^5 : \left(\frac{21}{17}\right)^5$; **e** $\left(\frac{13}{8}\right)^6 : \left(\frac{39}{32}\right)^6$; **f** $\left(4\frac{1}{6}\right)^{12} : \left(11\frac{1}{9}\right)^6$.

4 Scrieți fiecare număr ca putere cu baza indicată:

a $\frac{1}{256}$ cu baza $\frac{1}{2}$; **b** $\frac{16}{81}$ cu baza $\frac{2}{3}$; **c** $\frac{125}{216}$ cu baza $\frac{5}{6}$.

5 Scrieți fiecare număr ca putere cu exponentul indicat:

a $\frac{1}{64}$ cu exponentul 6; **b** $\frac{32}{243}$ cu exponentul 5; **c** $\frac{343}{216}$ cu exponentul 3.

Lecția 10: Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară

10.1. Aflarea unei fracții dintr-un număr natural

Mate practică

Horia și Radu fac parte din clubul de dezbateri al școlii. Ei observă că, din cei 20 de membri ai clubului, $\frac{3}{5}$ sunt elevi în clasa a VII-a.

Câți elevi de clasa a VII-a sunt în clubul de dezbateri?

Rezolvare:

Vom folosi *metoda reducerii la unitate*. Totalitatea membrilor clubului este un întreg, adică $\frac{5}{5}$ (5 cincimi).

$\frac{5}{5}$ (5 cincimi) din membrii clubului înseamnă 20 de elevi.

$\frac{1}{5}$ (1 cincime) din membrii clubului reprezintă $20 : 5 = 4$ elevi.

$\frac{3}{5}$ (3 cincimi) din membrii clubului înseamnă $3 \cdot 4 = 12$ elevi.

Așadar, în clubul de dezbateri sunt 12 elevi de clasa a VII-a.

Ce observăm?

Soluția problemei poate fi obținută rapid efectuând calculul: $\frac{3}{5}\cdot 20 = 12$.

De reținut

Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural, se înmulțește fracția dată cu acel număr.
Așadar, dacă a, b și n sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci:

$$\frac{a}{b} \text{ din } n \text{ este egal cu } \frac{a}{b}\cdot n \text{ sau } \frac{a}{b} \text{ din } n \text{ este egal cu } \frac{a\cdot n}{b}.$$

Exemple

1 $\frac{1}{2}$ din 28 este 14, deoarece $\frac{1}{2}\cdot 28 = 14$;

2 $\frac{1}{9}$ din 81 este 9, deoarece $\frac{1}{9}\cdot 81 = 9$;

3 $\frac{3}{7}$ din 42 este 18, întrucât $\frac{3}{{}_1\cancel{7}}\cdot \cancel{42}^{6} = 18$;

4 $\frac{7}{11}$ din 77 este 49, întrucât $\frac{7}{{}_1\cancel{11}}\cdot \cancel{77}^{7} = 49$.

Observație

Pentru a afla un număr dat atunci când se cunoaște o fracție din el, se împarte numărul cunoscut la fracția respectivă.

Exemplu: Dacă $\frac{2}{5}$ dintr-un număr n este egal cu 30, atunci numărul n este $30 : \frac{2}{5} = 30\cdot\frac{5}{2} = 75$.

10.2. Aflarea unei fracții dintr-o fracție

Mate practică

Pentru campania *Un mediu mai curat – o viață mai sănătoasă*, Ioana și Clara intenționează să colecteze $\frac{4}{5}$ kg de PET-uri și ambalaje de plastic. Într-o zi, ele strâng $\frac{5}{8}$ din cantitatea propusă.

Ce cantitate de materiale au colectat fetele în acea zi?

Rezolvare:

Privind cantitatea de materiale propusă ca pe un întreg, aceasta reprezintă $\frac{8}{8}$ (8 optimi).

Cele $\frac{8}{8}$ (8 optimi) din cantitatea propusă corespund cu $\frac{4}{5}$ kg.

Astfel, $\frac{1}{8}$ (o optime) din cantitatea propusă corespunde cu $\frac{4}{5}:8=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$ kg.

Prin urmare, $\frac{5}{8}$ (5 optimi) din cantitatea propusă corespunde cu $5\cdot\frac{1}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ kg.

Așadar, în ziua respectivă, Ioana și Clara au colectat $\frac{1}{2}$ kg de materiale reciclabile.

Ce observăm?

Soluția problemei poate fi obținută rapid efectuând calculul: $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 5}^{(5\cdot 4}=\frac{1}{2}$.

De reținut

Pentru a afla o fracție dintr-o fracție, se efectuează produsul celor două fracții.
Așadar, dacă *a*, *b*, *c* și *d* sunt numere naturale, cu $b, d \neq 0$, atunci:

$$\frac{a}{b} \text{ din } \frac{c}{d} \text{ este egal cu } \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}.$$

Exemple

1 $\frac{1}{3}$ din $\frac{1}{2}$ este $\frac{1}{6}$, deoarece $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$;

2 $\frac{9}{10}$ din $\frac{10}{11}$ este $\frac{9}{11}$, întrucât $\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{11}=\frac{9}{11}$;

3 $\frac{6}{35}$ din $\frac{7}{3}$ este $\frac{2}{5}$, întrucât $\frac{6}{35}\cdot\frac{7}{3}=\frac{2}{5}$;

4 $\frac{4}{9}$ din $\frac{9}{4}$ este 1, deoarece $\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}=1$.

10.3. Aflarea unui procent dintr-un număr natural

Mate practică

Dintre cei 1 200 de elevi ai unei școli, 40% folosesc autobuzul școlii pentru a veni la cursuri, iar 25% se deplasează cu bicicleta.

a Câți elevi vin la școală cu autobuzul?

b Câți elevi vin la școală cu bicicleta?

Rezolvare:

Știm că procentul este o fracție cu numitorul 100. Așadar:

a numărul elevilor care vin la școală cu autobuzul este:

$$40\% \text{ din } 1\,200=\frac{40}{100} \text{ din } 1\,200=\frac{40}{100}\cdot 1\,200=480.$$

b numărul elevilor care vin la școală cu bicicleta este:

$$25\% \text{ din } 1\,200=\frac{25}{100} \text{ din } 1\,200=\frac{25}{100}\cdot 1\,200=300.$$

De reținut

Pentru a afla un procent *p*% dintr-un număr natural (sau dintr-o fracție) se înmulțește fracția $\frac{p}{100}$ cu numărul natural dat (sau cu fracția dată).
Așadar, dacă *p*, *n*, *a* și *b* sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci:

a $p\%$ din n este egal cu $\frac{p}{100}\cdot n$;

b $p\%$ din $\frac{a}{b}$ este egal cu $\frac{p}{100}\cdot\frac{a}{b}$.

Exemple

1 10% din 20 este 2, deoarece $\frac{10}{100}\cdot 20=2$;

2 150% din 40 este 60, întrucât $\frac{150}{100}\cdot 40=60$;

3 40% din 3 este $\frac{6}{5}$, întrucât $\frac{40}{100}\cdot 3=\frac{6}{5}$;

4 15% din $\frac{4}{5}$ este $\frac{3}{25}$, deoarece $\frac{15}{100}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{25}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați numărul natural n știind că $\frac{n}{12}$ din 240 este 140.

Rezolvare:

Înmulțind fracția $\frac{n}{12}$ cu numărul 240, aflăm că $\frac{n}{12}$ din 240 este $\frac{n}{12}\cdot 240=\frac{n\cdot 240^{(12}}{12}=n\cdot 20$.

Așadar, $n\cdot 20=140$, de unde $n=7$.

2 Horia îi împrumută lui Radu 10 CD-uri cu jocuri electronice, adică $\frac{2}{7}$ din CD-urile cu jocuri pe care le are. Câte CD-uri cu jocuri electronice are Horia?

Rezolvare:

Trebuie să aflăm un număr atunci când se cunoaște o fracție din el, deci vom efectua o operație de împărțire. Dacă cele 10 CD-uri reprezintă $\frac{2}{7}$ din jocurile lui Horia, atunci Horia are $10:\frac{2}{7}=10\cdot\frac{7}{2}=35$ de jocuri.

Probleme propuse

1 Calculați:

a $\frac{1}{4}$ din 100; **b** $\frac{2}{3}$ din 336; **c** $\frac{2}{5}$ din 75; **d** $\frac{3}{7}$ din 777;

e $\frac{11}{8}$ din 64; **f** $\frac{4}{9}$ din 162; **g** $\frac{3}{11}$ din 143; **h** $1\frac{1}{13}$ din 1 001.

2 Calculați, aducând rezultatul la forma ireductibilă și, unde este cazul, scoateți întregii din fracție:

a $\frac{1}{3}$ din $\frac{3}{7}$; **b** $\frac{3}{4}$ din $\frac{4}{3}$; **c** $\frac{7}{5}$ din $\frac{15}{19}$; **d** $\frac{5}{12}$ din $\frac{18}{5}$;

e $\frac{9}{11}$ din $\frac{22}{27}$; **f** $\frac{2}{5}$ din $6\frac{3}{7}$; **g** $2\frac{3}{11}$ din $\frac{11}{45}$; **h** $1\frac{4}{5}$ din $2\frac{1}{27}$.

3 Determinați:

a 1% din 100; **b** 5% din 20; **c** 10% din 40; **d** 12% din 375;

e 25% din 256; **f** 80% din 405; **g** 200% din 208; **h** 350% din 72.

4 Calculați 7% din:

a 1 200 kg; **b** 800 litri; **c** 12 000 lei; **d** 500 km.

5 Eva are $4\frac{1}{2}$ metri de panglică. Pentru decorarea clasei, folosește $\frac{5}{6}$ din panglica pe care o are. Câți metri de panglică a folosit?

6 Față de stadion, casa lui Horia se află la $5\frac{1}{4}$ km, iar casa lui Radu, la $\frac{3}{7}$ din această distanță. La câți kilometri se află casa lui Radu de stadion?

7 La un spectacol s-au vândut 2 500 de bilete de trei categorii: 15% cu prețul de 14 lei biletul, 56% cu prețul de 10 lei biletul, iar restul cu prețul de 5 lei biletul. Calculați suma totală încasată.

8 Pe un teren agricol împărțit în 320 de parcele egale s-a cultivat: grâu pe $\frac{7}{16}$ din parcele, porumb pe 30% din parcele, iar pe restul floarea-soarelui. Calculați câte parcele s-au cultivat cu grâu și câte cu floarea-soarelui.

9 O tonă de combustibil costă 4 800 de lei. Prețul se mărește cu 3%. Cât va costa o tonă de combustibil după mărirea prețului?

10 Un televizor cu ecran plat costă 2 400 de lei. La o promoție, se oferă o reducere a prețului cu 12%. Cât costă televizorul în promoție?

11 În drumeția din săptămâna *Școala altfel*, grupul de exploratori a parcurs dimineața 9 km, adică $\frac{3}{5}$ din drumul total. Cât a rămas de parcurs?

12 În prima zi de la lansarea noii cărți a scriitorului favorit al Evei s-au vândut 24 de volume, adică $\frac{6}{11}$ din toate volumele aduse în librărie. Câte volume au fost aduse la librărie?

13 Pentru ca o tabără de copii să funcționeze pe timp de o lună de vară este necesară suma de 180 000 de lei. Tabelul de mai jos conține cheltuielile în procente. Calculați și scrieți în tabel cheltuielile în lei.

Cheltuieli	**masă**	**întreținere**	**transport**	**Activități**		**Alte cheltuieli**
				culturale	**sportive**	
în procente	52%	23%	9%	7%	5%	4%
în lei						

14 Ioana și mama ei pregătesc, pentru invitați, două feluri de salată: Caesar și Gourmet. Cantitățile prevăzute de rețetă pentru o porție se află în tabel.

ingredient **Salată**	**roșii**	**salată**	**ceapă**	**castraveți**	**ardei**	**măsline**
Caesar	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{1}{6}$ kg	$\frac{1}{10}$ kg	$\frac{1}{5}$ kg	$\frac{1}{10}$ kg	–
Gourmet	$\frac{1}{5}$ kg	$\frac{1}{5}$ kg	$\frac{1}{10}$ kg	–	$\frac{1}{10}$ kg	$\frac{1}{7}$ kg

a Câte kilograme de castraveți sunt necesare pentru două porții de salată Caesar și trei porții de salată Gourmet?
b Determinați unde se folosesc mai multe roșii: pentru prepararea a șapte salate Caesar sau pentru prepararea a nouă salate Gourmet?
c Care preparat cântărește mai mult: o salată Caesar sau o salată Gourmet?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului 25% din 200 este: **A** 5 000; **B** 50; **C** 500; **D** 8.

2 Dacă $\frac{2}{3}$ din a este 32, atunci a este: **A** 48; **B** $\frac{64}{3}$; **C** 16; **D** $\frac{64}{96}$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 În echipa de baschet a școlii sunt 20 de elevi. Trei cincimi dintre ei sunt în clasa a V-a.
a Câți elevi de clasa a V-a sunt în echipa de baschet?
b Dacă 20% dintre elevii echipei sunt din clasa a VI-a, atunci determină numărul acestora.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Fracții ordinare; fracții subunitare, echiunitare, supraunitare; procente • Fracții echivalente (prin reprezentări) • Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător; reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare

1 Numitorul fracției $\frac{21}{5}$ este:

a 21 **b** 5

2 Numărătorul fracției $\frac{36}{47}$ este:

a 36 **b** 47

3 Dacă fracția $\frac{41}{n}$ este echiunitară, atunci *n* este:

a 12 **b** 14 **c** 41 **d** 67

4 Fracția $\frac{n}{16}$ este supraunitară pentru *n* egal cu:

a 5 **b** 16 **c** 18 **d** 9

5 Fracția $\frac{n}{16}$ este subunitară pentru *n* egal cu:

a 16 **b** 5 **c** 37 **d** 25

6 Dacă $p\% = \frac{16}{100}$, atunci *p* este egal cu:

a 100 **b** 16 **c** 116 **d** 84

7 Dacă $\frac{15}{7} < \frac{n}{7}$, atunci *n* poate fi:

a 17 **b** 11

8 Dacă $\frac{18}{11} < \frac{18}{n}$, atunci *n* poate fi:

a 9 **b** 13

9 Dacă $\frac{125}{9} = n\frac{8}{9}$ și *n* este număr natural, atunci *n* este egal cu:

a 125 **b** 13 **c** 117 **d** 8

10 Știind că $5\frac{5}{7} = \frac{n}{7}$, atunci *n* este egal cu:

a 5 **b** 7 **c** 40 **d** 32

11 Cel mai mic multiplu comun al numerelor 24 și 16 este egal cu:

a 48 **b** 32 **c** 64 **d** 80

12 24 este cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a 5 și 6 **b** 9 și 6 **c** 4 și 9 **d** 3 și 8

13 Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 24 este egal cu:

a 18 **b** 12 **c** 36 **d** 4

14 6 este cel mai mare divizor comun al numerelor:

a 12 și 36 **b** 12 și 18
c 14 și 18 **d** 16 și 21

15 Amplificând fracția $\frac{7}{16}$ cu 5, obținem fracția:

a $\frac{12}{21}$ **b** $\frac{35}{80}$ **c** $\frac{2}{11}$ **d** $\frac{75}{165}$

16 Simplificând fracția $\frac{24}{39}$ cu 3, obținem fracția:

a $\frac{4}{13}$ **b** $\frac{72}{117}$ **c** $\frac{324}{393}$ **d** $\frac{8}{13}$

17 Rezultatul calculului $\frac{21}{5} + \frac{8}{5}$ este egal cu:

a $\frac{29}{5}$ **b** $\frac{29}{10}$

18 Rezultatul calculului $\frac{37}{9} - \frac{12}{9}$ este egal cu:

a $\frac{25}{81}$ **b** $\frac{25}{9}$

19 Rezultatul calculului $\frac{5}{21} \cdot \frac{7}{10}$ este egal cu:

a $\frac{12}{210}$ **b** $\frac{35}{210}$

20 Rezultatul calculului $\frac{16}{27} : \frac{32}{9}$ este egal cu:

a $\frac{1}{6}$ **b** $\frac{2}{3}$

21 Inversa fracției $\frac{31}{25}$ este:

a $\frac{13}{52}$ **b** $\frac{25}{31}$

22 Rezultatul calculului $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ este:

a $\frac{6}{9}$ **b** $\frac{8}{27}$

23 Determinați numerele naturale a, b, c, d și e din tabelul de mai jos.

Fracții inițiale	**Fracții la același numitor**
$\frac{3}{4}$ și $\frac{a}{6}$	$\frac{b}{12}$ și $\frac{10}{12}$
$\frac{4}{5}$ și $\frac{7}{15}$	$\frac{c}{15}$ și $\frac{7}{15}$
$\frac{d}{e}$ și $\frac{11}{9}$	$\frac{63}{90}$ și $\frac{110}{90}$

24 Asociați fiecărei fracții din coloana **A** denumirea corespunzătoare din coloana **B**.

A	**B**
$\frac{34}{16}$	Fracție echiunitară
$\frac{15}{35}$	Fracție subunitară
$\frac{22}{22}$	Fracție supraunitară
	Fracție ireductibilă

25 Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

a	Fracțiile $\frac{3}{5}$ și $\frac{12}{20}$ sunt echivalente
b	Fracția $\frac{91}{21}$ este ireductibilă
c	$\frac{^{5)}3}{5}=\frac{8}{10}$
d	$\frac{36^{(3}}{81}=\frac{12}{27}$

26 Determinați numerele a, b, c și d din tabelul de mai jos.

$\frac{2}{3}$ și $\frac{a}{6}$ fracții echivalente
$\frac{b}{5}$ și $\frac{28}{10}$ fracții echivalente
$\frac{4}{c}$ și $\frac{2}{9}$ fracții echivalente
$\frac{12}{5}$ și $\frac{24}{d}$ fracții echivalente

27 Efectuați:

a $2:\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{5}:\frac{11}{10}$;

b $\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\left(1\frac{1}{2}\right)^2$;

c $\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right):\frac{7}{12}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\right]\cdot\frac{1}{4}:\left(5\cdot\frac{12}{25}-1\frac{1}{3}\right)$;

d $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)$.

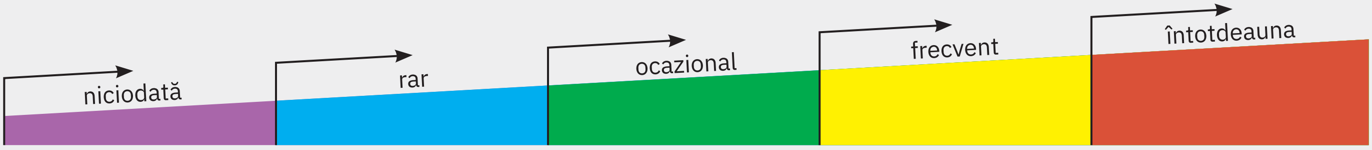
28 Un biciclist a parcurs un traseu de 240 km în trei zile. În prima zi, a parcurs $\frac{1}{3}$ din lungimea traseului și încă 15 km, în a doua zi 40% din rest și încă 4 km, iar în a treia zi a terminat traseul. Câți kilometri a parcurs biciclistul în a treia zi?

29 O persoană are o sumă S de bani. În prima zi cheltuiește $\frac{3}{10}$ din suma S, a doua zi $\frac{2}{5}$ din suma S, iar a treia zi 25% din S. Știind că persoanei îi rămân la final 600 de lei, determinați suma de bani cheltuită în prima zi.

30 Determinați toate fracțiile ordinare de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$ echivalente cu fracția $\frac{7}{15}$.

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U5

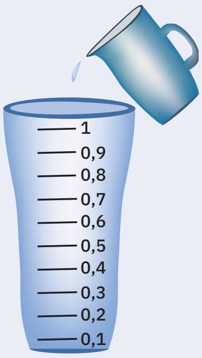
Fracții zecimale

Lecția 1: Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

1.1. Scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale

Situație problemă

Ioana observă că poate umple cu 10 căni cu apă un vas gradat, ca în figura alăturată. Ea toarnă în vasul gradat 3 pahare cu apă și observă că apa a ajuns la gradația 0,3.



Analiză:

Un pahar cu apă reprezintă $\frac{1}{10}$ din cantitatea totală ce încape în vas.

Trei pahare reprezintă $\frac{3}{10}$ din cantitatea totală ce încape în vas. Concluzia Ioanei a fost că $\frac{3}{10}$ este egal cu 0,3.

De reținut

Fracția $\frac{1}{10}$ reprezintă ***o zecime***, se scrie 0,1 și se citește *zero virgulă unu*.

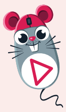
Fracția $\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}$ reprezintă ***o sutime***, se scrie 0,01 și se citește *zero virgulă zero unu*.

Fracția $\frac{1}{1\,000}=\frac{1}{10^3}$ reprezintă ***o miime***, se scrie 0,001 și se citește *zero virgulă zero zero unu*.

Regulă

Orice fracție ordinară cu numitorul putere a lui zece se scrie sub formă de **fracție zecimală**, punând o virgulă înaintea unui număr de cifre ale numărătorului, numărate de la dreapta la stânga, egal cu exponentul lui 10 de la numitor. Dacă este necesar, se scriu zerouri în fața numărătorului.

Exemple



1 $\frac{325}{10}=32,5$; **2** $\frac{78}{10}=7,8$; **3** $\frac{9}{100}=0,09$; **4** $\frac{37}{100}=0,37$;

5 $\frac{1\,234}{100}=12,34$; **6** $\frac{76}{1\,000}=0,076$; **7** $\frac{4\,567}{1\,000}=4,567$; **8** $\frac{7}{10\,000}=0,0007$.

Observații

1 Amplificând fracția $\frac{3}{10}$ cu 10, 100, 1 000, se obține $\frac{3}{10}=\frac{30}{100}=\frac{300}{1\,000}=\frac{3\,000}{10\,000}$, adică 0,3 = 0,30 = 0,300 = 0,3000. În concluzie, dacă adăugăm zerouri după partea zecimală a unei fracții zecimale, obținem aceeași fracție zecimală.

2 Fracția zecimală are două părți despărțite prin virgulă: partea întreagă, formată din numărul din stânga virgulei, și partea zecimală, formată din numărul din dreapta virgulei. Denumirea zecimalelor (a cifrelor din dreapta virgulei) și numărul lor sunt prezentate în tabelul de mai jos, pentru fracțiile zecimale 47,392; 123,75 și 5,234:

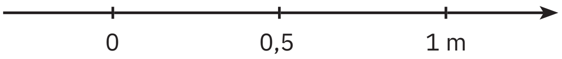
Exemple

Fracția zecimală	Cifra zecimilor	Numărul zecimilor	Cifra sutimilor	Numărul sutimilor	Cifra miimilor	Numărul miimilor
47,392	3	473	9	4 739	2	47 392
123,75	7	1 237	5	12 375	0	123 750
5,234	2	52	3	523	4	5 234

1.2. Transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

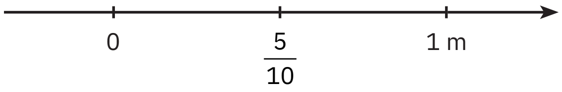
Fracția zecimală 0,5 este egală cu fracția ordinară $\frac{5}{10}$.

Fracția zecimală 1,5 este egală cu fracția ordinară $\frac{15}{10}$.



Fracția zecimală 0,53 este egală cu fracția ordinară $\frac{53}{100}$.

Fracția zecimală 4,53 este egală cu fracția ordinară $\frac{453}{100}$.



Regulă

Orice fracție zecimală cu un număr finit de zecimale se transformă într-o fracție ordinară cu numărătorul format din numărul natural obținut din fracția zecimală prin eliminarea virgulei și numitorul o putere a lui 10 cu exponentul egal cu numărul de zecimale finite ale fracției.

Exemple

1 Pentru a transforma fracția zecimală 4,35 în fracție ordinară procedăm astfel:
- numărul natural obținut prin eliminarea virgulei este 435, deci numărătorul va fi 435;
- fracția zecimală 4,35 are două zecimale, 3 și 5, deci numitorul va fi $10^2 = 100$.

În concluzie, $4{,}35=\frac{435}{100}$.

2 Pentru fracția zecimală 0,123 vom proceda asemănător:
- numărul natural obținut prin eliminarea virgulei este 123, deci numărătorul va fi 123;
- fracția zecimală 0,123 are trei zecimale, 1, 2 și 3, deci numitorul va fi $10^3 = 1\,000$.

În concluzie, $0{,}123=\frac{123}{1\,000}$. În general, $\overline{0{,}a}=\frac{a}{10}$, $\overline{a{,}b}=\frac{\overline{ab}}{10}$, $\overline{ab{,}c}=\frac{\overline{abc}}{10}$, $\overline{0{,}ab}=\frac{\overline{ab}}{100}$, $\overline{a{,}bc}=\frac{\overline{abc}}{100}$.

3 Numărul 6,584 se poate scrie sub formă de sumă, astfel: $6{,}584=6+\frac{5}{10}+\frac{8}{100}+\frac{4}{1\,000}$, deoarece

$$6{,}584=\frac{6\,584}{1\,000}=\frac{6\,000}{1\,000}+\frac{500}{1\,000}+\frac{80}{1\,000}+\frac{4}{1\,000}=6+\frac{5}{10}+\frac{8}{100}+\frac{4}{1\,000}.$$

În general, $\overline{n{,}abc}=n+\frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1\,000}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați numerele a, b, c, d și e știind că $\overline{a3{,}cd7}=2\cdot 10+b+\frac{3}{10}+\frac{4}{100}+\frac{e}{1\,000}$.

Rezolvare:

$\overline{a3{,}cd7}=a\cdot 10+3+\frac{c}{10}+\frac{d}{100}+\frac{7}{1\,000}$.

$a\cdot 10+3+\frac{c}{10}+\frac{d}{100}+\frac{7}{1\,000}=2\cdot 10+b+\frac{3}{10}+\frac{4}{100}+\frac{e}{1\,000}$. Obținem $a=2$, $b=3$, $c=3$, $d=4$, $e=7$.

2 Determinați numărul natural n, știind că: **a** $0{,}32=\frac{n}{10^3}$; **b** $\frac{n}{5}=24{,}6$.

Rezolvare:

a $0{,}32=\frac{n}{10^3}$ sau ${}^{10)}\frac{32}{100}=\frac{n}{1\,000}$ sau $\frac{320}{1\,000}=\frac{n}{1\,000}$, de unde obținem $n=320$.

b $\frac{n}{5}=24{,}6$ sau $\frac{n}{5}=\frac{246^{(2}}{10}$ sau $\frac{n}{5}=\frac{123}{5}$, de unde obținem $n=123$.

Probleme propuse

1 Scrieți următoarele fracții zecimale:
a trei zecimi; **b** doi întregi și șapte sutimi; **c** patruzeci și trei de miimi;
d douăzeci și opt miimi; **e** șase întregi și șapte sutimi; **f** nouă sutimi.

2 Fie numărul 26,784. Rescrieți propozițiile următoare, completând spațiile punctate corespunzător:
a Cifra zecilor este egală cu ... , iar cifra zecimilor este egală cu ... .
b Partea întreagă a numărului este egală cu ... , iar partea zecimală este egală cu ... .
c Cifra sutimilor este egală cu ... , iar numărul sutimilor este egal cu ... .
d Numărul dat conține ... miimi, iar cifra miimilor este egală cu ... .

3 Scrieți sub formă de fracție zecimală fracțiile: $\frac{2}{10}, \frac{32}{100}, \frac{32}{10\,000}, \frac{7}{1\,000}, \frac{2\,567}{100}, \frac{7\,958}{10\,000}, \frac{79}{1\,000}$.

4 Transformați următoarele fracții zecimale în fracții ordinare: 0,02; 1,023; 45,32; 156,003; 7,8; 0,9.

5 Precizați în care dintre perechile următoare fracția zecimală este egală cu fracția ordinară: $\left(\frac{234}{10}; 2{,}34\right)$, $\left(0{,}235; \frac{235}{100}\right)$, $\left(\frac{123}{1\,000}; 0{,}123\right)$, $\left(0{,}0023; \frac{2\,300}{1\,000}\right)$, $\left(\frac{234}{1\,000}; 0{,}234\right)$.

6 Amplificați fracțiile, astfel încât să obțineți la numitor o putere a lui 10 și apoi scrieți fracțiile sub formă zecimală: $\frac{3}{25}, \frac{4}{5}, \frac{21}{4}, \frac{3}{125}, \frac{7}{50}, \frac{423}{25}, \frac{497\,358}{2\,500}, \frac{312}{5\,000}, \frac{173\,005}{2\,000}$.

7 Scrieți sub formă de fracție zecimală: **a** $40+3+\frac{5}{10}+\frac{6}{100}$; **b** $3\cdot 100+0\cdot 10+5+\frac{1}{10}+\frac{0}{100}+\frac{7}{1\,000}$.

8 Determinați numărul natural *n* știind că: **a** $6{,}37=\frac{n}{10^2}$; **b** $4{,}187=\frac{4\,187}{10^n}$; **c** $1{,}3=\frac{n}{100}$.

Activitate pe grupe

Elevii clasei a V-a se împart în trei grupe. Fiecare grupă primește câte un cartonaș pe care sunt scrise fracții zecimale și fracții ordinare, ca în figura alăturată. Sarcina de lucru este ca elevii să realizeze perechi formate dintr-o fracție zecimală și o fracție ordinară, astfel încât cele două fracții să fie egale.

$\frac{11}{10}$ 2,4 $\frac{2}{5}$ 0,3 1,4 1,1 $\frac{7}{2}$ 0,4 0,03 $\frac{24}{25}$ $\frac{3}{100}$ 0,11 0,96

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Scrierea sub formă de fracție zecimală a fracției $\frac{128}{1\,000}$ este:
A 1,28; **B** 12,8; **C** 0,128; **D** 0,0128.

2 Scrierea sub formă de fracție ordinară a fracției 11,08 este:
A $\frac{11}{8}$; **B** $\frac{118}{10}$; **C** $\frac{1\,108}{100}$; **D** $\frac{118}{100}$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 20 de bidoane cu apă reprezintă $\frac{2}{10}$ din cantitatea totală de apă ce încape într-un bazin.
a Este adevărat că 40 de bidoane pot umple 0,5 din bazin?
b De câte bidoane cu apă este nevoie pentru a umple bazinul?

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 2: Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale

Mate practică

Ioana și-a cumpărat o ciocolată, pentru care a plătit 14,75 lei, iar Horia și-a cumpărat un suc, pentru care a plătit 14,3 lei.

a Care dintre cei doi copii a plătit mai mult pentru produsul cumpărat?

b Care dintre cele două prețuri este mai apropiat de 14 lei? Dar de 14,5 lei? Dar de 15 lei?

Rezolvare:

a Comparăm fracțiile zecimale $14{,}75 = 1\,475$ sutimi $> 1\,430$ sutimi $= 14{,}3$. Pentru compararea celor două prețuri, putem utiliza și transformarea lor în fracții ordinare.

Avem $14{,}75 = \frac{1\,475}{100}$ și $14{,}3 = {}^{10)}\frac{143}{10} = \frac{1\,430}{100}$. Deoarece fracțiile au același numitor și $1\,475 > 1\,430$, obținem că Ioana a plătit mai mult decât Horia.

b Pentru *apropierea de 14,* vom compara diferențele:

$14{,}75 - 14 = \frac{1\,475 - 1\,400}{100} = \frac{75}{100}$, $14{,}3 - 14 = \frac{1\,430 - 1\,400}{100} = \frac{30}{100}$ și, cum $30 < 75$, obținem că 14,3 este mai apropiat de 14.

Asemănător, $14{,}75 - 14{,}5 = \frac{1\,475 - 1\,450}{100} = \frac{25}{100}$, $14{,}5 - 14{,}3 = \frac{1\,450 - 1\,430}{100} = \frac{20}{100}$ și, cum $25 > 20$, obținem că 14,3 este mai apropiat de 14,5, iar 14,75 este mai apropiat de 15.

Spunem că *14 este aproximarea prin lipsă la unități a numărului 14,3*, iar *15 este aproximarea prin adaos a lui 14,75 la unități.*

De reținut

În general, pentru *a compara două fracții zecimale* oarecare, comparăm părțile întregi.

1. Dacă acestea nu sunt egale, mai mare este numărul cu partea întreagă mai mare.

Exemple:

a Dintre numerele 34,12 și 32,988, mai mare este 34,12, deoarece $34 > 32$.

b Dintre numerele 306,99 și 99,10, mai mare este 306,99, deoarece $306 > 99$.

c Dintre numerele 123,4 și 12,34, mai mare este 123,4, deoarece $123 > 12$.

2. Dacă părțile întregi sunt egale, se compară, de la stânga la dreapta, zecimalele de același ordin; mai mare este numărul corespunzător zecimalei mai mari din prima pereche de zecimale diferite.

Exemple:

a Comparând 39,47 cu 39,49, observăm că: $39 = 39$ (părțile întregi), $4 = 4$ (zecimile) și $7 < 9$ (sutimile), deci $39{,}47 < 39{,}49$.

b Comparând 124,456 cu 124,462, observăm că: $124 = 124$ (părțile întregi), $4 = 4$ (zecimile) și $5 < 6$ (sutimile), deci $124{,}456 < 124{,}462$.

c Comparând 76,5 cu 76,49, observăm că: $76 = 76$ (părțile întregi) și $5 > 4$ (zecimile), deci $76{,}5 > 76{,}49$.

Ordonarea fracțiilor zecimale se poate face, ca și la numere naturale, astfel:

- crescător (de la mic la mare): $2{,}5 < 3{,}14 < 45{,}18 < 309{,}2 < 6\,005{,}1$;
- descrescător (de la mare la mic): $204{,}9 > 185{,}63 > 23{,}4 > 5{,}9876 > 0{,}74$.

Reguli

În multe situații, pentru a ușura calculele, suntem nevoiți să rotunjim numerele cu care operăm. Rotunjirea este o aproximare prin lipsă sau prin adaos, care se face astfel:

1. citim cifra din dreapta ordinului la care se face rotunjirea;
2. dacă această cifră este 0, 1, 2, 3 sau 4, atunci ea se neglijează; dacă aceasta este 5, 6, 7, 8, 9, atunci se mărește cu o unitate cifra ordinului la care se face rotunjirea.

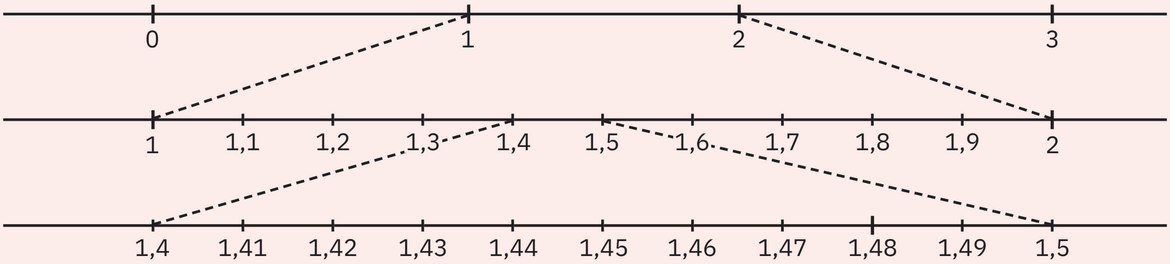
Exemple

Numărul dat	Ordinul la care se face rotunjirea	Cifra din dreapta cifrei ordinului	Este cifra din dreapta mai mică decât 5?	Aproximare prin lipsă/ adaos	Numărul obținut prin rotunjire
13,5	unități	5	nu	Adaos	14
423,7	zeci	3	da	Lipsă	420
18 674,1	sute	7	nu	Adaos	18 700
11 293,5	mii	2	da	Lipsă	11 000
4,279	zecimi	7	nu	Adaos	4,3
0,3651	sutimi	5	nu	Adaos	0,37
8,25346	miimi	4	da	Lipsă	8,253

Gândire critică

Ne propunem să reprezentăm pe axa numerelor numărul 1,48. Împărțim segmentele determinate de diviziunile corespunzătoare numerelor 1 și 2 în zece segmente de lungimi egale. Apoi, fiecare dintre acestea, adică o zecime, le împărțim în câte 10 segmente egale. Identificăm astfel numărul 1,48 între 1,4 și 1,5.

Exemple



Observație. Dintre două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule reprezentate pe axa numerelor mai mică este fracția zecimală cea mai apropiată de origine.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între 7,3 și 7,42.

Rezolvare:
Observăm că $7,3 = 7,30$. Din $30 < 31 < 32 < 37 < 42$, obținem fracțiile cerute 7,31; 7,32 și 7,37.

2 Câte fracții zecimale, cu două zecimale, sunt cuprinse între 6,58 și 6,71?

Rezolvare:
Fracțiile cu două zecimale cuprinse între 6,58 și 6,71 sunt 6,59; 6,60; 6,61; ...; 6,70.
Sunt $70 - 59 + 1 = 12$ fracții zecimale.

3 Câte numere naturale de forma $\overline{abc}$ verifică relația $\frac{35}{10} \leq \overline{a,bc} < 4,25$?

Rezolvare:
Vom utiliza scrierea sub formă ordinară a fracției $4,25 = \frac{425}{100}$ și a fracției $\overline{a,bc} = \frac{\overline{abc}}{100}$.

Evident vom scrie și $^{10)}\frac{35}{10} = \frac{350}{100}$. Obținem $\frac{350}{100} \leq \frac{\overline{abc}}{100} < \frac{425}{100}$ sau $350 \leq \overline{abc} < 425$.
Numerele căutate sunt 350, 351, ..., 424. Sunt $424 - 350 + 1 = 75$ de numere.

4 Încadrați între două numere naturale consecutive fracțiile zecimale: **a** 0,05; **b** 34,9.

Rezolvare: **a** $0 < 0,05 < 1$; **b** $34 < 34,9 < 35$.

Probleme propuse

1 Comparați fracțiile zecimale:
a 1,7 și 1,8; **b** 23,5 și 23,51; **c** 304,2 și 204,2;
d 15,7 și 15,70; **e** 0,34 și 0,44; **f** 0,07 și 0,007.

2 Înlocuiți „☐” cu „<”, „=” sau „>” pentru a obține propoziții adevărate:
a 3,8 ☐ 3,4; **b** 5,29 ☐ 5,43; **c** 13,621 ☐ 13,62; **d** 15,39 ☐ 15,215.

3 La fiecare dintre următoarele afirmații, scrieți „**A**” (dacă afirmația este adevărată) sau „**F**” (dacă afirmația este falsă):
a $2{,}39 < 2{,}23$; **b** $6{,}8 = 6{,}80$; **c** $3{,}14 > 3{,}03$;
d $14{,}132 < 15{,}1$; **e** $12{,}169 = 11{,}169$; **f** $6{,}782 > 6{,}78$.

4 Scrieți în ordine crescătoare și în ordine descrescătoare următoarele fracții zecimale:
a 7,9; 0,5; 4,25; 0,09; 63,7; **b** 2,7; 3,8; 1,7; 0,95; 0,03; 0,45.

5 Reprezentați pe axa numerelor fracțiile zecimale: 0,7; 1,5; 2,3; 2,5; 3,2; 4; 1,3; 2; 3,6 și 4,2.

6 Rotunjiți fracția zecimală 23,145 la cea mai apropiată sutime, zecime, unitate, zece.

7 Încadrați fiecare fracție zecimală între două numere naturale consecutive:
a 3,12; **b** 0,5; **c** 6,29; **d** 23,24.

8 Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între:
a 7,21 și 7,23; **b** 6,19 și 6,2; **c** 8,342 și 8,343; **d** 7,003 și 7,28.

9 Câte numere naturale n verifică relația $3{,}7 < \frac{n}{100} \leq 5{,}27$?

Portofoliu

În jocul „$\overline{a,b}$” se pot utiliza doar fracții zecimale de forma $\overline{a,b}$. Ioana începe jocul, scriind o fracție zecimală, de exemplu 2,5. Horia continuă, scriind o fracție zecimală cu cel puțin 1 mai mare decât a Ioanei, de exemplu 4,3. Pe rând, începând cu Ioana, fiecare copil scrie câte o fracție zecimală cuprinsă între ultimele două fracții zecimale scrise: de exemplu, Ioana poate scrie fracția 3,4 (cuprinsă 2,5 și 4,3), Horia scrie 3,9 (cuprinsă între 3,4 și 4,3), apoi Ioana trebuie să scrie o fracție cuprinsă între 3,9 și 4,3 etc. Cel care nu mai poate găsi nicio fracție zecimală de forma $\overline{a,b}$ între ultimele două fracții scrise pierde jocul.
a Jucați acest joc, în echipe, pornind de la numerele 1,4 și 5,2.
b Stabiliți care dintre cei doi jucători poate avea o strategie de câștig.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dintre fracțiile 1,23, 0,99, 2,01 și 1,29, mai mare este:
A 1,23; **B** 2,01; **C** 0,99; **D** 1,29.

2 Ordinea descrescătoare a fracțiilor 0,123, 1,23, 12,3 și 0,0123 este:
A 0,0123; 0,123; 1,23; 12,3; **B** 0,123; 1,23; 0,0123; 12,3;
C 12,3; 1,23; 0,123; 0,0123; **D** 12,3; 0,123; 1,23; 0,0123.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră fracția zecimală 12,35.
a Dă exemplu de două fracții zecimale F și f, astfel încât $F < 12{,}35 < f$.
b Determină câte fracții de forma $\overline{1a,bc}$ există, astfel încât $\overline{1a,bc} \leq 12{,}35$.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 3: Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

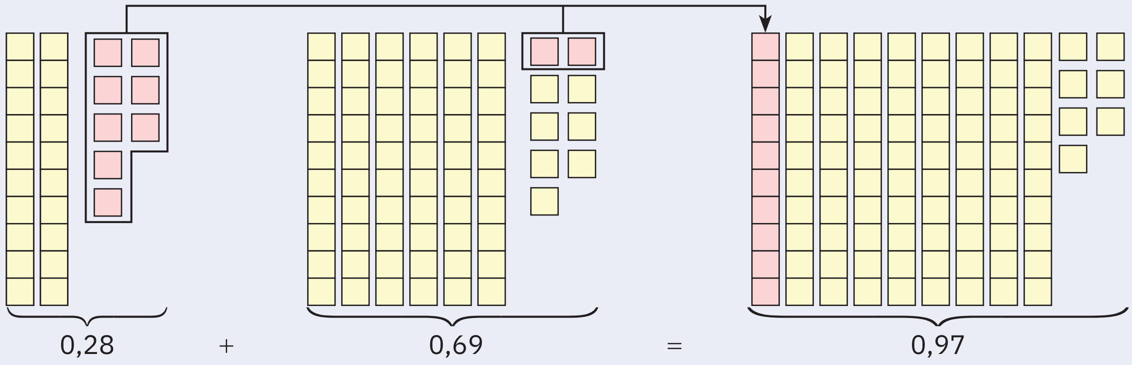
3.1. Adunarea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule

Mate practică

Ioana are două bucăți din lemn de lungimi 0,28 m și 0,69 m. Ea lipește cele două bucăți de lemn, una în continuarea celeilalte. Ce lungime are noua piesă formată din cele două bucăți de lemn?

Rezolvare:

Trebuie să efectuăm adunarea 0,28 + 0,69. Mai jos este reprezentată vizual modalitatea de adunare: 0,28 = 20 zecimi și 8 sutimi, 0,69 = 60 zecimi și 9 sutimi. Se adună sutimile cu sutimile și se obțin 17 sutimi, adică 10 zecimi și 7 sutimi. Se adună zecimile și se obțin 90 de zecimi. În final, obținem 90 zecimi și 7 sutimi, adică 0,97. Lungimea piesei este egală cu 0,97 m.



Observăm că, așezând fracțiile sub forma $\begin{array}{r}0{,}28\\ \underline{0{,}69}\end{array}$ și efectuând adunările, obținem $\begin{array}{r}0{,}28+\\ \underline{0{,}69}\\ 0{,}97\end{array}$

De reținut

Pentru a aduna două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule, procedăm astfel: așezăm fracțiile zecimale una sub alta, astfel încât partea întreagă a primei fracții să fie sub partea întreagă a celei de-a doua, virgula sub virgulă, zecimile sub zecimi, sutimile sub sutimi ș.a.m.d., apoi adunăm după regula de adunare a numerelor naturale. La final, virgula se coboară la sumă, sub virgulele termenilor.

Exemple

1 $\begin{array}{r}10{,}3+\\ \underline{4{,}5}\\ 14{,}8\end{array}$

2 $\begin{array}{r}24{,}25+\\ \underline{0{,}97}\\ 25{,}22\end{array}$

3 $\begin{array}{r}75{,}468+\\ \underline{256{,}309}\\ 331{,}777\end{array}$

4 $\begin{array}{r}0{,}44\quad+\\ 29{,}107\\ \underline{451{,}7529}\\ 481{,}2999\end{array}$

3.2. Scăderea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule

Mate practică

Horia cumpără o sticlă de apă plată care costă 3,5 lei. Ce rest primește Horia dacă a plătit cu o bancnotă de 10 lei?

Rezolvare:

Pentru a determina restul primit de Horia va trebui să efectuăm scăderea 10 – 3,5. Vom folosi aceeași tehnică de la adunare, prezentată alăturat.

$10 = \begin{array}{r}10{,}0-\\ \underline{3{,}5}\end{array}$ $\begin{array}{r}0\ 9\ 10\\ 10{,}0-\\ \underline{3{,}5}\\ 5\end{array}$ $\begin{array}{r}0\ 9\ 10\\ 10{,}0-\\ \underline{3{,}5}\\ 6{,}5\end{array}$

De reținut

Pentru a scădea două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule, procedăm astfel: așezăm fracțiile zecimale una sub alta, scăzătorul sub descăzut, astfel încât virgula să fie sub virgulă, scădem numerele ca și când ar fi naturale, apoi coborâm, la diferență, virgula sub virgula termenilor.

Exemple

1 $\begin{array}{r} 12{,}7 - \\ 5{,}8 \\ \hline 6{,}9 \end{array}$ **2** $\begin{array}{r} 14{,}75 - \\ 1{,}26 \\ \hline 13{,}49 \end{array}$ **3** $\begin{array}{r} 0{,}4853 - \\ 0{,}2178 \\ \hline 0{,}2675 \end{array}$ **4** $\begin{array}{r} 43{,}256 - \\ 21{,}8 \\ \hline 21{,}456 \end{array}$

Observații

1 Dacă descăzutul are mai puține zecimale decât scăzătorul, atunci se adaugă zerouri la partea zecimală (la final) pentru a avea același număr de zecimale.

Exemple:

a $3{,}60 - 2{,}18 = 3{,}60 - 2{,}18 = 1{,}42$

b $218 - 12{,}45 = 218{,}00 - 12{,}45 = 205{,}55$

$\begin{array}{r} 3{,}60 - \\ 2{,}18 \\ \hline 1{,}42 \end{array}$ $\begin{array}{r} 218{,}00 - \\ 12{,}45 \\ \hline 205{,}55 \end{array}$

2 Adunarea și scăderea se pot efectua și astfel: se transformă fracțiile zecimale în fracții ordinare, se efectuează calculele cu fracții ordinare, apoi se transformă rezultatul într-o fracție zecimală.

a $10{,}3 + 4{,}5 = \frac{103}{10} + \frac{45}{10} = \frac{148}{10} = 14{,}8;$ **b** $24{,}25 + 0{,}97 = \frac{2\,425}{100} + \frac{97}{100} = \frac{2\,522}{100} = 25{,}22;$

c $2{,}7 - 1{,}53 = \frac{27}{10} - \frac{153}{100} = \frac{270}{100} - \frac{153}{100} = \frac{117}{100} = 1{,}17;$ **d** $3{,}5 - 2{,}9 = \frac{35}{10} - \frac{29}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Dați exemplu de două fracții zecimale finite care adunate dau 11,23.

Rezolvare:
Strategia este să identificăm o fracție zecimală finită mai mică decât 11,23. Fie aceasta 9,7. Efectuăm scăderea $11{,}23 - 9{,}7 = 1{,}53$. Așadar, un exemplu de fracții care îndeplinesc condiția dată este 1,53 și 9,7.

2 Dacă se măresc descăzutul cu 10 și scăzătorul cu 4,5, calculați cu cât se mărește diferența inițială.

Rezolvare:
Fie $D - S = R$ scăderea inițială. În urma modificării termenilor, noua operație este:

$$(D + 10) - (S + 4{,}5) = D + 10 - S - 4{,}5 = D - S + (10 - 4{,}5) = R + 5{,}5.$$

Diferența inițială se mărește cu 5,5.

3 Determinați cifrele nenule a și b, știind că $\overline{a{,}b} + \overline{b{,}a} = 2{,}2$.

Rezolvare:
$\overline{a{,}b} = \frac{\overline{ab}}{10}$, $\overline{b{,}a} = \frac{\overline{ba}}{10}$ și $2{,}2 = \frac{22}{10}$. Obținem $\frac{\overline{ab} + \overline{ba}}{10} = \frac{22}{10}$ sau $\overline{ab} + \overline{ba} = 22$ sau $11a + 11b = 22$ sau $11(a + b) = 22$ sau $a + b = 2$. Cifrele sunt 1 și 1.

Probleme propuse

1 Calculați:
a $2{,}3 + 8{,}5;$ **b** $5{,}4 + 3{,}6;$ **c** $4{,}25 + 0{,}14;$
d $125{,}4 + 96{,}32;$ **e** $17{,}5 + 32{,}32 + 10;$ **f** $11{,}05 + 4{,}275 + 90.$

2 Într-un depozit sunt 126,75 tone de făină și s-au mai adus 24,5 tone. Ce cantitate de făină este acum în depozit?

3 La un aprozar erau 29,72 kg de lămâi și s-au vândut 14,35 kg. Ce cantitate de lămâi a rămas?

4 Calculați:
a $7{,}8 - 4{,}3;$ **b** $11{,}6 - 5{,}8;$ **c** $23{,}34 - 14{,}8;$
d $41{,}59 - 16{,}2;$ **e** $63{,}31 - 44{,}308;$ **f** $205{,}4 - 3{,}49.$

5 Dintr-un balot de stofă de 34,5 m s-au vândut, în prima zi, 14,15 m, iar în a doua zi, cu 2,7 m mai puțin decât în prima zi. Ce lungime are bucata rămasă după a doua zi?

6 Un biciclist a parcurs în prima zi 21,25 km, în a doua zi cu 7,3 km mai mult decât în prima zi, iar în a treia zi cu 10 km mai mult decât în a doua zi. Ce distanță a parcurs biciclistul în cele trei zile?

7 Un tren are de parcurs în 3 ore 208 km. În prima oră a parcurs 70,75 km, iar în a doua oră cu 9,5 km mai puțin decât în prima oră. Ce distanță mai are de parcurs în a treia oră?

8 Calculați:

a $13,5 + 2,7 - 6,8$; **b** $5,23 - 2,23 + 14,9$; **c** $81,43 + 18,57 - 23,64$;

d $456,258 - 208,208 + 54,65$; **e** $18,3458 - 6,0059 + 10,203$; **f** $79 - 23,503 - 4,8563 + 1,8$.

9 **a** Dați exemplu de două fracții zecimale care adunate dau 7,73.

b Dați exemplu de două fracții zecimale a căror diferență este 11,2.

10 Determinați cifrele nenule *a* și *b* care fac adevărată relația $\overline{a,b} + \overline{b,a} = 3,3$.

11 Dacă se mărește descăzutul cu 23,456 și se micșorează scăzătorul cu 1,544, calculați cu cât se mărește diferența inițială.

12 **a** Determinați numărul natural $\overline{abc}$ știind că $43,1+3,9-1,2=\dfrac{\overline{abc}}{10}$.

b Determinați numărul natural $\overline{abcd}$ știind că $5,71+12,91-7,52=\dfrac{\overline{abcd}}{100}$.

13 Horia și-a cumpărat un joc pentru calculator. Prețul jocului a fost de 41,35 lei. El a plătit cu o bancnotă de 50 de lei. Estimați, fără a efectua scăderea, restul primit de Horia:

a mai mic decât 10 lei; **b** mai mare decât 10 lei;

c mai mare decât 20 de lei; **d** mai mic decât 5 lei.

Aplicație practică

În tabelul alăturat este prezentată o parte din oferta de prețuri dintr-un magazin cu echipamente sportive. Presupunem că Horia are 40 de lei. Precizați dacă poate cumpăra:

a un tricou și un șort;

b o pereche de ochelari de soare, o minge de fotbal și o pereche de mănuși de portar;

c un șort, o pereche de ochelari și o minge de fotbal.

Calculați ce rest primește un cumpărător la achiziționarea unui set format din câte un produs din cele 5 prezentate dacă plătește cu o bancnotă de 100 de lei.

Produs	Preț
tricou	24,75 lei
șort	21,15 lei
ochelari de soare	12,45 lei
minge de fotbal	14,99 lei
mănuși de portar	23,48 lei

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $13,5 + 7,32$ este: **A** 6,18; **B** 8,67; **C** 20,82; **D** 20,35.

2 Rezultatul calculului $1,73 - 1,56$ este: **A** 17; **B** 3,29; **C** 2,17; **D** 0,17.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Alin are o bancnotă de 100 de lei și dorește să cumpere o carte, un stilou și un penar.

a Dacă el cumpără doar o carte, care costă 27,35 lei, atunci determină ce rest primește.

b Poate cumpăra o carte de 56,25 lei, un caiet de 18,45 lei și un penar de 69,5 lei? La ce ar trebui să renunțe?

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 4: Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Mate practică

Ioana parcurge într-o oră 2,6 km. Câți kilometri parcurge Ioana în 10 ore? Dar în 3,8 ore?

Rezolvare:

În 10 ore va parcurge $2{,}6\cdot 10=\frac{26}{10}\cdot 10=26$ km.

În 3,8 ore va parcurge $2{,}6\cdot 3{,}8=\frac{26}{10}\cdot\frac{38}{10}=\frac{988}{100}=9{,}88$ km.

4.1. Înmulțirea unei fracții zecimale cu o putere a lui 10

Pentru a efectua înmulțirea lui 35,78 cu 10, utilizăm transformarea în fracție ordinară a fracției 35,78 și obținem $35{,}78\cdot 10=\frac{3\,578}{100}\cdot 10=\frac{3\,578}{10}=357{,}8$. Observăm că virgula s-a mutat spre dreapta, peste o cifră.
Asemănător, avem 5,389 · 100 = 538,9 și 0,02597 · 1 000 = 25,97.

Regulă

Înmulțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu o putere a lui 10 se face mutând virgula spre dreapta peste atâtea cifre câte arată exponentul lui 10 (dacă nu sunt cifre suficiente la partea zecimală, se completează cu zerouri).

Exemple

1 0,073 · 10 = 0,73;
2 0,073 · 100 = 7,3;
3 0,073 · 1 000 = 73;
4 0,073 · 10 000 = 730;
5 124,98 · 10 = 1 249,8;
6 3,673 · 100 = 367,3.

4.2. Înmulțirea unei fracții zecimale cu un număr natural

Înmulțirea 2,35 · 3 se poate efectua ca o adunare repetată: 2,35 · 3 = 2,35 + 2,35 + 2,35 = 7,05.
Același lucru se obține dacă înmulțim 235 de sutimi cu 3 și obținem 705 sutimi, adică 7,05.

Similar, a înmulți pe 3,7 cu 4 revine la a înmulți 37 de zecimi cu 4. Obținem 148 de zecimi, deci 3,7 · 3 = 14,8.

Regulă

Pentru a înmulți *o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule cu un număr natural*, se înmulțesc numerele ca și când ar fi numere naturale (fără a ține seama de virgulă), iar la produs se despart prin virgulă, numărând de la dreapta spre stânga, atâtea zecimale câte are fracția zecimală.

Exemple

1 $\begin{array}{r} 2{,}84\ \cdot \\ 7 \\ \hline 19{,}88 \end{array}$

2 $\begin{array}{r} 0{,}083\ \cdot \\ 11 \\ \hline 0083\ + \\ 0083 \\ \hline 0{,}913 \end{array}$

3 $\begin{array}{r} 44{,}21\ \cdot \\ 35 \\ \hline 22105\ + \\ 13263 \\ \hline 1547{,}35 \end{array}$

4 $\begin{array}{r} 0{,}003\ \cdot \\ 21 \\ \hline 0003\ + \\ 006 \\ \hline 0{,}063 \end{array}$

4.3. Înmulțirea a două fracții zecimale

Să analizăm următoarea înmulțire: $3{,}5\cdot 7{,}23=\frac{35}{10}\cdot\frac{723}{100}=\frac{25\,305}{1\,000}=25{,}305$.
Observăm că s-a efectuat înmulțirea numerelor naturale 35 și 723 fără a ține cont de virgule, iar la rezultat, 25 305, s-a deplasat virgula de la dreapta spre stânga peste 3 zecimale, câte au împreună cele două fracții care se înmulțesc.

Regulă ✓

Pentru a înmulți două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule, se înmulțesc numerele neținând seama de virgulă, ca și când ar fi naturale, iar la rezultat se despart prin virgulă, numărând, de la dreapta spre stânga, atâtea cifre câte zecimale au împreună cele două fracții.

Exemple

1

```
   4 5,2·
     3,7
  ───────
  31 6 4+
 13 5 6
 ───────
 167,2 4
```

2

```
     4,51·
  0,3 04
 ────────
   1 8 04+
1 35 3
────────
1,37 1 04
```

3

```
 2 05,4 09·
      0,23
 ──────────
  6 16 2 27+
41 08 1 8
──────────
47,24 4 07
```

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 La un magazin s-au adus 60 de saci cu făină a câte 45,75 kg fiecare și 40 de saci cu făină a câte 38,5 kg fiecare. Ce cantitate de făină s-a adus în total?

Rezolvare:
În cei 60 de saci sunt 60 · 45,75 = 2 745 kg, iar în cei 40 de saci sunt 40 · 38,5 = 1 540 kg.
Cantitatea totală adusă a fost: 2 745 + 1 540 = 4 285 kg.

2 Un turist are de parcurs un traseu de 20 km. În prima zi parcurge 0,75 din lungimea traseului, iar restul traseului, în a doua zi. Determinați câți kilometri a parcurs turistul în a doua zi.

Rezolvare:
A calcula o fracție dintr-un număr înseamnă a înmulți fracția cu numărul respectiv. În cazul nostru, turistul a parcurs în prima zi 0,75 · 20 = 15 km. În a doua zi, turistul a parcurs 20 – 15 = 5 km.

3 Utilizând comutativitatea înmulțirii, efectuați cât mai rapid:
a 8 · 13,2 · 125; **b** 2 · 0,25 · 4 · 0,5; **c** 25 · 0,4 · 11,5.

Rezolvare:
a 8 · 13,2 · 125 = 8 · 125 · 13,2 = 1 000 · 13,2 = 13 200;
b 2 · 0,25 · 4 · 0,5 = 2 · 0,5 · 0,25 · 4 = 1 · 1 = 1;
c 25 · 11,5 · 0,4 = 25 · 0,4 · 11,5 = 10 · 11,5 = 115.

4 Scrieți următoarele fracții zecimale ca un produs dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:
a 73,5; **b** 128,03; **c** 12 451,053.

Rezolvare:
a 73,5 = 7,35 · 10^1 = 0,735 · 10^2 = 0,0735 · 10^3;
b 128,03 = 12,803 · 10^1 = 1,2803 · 10^2 = 0,12803 · 10^3;
c 12 451,053 = 1 245,1053 · 10 = 124,51053 · 10^2 = 12,451053 · 10^3.

Probleme propuse

1 Calculați:
a 2,3 · 10; **b** 1,73 · 10; **c** 0,03 · 100; **d** 12,51 · 100;
e 495,37 · 100; **f** 0,253 · 1 000; **g** 4,20035 · 10 000; **h** 0,002 · 10 000.

2 Calculați:
a 1,5 · 4; **b** 2,75 · 3; **c** 24,21 · 17;
d 8,004 · 56; **e** 125,27 · 88; **f** 53,702 · 65.

3 **a** Un corn cântărește 0,079 kg. Cât cântăresc 13 cornuri?
b Într-o călimară sunt 0,023 l de cerneală. Ce cantitate de cerneală se află în 12 călimări?

4 Calculați:
a 0,7 · 10 · 3,8; **b** 2,53 · 11 · 0,8; **c** 8,5 · 23 · 0,753;
d 0,431 · 8 · 2,56; **e** 12 · 2,7 · 0,02; **f** 48 · 3,5 · 2,564.

5 Calculați:
a 1,5 · 6; **b** 8,4 · 10; **c** 72,56 · 5; **d** 14,052 · 8;
e 44,32 · 1,5; **f** 4,3 · 0,25; **g** 7,29 · 0,7; **h** 0,17 · 100 · 2,8.

6 **a** La un magazin s-au vândut dimineață 92,55 m de stofă, iar după-amiază, de 2,5 ori mai mult. Câți metri de stofă s-au vândut, în total, în acea zi?
b Un manual de matematică pentru clasa a V-a cântărește 0,483 kg. Cât va cântări un pachet format din 12 manuale dacă ambalajul cântărește 0,244 kg?

7 Unul dintre factorii unei înmulțiri de doi factori este cuprins între 2,5 și 2,8, iar celălalt, între 6,3 și 7,5. Dați un exemplu de numere naturale între care este cuprins produsul celor doi factori.

8 Calculați:
a 3,7 · (2,59 + 2,41); **b** 6,12 · (4,23 – 4,03);
c (12,5 + 2,5) · (10 – 0,9); **d** (6,12 – 5,93) · (78,124 + 21,876).

9 Utilizând comutativitatea înmulțirii, efectuați cât mai rapid:
a 2 · 0,1 · 5; **b** 5 · 2,7 · 2; **c** 3,5 · 2 · 1,6 · 5;
d 4 · 5,34 · 25; **e** 6,24 · 25 · 0,7 · 4; **f** 2,5 · 3,14 · 2 · 0,2 · 5.

10 Identificați, pentru fiecare pereche din coloana **A**, un număr din coloana **B** care să reprezinte suma, diferența sau produsul numerelor din perechea aflată în coloana **A**.

A	B
(4,2; 3,14)	4,293
(5,3; 0,81)	5,381
	1,06
(12,6; 4,08)	16,68

11 Se consideră fracțiile zecimale a și b, astfel încât $1{,}4 < a < 1{,}6$ și $2{,}4 < b < 2{,}6$. Determinați numărul natural n, știind că $n < a \cdot b < n + 2$.

12 Produsul numerelor a și b este egal cu 9,45. Mărind numărul a cu 1, produsul numerelor devine 12,95. Determinați numărul b.

13 Scrieți următoarele fracții zecimale ca un produs dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:
a 6,51; **b** 18,33; **c** 378,123.

14 Se consideră o operație *magică* notată „⊙”, astfel: $x \odot y = (x + y) \cdot (x - y)$, unde x și y sunt fracții zecimale finite. Utilizând modelul propus, calculați $4{,}3 \odot 2{,}5$.
Model: $1{,}2 \odot 0{,}9 = (1{,}2 + 0{,}9) \cdot (1{,}2 - 0{,}9) = 2{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}63$.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului 123,04 · 100 este:
A 12 304; **B** 1 230,4; **C** 12,304; **D** 1,2304.

2 Un număr natural cuprins între 6,32 · 1,3 și 6,32 · 1,9 este:
A 6; **B** 7; **C** 8; **D** 9.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Un călător a parcurs un drum de 36 km. În prima zi, a parcurs 0,25 din drum, în a doua zi, 0,4 din drum, iar în a treia zi, restul drumului.
a Determină câți kilometri parcurge în prima zi.
b Cu câți kilometri mai mult a parcurs în a doua zi decât în a treia zi?

Grila de evaluare:

Subiectul 1	Subiectul 2	Subiectul 3		Oficiu	Total
2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 5: Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multe numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate

5.1. Împărțirea unui număr natural la 10, 100, 1 000 cu rezultat fracție zecimală

Mate practică

Horia a cumpărat 10 bomboane pentru care a plătit 5 lei, 100 de rezerve pentru stilou pentru care a plătit 30 de lei și un set de 1 000 de capse pentru care a plătit 9 lei. Calculați prețul unei bomboane, prețul unei rezerve și al unei capse.

Rezolvare:

Pentru a calcula prețul fiecărui obiect va trebui să împărțim suma plătită pe fiecare set la 10, 100 și respectiv 1 000.

Prețul unei bomboane este egal cu 5 : 10 sau 50 zecimi : 10 = 5 zecimi, adică 0,5 lei.

Prețul unei rezerve este egal cu 30 : 100 sau 300 zecimi : 100 = 3 zecimi, adică 0,3 lei.

Prețul unei capse este egal cu 9 : 1 000 sau 9 000 miimi : 1 000 = 9 miimi, adică 0,009 lei.

La împărțirea cu 10 a lui 5, de fapt, am mutat virgula de la dreapta spre stânga peste o cifră (5 = 5,0 și 5,0 : 10 = 0,5). La împărțirea cu 100 am mutat virgula de la dreapta la stânga peste două cifre, iar la împărțirea cu 1 000 peste 3 cifre.

De reținut

Orice număr natural *n* se poate scrie sub forma unei fracții zecimale, astfel: *n*,0; *n*,00; *n*,000 etc. Pentru a împărți un număr natural la o putere a lui 10, se mută virgula spre stânga peste un număr de cifre egal cu exponentul puterii lui 10.

Exemple

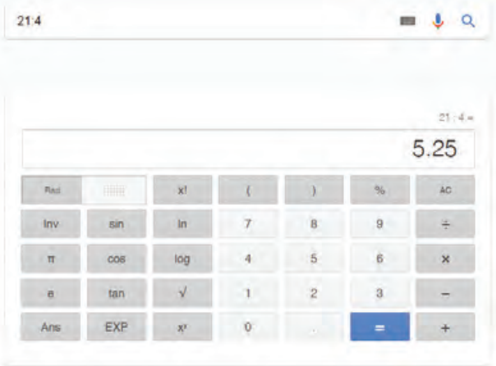
1 24 : 10 = 2,4;
2 7 : 100 = 0,07;
3 15 : 1 000 = 0,015;
4 234 : 10 = 23,4;
5 234 : 1 000 = 0,234;
6 234 : 100 = 2,34.

5.2. Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală

Pentru a împărți două numere naturale, se procedează astfel: se împarte mai întâi partea întreagă la numărul dat. Dacă împărțirea nu este exactă, se adaugă virgula după deîmpărțit, se adaugă zerouri și se scrie virgula la cât, apoi se continuă împărțirea ca la numere naturale, fără a ține cont de virgula de la deîmpărțit.

Mate practică

Ioana folosește un motor de căutare pe internet pentru a afla răspunsul la următoarea întrebare „21 : 4”. Obține următorul răspuns:



21:4

21 : 4 =

5.25

Cum s-a procedat pentru a se ajunge la 5,25?

Ce observăm?

Vom utiliza faptul că orice număr natural se poate scrie ca o fracție zecimală plasând virgula în dreapta numărului și adăugând oricâte zerouri sunt necesare: 5 = 5,00000...; 214 = 214,00000...; 17 = 17,000... . La efectuarea împărțirilor cu rezultat fracție zecimală, adăugarea zerourilor după virgulă este o condiție esențială. Pentru efectuarea împărțirii lui 21 la 4 procedăm astfel:

$$\begin{array}{rr|l} 2 & 1 & \underline{4\;\;\;} \\ \underline{2} & \underline{0} & 5 \\ = & 1 & \end{array}$$

Pasul 1

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & 1, & 0 & \underline{4\;\;\;} \\ \underline{2} & \underline{0} & & 5,2 \\ = & 1 & 0 & \\ & \underline{\;\;} & \underline{8} & \\ & = & 2 & \end{array}$$

Pasul 2

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 1, & 0 & 0 & \underline{4\;\;\;} \\ \underline{2} & \underline{0} & & & 5,25 \\ = & 1 & 0 & & \\ & \underline{\;\;} & \underline{8} & & \\ & = & 2 & 0 & \end{array}$$

Pasul 3

Am obținut 21 : 4 = 21,00 : 4 = 5,25. Asemănător, obținem:

1 $\frac{3}{16}=3:16=0,1875$, iar $16=2^4$;

2 $\frac{641}{125}=641:125=5,128$, iar $125=5^3$;

3 $\frac{4\,578}{100}=4\,578:100=45,78$, iar $100=2^2\cdot 5^2$;

4 $\frac{3}{40}=3:40=0,075$, iar $40=2^3\cdot 5$.

Spunem că am transformat fracțiile ordinare $\frac{3}{16}$, $\frac{641}{125}$, $\frac{4\,578}{100}$, $\frac{3}{40}$ în fracțiile zecimale 0,1875; 5,128; 45,78 respectiv 0,075.

Regula 1

Prin împărțirea a două numere naturale în care împărțitorul nu are alți divizori primi în afara lui 2 și/sau a lui 5, se obține *o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule.*

5.3. Periodicitate

Să analizăm următoarele împărțiri:

1 $\frac{1}{3}=1:3=0,33333\ldots$

Zecimala 3 se repetă la cât de un număr nedeterminat de ori. Fracția zecimală obținută se notează 0,(3) și se citește *zero virgulă perioadă 3*.

Scriem: $\frac{1}{3}=0,(3)$.

2 $\frac{51}{11}=51:11=4,63636363\ldots$

Grupul de zecimale 63 se repetă de un număr nedeterminat de ori. Fracția zecimală obținută se notează 4,(63) și se citește *patru virgulă perioadă 63*.

Scriem: $\frac{51}{11}=0,(63)$.

Regula 2

Prin împărțirea a două numere naturale în care împărțitorul nu se divide nici cu 2, nici cu 5, se obține *o fracție zecimală periodică simplă* (numărul/numerele care se repetă încep imediat după virgulă).

Să analizăm următoarele împărțiri:

1 $\frac{35}{6}=35:6=5,8333\ldots=5,8(3)$;

2 $\frac{17}{55}=17:55=0,3090909\ldots=0,3(09)$;

3 $\frac{47}{12}=47:12=3,91666\ldots=3,91(6)$;

4 $\frac{53}{22}=53:22=2,4090909\ldots=2,4(09)$.

Regula 3

Prin împărțirea a două numere naturale în care împărțitorul este divizibil cu cel puțin unul dintre numerele 2 și 5 și are cel puțin un alt divizor prim în afară de 2 sau 5 se obține o *fracție zecimală periodică mixtă* (numărul/numerele care se repetă nu încep imediat după virgulă).

5.4. Media aritmetică

Mate practică

Radu a obținut la geografie, în semestrul I, media 9, iar în semestrul al II-lea, media 10. Calculați media anuală obținută de Radu la geografie.

Rezolvare:
Media anuală se calculează adunând mediile obținute în cele două semestre și împărțind rezultatul la 2, deci este egală cu $(9+10):2=9{,}50$.
Spunem că media anuală este media aritmetică a celor două medii obținute de Radu în semestrul I și semestrul al II-lea.

De reținut

Media aritmetică a $n \geq 2$ numere naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este egală cu:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Altfel spus, media aritmetică a două sau mai multe numere naturale este egală cu suma numerelor împărțită la numărul de numere.

Exemple

1 Media aritmetică a numerelor 6 și 8 este egală cu $m_a = \frac{6+8}{2} = 14:2 = 7$.

2 Media aritmetică a numerelor 7, 9 și 15 este egală cu $m_a = \frac{7+9+15}{3} = 31:3 = 10{,}(3)$.

3 Media aritmetică a numerelor 4, 5, 11 și 13 este $m_a = \frac{4+5+11+13}{3} = 33:4 = 8{,}25$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Fie fracția $a = \frac{13n+6}{6n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care a este o fracție zecimală finită.

Rezolvare:
Pentru $n=1$ obținem $a = \frac{19}{6}$, se transformă în fracție zecimală periodică mixtă. Dacă $n=2$, $a = \frac{8}{3}$, se transformă în fracție zecimală periodică simplă. Pentru $n=3$, $a = \frac{45}{18} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ este fracție zecimală finită. În concluzie, $n=3$.

2 Media aritmetică a patru numere este 23,25, iar media aritmetică a altor cinci numere este 14,2. Calculați media aritmetică a celor nouă numere.

Rezolvare:
Avem: $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = 23{,}25$ de unde obținem $a_1+a_2+a_3+a_4 = 93$

și $\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{5} = 14{,}2$, de unde obținem $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 = 71$.

Atunci $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{4+5} = \frac{93+71}{9} = \frac{164}{9} = 18{,}(2)$.

3 Se consideră numărul $a = 4{,}3(35)$.

a Determinați a 2017-a zecimală a lui a.

b Determinați suma primelor 100 de zecimale ale lui a.

Rezolvare:

a $2\,017 - 1 = 2\,016$, $2\,016 : 2 = 1\,008$ rest 0, deci a 2 017-a zecimală este 5.

b $S = 3 + 49(3+5) + 3 = 398$.

4 Dați exemple de numere naturale n, astfel încât fracția ordinară $\frac{9}{4+n}$ să se transforme în:

a fracție zecimală finită; **b** fracție zecimală periodică simplă; **c** fracție zecimală periodică mixtă.

Rezolvare:

a $n=46$: $\frac{9}{4+46}=0{,}18$; **b** $n=50$: $\frac{9}{4+50}=0{,}1(6)$; **c** $n=23$: $\frac{9}{4+23}=0{,}(3)$.

5 Scrieți următoarele fracții zecimale ca un cât dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:

a 24,537; **b** 102,0425; **c** 1 122,33445.

Rezolvare:

a $24{,}537=245{,}37:10^1=2\,453{,}7:10^2=24\,537:10^3$.

b $102{,}0425=1\,020{,}425:10^1=10\,204{,}25:10^2=102\,042{,}5:10^3$.

c $1\,122{,}33445=11\,223{,}3445:10^1=112\,233{,}445:10^2=1\,122\,334{,}45:10^3$.

Probleme propuse

1 Efectuați următoarele împărțiri:

a 23 : 5; **b** 85 : 4; **c** 14 : 20; **d** 7 : 25;

e 59 : 50; **f** 472 : 10; **g** 731 : 200; **h** 64 : 1 000.

2 Scrieți sub formă de fracție zecimală:

$$\frac{8}{10};\ \frac{5}{3};\ \frac{23}{5};\ \frac{41}{2};\ \frac{17}{4};\ \frac{29}{9};\ \frac{44}{30};\ \frac{47\,838}{500};\ \frac{76}{25};\ \frac{25}{12};\ \frac{68\,309}{125};\ \frac{43}{625}.$$

3 Efectuați următoarele împărțiri:

a 7 : 6; **b** 37 : 15; **c** 25 : 9; **d** 311 : 12;

e 72 : 100; **f** 37 : 1 000; **g** 79 : 40; **h** 329 : 3.

4 Calculați media aritmetică a numerelor:

a 12 și 36; **b** 20; 34 și 42; **c** 2,4 și 6,6;

d 8,11 și 7,29; **e** 0,03 și 4,85; **f** 2,1; 3,6 și 5,7.

5 Media aritmetică a două numere este 21,35, iar unul dintre numere este 18,3. Determinați celălalt număr.

6 Media aritmetică a trei numere este 7,14. Calculați suma celor trei numere.

7 Precizați care dintre fracțiile ordinare de mai jos se transformă în fracții zecimale periodice simple și care în fracții zecimale periodice mixte:

$$\frac{3}{4};\ \frac{8}{9};\ \frac{5}{6};\ \frac{1}{13};\ \frac{2}{45};\ \frac{17}{100};\ \frac{239}{17};\ \frac{45}{43};\ \frac{1}{62};\ \frac{9}{125};\ \frac{701}{20};\ \frac{37}{15};\ \frac{403}{600};\ \frac{4}{100};\ \frac{25}{75}.$$

8 Dați exemple de numere naturale n, astfel încât fracția ordinară $\frac{7}{10+n}$ să se transforme în:

a fracție zecimală finită; **b** fracție zecimală periodică simplă; **c** fracție zecimală periodică mixtă.

9 Fie fracția $\frac{7+n}{60}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care fracția se transformă în:

a fracție zecimală finită; **b** fracție zecimală periodică simplă; **c** fracție zecimală periodică mixtă.

10 Se consideră numărul $a=4{,}3(35)$.

a Determinați a 2012-a zecimală a lui a.

b Determinați suma primelor 100 de zecimale ale lui a.

11 Scrieți următoarele fracții zecimale ca un cât dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:

a 32,126; **b** 25,48; **c** 672,9873.

12 La sfârșitul semestrului, Clara are la istorie notele 8, 9, 7. Calculați media Clarei la istorie pe acest semestru.

13 Calculați media aritmetică a numerelor:
- **a** 12 și 18;
- **b** 204 și 305;
- **c** 7 și 8,4;
- **d** 9 și 14,32;
- **e** 10,5 și 47,34;
- **f** 10; 12 și 30,2.

14 **a** Media aritmetică a două numere este 14,75, iar unul dintre numere este 8,4. Determinați celălalt număr.
- **b** Media aritmetică a 100 de numere este 47,58. Determinați suma celor 100 de numere.
- **c** Determinați numărul x, astfel încât media aritmetică a numerelor 21; 14,4; 34,6 și x să fie 29.

15 Radu are trei note la geografie, din care îi iese media 6. El mai obține la o lucrare scrisă nota 10. Ce medie va avea Radu la geografie?

16 La un test, elevii unei clase a V-a au obținut notele:

6, 8, 5, 10, 9, 8, 7, 4, 6, 9, 10, 8, 7, 7, 5, 10, 9, 9, 6, 8, 10, 10, 5, 4.

- **a** Care este media clasei obținută la acel test?
- **b** Găsiți o metodă rapidă de calculare a mediei clasei la acel test.

17 Media aritmetică a patru numere este 33. Determinați numerele, știind că al doilea este cu 18 mai mare decât primul, al treilea este dublul primului, iar al patrulea este egal cu media aritmetică a primelor două numere.

18 Determinați trei numere, știind că, dacă se calculează mediile aritmetice a câte două dintre aceste numere, se obțin valorile 32, 39 și 41.

19 În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de 6 elevi la un test:

Prenumele	**Maria**	**Cristi**	**Ioana**	**Clara**	**Radu**	**Horia**
Nota	5	7	10	9	8	9

- **a** Determinați media aritmetică a notelor obținute la test de cei 6 elevi.
- **b** Determinați media aritmetică a notelor impare.
- **c** Ce notă ar fi trebuit să obțină Maria pentru ca media celor 6 elevi să fie 8,5?

Portofoliu

Ioana spune un număr natural, iar Horia spune alt număr natural. Apoi Ioana calculează media aritmetică a celor două numere, iar Horia calculează media aritmetică dintre numărul obținut de Ioana și numărul ales de el. Ioana calculează apoi media aritmetică dintre media obținută de Horia și numărul ei. Dacă numerele alese au fost 11 și 32, determinați ce numere au obținut Ioana și Horia după repetarea procedeului de 3 ori.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Scrierea sub formă de fracție zecimală a fracției $\frac{29}{3}$ este:

A 9,2; **B** 9,(6); **C** 9,5; **D** 9,(2).

2 Media aritmetică a trei numere naturale consecutive este 9. Suma a două dintre cele trei numere nu poate fi:

A 16; **B** 17; **C** 18; **D** 19.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră fracția zecimală $a = 12{,}31(325)$.
- **a** Determină a 2 023-a zecimală.
- **b** Calculează suma primelor 100 de zecimale ale fracției a.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 6: Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

6.1. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la 10, 100, 1 000

De reținut

Pentru *a împărți o fracție zecimală la o putere a lui 10* deplasăm virgula spre stânga peste un număr de zecimale egal cu exponentul puterii lui 10.

Exemple:

1 23,7 : 10 = 2,37; am deplasat virgula spre stânga peste o zecimală, pentru că 10 = 10^1;

2 124,5 : 100 = 1,245; am deplasat virgula spre stânga peste două zecimale, pentru că 100 = 10^2;

3 21,34 : 1 000 = 0,02134; am deplasat virgula spre stânga peste trei zecimale, pentru că 1 000 = 10^3.

Ce observăm?

Regula de împărțire a unei fracții zecimale la o putere a lui 10 este similară regulii de împărțire a unui număr natural la o putere a lui 10.

Într-adevăr, a împărți pe 23,7 la 10 revine la a împărți 237 de zecimi la 10. Rezultatul este egal cu 237 : 10 = 23,7 zecimi. Cum 20 de zecimi sunt egale cu 2 întregi, iar 3 zecimi se transformă în 30 de sutimi, rezultă că 23,7 zecimi reprezintă fracția zecimală 2,37, deci 23,7 : 10 = 2,37.

6.2. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul

Mate practică

Ioana a cumpărat 3 creioane, pentru care a plătit 12,75 lei. Determinați prețul unui creion.

Rezolvare:

Pentru a determina prețul unui creion, vom împărți 12,75 la 3.

O strategie ar fi să împărțim 1 275 de sutimi la 3. Am obține astfel 425 de sutimi, adică 4,25.

Prezentăm un procedeu de împărțire asemănător cu cel de la împărțirea a două numere naturale, cu rezultat fracție zecimală:

Pasul 1

$$\begin{array}{r|l} 12{,}75 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 4, \\ == & \end{array}$$

Pasul 2

$$\begin{array}{r|l} 12{,}75 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 4{,}2 \\ ==7 & \\ \underline{6} & \\ 1 & \end{array}$$

Pasul 3

$$\begin{array}{r|l} 12{,}75 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 4{,}25 \\ ==7 & \\ \underline{6} & \\ 15 & \end{array}$$

Am obținut 12,75 : 3 = 4,25.

De reținut

Pentru *a împărți o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural* se împarte mai întâi partea întreagă la numărul dat și se scrie virgula la cât, apoi se continuă împărțirea ca la numere naturale, fără a ține cont de virgula de la deîmpărțit.

Exemple:

72,15 : 5 = 14,43; 12,9 : 3 = 4,3; 169,36 : 8 = 21,17.

6.3. Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

De reținut

Pentru *a împărți două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule* se procedează astfel:

a se înmulțește atât deîmpărțitul, cât și împărțitorul cu o putere a lui 10, pentru ca împărțitorul să devină număr natural;

b se împart numerele astfel obținute.

Exemple

1 Pentru a împărți pe 3,21 la 0,5, întrucât împărțitorul are o singură zecimală, mărim de 10 ori (mutând virgula spre dreapta peste o cifră) și deîmpărțitul, și împărțitorul. Obținem:

$$3{,}21 : 0{,}5 = 32{,}1 : 5 = 6{,}42.$$

2 435,2 : 0,04 = 43 520 : 4 = 10 880 (am înmulțit deîmpărțitul și împărțitorul cu 100).

3 157,293 : 1,25 = 15 729,3 : 125 = 125,8344 (am înmulțit deîmpărțitul și împărțitorul cu 100).

6.4. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

De reținut

Fracția zecimală periodică simplă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător perioada, iar numitorul este numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

$$\overline{a,(b_1b_2\ldots b_n)}=a\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{\underbrace{999\ldots99}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple

1 $4,(7)=4\frac{7}{9}$; **2** $0,(29)=\frac{29}{99}$; **3** $1,(0258)=1\frac{258}{9\,999}$;

4 $11,(8)=11\frac{8}{9}$; **5** $0,(031)=\frac{31}{999}$; **6** $405,(267)=405\frac{267}{999}$.

De reținut

Fracția zecimală periodică mixtă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător diferența dintre numărul fără paranteză situat după virgulă și numărul situat la partea zecimală neperiodică, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are partea periodică, urmate de atâtea zerouri câte cifre are partea zecimală neperiodică.

$$\overline{a,b_1b_2\ldots b_n(c_1c_2\ldots c_m)}=a\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_nc_1c_2\ldots c_m}-\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{\underbrace{999\ldots9}_{m\text{ cifre}}\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple

1 $8,2(7)=8\frac{27-2}{90}=8\frac{25}{90}=8\frac{5}{18}$; **2** $0,23(731)=\frac{23\,731-23}{99\,900}=\frac{23\,708}{99\,900}=\frac{11\,854}{49\,950}=\frac{5\,927}{24\,975}$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Efectuați 1,(3) + 5,1(6), scriind rezultatul sub formă de fracție zecimală.

Rezolvare:

Pentru a efectua adunarea vom transforma fracțiile periodice în fracții ordinare.

Avem $1,(3)=1\frac{3}{9}^{(3}=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ și $5,1(6)=5\frac{16-1}{90}=5\frac{15}{90}^{(15}=5\frac{1}{6}=\frac{31}{6}$.

Numitorul comun al fracțiilor $\frac{4}{3}$ și $\frac{31}{6}$ este 6, deci ${}^{2)}\frac{4}{3}+\frac{31}{6}=\frac{8+31}{6}=\frac{39}{6}=6{,}5$.

2 Determinați cifra a, știind că $\overline{0,1(a)}+\overline{0,(a)}+\overline{0,a(1)}$ este număr natural.

Rezolvare:

$\overline{0,1(a)}+\overline{0,(a)}+\overline{0,a(1)}=\frac{\overline{1a}-1}{90}+\frac{a}{9}+\frac{\overline{a1}-a}{90}=\frac{10+a-1+10a+10a+1-a}{90}=\frac{20a+10}{90}=\frac{20a+10}{90}=\frac{10(2a+1)}{90}=\frac{2a+1}{9}$ este număr natural. Avem $2a+1$ este un multiplu al lui 9, adică a egal cu 4.

Probleme propuse

1 Calculați:
a 14,3 : 5; **b** 12,7 : 20; **c** 55,79 : 4; **d** 31,08 : 8;
e 72,066 : 6; **f** 23,46 : 3; **g** 195,3 : 12; **h** 150,8 : 20.

2 Calculați:
a 23,45 : 1 000; **b** 67,5 : 10; **c** 912,3 : 100; **d** 15,78 : 10;
e 129,567 : 100; **f** 0,004 : 10; **g** 1,234 : 100; **h** 0,75 : 10.

3 **a** 10 țevi cântăresc 6,5 tone. Cât cântărește o țeavă?
b 60 de ace cu gămălie cântăresc 120,48 g. Cât cântăresc 12 ace?
c 10 caiete de același fel cântăresc 2,345 kg. Cât cântărește un caiet?

4 Determinați numerele de 100 de ori mai mici decât: 263; 5,8; 327,1; 500,3; 4 487,324; 25,2525.

5 Calculați:
a 30 : 2,5; **b** 14 : 1,25; **c** 9,6 : 3,2; **d** 70,23 : 2,4;
e 850,8 : 0,15; **f** 44 : 0,055; **g** 18,9 : 3,2; **h** 44,85 : 2,5.

6 Scrieți sub formă de fracție ordinară:
a 2,(5); 13,(7); 125,(8); 0,(29); 4,(37); 125,(106); 29,(471).
b 0,2(7); 4,6(5); 8,23(7); 16,14(35); 200,79(125).

7 Calculați numărul de 0,02 ori mai mic decât:
a 3,7; **b** 5,003; **c** 0,2; **d** 4,8 : 12; **e** 5,8 : 2,9.

8 Calculați numărul de 0,003 ori mai mic decât:
a 5; **b** 6,3; **c** 1,28; **d** $0,2 \cdot 4 : 0,01$; **e** $11 : 10^2$.

9 Indicați pentru fiecare fracție zecimală din coloana **A** o fracție zecimală din coloana **B** cu care se poate asocia astfel încât numărul din coloana **B** să reprezinte împărțirea la 100 a numărului din coloana **A**.

A	B
23,789 237,89 2,3789	0,0023789 0,023789 0,23789 2,3789

10 Efectuați: **a** 2,(4) + 3,1(2); **b** 0,(25) + 3,4(5).

Activitate pe grupe

Elevii sunt organizați pe două grupe. Fiecare grupă are o sumă de bani.
Pe tablă este afișat cursul valutar al unei bănci din România, din data de 9 iunie 2017, pentru moneda euro și pentru dolarul american.
Presupunem că prima grupă are 1 828 de lei și trebuie să cumpere euro, apoi să-i vândă.
A doua grupă are 1 640 de lei și trebuie să cumpere dolari, apoi să-i vândă.
Fiecare grupă trebuie să calculeze ce sumă de bani pierde prin efectuarea celor două tranzacții în aceeași zi.

Denumire valută	Cod valută	Schimb valutar	
		Cumpărare	Vânzare
EURO	EUR	4,55 lei	4,57 lei
DOLAR SUA	USD	4,06 lei	4,10 lei

Fiecare grupă va prezenta la tablă rezolvarea sarcinilor primite.

Lecția 7: Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive

Mate practică

Adi, Ioana și Horia au hotărât să parcurgă un traseu montan de 20 km. În prima zi, Adi a parcurs 0,5 din drum, Ioana $\frac{1}{2}$ din drum, iar Horia 50% din drum. Ce distanțe au parcurs fiecare?

Rezolvare:

$0,5 \cdot 20 = 10$, deci Adi a parcurs 10 km.

$\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$, deci Ioana a parcurs 10 km.

$50\% \cdot 20 = \frac{50}{100} \cdot 20 = 10$, deci Horia a parcurs 10 km.

De reținut

Numerele 0,5, $\frac{1}{2}$ și 50% reprezintă forme diferite de scriere pentru același număr, numit ***număr rațional pozitiv***. Fracțiile ordinare, fracțiile zecimale și procentele sunt forme diferite de scriere a ***numerelor raționale pozitive***.

Exemple

1 $\frac{4}{5}$ este un număr rațional pozitiv scris sub formă de fracție ordinară. Deoarece $\frac{4}{5} = 4:5 = 0,8$, înseamnă că 0,8 este același număr rațional pozitiv, egal cu $\frac{4}{5}$, dar scris sub formă de fracție zecimală. Evident că prin amplificarea fracției ordinare cu 20 obținem $\frac{80}{100} = 80\%$, iar 80% este același număr rațional egal cu $\frac{4}{5}$ sau 0,8.

2 2,(3) este un număr rațional pozitiv scris sub forma unei fracții zecimale periodice simple. Deoarece $2,(3) = 2\frac{3}{9} = \frac{7}{3}$, înseamnă $\frac{7}{3}$ este același număr rațional pozitiv, egal cu 2,(3), dar scris sub formă de fracție ordinară. Sub formă de procent, numărul 2,(3) se scrie 233,(3)%.

De reținut

1 ***La efectuarea operațiilor cu numere raționale pozitive se aplică aceeași regulă privind ordinea efectuării operațiilor ca la numere naturale:***

- dacă expresia conține operații de același ordin, operațiile se efectuează în ordinea în care sunt scrise (de la stânga la dreapta);
- dacă expresia conține operații de mai multe ordine, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul III (ridicările la putere), apoi operațiile de ordinul II (înmulțirile și împărțirile) și în final operațiile de ordinul I (adunările și scăderile).

Exemple:

1 $2,63 + 7,295 - 6,28 = 9,925 - 6,28 = 3,645$.

2 $7,5 - \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{75}{10} - \frac{21}{10} = \frac{54}{10} = 5,4$.

3 $32,49 \cdot 100 : 2,5 = 3\,249 : 2,5 = 1\,299,6$.

4 $0,042 \cdot 100 - 18 : 5,4 + 3^2 : 4,5 = 0,042 \cdot 100 - 18 : 5,4 + 9 : 4,5 = 4,2 - 3,(3) + 2 = 2,8(6)$.

2 Dacă o expresie conține și paranteze, efectuăm calculele din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele drepte și în final cele din acolade (respectând în cadrul parantezelor și al acoladelor ordinea de mai înainte).

Exemple:

1 $(2,73 + 0,27) : 0,5 - 4,25 = 3 : 0,5 - 4,25 = 6 - 4,25 = 1,75$.

2 $\frac{4}{5}\cdot\left(14{,}3-2{,}5\cdot\frac{1}{2}\right)=0{,}8\cdot(14{,}3-2{,}5\cdot0{,}5)=0{,}8\cdot(14{,}3-1{,}25)=0{,}8\cdot13{,}05=10{,}44$.

3 $[10+5\cdot(63{,}9:0{,}9-48)]\cdot100+3=[10+5\cdot(71-48)]\cdot100+3=$
$=[10+5\cdot23]\cdot100+3=(10+115)\cdot100+3=125\cdot100+3=12\,500+3=12\,503.$

4 $\{17{,}9+2\cdot[11{,}6\cdot100-5\cdot(44{,}8:0{,}8-29{,}4)]\}\cdot2{,}5+2\,003=$
$=\{17{,}9+2\cdot[11{,}6\cdot100-5\cdot26{,}6]\}\cdot2{,}5+2\,003=$
$=\{17{,}9+2\cdot1\,027\}\cdot2{,}5+2\,003=2\,071{,}9\cdot2{,}5+2\,003=7\,182{,}75.$

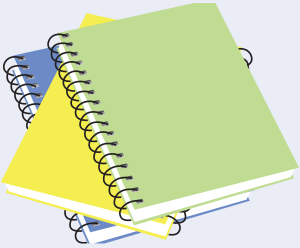
Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Adi și Ioana au de rezolvat 32 de probleme pentru cercul de matematică. În trei zile Adi, a rezolvat $\frac{3}{8}$ din numărul total al problemelor, iar Ioana a rezolvat 0,625 din numărul total al problemelor. Cine a rezolvat mai multe probleme?

Rezolvare:

$\frac{3}{8}\cdot32=12$, deci Adi a rezolvat 12 probleme.

0,625 · 32 = 20, deci Ioana a rezolvat 20 de probleme.
Ioana a rezolvat mai multe probleme decât Adi.



2 Efectuați $0{,}5\cdot\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}1(6)\right]:2{,}5$.

Rezolvare:
Vom lucra cu fracții ordinare. Pentru început să realizăm transformările fracțiilor zecimale în fracții ordinare:

$0{,}5=\frac{5}{10}^{(5}=\frac{1}{2}$, $0{,}1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}^{(15}=\frac{1}{6}$ și $2{,}5=\frac{25}{10}^{(5}=\frac{5}{2}$.

Efectuăm acum operațiile din paranteză: ${}^{4)}\frac{1}{3}+{}^{3)}\frac{1}{4}-{}^{2)}\frac{1}{6}=\frac{4+3-2}{12}=\frac{5}{12}$.

Efectuăm înnmulțirea, apoi împărțirea: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}:\frac{5}{2}=\frac{5}{24}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{12}$.

Probleme propuse

1 Efectuați:
a 20 + 1,7 – 6,3; **b** 5,8 – 2,9 + 0,37; **c** 9,29 + 2,71 – 5,4 – 2,2; **d** 15,24 · 10 : 100;
e 8,24 · 10 : 2; **f** 32,45 : 5 · 20; **g** $2{,}3^2\cdot0{,}12+1{,}024$; **h** $8{,}1^2:8{,}1+0{,}9$.

2 Calculați:
a $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot4$; **b** $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$; **c** $\frac{4}{9}+\frac{3}{10}:\frac{6}{10}$;
d $1\frac{1}{3}\cdot2\frac{1}{2}+6$; **e** $2\frac{1}{7}\cdot1\frac{1}{5}-\frac{1}{21}:\frac{1}{3}$; **f** $\frac{5}{6}:\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right)$.

3 Efectuați:
a 2,4 · 10 + 59 : 10 – 18 : 2,5; **b** $1{,}2^2+2{,}1^2-0{,}0017\cdot1\,000$; **c** 400 : 200 – 1,73 : 10 + 5,6 · 4,5;
d 29 : 100 + 3,7 · 4 – 123 : 100; **e** 62 : 10 – 0,02 · 10 + 28,5 · 2,2; **f** $3{,}9\cdot100+3{,}9:100-3{,}9^2$.

4 Efectuați următoarele operații:
a 4,71 · 10 – 3,7; **b** 29,56 – 5 + 14,8 · 7,2; **c** 81,4 – 3,1 · 10,8;
d 7,8 : 2 + 9,6 · 3,2; **e** 14,49 : 7 – 0,026 · 13; **f** 41,41 : 41 + 2 · 2 · 2.

5 Calculați:

a $1\frac{4}{5}:\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{21}+1\right)-\frac{4}{9}$;

b $\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{21}\right):\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{14}\right)-2\frac{1}{2}\right]\cdot 8$;

c $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}-\frac{1}{36}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)\cdot 2\frac{3}{7}$;

d $\left(3+\frac{3}{8}\right):\left(\frac{4}{35}-\frac{2}{70}\cdot\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{4}{15}$.

6 Efectuați:

a $(0,23+0,495+0,112)\cdot 100$;

b $3,2\cdot(17,5-12,5+35)+100$;

c $(1,4+0,83-0,95)\cdot 13-6,8$;

d $(12,5+7,5)\cdot(31,2\cdot 5-124)$;

e $5\cdot(11,3-2,4\cdot 3,5)+11$;

f $3,5^2+1,2\cdot\{11+1,1\cdot[6,5+2\cdot(0,45-0,4)]\}$;

g $\{3+0,5\cdot[2,3-0,2\cdot(3,1-5,12:3,2)]\}:4$;

h $[(3,15+4,05)\cdot 36,9]:[(17,5-10,3)\cdot 0,41]$.

7 Asociați fiecărei expresii din coloana **A** un număr din coloana **B** astfel încât numărul din coloana **B** să reprezinte rezultatul calculului expresiei din coloana **A**:

A	B
$1,1\cdot 2,5+1,1^2:11$	0,371
$1,1\cdot(2,5+1,1^2):11$	0,37
$(1,1\cdot 2,5+1,1^2):11$	0,36
$(1,1^2\cdot 2,5+1,1^2):11$	2,86
	0,385

8 Calculați:

a $0,6\cdot 1\frac{1}{9}-\frac{7}{9}:\left(2-\frac{1}{4}\right)$;

b $\left(3\frac{8}{9}-1,5\right):\left(3\frac{1}{2}+0,8\right)+2,(4)$;

c $\left(\frac{2}{3}+5,13:9\right):3\frac{71}{100}-0,(3)$;

d $\left(1,8^2-3\frac{7}{50}\right):\left(\frac{53}{10}-2,2^2\right)\cdot 2,3$.

9 **a** În trei zile s-au vândut 12,56 kg, 41,275 kg și 29,11 kg de cafea. Un kilogram de cafea costă 10 lei. Calculați, în două moduri, suma încasată.

b Un turist a parcurs un traseu montan de 24 km în trei zile. În prima zi a parcurs $\frac{3}{8}$ din traseu, în a doua zi a parcurs 0,(6) din restul traseului. Câți kilometri a parcurs în a treia zi?

c Un țăran mai are pentru vaca sa hrană pentru 20 de zile. După 5 zile, el cumpără un vițel, care consumă zilnic jumătate din cât consumă zilnic vaca. După câte zile de la cumpărarea vițelului s-a terminat hrana acestora?

Joc

Ioana și Horia primesc spre verificare egalitatea $3\cdot 19,4-2,5\cdot 0,1+4,3=25,2$, din care s-au șters parantezele rotunde și cele drepte.

Ei joacă un joc, ce constă în reconstituirea calculelor de mai sus prin completarea expresiei cu paranteze rotunde și drepte, pentru a obține răspunsul precizat. Câștigă jocul cel care termină primul de completat expresia.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Rezultatul calculului $2,4\cdot 4,2-3,2:\frac{4}{5}$ este:

A 8,6; **B** 6,8; **C** 6,08; **D** 3.

2 Rezultatul calcului $25,41-3\cdot(1,2+0,7)$ este:

A 42,579; **B** 23,91; **C** 22,41; **D** 19,71.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră următorul enunț: $18,16-12,3:2,5=2,344$.

a Stabilește dacă enunțul este adevărat sau fals.

b Introdu paranteze pentru ca enunțul să fie adevărat.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 8: Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare

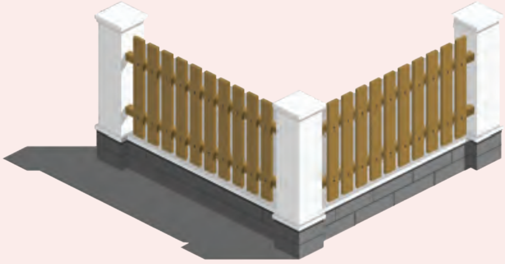
Ne amintim

Metoda reducerii la unitate se folosește în probleme în care două mărimi se găsesc într-o anumită dependență una față de cealaltă, iar mărimea cerută se află trecând printr-o etapă intermediară de comparare cu unitatea.

Sunt posibile două situații: dacă una dintre mărimi crește (descrește) de un număr de ori, atunci și cealaltă crește (descrește) de același număr de ori, respectiv, dacă în timp ce una dintre ele crește de un număr de ori, atunci cealaltă descrește de același număr de ori.

Exemple

1 Un gard de formă dreptunghiulară are o suprafață pe care o putem acoperi cu 35 de pătrate cu latura de 1 m. Pentru a vopsi $\frac{2}{5}$ din suprafața gardului s-au folosit 3,500 kg de vopsea. Ce cantitate a fost necesară pentru vopsirea gardului?



Rezolvare:
Cele două mărimi (suprafața vopsită și cantitatea necesară de vopsea) cresc sau scad în același timp. Reducerea la unitate (determinarea cantității necesare vopsirii unui pătrat) se face prin *împărțirea* cantității de vopsea folosită la numărul de pătrate.

$\frac{2}{5}$ din 35 de pătrate înseamnă $\frac{2}{5} \cdot 35 = 14$ pătrate, iar 3,500 kg reprezintă 3 500 g.

14 pătrate .... 3 500 g
1 pătrat .... 3 500 g : 14 = 250 g
35 pătrate .... 250 g · 35 = 8 750 g = 8,750 kg.

2 O piscină este prevăzută cu 32 de robinete cu același debit. 12 robinete umplu piscina în $13\frac{1}{3}$ ore. În câte ore se umple piscina, dacă sunt deschise toate robinetele?

Rezolvare:
Dacă numărul de robinete scade, timpul necesar pentru umplerea piscinei crește. În acest caz, reducerea la unitate (determinarea timpului în care umple piscina un singur robinet) se face prin *înmulțirea* numărului de robinete deschise cu timpul în care acestea umplu piscina.

12 robinete .... $13\frac{1}{3}$ ore
1 robinet .... $12 \cdot 13\frac{1}{3}$ ore $= 12 \cdot \frac{40}{3}$ ore $= 160$ ore
32 robinete .... 160 ore : 32 = 5 ore.

Ne amintim

Metoda comparației se aplică în probleme în care relațiile dintre mărimi se deduc din compararea a două situații diferite.

După stabilirea motivului care duce la diferențierea celor două situații se elimină una dintre necunoscute, prin înlocuire sau prin scădere.

Exemplu

2,5 metri de stofă și 4,2 metri de pânză costă 227,80 lei.
5 metri de stofă și 6,4 metri de pânză costă 412,60 lei.

a Ovidiu afirmă că prețul unui metru de stofă este de 100 lei. Este această afirmație adevărată? Justifică răspunsul dat.
b Cât costă un metru de pânză? Dar un metru de stofă?

Rezolvare:
a Dacă prețul unui metru de stofă ar fi egal cu 100 lei, atunci 2,5 metri de stofă ar costa 250 lei, ceea ce contrazice că 2,5 metri de stofă și 4,2 metri de pânză costă 227,80 lei. Afirmația lui Ovidiu este falsă.

b Transcriem datele problemei:

2,5 m stofă .... 4,2 m pânză .... 227,80 lei
5 m stofă .... 6,4 m pânză .... 412,60 lei

Aducem la același termen de comparație pentru a elimina materialul de stofă.
Înmulțind cu 2 datele care intervin în prima situație, obținem:

5 m stofă .... 8,4 m pânză .... 455,60 lei
5 m stofă .... 6,4 m pânză .... 412,60 lei

Diferența de preț egală cu 455,60 lei – 412,60 lei = 43 lei se datorează lungimii pânzei cumpărate în plus, egală cu 8,4 m – 6,4 m = 2 m. Atunci un metru de pânză costă 43 lei : 2 = 21,50 lei. 2,5 m de stofă costă 227,80 lei – 21,50 lei · 4,2 = 227,80 lei – 90,30 lei = 137,50 lei și atunci 1 m de stofă costă 137,50 lei : 2,5 = 55 lei.

Verificare: 2,5 m de stofă și 4,2 m de pânză costă 55 lei · 2,5 + 21,50 lei · 4,2 = 137,50 lei + + 90,30 lei = 227,80 lei.
5 m de stofă și 6,4 m de stofă costă 55 lei · 5 + 21,50 lei · 6,4 = 275 lei + 137,60 lei = = 412,60 lei.

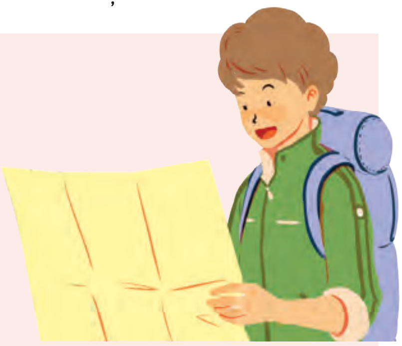
Ne amintim

Metoda figurativă presupune reprezentarea datelor prin desene (de regulă, segmente de dreaptă), respectându-se regulile dintre aceste date. *Metoda figurativă* se aplică, de regulă, pentru:

- determinarea a două mărimi atunci când se cunosc suma și diferența, suma și câtul sau diferența și câtul lor;
- determinarea unei fracții dintr-un întreg sau a unui întreg când se cunoaște o anumită fracție din el.

Exemplu

În tabăra de orientare turistică, traseul pentru prima excursie este stabilit astfel: din tabără se pleacă până la cascadă, urmează lacul cu nuferi și apoi se ajunge la punctul de campare. Distanța de la tabără până la cascadă este egală cu $\frac{5}{11}$ din lungimea traseului, iar distanța de la cascadă și lacul cu nuferi este $\frac{2}{11}$ din lungimea traseului.



a Este posibil ca distanța dintre cascadă și lacul cu nuferi să fie mai mare decât distanța dintre lac și punctul de campare? Justifică răspunsul dat.

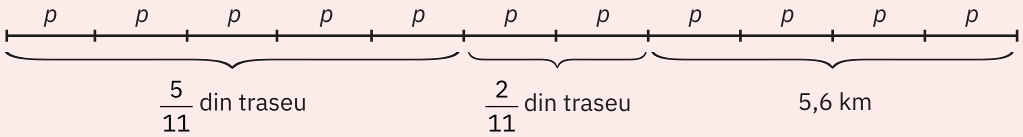
b Ce lungime are traseul, știind că distanța dintre lac și punctul de campare este de 5,6 km?

Rezolvare:

a Distanța dintre lac și punctul de campare reprezintă $1-\frac{5}{11}-\frac{2}{11}=\frac{4}{11}$ din lungimea traseului.

Deoarece $\frac{2}{11}<\frac{4}{11}$, deducem că nu este posibil.

b Deoarece $\frac{5}{11}$ și $\frac{2}{11}$ sunt două fracții din același întreg, lungimea traseului, reprezentăm lungimea traseului cu un segment împărțit în 11 părți egale:



Deducem că 5,6 km reprezintă 4 părți din lungimea traseului.
Atunci o parte reprezintă 5,6 km : 4 = 1,4 km, iar lungimea traseului este de 1,4 km · 11 = 15,4 km.

Verificare: 1,4 km · 5 + 1,4 km · 2 + 5,6 km = 7 km + 2,8 km + 5,6 km = 15,4 km.

Ne amintim

Metoda mersului invers se utilizează în problemele în care datele depind unele de altele succesiv, ultima fiind cunoscută. Ordinea rezolvării este inversă celei în care se succed datele problemei. Operațiile aritmetice folosite pentru rezolvarea unei probleme prin *metoda mersului invers* sunt, de regulă, operațiile inverse celor care exprimă dependențele între mărimi indicate de problemă.

Exemplu

Dintr-o sumă de bani, Horia a cheltuit $\frac{1}{8}$ pentru un stilou, $\frac{2}{7}$ din rest pentru un CD și $\frac{1}{3}$ din noul rest pentru o carte. Câți lei a avut în total dacă i-au rămas 40 de lei?

a Este posibil ca, după ce a cumpărat un stilou și un CD, să-i fi rămas 120 de lei? Justificați răspunsul dat.

b Câți lei a avut în total, dacă, după ce a cumpărat cartea, i-au rămas 40 de lei?

Rezolvare:

a În acest caz, cartea ar fi costat $120 \text{ lei} \cdot \frac{1}{3} = 40 \text{ lei}$ și i-ar fi rămas 120 lei – 40 lei = 80 lei, ceea ce contrazice faptul că i-au rămas 40 de lei. Deci nu este posibil.

b **Pasul I.** Descompunem problema dată în probleme mai simple:

p_1: a cheltuit $\frac{1}{8}$ din suma de bani pentru un stilou $\Rightarrow$ i-a rămas un prim rest egal cu $\frac{7}{8}$ din suma de bani;

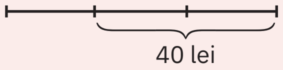
p_2: a cheltuit $\frac{2}{7}$ din primul rest pentru un CD $\Rightarrow$ i-a rămas un al doilea rest egal cu $\frac{5}{7}$ din primul rest;

p_3: a cheltuit $\frac{1}{3}$ din al doilea rest pentru o carte $\Rightarrow$ i-au rămas $\frac{2}{3}$ din al doilea rest, adică 40 de lei.

Pasul al II-lea. Aplicăm *metoda mersului invers*, rezolvând aceste probleme în *ordine inversă* față de apariția lor în text.

Folosind *metoda figurativă*, rezolvăm problema p_3: Cei 40 de lei reprezintă $\frac{2}{3}$ din al doilea rest.

Al doilea rest:



O parte reprezintă 40 lei : 2 = 20 lei și atunci al doilea rest este egal cu 20 lei · 3 = 60 lei

sau: Al doilea rest este egal cu $40 \text{ lei} : \frac{2}{3} = 40 \text{ lei} \cdot \frac{3}{2} = 60 \text{ lei}$.

Rezolvăm problema p_2: Cei 60 de lei reprezintă $\frac{5}{7}$ din primul rest.

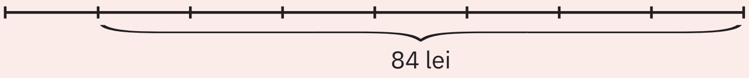
Primul rest:

O parte reprezintă 60 lei : 5 = 12 lei și atunci primul rest este egal cu 12 lei · 7 = 84 lei

sau: Primul rest este egal cu $60 \text{ lei} : \frac{5}{7} = 60 \text{ lei} \cdot \frac{7}{5} = 84 \text{ lei}$.

Rezolvăm problema p_1: Cei 84 de lei reprezintă $\frac{7}{8}$ din suma de bani.

Suma de bani:



O parte reprezintă 84 lei : 7 = 12 lei și atunci suma de bani este egală cu 12 lei · 8 = 96 lei

sau: Suma de bani este egală cu $84 \text{ lei} : \frac{7}{8} = 84 \text{ lei} \cdot \frac{8}{7} = 96 \text{ lei}$.

Verificare:

$$96 \text{ lei} - \left(96 \text{ lei} \cdot \frac{1}{8} + 84 \text{ lei} \cdot \frac{2}{7} + 60 \text{ lei} \cdot \frac{1}{3}\right) = 96 \text{ lei} - (12 \text{ lei} + 24 \text{ lei} + 20 \text{ lei}) = 96 \text{ lei} - 56 \text{ lei} = 40 \text{ lei}.$$

Ne amintim

Metoda falsei ipoteze se aplică în probleme în care se dau informații cumulate despre mărimi de tipuri diferite. Primul pas în aplicarea metodei este de a presupune că mărimile din problemă sunt toate de același fel. Se efectuează un calcul pentru a stabili dacă presupunerea făcută este adevărată sau falsă.

Dacă rezultatul calculului coincide cu cel din enunțul problemei, atunci problema este rezolvată, iar în caz contrar, deducem că presupunerea făcută este falsă și de aceea există mărimi și de celălalt fel.

Pentru aflarea uneia dintre mărimi, se stabilește diferența dintre rezultatul obținut și cel din enunț și aceasta se împarte la diferența produsă de înlocuirea unei mărimi de primul fel cu alta de cel de al doilea fel.

Exemple

În 12 vase, unele cu capacitatea de 1,5 litri, iar altele cu capacitatea de 3,5 litri, sunt 34 de litri de apă. Câte vase de fiecare fel sunt?

Rezolvare:
Presupunem că toate vasele au capacitatea de 1,5 litri. Atunci, în cele 12 vase am avea $1{,}5\ \ell \cdot 12 = 18\ \ell$.
Obținem o diferență de $34\ \ell - 18\ \ell = 16\ \ell$, deci sunt și vase cu capacitatea de 3,5 litri.
Cei 16 litri în minus provin din faptul că am înlocuit vase de $3{,}5\ \ell$ cu vase de $1{,}5\ \ell$.
Deoarece diferența de capacitate dintre vase este egală cu $3{,}5\ \ell - 1{,}5\ \ell = 2\ \ell$, la fiecare înlocuire am pierdut câte 2 litri.
Diferența de $16\ \ell$ se compensează printr-un număr de înlocuiri egal cu $16 : 2 = 8$ și atunci sunt 8 vase a 3,5 litri și, respectiv 4 vase a 1,5 litri fiecare.

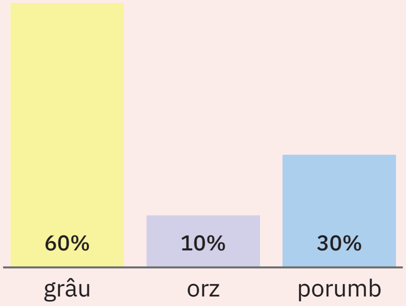
Verificare: $3{,}5\ \ell \cdot 8 + 1{,}5\ \ell \cdot 4 = 28\ \ell + 6\ \ell = 34\ \ell$

Probleme propuse

1 Podeaua unei bucătării poate fi acoperită cu 25 de pătrate cu latura de 1 m. Gresia necesară pentru a acoperi 40% din suprafață costă 279,50 lei. Cât costă toată gresia necesară?

2 Un caiet costă 1,80 lei, iar o carte 6 lei. Un colet în valoare de 51 de lei conține același tip de caiete și cărți, al căror număr total este 12.
- **a** Este posibil ca în colet să fie 9 cărți? Justificați răspunsul dat.
- **b** Câte cărți și câte caiete sunt în colet?

3 Analizând figura alăturată, calculați producția de orz și de grâu, știind că producția de porumb a fost de 3 600 de tone.



4 Un cub este format din 8 cuburi cu muchia de 1 dm și cântărește 400 g. Un alt cub, din același material, format din 27 de cuburi cu muchia de 1 dm cântărește:
a 2 kg; **b** 3 200 g; **c** 1,350 kg; **d** 1,600 kg.

5 Dacă o minge este lăsată să cadă (fără să fie aruncată), ea sare la o înălțime de două ori mai mică decât înălțimea de la care i s-a dat drumul. După ce i s-a dat drumul de la o anumită înălțime, mingea a sărit de 3 ori, ultima oară ridicându-se la 80 cm. De la ce înălțime i s-a dat drumul?

6 Indicele de masă corporală al unei persoane se calculează împărțind masa corporală, exprimată în kilograme, la pătratul înălțimii exprimate în metri.
- **a** Calculați-vă indicele de masă corporală (IMC) și studiați tabelul:
- **b** Radu are înălțimea de 1,50 m. El a calculat că, dacă ar cântări cu 1 kg mai mult, ar avea indicele de masă corporală egal cu 20. Ce indice de masă corporală are Radu?

Masa ideală	IMC	Încadrarea greutății
între 42 kg și 56 kg	sub 18,5	Subponderal
	între 18,51 și 24,99	Normal
	între 25,00 și 29,99	Supraponderal
	între 30,00 și 39,99	Obez

7 Ioana a cumpărat 3,5 kg de mere și 2 kg de roșii, plătind, în total, 24 de lei. Radu a cumpărat 7 kg de mere și 1,5 kg de roșii, plătind, în total 35,50 lei. Cât costă 1 kg de roșii, respectiv 1 kg de mere?

8 Un test conține 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, pentru fiecare răspuns greșit se scad 1,5 puncte și nu se acordă puncte din oficiu.
- **a** Este posibil ca Teo, după ce a parcurs integral testul și a răspuns la toate întrebările, să obțină 95 de puncte? Justificați răspunsul dat.
- **b** Edi a răspuns la toate întrebările testului și a obținut 87 de puncte. Determinați numărul răspunsurilor corecte.

9 Într-o cutie formată din două cuburi cu muchia de 1 m încape marfă în valoare de 4 500,50 lei. Afirmația: „Într-o cutie imaginară formată din 2 000 de cuburi cu muchia de 1 m încape același tip de marfă, în valoare de 9 001 000 lei.” este:
a adevărată; **b** falsă.

10 „Sunt un leu de bronz. Ochii și gura mea sunt fântâni. Dintr-un bazin, într-o zi, ochiul drept umple o treime, ochiul stâng o șesime, iar gura jumătate.”
Dacă leul „deschide” simultan ochii și gura, în cât timp va umple bazinul?

(Problemă din Grecia Antică)

11 Patru robinete și 5 pompe umplu un bazin cu capacitatea de 102,6 hl într-o oră. Printr-o pompă curge tot atâta apă cât prin trei robinete. În cât timp ar umple bazinul cele 5 pompe?

12 Determină numărul rațional *x* din egalitatea: $\left[\frac{3}{8}+\left(x-\frac{3}{10}\right)\cdot 2,5\right]:6,(3)=\frac{1}{8}$.

Indicație: Vezi metoda *mersului invers*, de la Unitatea II (*Exerciții cu o necunoscută*).

13 Niște maimuțe se distrează: $\frac{2}{7}$ din ele se cațără prin copaci, iar 60% din rest fac tumbe.
- **a** Este posibil să fie 15 maimuțe? Justificați răspunsul dat.
- **b** Știind că restul de 4 maimuțe se distrau aplaudându-le pe celelalte, află câte maimuțe erau în total.

14 Dintr-un bidon cu lapte s-a consumat în prima zi 40% din capacitate. A doua zi s-a folosit 0,(6) din cantitatea rămasă și încă un litru. În bidon au rămas 11 litri de lapte. Ce cantitate de lapte se afla inițial în bidon?

15 Perimetrul unei grădini dreptunghiulare este de 384 m. Dacă adăugăm 25 m la două treimi din lățime, obținem cu 1 m mai puțin decât 50% din lungime. Determinați lungimea grădinii.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Pentru 7,5 metri de mușama s-au plătit 45 de lei. Atunci pentru 11,25 metri de mușama s-au plătit:
A 6 lei; **B** 66,50 lei; **C** 67,50 lei; **D** 87,50 lei.

2 Construcția Marelui Zid Chinezesc a început în timpul dinastiei Ming și măsura 8 851,8 km. Lungimea inițială este cu 373,328 km mai mare decât 40% din lungimea totală a construcțiilor actuale. Lungimea celui mai lung zid de pe Terra este egală cu:
A 16 956,84 km; **B** 17 703,6 km; **C** 21 196,18 km; **D** 26 555,4 km.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Din traseul montan planificat spre o cascadă, Horia a parcurs, în prima etapă, o treime, iar în a doua etapă a parcurs 40% din rest și a constatat că mai are 3,3 km până la cascadă.
- **a** Este posibil ca în a doua etapă să fi parcurs 3,5 km? Justifică răspunsul dat.
- **b** Află lungimea traseului montan.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: **30 de minute**

Lecția 9: Probleme de organizare a datelor. Frecvență. Grafice cu bare. Grafice cu linii. Media unui set de date statistice

9.1. Organizarea și colectarea datelor statistice. Frecvență

Mate practică

Ioana și Eva vor să știe care este sportul preferat al elevilor de clasa a V-a din școala lor.
Pentru a *colecta informațiile*, ele realizează *un sondaj*.
Mai întâi, ele trec într-o listă informațiile pe care vor să le culeagă:

a sporturi de echipă:
- fotbal
- handbal
- baschet

b sporturi individuale:
- tenis
- înot
- șah

Apoi, formulează întrebările în vederea realizării sondajului, precum și indicațiile de completare:

Sondaj

SPORTURI FAVORITE

Grup-țintă: elevii claselor a V-a

La fiecare dintre cele două întrebări, alege o singură variantă de răspuns.

1 Care dintre următoarele sporturi de echipă practicate în școala noastră este sportul tău preferat:

☐ fotbal ☐ handbal ☐ baschet

2 Ce sport individual practici sau ți-ar plăcea să practici:

☐ tenis ☐ înot ☐ șah ☐ alt sport

Ce observăm?

Sondajul făcut studiază o anumită *caracteristică* a elevilor de clasa a V-a; în cazul de față, sportul preferat. Valorile pe care le poate lua această caracteristică sunt: fotbal, handbal sau baschet.

Pentru *a înregistra* și *a organiza* datele colectate, se utilizează *un tabel al frecvențelor*. Informațiile colectate după analiza răspunsurilor date de elevii clasei a V-a A la prima întrebare sunt înscrise în tabelul alăturat.

Sportul preferat

a V-a A	răspunsuri	frecvența
fotbal	~~////~~ ~~////~~ ////	14
handbal	////	4
baschet	~~////~~ //	7

Legendă: / = 1 ~~////~~ = 5

Dintre cei 25 de elevi ai clasei a V-a A, 14 elevi au răspuns că fotbalul este sportul lor preferat. Numărul natural 14 reprezintă *frecvența absolută* cu care apare acest răspuns.

Raportându-ne la întreaga clasă, fotbalul este preferat de $\frac{14}{25}$ dintre elevi sau, în scriere procentuală, de 56% dintre elevi. Fracția $\frac{14}{25}$ sau procentul 56% reprezintă *frecvența relativă*.

În tabelul frecvențelor se pot trece atât frecvența absolută, cât și frecvența relativă.

În exemplul dat, cei 4 elevi care preferă handbalul reprezintă 16% din cei 25 de elevi ai clasei a V-a A, iar cei 7 elevi care îndrăgesc mai mult baschetul reprezintă 28% din elevii clasei.

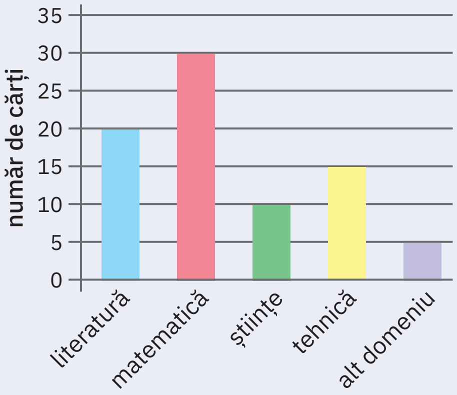
Sportul preferat — clasa a V-a A

fotbal	14	56%
handbal	4	16%
baschet	7	28%

9.2. Grafice cu bare. Grafice cu linii

Mate practică

La finalul unei săptămâni, se contorizează numărul de cărți cerute la sala de lectură a bibliotecii școlii, cu accent pe 4 domenii principale: literatură, matematică, științe și tehnică.
Datele colectate sunt prelucrate și reprezentate într-un grafic cu bare verticale, ca în imaginea alăturată.



cărți împrumutate	
literatură	20
matematică	30
științe	10
tehnică	15
alt domeniu	5

Ce observăm?

Analiza și interpretarea datelor se efectuează mai ușor utilizând graficul în locul unui tabel de frecvență, deoarece graficul permite compararea rapidă a datelor.

Analizând graficul, se observă că:
- denumirile domeniilor sunt scrise de-a lungul unei linii orizontale, iar valorile pe care le ia numărul de cărți cerute sunt scrise de-a lungul unei linii verticale; cele două linii se numesc *axe*;
- cele mai cerute cărți sunt cele de matematică (30);
- au fost cerute 15 cărți de tehnică;
- 5 cărți dintre cele cerute aparțin altui domeniu decât cele patru domenii principale.

Observații

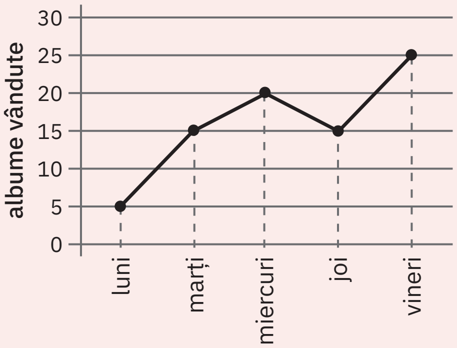
Graficele cu bare se folosesc de obicei atunci când se studiază și se compară date despre obiecte de tipuri diferite. Se pot folosi fie bare verticale, fie bare orizontale, în formă de dreptunghi. Una dintre dimensiunile dreptunghiului este aceeași pentru toate barele, iar cealaltă variază în raport cu valoarea numerică a frecvenței (absolute sau relative).

Graficele cu linii se folosesc în principal atunci când se studiază și se compară date despre același obiect sau proces de-a lungul unei anumite perioade. Un grafic cu linii folosește o grilă în care datele sunt expuse cu ajutorul unor puncte, care se unesc apoi prin segmente ce indică tendința de creștere sau descreștere a valorilor.

În realizarea unui grafic cu bare sau a unui grafic cu linii, pentru fiecare axă pe care sunt scrise seturi de date numerice se stabilește o unitate de măsură convenabilă. În exemplul de mai sus, numărul de cărți împrumutate variază între 5 și 30, deci o unitate potrivită pentru axa corespunzătoare este 5.

Exemplu

La magazinul de muzică se reprezintă printr-un grafic cu linii evoluția zilnică a vânzărilor ultimului album al câștigătorilor concursului Eurovision.



Examinând graficul, constatăm că:
- luni s-au vândut cele mai puține albume (5);
- cele mai mari vânzări s-au înregistrat în ziua de vineri — 25 de albume.

În total s-au vândut:

$$5 + 15 + 20 + 15 + 25 = 80 \text{ de albume.}$$

Folosind graficul cu linii, putem alcătui și tabelul frecvențelor.

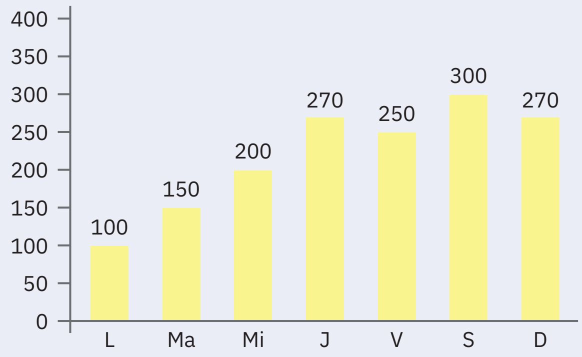
Ziua **Albume vândute**	**luni**	**marți**	**miercuri**	**joi**	**vineri**	**TOTAL**
număr	5	15	20	15	25	80
procent	6,25%	18,75%	25%	18,75%	31,25%	100%

9.3. Media unui set de date statistice

Mate practică

În graficul alăturat este reprezentat numărul vizitatorilor unui muzeu într-o săptămână.
Am obținut următorul set de date, corespunzător numărului de vizitatori, pe zile: 100, 150, 200, 270, 250, 300, 270.
Acestea sunt date statistice numerice.
Media aritmetică a numărului de vizitatori în acea săptămână este egală cu:

$$\frac{100+150+200+270+250+300+270}{7}=220.$$



Vom spune că 220 este media setului de date statistice analizat.

Ce observăm?
De multe ori, atunci când în studiul unui proces sau fenomen se colectează multe date, este de preferat să caracterizăm întregul set de date printr-o singură valoare, reprezentativă.

De reținut

Media unui set de date statistice este media aritmetică a tuturor valorilor din setul de date considerat.

Media unui set de *n* date care iau valorile $x_1, x_2, ..., x_n$ este egală cu $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.

Dacă într-un set de date valorile acestora apar de mai multe ori, atunci media setului de date se poate calcula ca fiind câtul dintre două sume: suma produselor dintre valorile datelor și frecvențele acestora și suma frecvențelor.

Exemplu

În tabelul următor sunt reprezentate notele obținute la testul de matematică de elevii clasei a V-a.

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	3	5	6	5	4

Media acestui set de date este

$$\frac{2\cdot5+3\cdot6+5\cdot7+6\cdot8+5\cdot9+4\cdot10}{2+3+5+6+5+4}=\frac{196}{25}=7{,}84.$$

Putem spune că media clasei este 7,84.

Probleme propuse

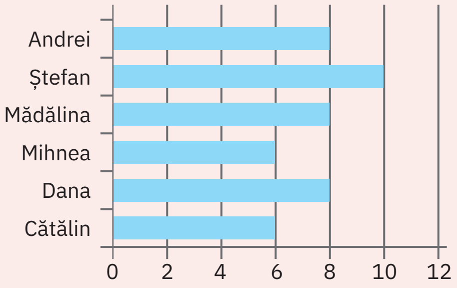
1 Ioana și Eva au completat studiul lor privind sportul preferat. Rezultatele sunt trecute în tabelul de mai jos, dar unele date s-au șters.

Sondaj	**Sportul preferat**						**TOTAL**
	clasa a V-a A		**clasa a V-a B**		**clasa a V-a C**		
	răspunsuri	**frecvența**	**răspunsuri**	**frecvența**	**răspunsuri**	**frecvența**	
fotbal	### ### ////	...	### ///	8	### ////	9	...
handbal	////	...	### /	...	### ### //	...	...
baschet	### //	...	### ### /	11	...	...	27
	total A	25	total B	...	total C	30	80

Legendă: / = 1 ### = 5

a Copiați tabelul pe caiet și completați datele lipsă.
b Indicați care este sportul cel mai îndrăgit de către elevii școlii.
c Determinați frecvența relativă a elevilor din școală al căror sport preferat este handbalul.
d Determinați ce procent dintre elevii clasei a V-a C au ca sport favorit baschetul.

2 În graficul cu bare alăturat sunt prezentate punctajele acordate de 6 elevi, membrii juriului la un concurs de pictură:



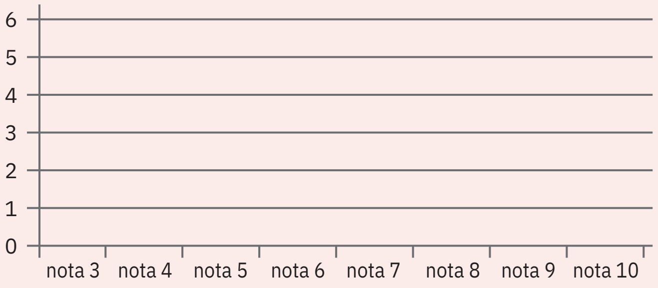
Utilizând graficul cu bare, completați spațiile punctate din tabelul de mai jos:

Nume	Mihnea	...	Dana	...	Andrei	Ștefan
Punctaj	...	6	...	8	...	...

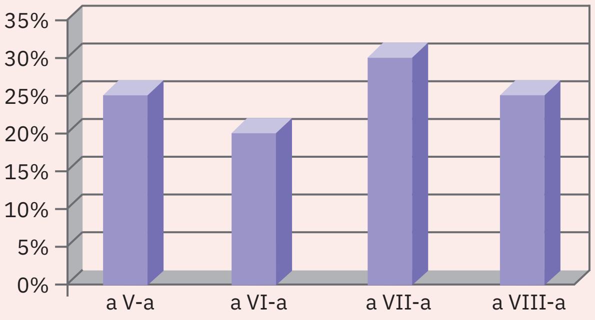
3 Notele obținute de elevii unei clase la un test sunt reprezentate în tabelul de mai jos:

Nota	3	4	5	6	8	9	10
Număr elevi	2	4	6	5	4	3	2

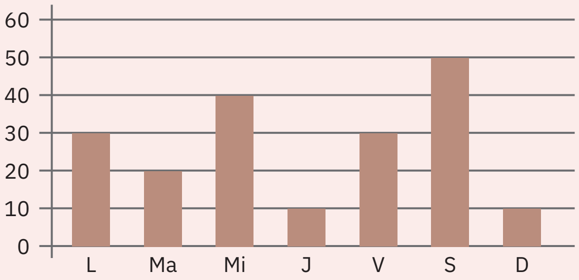
Utilizând tabelul, completați graficul cu bare de mai jos:



4 Într-o școală gimnazială sunt 300 de elevi, iar repartiția procentuală a elevilor pe clase este reprezentată în diagrama alăturată.
a Estimați care dintre clasele a VI-a și a VIII-a are mai puțini elevi.
b Precizați numărul elevilor din clasa a VII-a din școală.
c Decideți dacă numărul elevilor de clasa a VI-a este mai mare sau mai mic decât 70% din numărul elevilor din clasa a VII-a din școală.



5 În diagrama alăturată este reprezentat numărul de intrări de autoturisme dintr-o parcare.
a Indicați ziua săptămânii în care a intrat în parcare cea de-a 110-a mașină.
b Aproximați, prin rotunjire la cel mai apropiat număr natural, câte mașini au intrat în parcare, în medie, pe zi.

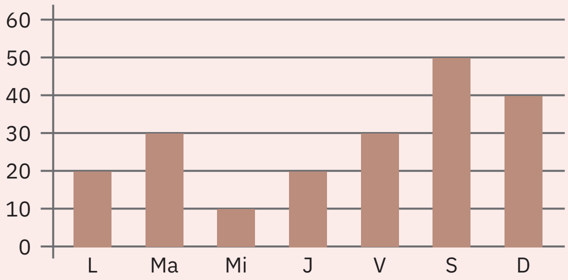


6 La o lucrare, elevii unei clase au obținut următoarele rezultate:

Nota	10	9	8	6	5	4
Număr elevi	3	4	2	8	4	1

a Estimați, pe baza rezultatelor cel mai des obținute, media clasei.
b Comparați valoarea estimării cu media setului de date prezentat de tabel.
c Alcătuiți o diagramă cu bare care să prezinte rezultatele elevilor la test.

7 În diagrama alăturată sunt reprezentate vânzările de bilete pe o săptămână ale unui cinematograf 3D. De luni până vineri prețul unui bilet este de 15 lei, iar sâmbătă și duminică prețul este de 20 de lei.



a Determinați numărul total al biletelor vândute.
b Calculați ce procent din numărul total de bilete vândute reprezintă biletele vândute marți.
c Determinați probabilitatea ca alegând la întâmplare un bilet acesta să fi fost vândut joi.
d Determinați suma încasată din vânzarea biletelor.
e Calculați valoarea medie a biletelor vândute într-o zi.

Activitate pe grupe

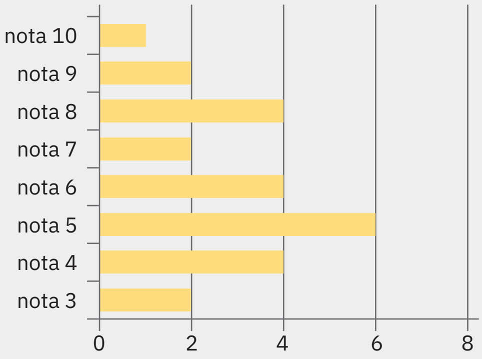
Realizați un sondaj la nivelul școlii despre genul de muzică preferat al elevilor de clasa a V-a.

Sondajul va cuprinde minimum trei întrebări, iar culegerea datelor se va face separat, pe fete și băieți.

Realizați tabelele de frecvență și interpretați datele după ce le-ați reprezentat într-un tabel cu bare.
Discutați în clasă rezultatele obținute.

AUTO evaluare

În diagrama de mai jos sunt reprezentate notele obținute de elevii unei clase la un test.



La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Determină numărul elevilor din clasă.
A 23; **B** 24; **C** 25; **D** 26.

2 Determină numărul elevilor care au obținut la test cel puțin nota 7.
A 7; **B** 9; **C** 12; **D** 16.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 **a** Calculează media obținută la test de elevii clasei.
b Află ce procent din numărul elevilor clasei au obținut note mai mari sau egale cu 5.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Fracții zecimale

1 Numărul natural n din egalitatea $\frac{75+n}{25}=50$ este:

a 1 175 **b** 1 200 **c** 75 **d** 1 125

2 Numărul n din egalitatea $5{,}6-\frac{n\cdot 24+1}{5}=4{,}2$ este egal cu:

a 1 **b** 0,25 **c** 0,5 **d** 1,4

3 Dacă 6 cărți costă 76,50 lei, atunci 5 cărți de același fel costă:

a 12,75 lei **b** 50 lei
c 63,75 lei **d** 68,25 lei

4 Dacă 4 robinete umplu un bazin în 5 ore, atunci 6 robinete de același tip umplu bazinul în:

a 3 ore și 20 min **b** 7 ore și 30 min
c 4 ore și 45 min **d** 3 ore și 33 min

5 Trei jucării ursuleț și 4 jucării veveriță costă 258,30 euro. Șapte jucării ursuleț și 8 jucării veveriță costă 549,10 de euro. O jucărie ursuleț costă:

a 32,50 euro **b** 40,20 euro
c 100,50 euro **d** 84,75 euro

6 Trei covrigi și 4 pâini cântăresc 2,267 kg, iar 4 covrigi și 4 pâini cântăresc 2,372 kg. O pâine cântărește:

a 0,105 kg **b** 0,500 kg
c 0,488 kg **d** 0,600 kg

7 Un număr este de 2,5 ori mai mare decât celălalt. Determinați cele două numere, știind că suma lor este 63.

a 27 și 39 **b** 45 și 18
c 36 și 27 **d** 42 și 21

8 În 8 sticle avem 9 litri de apă. Unele sticle au capacitatea de 1,5 litri, iar altele de 0,5 litri. Numărul vaselor de 0,5 litri este egal cu:

a 3 **b** 4 **c** 5 **d** 6

9 La proba de aruncare a suliței, un sportiv a efectuat patru aruncări, în lungime de 72 m, 78,5 m, 74,8 m și 81,1 m. Care este lungimea medie a unei aruncări?

a 75,2 m **b** 75,6 m
c 76,5 m **d** 76,6 m

10 Din cei zece membri ai echipei de baschet a școlii, trei copii au 1,64 m înălțime, 4 copii au 1,67 m, iar restul au 1,66 m, 1,74 m și 1,70 m. Care este înălțimea medie a echipei?

a 1,65 m **b** 1,66 m
c 1,67 m **d** 1,69 m

11 În tabelul de mai jos este reprezentată prezența elevilor unei clase de 30 de elevi la cursuri, pe parcursul unei săptămâni. Care este numărul total al elevilor absenți în săptămâna reprezentată?

Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
27	30	28	29	26

a 3 **b** 10 **c** 9 **d** 12

12 O gospodină a cheltuit la raionul de carne $\frac{3}{7}$ din suma pe care o avea, iar la raionul de fructe și legume a cheltuit 40% din rest. Știind că inițial a avut 350 de lei, determinați ce rest i-a rămas.

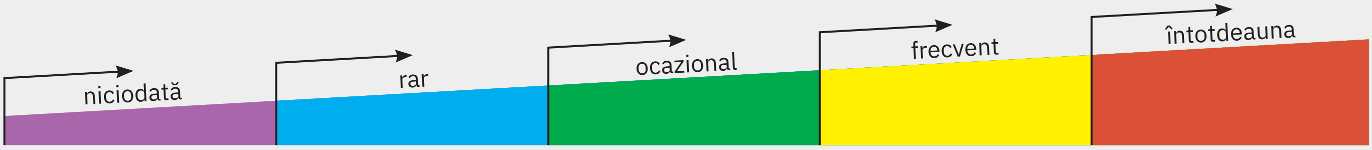
a 150 lei **b** 90 lei
c 120 lei **d** 200 lei

13 Perimetrul unei grădini dreptunghiulare este egal cu 516 m. Lățimea grădinii reprezintă $\frac{3}{5}$ din lungimea grădinii. Determinați lungimea și lățimea grădinii.

14 O gospodină a cheltuit la piață $\frac{3}{7}$ din suma pe care o avea, iar la carmangerie a cheltuit 40% din rest și i-au rămas 120 de lei. Ce sumă a avut inițial?

Fișa de observare sistematică

- Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



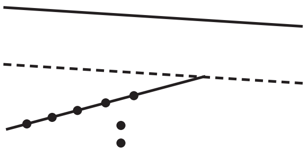
U6

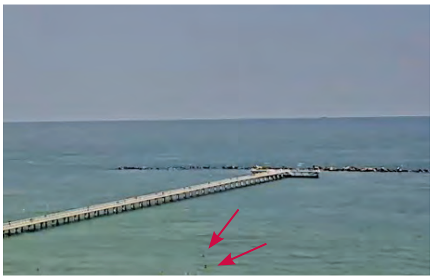
Elemente de geometrie și unități de măsură

Lecția 1: Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment de dreaptă

1.1. Punctul

Privește imaginea alăturată cu pontonul de la Mamaia.
Suprafața Mării Negre este liniștită. Cei doi oameni care fac baie, lângă țărm, respectiv, oamenii care circulă pe ponton, par niște puncte.
În depărtare vedem linia orizontului.
În larg, lângă ponton, sunt mai multe ambarcațiuni.
Obținem următorul desen schematic:





De reținut

Descriere. *Punctul* poate fi considerat urma vârfului unui creion, bine ascuțit, lăsată pe foaia de hârtie, atunci când o atinge. Un punct se reprezintă printr-o bulină sau prin două liniuțe care se intersectează. Fiecare punct se individualizează prin poziția sa.

Desenăm	Citim	Notăm
• *A*	punctul *A*	*A*
× *B*	punctul *B*	*B*

Notație. Se notează cu una din literele mari ale alfabetului: *A*, *B*, *C*, ...

A nu se confunda punctul ca desen cu noțiunea de punct. Punctul, ca figură geometrică, nu este nici mai mare, nici mai mic: nu are dimensiuni, în timp ce desenul lui are dimensiuni.

Pozițiile relative a două puncte

Două puncte pot fi situate în același loc și atunci spunem că sunt *puncte identice* sau *confundate* (coincid) sau pot fi situate în locuri diferite și atunci spunem că sunt *puncte distincte* (*diferite*).

Desenăm	Citim	Notăm
A • *B*	Punctele *A* și *B* coincid.	$A = B$
M • • *N*	Punctele *M* și *N* sunt distincte.	$M \neq N$

1.2. Dreapta

De reținut

Descriere. Putem sugera imaginea unei porțiuni dintr-o dreaptă printr-un fir de ață foarte subțire, bine întins. De asemenea, linia orizontului pare o porțiune dintr-o dreaptă.

Desenăm	Citim	Notăm
d	dreapta *d*	*d*
A *B*	dreapta *AB* sau *BA*	*AB* sau *BA*

Pentru a reprezenta în desen o dreaptă utilizăm rigla. Să ne imaginăm că am putea deplasa rigla de-a lungul liniei desenate, astfel încât să putem continua mereu linia începută. Linia nesfârșită, astfel obținută, este o *dreaptă*. Ea este nemărginită și este formată din puncte.
Dreapta se notează cu o literă mică sau cu două litere mari ale alfabetului latin, prin care am notat două puncte distincte de pe dreaptă.

1.3. Semidreapta

Mate practică

În Pitești există un indicator rutier care ne arată direcția spre București.

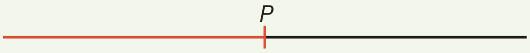
Putem reprezenta astfel:

Ce observăm?
Deplasându-ne de la Pitești spre București, punctul de plecare (*originea*) este *P*, care ne arată că pornim din Pitești, iar punctul *B* ne arată *sensul* deplasării (spre București).

De reținut

Descriere. *Semidreapta* este mulțimea punctelor unei drepte situate de aceeași parte a unui punct fixat pe acea dreaptă (numit originea semidreptei).

În figura alăturată punctul *P* delimitează două semidrepte distincte, una colorată, iar cealaltă necolorată. Pentru a reprezenta în desen o semidreaptă utilizăm rigla.



La fel ca și dreapta, semidreapta se notează cu două litere mari ale alfabetului, corespunzătoare a două puncte. Primul punct este originea semidreptei, iar cel de-al doilea este un punct oarecare al semidreptei și indică sensul acesteia.

În desenul alăturat, punctul *C* este *originea*, iar punctul *D* indică *sensul* semidreptei *CD*.

Desenăm	Citim	Notăm
	semidreapta *CD*	*CD*

Mate practică

Desenați o dreaptă *AB*, iar dedesubt, desenați semidreapta *AB* și semidreapta *BA*.

Rezolvare:

Dreapta *AB*:

Semidreapta *AB*:

Semidreapta *BA*:

1.4. Segmentul de dreaptă

De reținut

Descriere. Fixând două puncte diferite pe o dreaptă, porțiunea de dreaptă cuprinsă între cele două puncte poartă numele de *segment de dreaptă*.

Reprezentare. Pentru a reprezenta în desen un segment de dreaptă utilizăm rigla gradată.

Notație. Se notează cu două litere mari ale alfabetului.

Desenăm	Citim	Notăm
	segmentul *EF* sau *FE*	*EF* sau *FE*

Observație. Punctele *E* și *F* se numesc *extremitățile* sau *capetele* segmentului de dreaptă, *EF*.

1.5. Planul

De reținut

Descriere. Imaginea unei porțiuni dintr-un plan este sugerată prin suprafața liniștită a apei dintr-un vas sau prin suprafața liniștită a unei mări.

Reprezentare. Se reprezintă sub forma unui paralelogram.

Notație. Se notează cu o literă din alfabetul grecesc: α (alfa), β (beta), π (pi), ...

Desenăm	Citim	Notăm
	planul α	α

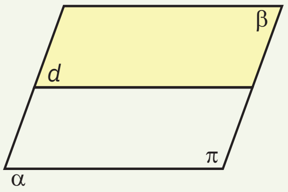
1.6. Semiplanul

De reținut

Descriere. Semiplanul este mulțimea tuturor punctelor unui plan aflate de aceeași parte a unei drepte situată în acel plan.

Reprezentare. În figura alăturată, dreapta *d*, numită *frontieră*, a delimitat în planul α două semiplane distincte.

Notație. Semiplanul colorat este notat cu β, iar cel necolorat cu π.



Probleme propuse

1 Priviți figura 1 și completați oral fiecare spațiu punctat pentru a obține o propoziție adevărată:

a A și B sunt puncte . . . . și notăm $A...B$.

b A și C sunt puncte . . . . și notăm $A...C$.

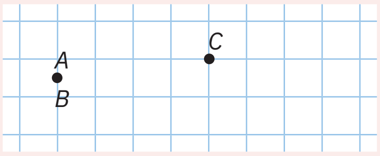


Figura 1

2 În figura 2 sunt reprezentate punctele A, B, C și D. Dintre următoarele afirmații cea adevărată este:

a $B \neq C \neq D$; **b** $A \neq B \neq C$; **c** $A \neq B = C$; **d** $A \neq B \neq D$.

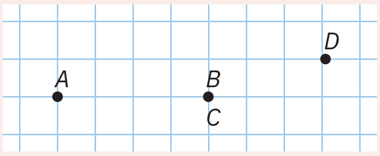


Figura 2

3 Afirmația că în figura 1, $A \neq C \neq B$ este: **a** adevărată; **b** falsă.

4 Desenați punctele A, B, C care îndeplinesc următoarele condiții: $A \neq B$ și $B = C$.

5 Fie A, B, C, trei puncte, astfel încât $A \neq B \neq C$. Ce poziție are A față de C?

6 Stabiliți dacă propozițiile următoare sunt adevărate sau false:

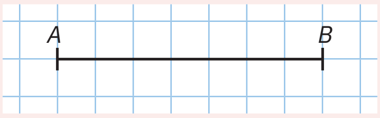


Figura 3

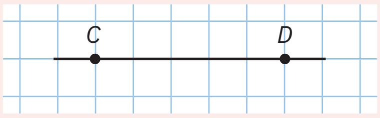


Figura 4

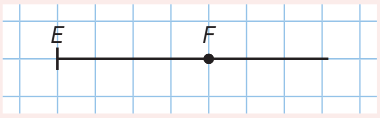


Figura 5

a Desenul din figura 3 reprezintă segmentul de dreaptă AB.

b Desenul din figura 4 reprezintă dreapta DC.

c Desenul din figura 5 reprezintă semidreapta FE.

7 Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a Pentru segmentul din figura 3, punctele A și B se numesc . . . . segmentului.

b Pentru semidreapta din figura 5, punctul E indică . . . ., iar punctul F indică . . . .

8 Câte segmente sunt în triunghiul din figura 6? Enumerați-le!

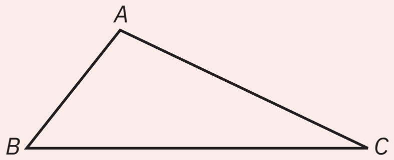


Figura 6

9 Radu a realizat următoarele figuri geometrice: în figura 7 a desenat, pe aceeași dreaptă, patru puncte distincte; în figura 8 a desenat dreapta CD; în figura 9 a desenat semidreapta EF.

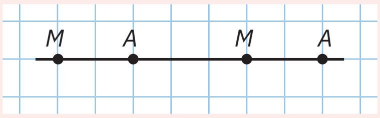


Figura 7

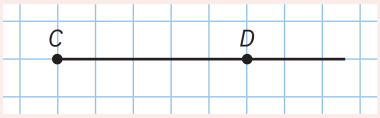


Figura 8

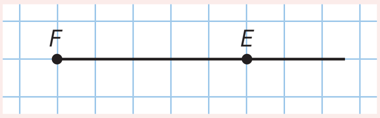
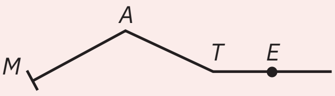


Figura 9

Din neatenție, a făcut câteva erori. Ce erori a făcut Radu?

10 Priviți figura alăturată și completați oral fiecare spațiu punctat pentru a obține o propoziție adevărată:

a MA reprezintă ...  ; **b** AT reprezintă ...; **c** TE reprezintă ... .

11 În figura alăturată, pe segmentul AD s-au notat punctele distincte B și C.

a Scrieți toate segmentele determinate de cele patru puncte.

b Indicați segmentele ce conțin toate punctele situate între B și C.

12 Asociați fiecare desen din coloana din stânga cu denumirea sa din coloana din dreapta:

a 

b 

c ×

d 

e •

f 

g 

1 punct;

2 plan;

3 segment de dreaptă;

4 dreaptă;

5 semidreaptă.

13 Desenați:

a un punct *A*;

b o dreaptă *α*;

c un segment de dreaptă *OK*;

d o dreaptă *OK*;

e o semidreaptă *OK*;

f o semidreaptă *KO*;

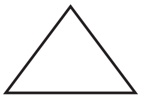
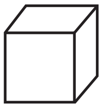
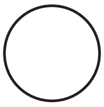
g un plan α;

h trei semidrepte cu aceeași origine;

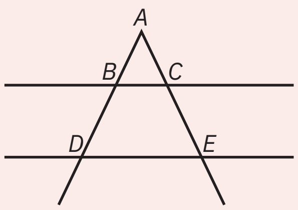
i două segmente, *AB* și *BC*;

j un plan în care să fie evidențiate două semiplane, hașurând unul dintre ele.

14 Denumește figurile geometrice situate în tabelul următor la coordonatele: (1; *B*), (1; *D*), (2; *A*), (2; *C*), (3; *B*), (3; *C*), (3; *D*), (4; *A*), (4; *C*), (5; *B*), (5; *D*).

D					
C			×		
B	•				
A					
	1	2	3	4	5

15 Cu ajutorul riglei, desenați configurația geometrică alăturată și scrieți:



a toate dreptele care apar în configurație;

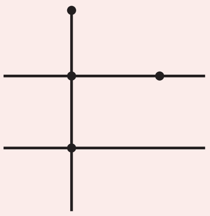
b trei segmente de dreaptă care au o extremitate în *B*;

c patru segmente de dreaptă care conțin punctul *C*;

d două semidrepte cu originea în punctul *A*;

e două semidrepte pentru care punctul *D* indică sensul acestora.

16 Cu ajutorul riglei, desenați configurația geometrică alăturată și notați cu *E*, *I*, *B* și, respectiv, *N*, cele 4 puncte marcate, astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:



a *EI* este dreaptă;

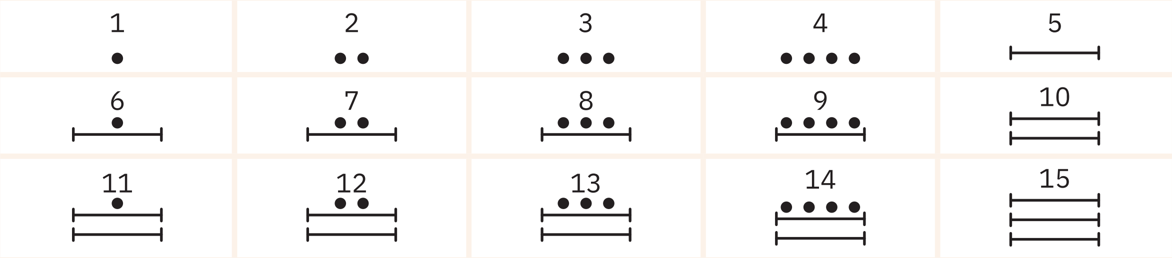
b *BN* este semidreaptă;

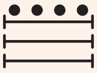
c *BI* este segment de dreaptă.

Completează configurația, trasând semidreapta *NE*.

Știați că...

Pentru a scrie numerele naturale nenule, mayașii[1] utilizau doar două simboluri: puncte și segmente de dreaptă. Observați un tabel cu reprezentarea numerelor de la 1 la 15:



Atunci  = ?

Joc

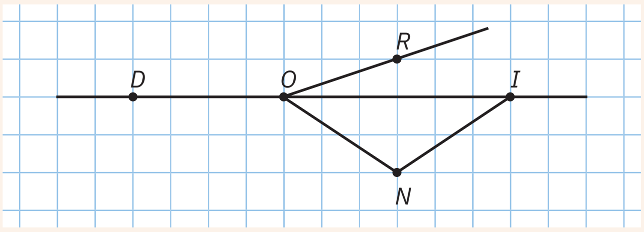
Radu desenează pe o foaie 5 puncte roșii și 5 puncte albastre și îi propune lui Horia să joace astfel: o mutare înseamnă că unul dintre cei doi alege două puncte dintre cele 10 și le schimbă culoarea din roșu în albastru, respectiv din albastru în roșu. Ei mută alternativ. Câștigă cel care reușește ca, după un anumit număr de mutări, să dea celor 10 puncte aceeași culoare. Cine câștigă? Justificați!

Portofoliu

Desenați figura alăturată pe o coală A4 și indicați:

a 3 semidrepte;
b două segmente de dreaptă;
c o dreaptă.

Așezați coala în portofoliul personal, „Geometria este prietena mea”.



AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 În figura 10 este desenată (desenat):
A dreapta *AB*; **B** semidreapta *AB*; **C** semidreapta *BA*; **D** segmentul de dreaptă *AB*.

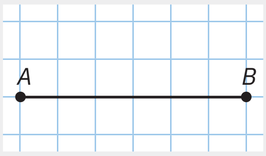


Figura 10

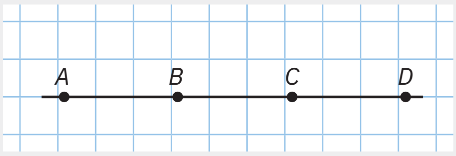


Figura 11

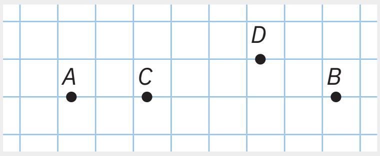


Figura 12

2 În figura 11, pe o dreaptă, au fost marcate punctele *A*, *B*, *C* și *D*. Originea semidreptei *CA* este punctul:
A *D*; **B** *C*; **C** *B*; **D** *A*.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Desenează pe caiet punctele *A*, *B*, *C* și *D* ca în figura 12. Cu ajutorul riglei, completează figura, trasând:
a segmentul de dreaptă *CD*; **b** semidreapta *BA*.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
Timp de lucru: 30 de minute	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

---

[1] Civilizația Maya a fost una dintre societățile indigene cele mai dominante din Mezoamerica (termen folosit pentru a descrie Mexicul și America Centrală, înainte de cucerirea spaniolă din secolul al XVI-lea).

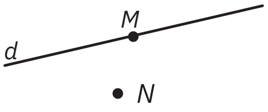
Lecția 2: Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare. Pozițiile relative a două drepte: drepte identice, drepte concurente, drepte paralele

2.1. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă

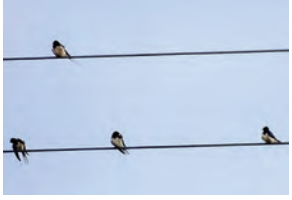
În imaginea alăturată, un porumbel se odihnește pe o sârmă de telegraf. Un alt porumbel, aflat în exteriorul sârmei, se apropie în zbor.

De reținut

Dacă un punct poate fi situat pe o dreaptă, spunem că punctul este *interior* dreptei.
Dacă un punct nu este situat pe dreaptă, spunem că punctul este *exterior* dreptei.

Desenăm	Citim
	Punctul *M* este situat pe dreapta *d* sau punctul *M* aparține dreptei *d*.
	Punctul *N* nu este situat pe dreapta *d* sau punctul *N* nu aparține dreptei *d*.

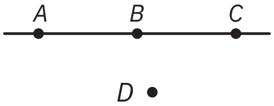
2.2. Puncte coliniare



În imaginea alăturată, o rândunică se odihnește pe o sârmă de telegraf.
Alte trei rândunici se odihnesc pe o sârmă de telegraf apropiată.

De reținut

Trei (sau mai multe) puncte sunt *coliniare*, dacă există o dreaptă care să conțină cele trei puncte.
Consecință: Trei puncte sunt *necoliniare*, dacă nu există o dreaptă care să conțină cele trei puncte.

Desenăm	Citim
	Punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare.
	Punctele *A*, *B*, *D* sunt necoliniare.

Ce observăm?
În cazul figurii anterioare, spunem că punctele *A* și *C* sunt situate *de o parte și de alta* a punctului *B* (sau că punctul *B* este situat între punctele *A* și *C*), respectiv punctele *B* și *C* sunt situate *de aceeași parte* a lui *A* (sau că *A* și *B* sunt de aceeași parte a lui *C*).

2.3. Axioma[1] dreptei

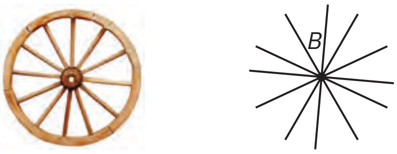


Figura 1

Figura 2

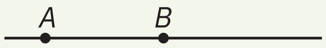
În figura 1 este prezentată o roată de căruță. Spițele roții sunt legate de un butuc *B* și sunt prezentate, schematic, alăturat. Dacă roata ar avea mai multe spițe, atunci în desenul schematic alăturat am putea desena mai multe drepte care conțin punctul *B*.
În figura 2 sunt prezentate două roți de căruță care se rotesc, în timpul deplasării căruței, pe o osie, *OS*, desenată schematic, alăturat. Putem desena încă o dreaptă care să conțină punctele *O* și *S*?

---

[1] Adevăr fundamental evident prin el însuși.

De reținut

Axioma dreptei



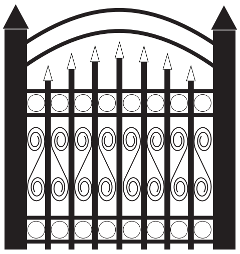
Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte.
Se formulează și astfel: două puncte distincte determină o dreaptă și numai una.

Observații

1. Putem construi o infinitate de drepte care să treacă printr-un punct.
2. Putem construi o singură dreaptă care să treacă prin două puncte distincte.
3. De aceea, când se enunță *axioma dreptei*, este foarte importantă precizarea *puncte distincte*; altfel, dacă punctele coincid, nu determină o singură dreaptă, ci mai multe.

2.4. Pozițiile relative a două drepte

Observați imaginea în care este prezentată o poartă ce separă o grădină de spațiul exterior. Cele 4 bare orizontale sunt sudate cu cele 7 bare verticale pentru consolidarea cadrului arcuit în partea superioară.

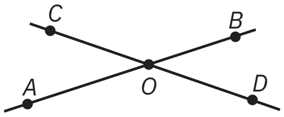


De reținut

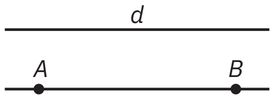
Definiție. Două drepte care au toate punctele comune se numesc *drepte identice* (confundate, suprapuse sau drepte care coincid).

Desenăm	Citim	Notăm
	Dreapta *d* coincide cu dreapta *AB*.	$d = AB$

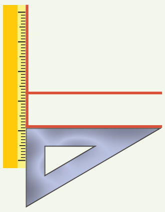
Definiție. Două drepte care au un singur punct comun se numesc *drepte concurente* (secante).

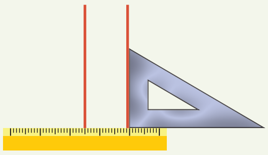
Desenăm	Citim
	Dreptele *AB* și *CD* sunt concurente în punctul *O*.

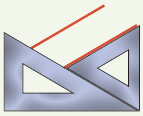
Definiție. Două drepte situate în același plan, care nu au niciun punct comun, se numesc *drepte paralele*.

Desenăm	Citim	Notăm
	Dreapta *d* este paralelă cu dreapta *AB*.	$d \parallel AB$

Scriem:
Pentru a construi drepte paralele, putem folosi rigla și echerul:







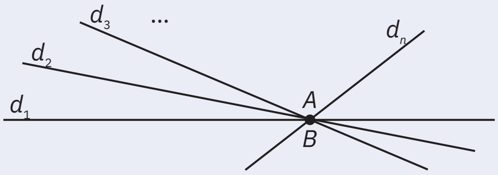
Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Fixați două puncte, A și B, și determinați câte drepte care să treacă prin cele două puncte puteți construi.

Rezolvare:

Distingem două cazuri:

I. Dacă cele două puncte coincid, putem construi o infinitate de drepte distincte: $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$.



II. Dacă cele două puncte sunt distincte, în conformitate cu *axioma dreptei*, putem construi o singură dreaptă: dreapta AB.

2 Se consideră 10 puncte distincte, două câte două.
Care este numărul minim de drepte determinate de cele 10 puncte?

Rezolvare:

Fie $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ cele 10 puncte distincte, două câte două.
Cele 10 puncte distincte determină o singură dreaptă, dacă sunt coliniare.

3 Se consideră 10 puncte distincte, două câte două.
Care este numărul maxim de drepte determinate de cele 10 puncte?

Rezolvare:

Pot fi construite drepte al căror număr este maxim atunci când oricare trei puncte dintre cele 10 sunt necoliniare. Pentru a stabili numărul dreptelor, dispunem de cele două procedee prezentate în cele ce urmează.

Metoda I. Fixăm punctul A_1. El determină cu celelalte nouă puncte, 9 drepte.
Apoi fixând, pe rând, $A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{10,}$ în fiecare caz, punctul fixat va determina cu celelalte nouă puncte, 9 drepte. Deoarece în 10 moduri vom pune în evidență câte 9 drepte, *s-ar părea*, că s-au format $10 \cdot 9 = 90$ de drepte.
Ținând cont că: $A_1A_2 = A_2A_1$; $A_1A_3 = A_3A_1$; $A_1A_4 = A_4A_1$; ...; $A_9A_{10} = A_{10}\,A_9$, deducem că *fiecare dreaptă a fost numărată de două ori* și atunci cele 10 puncte determină $90 : 2 = 45$ de drepte distincte, două câte două.

Metoda II. Fixăm punctul A_1. Cu el se determină 9 drepte distincte: A_1A_2; A_1A_3; A_1A_4; ...; $A_1A_{10.}$
Fixăm punctul A_2. Cu el se determină alte 8 drepte distincte: A_2A_3; A_2A_4; A_2A_5; ...; $A_2A_{10.}$
. . . .
Fixăm punctul A_9. El mai determină o singură dreaptă (distinctă) cu punctul A_{10}: dreapta $A_9A_{10.}$
Am obținut astfel drepte distincte al căror număr este egal cu: $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 9 \cdot 10 : 2 = 45$.

Probleme propuse

1 În figura 3 sunt reprezentate dreapta AB și punctele C, D. Afirmația că punctul C este interior dreptei AB și punctul D este exterior dreptei AB este:

a adevărată; **b** falsă.

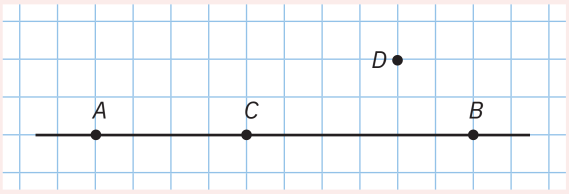


Figura 3

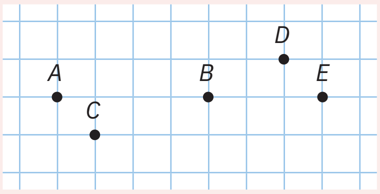


Figura 4

2 În figura 4 sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E. Dintre următoarele triplete de puncte, coliniare sunt:

a A, B și C; **b** A, B și D; **c** A, B și E; **d** A, C și D.

3 Observați figura 5 și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor date.
a *A* este punct interior dreptei *BC*; **b** *D* este punct exterior dreptei *g*;
c *C* este punct interior dreptei *AB*; **d** *A* este punct exterior dreptei *BC*;
e *C* este punct exterior dreptei *AB*; **f** *A*, *B* și *C* sunt puncte coliniare;
g *A*, *B* și *D* sunt necoliniare; **h** Dreptele *AB* și *BC* sunt identice.

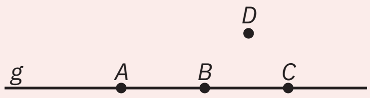


Figura 5

4 Observați figura 6 și identificați termenii care lipsesc din spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
a Pe dreapta *d* se află punctele ... . **b** Față de dreapta *d*, *E* este un ... .
c Față de dreapta *d*, *M* este un ... . **d** *G*, *E*, *O* sunt ... .
e *G*, *E*, *M* sunt ... . **f** *GE* și *d* sunt ... .

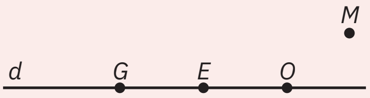


Figura 6

5 Desenați două puncte distincte, *M* și *N*, apoi construiți dreapta *MN.*

6 Desenați patru puncte *A*, *B*, *C*, *D*, distincte două câte două, astfel încât *B* și *C* să fie de o parte și de alta a dreptei *AD*.

7 Desenați patru puncte *A*, *B*, *C*, *D*, distincte două câte două, astfel încât *B* și *C* să fie de aceeași parte a dreptei *AD*.

8 Fixați un punct *A* și constatați câte drepte care să treacă prin acel punct puteți construi. Completați afirmația de mai jos, astfel încât să devină propoziție adevărată.
Printr-un punct se pot construi ... .

9 Observați figura 7 și precizați termenii care lipsesc pentru a obține o propoziție adevărată.
a *M* și *A* sunt puncte ... . **b** Prin *M* și *A* pot fi construite ... de drepte.
c *M* și *T* sunt puncte ... . **d** Prin *M* și *T* poate fi construită o singură ... .

Figura 7

10 În figura 8 sunt reprezentate patru puncte distincte:
a Câte drepte putem construi, astfel încât *A* și încă unul dintre celelalte trei puncte să fie interioare dreptei?
b Câte drepte putem construi, astfel încât fiecare dreaptă să conțină cel puțin două puncte din cele patru fixate?

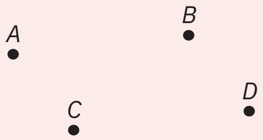


Figura 8

11 Priviți figura 9 și dați câte trei exemple de:
a drepte concurente;
b drepte paralele;
c drepte identice.

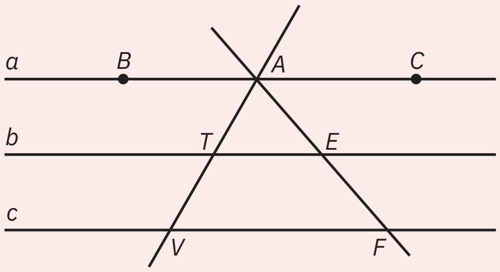


Figura 9

12 **a** Desenați două drepte *a* și *b* concurente în punctul *O.*
b Desenați apoi două drepte paralele, *AB* și *CD*.

13 Desenați o dreaptă *d* și punctul *O* exterior ei. Folosind rigla și echerul, construiți prin punctul *O* dreapta *b* paralelă cu *d*. Apoi construiți dreapta *g* concurentă cu dreapta *b* în punctul *O.*

14 Desenați patru puncte diferite, astfel încât acestea să determine:
a o dreaptă; **b** patru drepte; **c** șase drepte.

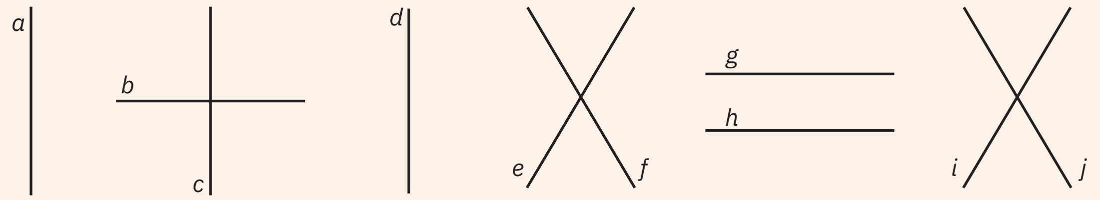
15 Se dau trei puncte *A*, *B*, *C*. Câte drepte determină aceste puncte?

16 Se consideră 8 puncte distincte, două câte două.
a Care este numărul minim de drepte determinate de cele 8 puncte? **b** Dar cel maxim?

17 Desenați trei drepte distincte într-un plan. Care este numărul punctelor de intersecție determinate de cele trei drepte? (Analizați toate cazurile!)

Joc

Radu scrie tema la matematică.
Pornind de la figura geometrică de mai jos, ar trebui să precizeze:
a perechile de drepte concurente;
b perechile de drepte paralele.



Paul, fratele său, așezat față în față cu Radu, este elev în clasa a IV-a și a învățat de curând cifrele romane. El susține că egalitatea scrisă astfel cu cifre romane este falsă.
Radu îl contrazice. Este posibil ca amândoi să aibă dreptate?

Portofoliu

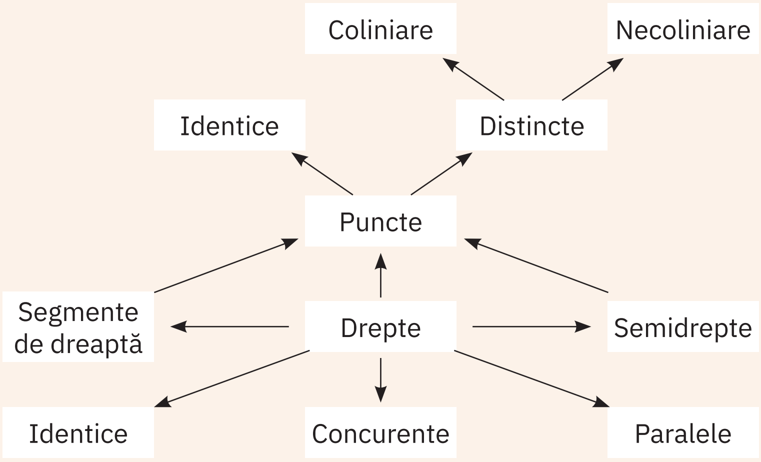
Hartă conceptuală

1 Definește **trei** noțiuni cuprinse în această hartă.

2 Enumeră **două** idei despre care ai dori să înveți în continuare.

3 Notează **o** abilitate pe care consideri că ai dobândit-o în această lecție.

Notă: Eventual, profesorul întocmește o fișă de observație.



Desenați pe o coală A4 această hartă și introduceți-o în portofoliul personal „Geometria este prietena mea”.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 În figura 10 sunt reprezentate punctele *G*, *E*, *O* și *M*. Dintre următoarele triplete de puncte, coliniare sunt:
A *G*, *E* și *O*; **B** *E*, *O* și *M*;
C *G*, *O* și *M*; **D** *G*, *E* și *M*.

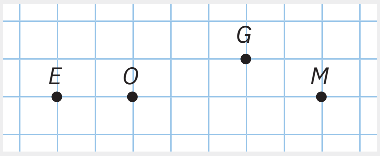


Figura 10

2 Numărul dreptelor distincte determinate de punctele *G*, *E*, *O* și *M* din figura 10 este egal cu:
A 3; **B** 4; **C** 6; **D** 12.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră 20 de puncte distincte două câte două.
  a Care este numărul minim de drepte determinate de cele 20 de puncte? Justifică răspunsul dat.
  b Care este numărul maxim de drepte determinate de cele 20 de puncte? Justifică răspunsul dat.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 3: Lungimea unui segment. Distanța dintre două puncte. Segmente congruente

3.1. Lungimea unui segment

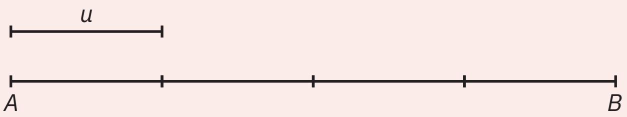
Paralelele inegale reprezintă unul dintre aparatele utilizate în gimnastica feminină. Cele două bare paralele au aceeași lungime, egală cu 240 cm. Bara superioară este amplasată la înălțimea de 245 cm, iar cea inferioară la 165 cm. Distanța dintre cele două bare este cuprinsă între 130 cm și 180 cm, fiind ajustabilă.

De reținut

1. Numim *segment unitate* un segment ales ca unitate de măsură.
2. *Lungimea unui segment* este valoarea acestuia măsurată cu ajutorul unui segment unitate.
3. *Distanța* dintre două puncte este lungimea segmentului cu extremitățile în cele două puncte.

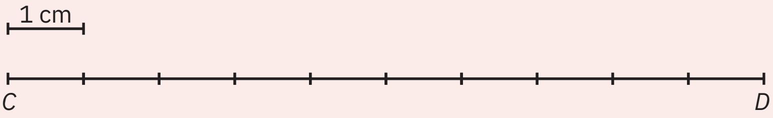
Exemple

1. În segmentul AB, segmentul unitate, notat cu u, se cuprinde de 4 ori.



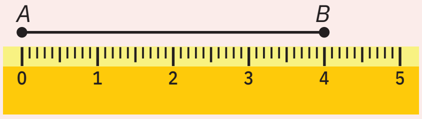
Scriem: $AB = 4u$.

2. Segmentul cu lungimea egală cu 1 cm se cuprinde în segmentul CD de 10 ori.



Spunem că lungimea segmentului CD este egală cu 10 cm și scriem $CD = 10$ cm.

3. Așezăm rigla gradată de-a lungul segmentului, cu diviziunea 0 în dreptul punctului A și citim pe rigla gradată numărul din dreptul punctului B.
Distanța dintre punctele A și B, reprezentate în desenul alăturat, este egală cu 4 cm și scriem $d(A, B) = AB = 4$ cm.

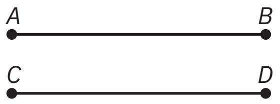


3.2. Segmente congruente

De reținut

În general, despre două figuri geometrice plane se spune că sunt *congruente* dacă, prin suprapunere, ele coincid.

Definiție. Segmentele care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente*.

Desenăm	Citim	Notăm
	Segmentele AB și CD au aceeași lungime. ⇔ Segmentele AB și CD sunt congruente.	$AB = CD$ ⇔ $AB \equiv CD$

Proprietățile relației de congruență

1. **Reflexivitatea.** Orice segment este congruent cu el însuși: $AB \equiv AB$.
2. **Simetria.** Dacă $AB \equiv CD$, atunci $CD \equiv AB$.
3. **Tranzitivitatea.** Dacă $AB \equiv CD$ și $CD \equiv EF$, atunci $AB \equiv EF$.

3.3. Construcția unui segment de dreaptă

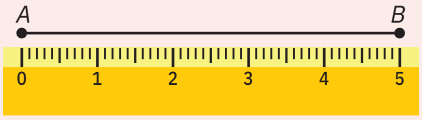
Aplicații practice

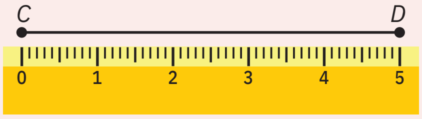
Construcția unui segment congruent cu un segment dat cu ajutorul riglei gradate

Să construim un segment *CD*, congruent cu un segment dat, *AB*.

Pasul 1: Măsurăm segmentul dat, *AB*. În cazul nostru, $AB = 5$ cm.

Pasul 2: Alegem un punct oarecare, *C*. Așezăm rigla gradată cu diviziunea 0 în dreptul lui *C*, iar *D* ar trebui să fie plasat în dreptul diviziunii ce indică 5 cm. Reprezentăm punctul *D* și trasăm segmentul *CD*.





Construcția unui segment congruent cu un segment dat cu ajutorul compasului

Pasul 1: Luăm în deschiderea compasului lungimea segmentului dat, *AB* (figura 1).

Pasul 2: Pe o semidreaptă cu originea în *C*, deja desenată, trasăm un arc de cerc cu centrul în *C* care va intersecta semidreapta în *D* (figura 2).

Figura 1

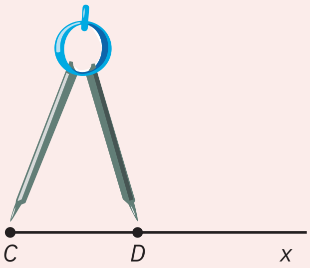


Figura 2

Pasul 3: Pentru că în deschiderea compasului am conservat lungimea segmentului *AB*, avem $AB \equiv CD$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Pe o dreaptă *g* se iau punctele *A*, *B* și *C*, astfel încât $AB = 3$ cm și $BC = 4$ cm. Determinați distanța de la punctul *A* la punctul *C*.

Rezolvare:

Desenăm dreapta *g* și fixăm punctele *A* și *B*, astfel încât $AB = 3$ cm:

Deoarece nu se precizează ordinea punctelor, distingem două cazuri:

Cazul I: ordinea punctelor este *A*, *B*, *C*

$AC = AB + BC = 3\text{ cm} + 4\text{ cm} = 7\text{ cm}.$

Cazul al II-lea: ordinea punctelor este *C*, *A*, *B*

$AC = BC - AB = 4\text{ cm} - 3\text{ cm} = 1\text{ cm}.$

2 **a** Știind că $AB = 2$ cm și $CD = 2$ cm, arătați că $AB \equiv CD$.
b Știind că $AB = 2$ cm și $AB \equiv CD$, determinați lungimea segmentului *CD*.

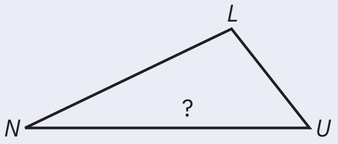
Rezolvare:

a $\left.\begin{array}{l}AB = 2\text{ cm}\\ CD = 2\text{ cm}\end{array}\right\} \Rightarrow AB = CD \Rightarrow AB \equiv CD.$

b $\left.\begin{array}{l}AB = 2\text{ cm}\\ AB \equiv CD \Rightarrow AB = CD\end{array}\right\} \Rightarrow CD = 2\text{ cm}.$

3 Construiți un segment *NU* cu lungimea de 4 cm.
Stabiliți dacă este posibil să construiți un punct *L* exterior segmentului, astfel încât *NL* = 3 cm și *UL* = 1 cm.

Răspuns:
Nu este posibil! Oricât am încerca, nu reușim să desenăm un punct *L* exterior segmentului, asfel încât *NL* = 3 cm și *UL* = 1 cm.



Aplicație practică

Putem argumenta răspunsul anterior prin această aplicație practică.
Construiți un segment *NU* cu lungimea de 4 cm. Luați în deschiderea compasului o lungime de 3 cm și trasați un cerc cu centrul în *N*. Apoi luați în deschiderea compasului o lungime de 1 cm și trasați un cerc cu centrul în *U*. Stabiliți unde se află punctul care se află la distanța de 3 cm față de *N* și, în același timp, se află la distanța de 1 cm față de *U*.

De reținut

Verificarea coliniarității a trei puncte distincte
Dacă se dau trei puncte distincte, astfel încât suma lungimilor a două dintre segmentele determinate este egală cu lungimea celui de-al treilea segment determinat, atunci cele trei puncte sunt coliniare.

Dacă se dau trei puncte necoliniare, atunci suma lungimilor oricăror două dintre cele trei segmente determinate este mai mare decât lungimea celui de-al treilea segment.

Probleme propuse

1 Doi elevi au măsurat lungimea segmentului *AB*. Radu a așezat rigla gradată ca în figura 3 și a afirmat că *AB* = 2,7 cm. Ioana a măsurat ca în figura 4 și a afirmat că *AB* = 3 cm.

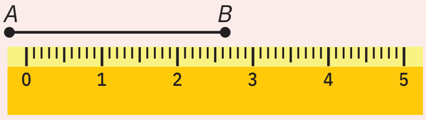


Figura 3

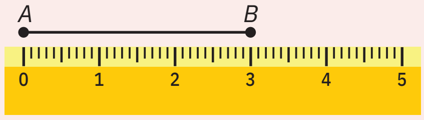
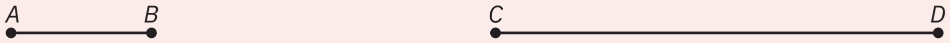


Figura 4

Cine a măsurat corect? Justificați!

2 **a** Măsurați segmentele *AB* și *CD* din figura de mai jos și scrieți lungimea fiecăruia:

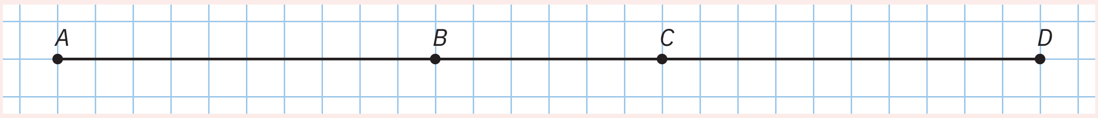


b Construiți cu ajutorul riglei gradate două segmente, *EF* și *GH*, congruente cu *AB* și, respectiv, *CD*.
c Construiți cu ajutorul compasului două segmente, *LM* și *OP*, congruente cu *AB* și, respectiv, *CD*.

3 Utilizând rigla gradată, desenați punctele *A*, *B*, *C*, *D*, coliniare în această ordine, astfel încât *AB* = 4 cm, *BC* = 3 cm și *CD* = 5 cm.

4 Un băț de chibrit are lungimea de 3 cm. Se lipesc 6 astfel de bețe, unul în continuarea celuilalt, astfel încât capetele celor 6 bețe să fie coliniare. Calculați lungimea segmentului determinat de cele 6 bețe.

5 În figura de mai jos, punctele *A*, *B*, *C*, *D* sunt coliniare, în această ordine, astfel încât segmentele *AB* și *CD* au aceeași lungime, *d*(*B*, *C*) = 3 cm și *d*(*C*, *D*) = 5 cm.



Atunci lungimea segmentului *AC* este mai mare decât lungimea segmentului *BC* cu:
a 3 cm; **b** 5 cm; **c** 8 cm; **d** 10 cm.

6 Lungimea segmentului AB este egală cu 4 cm, iar lungimea segmentului CD este egală cu 25% din 16 cm. Arătați că $d(A, B) = d(C, D)$.

7 Ansamblul monumental *Calea Eroilor*[1] din Târgu Jiu este alcătuit din trei lucrări: *Coloana fără Sfârșit* (sau *Coloana Infinitului*), *Poarta Sărutului* și *Masa Tăcerii*. Sunt situate de-a lungul arterei de circulație *Calea Eroilor*, având o lungime de 1,5 km, cu orientarea generală est-vest. Strada dreaptă leagă *Coloana* de *Poartă* și se extinde până la *Masa Tăcerii* . Distanța dintre *Masă* și *Poartă* este de 121 m, iar între *Poartă* și *Coloană* sunt 1 154 m. Schematizând, obținem următoarea reprezentare:

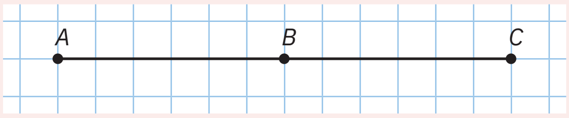
Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect.

i Distanța dintre *Poartă* și *Coloană* este egală cu: **a** 1,5 km; **b** 1 154 m; **c** 121 m; **d** 1 275 m.

ii Distanța dintre *Masă* și *Coloană* este egală cu: **a** 1,5 km; **b** 1 154 m; **c** 121 m; **d** 1 275 m.

8 Fie AB un segment cu lungimea de 5 cm. Construiți segmentul MN congruent cu AB.

9 În figura alăturată, $AB = 3$ cm și $AC = 6$ cm. Dintre următoarele afirmații, cea adevărată este:



a $AB < BC$; **b** $AB > BC$;

c $AB \equiv BC$; **d** $AB \not\equiv BC$.

10 Ținând cont că relația de congruență se referă la segmente, iar relația de egalitate se referă la lungimile acestor segmente, citiți următoarele propoziții și, în fiecare caz, justificați deducția făcută, precizând definiția sau proprietatea aplicată:

a $AB \equiv CD \Rightarrow AB = CD$; **b** $AB = CD \Rightarrow AB \equiv CD$;

c $\left.\begin{matrix} AB \equiv CD \\ CD \equiv EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \equiv EF \Rightarrow AB = EF$; **d** $\left.\begin{matrix} AB = CD \\ CD = EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = EF \Rightarrow AB \equiv EF$.

11 Pe o dreaptă, se iau punctele A, B și C, în această ordine, astfel încât $AB = 5$ cm și $CD = 50\%$ din 10 cm. Arătați că $AB \equiv CD$.

12 Fie A un punct interior segmentului BC. Știind că $AB = 3$ cm și $AB \equiv AC$, determinați lungimea segmentului BC.

13 Fie A un punct interior segmentului BC, ce are lungimea egală cu 8 cm. Știind că $AB = 4$ cm, arătați că $AB \equiv AC$.

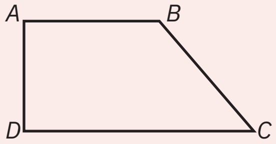
14 Stabiliți dacă punctele A, B, C sunt coliniare și, în caz afirmativ, precizați ordinea acestora, știind că:

a $AB = 1$ cm, $BC = 7$ cm și $AC = 8$ cm; **b** $AB = 3$ cm, $BC = 10$ cm și $AC = 7$ cm;

c $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm și $AC = 3$ cm; **d** $AB = 9$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 3$ cm.

15 Desenați o dreaptă d și trei puncte A, B, C pe aceasta, astfel încât $AB = 2$ cm și $AC = 5$ cm. Calculați lungimea segmentului BC.

16 În figura alăturată este reprezentat un teren agricol. Terenul este înconjurat de un gard $ABCD$, astfel încât $CD = 70$ m, $AB = \frac{4}{7} \cdot CD$, BC este cu 10 m mai mare ca AB, iar $AD \equiv AB$.



a Este posibil ca $AB = 80\%\ BC$? Justificați răspunsul dat.

b Calculați lungimea gardului ce înconjoară terenul.

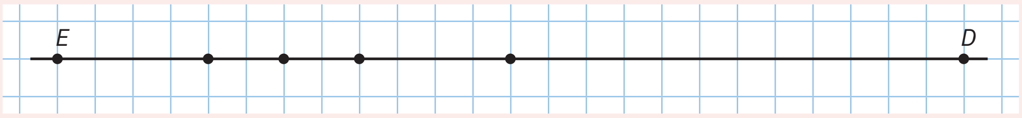
17 Construiți segmentul EF de lungime 12 cm și fixați pe el punctul H, astfel ca $EF = 3\ EH$. Determinați lungimea segmentului HF.

18 Construiți segmentul EF de lungime 12 cm și fixați pe el punctul H, astfel ca $EH = 3\ HF$. Determinați lungimea segmentului HF.

---

[1] Ansamblul monumental *Calea Eroilor* din Târgu Jiu, lucrare de artă creată de Constantin Brâncuși (19 februarie 1876 – 16 martie 1957) în România.

19 În figura de mai jos sunt reprezentate pe o dreaptă punctele E și D. Adi trebuie să poziționeze pe segmentul ED punctele C, I, L, U, astfel încât $ED = 2 \cdot EI = 3 \cdot EL = 4 \cdot EC = 6 \cdot EU$.



Ordinea celor 6 puncte pe dreapta ED este:

a $E - L - C - U - I - D$; **b** $E - C - L - I - U - D$; **c** $E - U - L - C - I - D$; **d** $E - U - C - L - I - D$.

20 Pe dreapta d se consideră, în ordine, punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_{20}, astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, $A_3A_4 = 3$ cm, ... Ce lungime au segmentele A_1A_4, A_4A_5, $A_{19}A_{20}$, respectiv, A_1A_{20}?

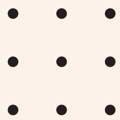
21 Pe dreapta d se consideră, în ordine, punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_{20}, astfel încât $A_1A_2 = 3$ cm, $A_2A_3 = 6$ cm, $A_3A_4 = 9$ cm, ... Ce lungime au segmentele $A_{19}A_{20}$, respectiv, A_1A_{20}?

22 Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât: $2 \cdot AC = AB + AD$ și $BD = 2^{11}$ cm. Determinați lungimea segmentului BC.

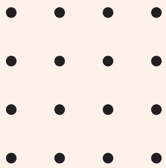
Joc

Fără a ridica pixul, uniți toate punctele prin cât mai puține segmente:

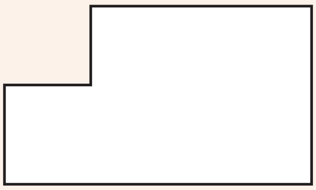
a



b



Proiect



În figura următoare este realizat planul curții unei școli.

a Măsurați cu rigla gradată și calculați perimetrul figurii.

b Știind că 1 cm pe desen reprezintă 10 m pe teren, calculați perimetrul curții.

c Realizați planul curții școlii voastre.

Includeți fișa în portofoliul personal, „Geometria este prietena mea”.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Desenează o dreaptă g și marchează 3 puncte M, N, O, în această ordine, astfel încât $MN = 8$ cm și $NO = 25\%$ din MN. Lungimea segmentului MO este egală cu:

A 0,25 cm; **B** 2 cm; **C** 6 cm; **D** 10 cm.

2 În figura de mai jos, punctele A, B, C, D sunt coliniare în această ordine, astfel încât segmentele $AC = 8$ cm, $AB = 62{,}5\%$ din AC și $AB \equiv CD$. Lungimea segmentului AD este egală cu:

A 5 cm; **B** 8 cm; **C** 10 cm; **D** 13 cm.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Pe dreapta g, se consideră punctele P, Q, R, în această ordine, astfel încât $PR = 12$ cm și $QR = 50\%$ din PQ. Punctul S este interior dreptei g, astfel încât distanța de la S la Q este egală cu o cincime din PR.

a Ce lungime are segmentul PQ? Justifică răspunsul dat.

b Calculează lungimea segmentului PS.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

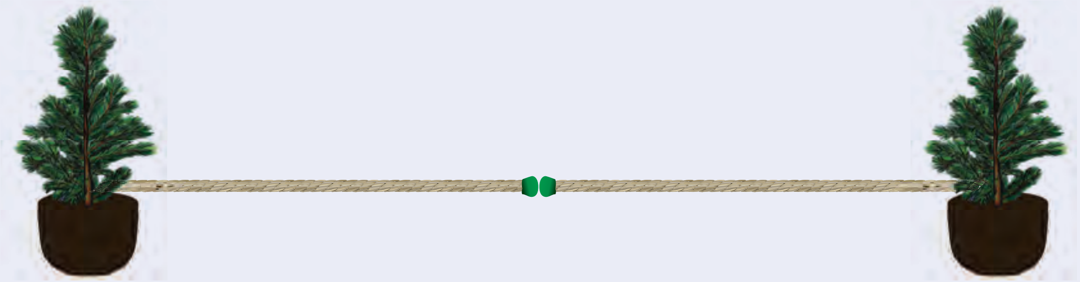
Lecția 4: Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct

4.1. Mijlocul unui segment

Mate practică

Adrian vrea să planteze un brăduț, astfel încât să fie egal depărtat de alți doi brăduți deja plantați. El dispune de o sfoară, suficient de lungă, de o foarfecă și de un creion colorat.
Cum va proceda Adrian?

Rezolvare:
Adrian taie din sfoară o bucată lungă cât distanța dintre cei doi brăduți. Îndoaie sfoara, apoi o întinde bine, astfel încât cele două capete să se suprapună. Colorează capătul nou format și apoi întinde, din nou, sfoara între cei doi brăduți.



Plantează al treilea brăduț în locul indicat de semnul făcut pe sfoară.

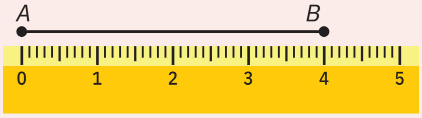
De reținut

Definiție. *Mijlocul* unui segment este un punct unic, interior segmentului, ce formează cu extremitățile segmentului două segmente congruente.

Desenăm	Citim	Notăm
	Punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*. Segmentele *AM* și *BM* sunt congruente.	*M* este mijlocul segmentului *AB*. $AM \equiv BM$

Aplicații practice

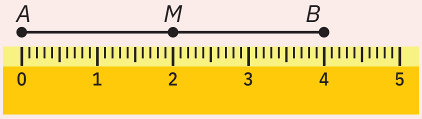
Determinarea mijlocului unui segment cu ajutorul riglei gradate



Pasul 1: Măsurăm segmentul *AB*:

Pasul 2: Împărțim la 2 lungimea sa: 4 cm : 2 = 2 cm.

Pasul 3: Reprezentăm pe segment punctul *M*, astfel încât $d(A;\, M) = AM = 2$ cm:



Determinarea mijlocului unui segment cu ajutorul compasului și al riglei negradate

Pasul 1: Fixăm deschiderea compasului mai mare decât jumătatea segmentului (figura 1):

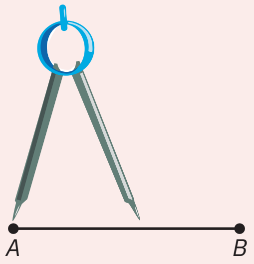


Figura 1

Pasul 2: Cu centrul în *A* trasăm un arc de cerc cu deschiderea fixată (figura 2):

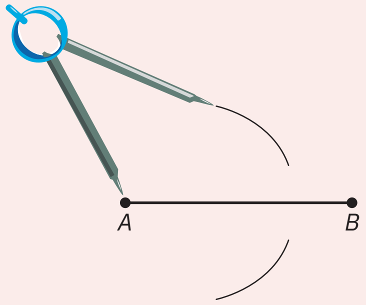


Figura 2

Pasul 3: La fel, cu centrul în *B* și cu aceeași deschidere a compasului, trasăm un alt arc de cerc care să intersecteze primul arc în punctele *P* și *Q* (figura 3).

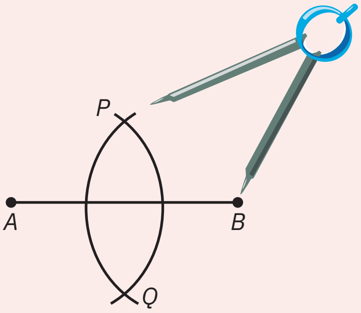


Figura 3

Pasul 4: Dreapta *PQ* taie segmentul *AB* în mijlocul său, *M* (figura 4).

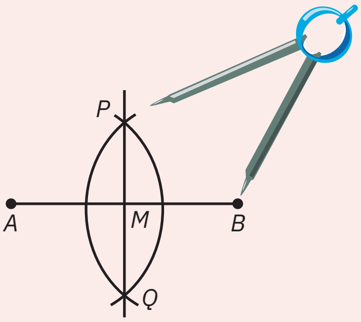


Figura 4

4.2. Simetricul unui punct față de un punct

De reținut

Definiție. Simetricul unui punct *A* față de un punct *M* este un punct *B*, cu proprietatea că *M* este mijlocul segmentului *AB*.

Desenăm	Citim	Notăm
	Simetricul punctului *A* față de punctul *M* este punctul *B*. *M* este mijlocul segmentului *AB*.	*B* este simetricul lui *A* față de *M*. *M* este mijlocul segmentului *AB*.

Observații

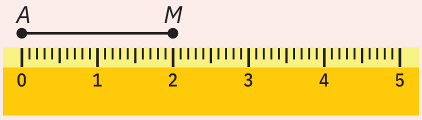
Dacă punctul *B* este simetricul punctului *A* față de *M*, atunci simetricul punctului *B* față de *M* este chiar punctul *A*.
De aceea, dacă *M* este mijlocul segmentului *AB*, se spune că punctele *A* și *B* sunt *simetrice față de punctul M*.

Aplicație practică

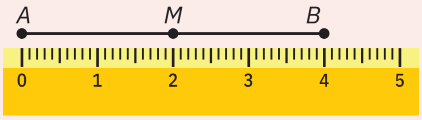
Construcția simetricului unui punct față de un punct cu ajutorul riglei gradate

Desen inițial:

Pasul 1: Desenăm segmentul *AM* și măsurăm lungimea sa:
În cazul nostru, *AM* = 2 cm.



Pasul 2: Prelungim segmentul *AM*, dincolo de *M*, cu un segment *MB*, astfel încât *MB* = *MA* = 2 cm.



Pasul 3: Deoarece $MA = MB \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului *AB*, rezultă că *B* este simetricul lui *A* față de *M*.

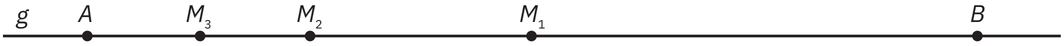
Gândire critică

Pe o dreaptă g se consideră punctele distincte A și B. Punctul M_1 este mijlocul segmentului AB, punctul M_2 este mijlocul segmentului AM_1, iar punctul M_3 este mijlocul segmentului AM_2.

a Determinați numărul natural, nenul, n, știind că $AM_3 = \frac{1}{n} \cdot AB$.

b Fără a efectua calculele, arătați că $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} < 1$.

Rezolvare:



a M_1 este mijlocul segmentului $AB \Rightarrow AM_1 \equiv BM_1 \Rightarrow AM_1 = BM_1 = \frac{1}{2} \cdot AB$;

M_2 este mijlocul segmentului $AM_1 \Rightarrow AM_2 \equiv M_1M_2 \Rightarrow AM_2 = M_1M_2 = \frac{1}{2} \cdot AM_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2^2} \cdot AB$;

M_3 este mijlocul segmentului $AM_2 \Rightarrow AM_3 \equiv M_2M_3 \Rightarrow AM_3 = M_2M_3 = \frac{1}{2} \cdot AM_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot AB = \frac{1}{2^3} \cdot AB$.

Din $AM_3 = \frac{1}{n} \cdot AB$ și $AM_3 = \frac{1}{2^3} \cdot AB \Rightarrow n = 2^3 = 8$, care este număr natural, nenul.

b $M_3M_2 + M_2M_1 + M_1B < AB \Leftrightarrow \frac{1}{2^3} \cdot AB + \frac{1}{2^2} \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot AB < AB$. Împărțind prin AB, obținem:

$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} < 1$.

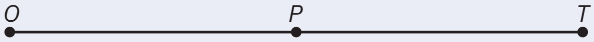
Verificare: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 a Segmentul OT are lungimea egală cu 8 cm, iar P este mijlocul său. Determinați lungimea OP.

b Segmentul OT are lungimea egală cu 8 cm, iar P este un punct interior acestui segment, astfel încât $OP = 4$ cm. Arătați că P este mijlocul segmentului OT.

Rezolvare:



a P este mijlocul segmentului OT, deci $OP \equiv PT$, de unde rezultă că $OP = PT = \frac{1}{2} \cdot OT = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.

b $PT = OT - OP = 8 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.

$$\left.\begin{aligned} OP &= 4 \text{ cm} \\ PT &= 4 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow OP = PT \Rightarrow OP \equiv PT \Rightarrow P \text{ este mijlocul segmentului } OT.$$

2 a Pe o dreaptă g se iau punctele A și B, astfel încât $AB = 3$ cm. Construiți simetricul lui A față de B și notați-l cu C. Ce lungime are segmentul BC?

b Pe o dreaptă g se iau punctele A, B și C, în această ordine, astfel încât $AB = 3$ cm și $AC = 6$ cm. Arătați că A și C sunt simetrice față de B.

Rezolvare:

a

C este simetricul lui A față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $AC \Rightarrow AB \equiv BC \Rightarrow BC = AB = 3$ cm.

b $BC = AC - AB = 6 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.

$$\left.\begin{aligned} AB &= 3 \text{ cm} \\ BC &= 3 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = BC \Rightarrow AB \equiv BC \Rightarrow B \text{ este mijlocul segmentului } AC \Rightarrow A \text{ și } C \text{ sunt simetrice față de } B.$$

3 Pe o dreaptă g se consideră punctele distincte A și B.

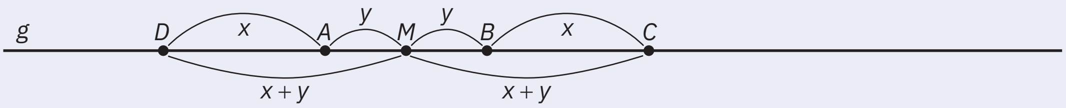
a Construiți punctul C simetricul lui A față de B și D simetricul lui B față de A.

b Arătați că D și C sunt simetrice față de mijlocul segmentului AB.

Rezolvare:

a

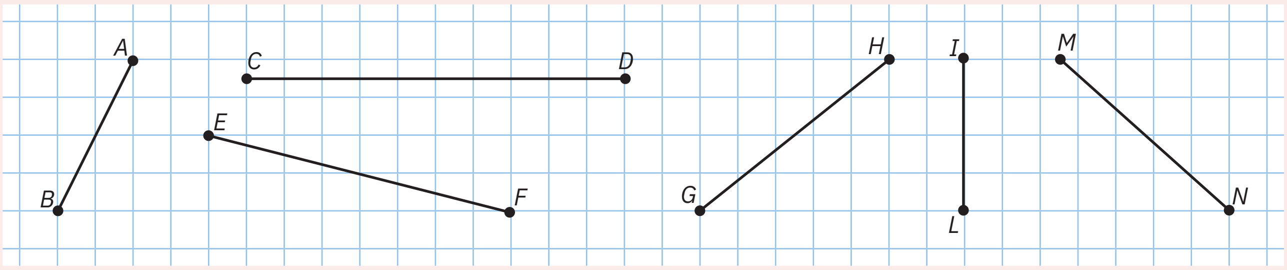
b C este simetricul lui A față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $AC \Rightarrow AB \equiv BC \Rightarrow AB = BC$.
D este simetricul lui B față de $A \Rightarrow A$ este mijlocul segmentului $DB \Rightarrow DA \equiv AB \Rightarrow DA = AB$.
Din $AB = BC$ și $DA = AB$, rezultă că $DA = BC = x$, unde $x > 0$.
Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow AM \equiv MB \Rightarrow AM = MB = y$, unde $y > 0$.



Atunci: $\left.\begin{array}{l} DM = DA + AM = x + y \\ MC = MB + BC = y + x \end{array}\right\} \Rightarrow DM = MC \Rightarrow DM \equiv MC \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $DC \Rightarrow D$ și C sunt simetrice față de M, mijlocul segmentului AB.

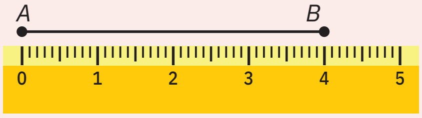
Probleme propuse

1 Desenați segmentele din figura de mai jos pe caiet cu rețea de pătrățele de matematică. Fără a le măsura, marcați mijoacele segmentelor AB, CD, EF, GH, IL, MN și notați-le cu O, P, R, S, Q, respectiv T.



2 Observați figura alăturată, apoi desenați pe caiet segmentul AB. Marcați mijocul segmentului AB și notați-l cu C, apoi marcați mijlocul segmentului AC și notați-l cu D:

a folosind rigla gradată; **b** folosind compasul și rigla negradată.



3 În figura 5, punctul C este mijlocul segmentului AB, cu $AB = 8$ cm. Lungimea segmentului AC este egală cu:

a 4 cm; **b** 4,5 cm; **c** 6 cm; **d** 8 cm.

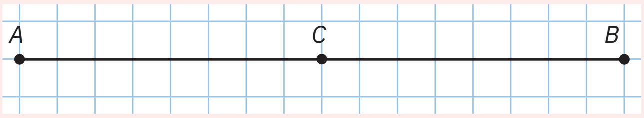


Figura 5

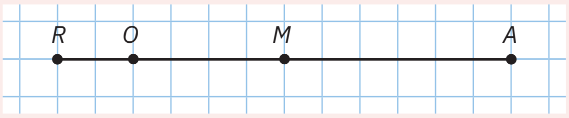


Figura 6

4 În figura 6 sunt reprezentate punctele R, O, M, A, astfel încât $RO = 1$ cm, $OM = 2$ cm și $MA = 3$ cm. Dintre acestea, cel care reprezintă mijlocul unui segment din această figură este punctul:

a R; **b** O; **c** M; **d** A.

5 Segmentul AB are lungimea de 6 cm. Radu afirmă: *Mijlocul segmentului AB este de 3* cm. Afirmația lui Radu este:

a adevărată; **b** falsă.

6 Segmentul AB are lungimea egală cu 10 cm, iar C este mijlocul său. Determinați lungimea AC.

7 Segmentul AB are lungimea egală cu 10 cm, iar C este un punct interior acestui segment, astfel încât, $AC = 5$ cm. Arătați că punctul C este mijlocul segmentului AB.

8 Despre punctele coliniare E, F, G, H se știe că F este mijlocul segmentului GH, iar G este mijlocul segmentului EF.

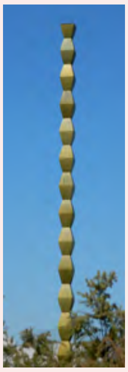
a Dacă $GF = 4$ cm, să se determine lungimea segmentului EH

b Dacă $EH = 18$ cm, să se determine lungimea segmentului GF.

9 Pe o dreaptă d se consideră, în această ordine, punctele A, B, C și D, iar M este mijlocul segmentelor BC și AD. Arătați că $AB \equiv CD$.

10 Pe o dreaptă d se consideră, în această ordine, punctele A, B, C și D, astfel încât $AB \equiv CD$. Știind că M este mijlocul segmentului BC, arătați că M este mijlocul segmentului AD.

11 ***Coloana fără Sfârșit***[1] are o înălțime de 29,70 m, este constituită din 16 module romboidale, fiecare având aceeași înălțime și se termină cu o jumătate de modul. În figura de mai jos, ***Coloana*** este reprezentată prin segmentul M_0M_j, cele 16 module prin segmentele M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., $M_{15}M_{16}$, iar jumătatea de modul prin segmentul $M_{16}M_j$.



a Ce înălțime are un modul?

b Arătați că M_8 este mijlocul segmentului M_0M_{16}.

12 Completați fiecare spațiu punctat pentru a obține o propoziție adevărată.

a Dacă A este simetricul punctului D față de I , atunci . . . . este mijlocul segmentului . . . .

b Dacă V este este mijlocul segmentului EA, atunci E și A sunt . . . . față de V.

13 În figura 7 sunt reprezentate punctele E, U, C, L, I și D. Simetricul punctului E față de punctul L este punctul:

a U; **b** D; **c** I; **d** C.

14 a Stabiliți, prin măsurare, dacă în figura 8, A și C sunt simetrice față de O.

b Stabiliți, prin măsurare, dacă în figura 9, B este simetricul lui D față de O.

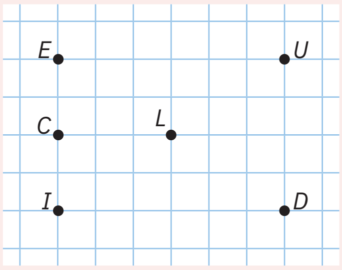


Figura 7

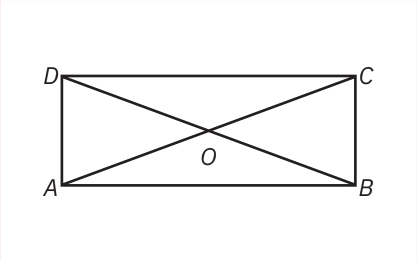


Figura 8

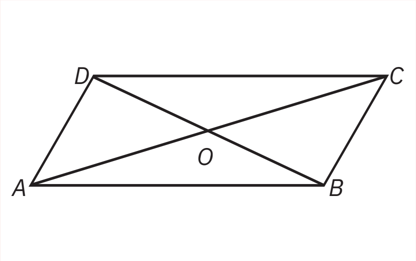


Figura 9

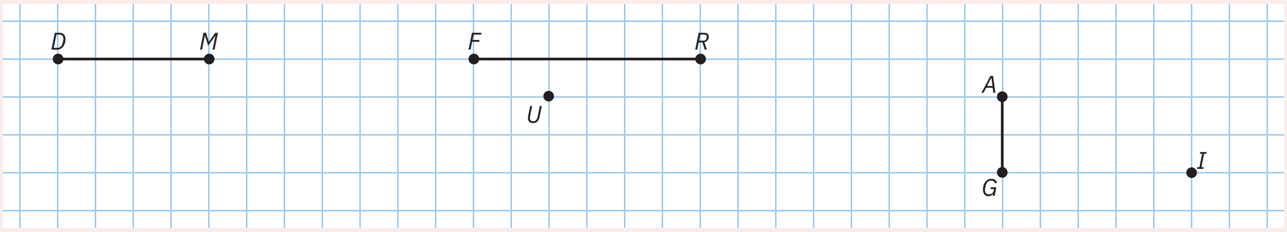
15 Desenați pe caietul de matematică figura de mai jos și apoi construiți:

a simetricul punctului D față de M și notați-l cu S;

b simetricele punctelor F și R față de U și notați-le cu L, respectiv T;

c simetricul punctului I față de A și notați-l cu E;

d simetricul punctului I față de mijlocul segmentului AG și notați-l cu C.

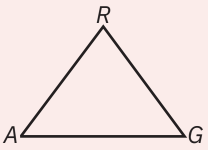


Cu ajutorul compasului, măsurați distanța dintre punctele L și T, iar apoi comparați-o cu lungimea segmentului FR.

---

[1] Sculptură a artistului român Constantin Brâncuși, parte a Ansamblului Monumental din Târgu Jiu.

16 **a** Desenați pe caiet triunghiul AGR, ca în figura alăturată, marcați mijlocul segmentului GR și notați-l cu E.
b Construiți simetricul lui A față de E și notați-l cu S.
c Construiți simetricul lui R față de G și notați-l cu N.



17 Pe o dreaptă g se iau punctele T și O, astfel încât $TO = 4$ cm. Construiți simetricul lui T față de O și notați-l cu N. Ce lungime are segmentul ON?

18 Pe o dreaptă g se iau punctele T, O și N, în această ordine, astfel încât $TO = 5$ cm și $TN = 10$ cm. Arătați că T și N sunt simetrice față de O.

19 Pe o dreaptă g considerați punctele distincte E și A.
a Construiți punctul S, simetricul lui E față de A și C simetricul lui A față de E.
b Arătați că E și A sunt simetrice față de mijlocul segmentului CS.

20 Radu, Horia, Ioana și Diana se așază în punctele R, H, I, respectiv D ale unei linii drepte. Dacă Diana s-a așezat la jumătatea distanței dintre Horia și Radu, punctele D și H sunt simetrice față de I, iar distanța dintre Horia și Radu este egală cu 10 m, calculează distanța dintre Ioana și Radu.

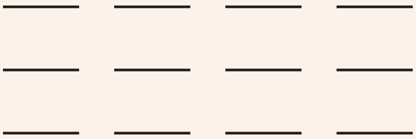
21 Pe o dreaptă g se consideră punctele distincte A și B. Punctul M_1 este mijlocul segmentului AB, punctul M_2 este mijlocul segmentului AM_1, punctul M_3 este mijlocul segmentului AM_2, punctul M_4 este mijlocul segmentului AM_3, iar punctul M_5 este mijlocul segmentului AM_4.

a Determinați numărul natural, nenul, n, știind că $AM_5 = \frac{1}{n} \cdot AB$.

b Fără a efectua calculele, arătați că $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} < 1$.

Joc

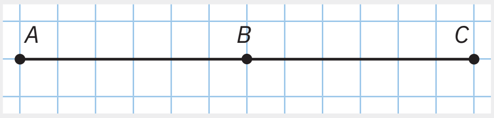
a Alături sunt desenate 12 drepte. Realizați un desen asemănător cu ajutorul a 12 bețe de chibrit.
b Mutați 3 bețe, astfel încât să aveți același număr de bețe, atât pe fiecare orizontală, cât și pe verticală.



AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 În figura alăturată, punctul B este mijlocul segmentului AC, cu $AC = 6$ cm. Lungimea segmentului AB este egală cu:
A 2 cm; **B** 2,5 cm; **C** 3 cm; **D** 4 cm.



2 Desenează un segment NU cu lungimea de 9 cm. Fie I un punct interior, astfel încât $NI = 2,5$ cm și C un punct, astfel încât I și U sunt simetrice față de C. Lungimea segmentului NC este egală cu:
A 3,25 cm; **B** 5,75 cm; **C** 6,5 cm; **D** 7,5 cm.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Pe o dreaptă g, fixează punctele distincte P, Q, R, S, T, în această ordine, astfel încât $PQ = 3$ cm, distanța de la S la T este egală cu 25% din 12 cm, iar R este mijlocul segmentului QS.
a Demonstrează că $PQ \equiv ST$.
b Arată că P și T sunt simetrice față de R.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

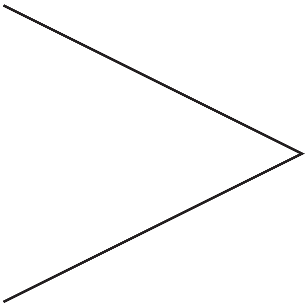
Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 5: Unghi: definiție, notații, elemente. Interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi

5.1. Unghiul. Elementele unui unghi

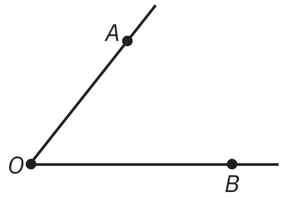
Această aliniere este observată în stolurile de păsări migratoare. Bătând din aripi, pasărea din fruntea stolului sparge rezistența aerului și astfel, în spatele ei, se formează un flux de aer care ajută celelalte păsări să zboare cu efort redus. Cu alte cuvinte, păsările zboară în forma literei V pentru a economisi energie.

Această formațiune de zbor este utilizată, deseori, în spectacolele aeriene și operațiunile cu avioane militare.



De reținut

Definiție. Figura geometrică determinată de două semidrepte cu aceeași origine se numește *unghi*.

Desenăm	Citim	Notăm
	Unghiul *AOB* sau unghiul *BOA* sau unghiul *O*	$\sphericalangle AOB$ $\sphericalangle BOA$ $\sphericalangle O$

Originea comună a celor două semidrepte se numește *vârful unghiului*.

Cele două semidrepte se numesc *laturile unghiului*.

Astfel, pentru unghiul notat $\sphericalangle AOB$, vârful este O, iar laturile sale sunt semidreptele OA și OB.

Observații

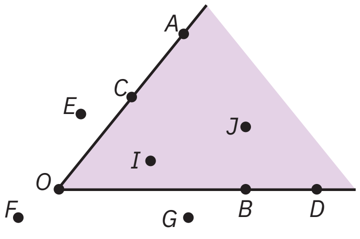
- Dacă notăm unghiul cu trei litere, atunci litera care marchează vârful acestuia se scrie, totdeauna, pe poziția a doua.
- Dacă îl notăm cu o singură literă, aceasta va fi cea care marchează vârful.

5.2. Pozițiile relative ale unui punct față de un unghi

De reținut

Punctele ce se află pe laturile unghiului aparțin unghiului.

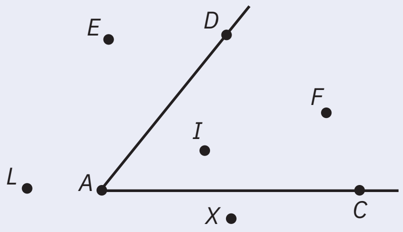
Punctele care nu se află pe laturile unghiului se află fie în interiorul unghiului, fie în exteriorul unghiului.

Desenăm	Citim	Notăm
	*A*, *C*, *O*, *B* și *D* aparțin unghiului *AOB*	*A*, *C*, *O*, *B* și *D* aparțin $\sphericalangle AOB$
	I și *J* se află în interiorul unghiului *AOB*	*I* și *J* aparțin Int($\sphericalangle AOB$)
	E, *F* și *G* se află în exteriorul unghiului *AOB*	*E*, *F* și *G* aparțin Ext($\sphericalangle AOB$)

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Priviți figura alăturată și completați oral enunțurile din tabel:

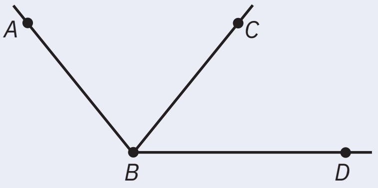
Unghiul desenat se numește	...
Vârful unghiului este	...
Laturile unghiului sunt	...
Punctele situate în interiorul unghiului sunt	...
Punctele situate în exteriorul unghiului sunt	...



Rezolvare:

Unghiul desenat se numește	∢*DAC*, ∢*CAD* sau ∢*A*.
Vârful unghiului este	*A*.
Laturile unghiului sunt	semidreptele *AC* și *AD*.
Punctele situate în interiorul unghiului sunt	*I* și *F*.
Punctele situate în exteriorul unghiului sunt	*E*, *L* și *X*.

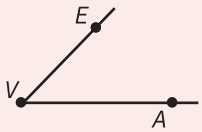
2 Numiți cele trei unghiuri din figura alăturată.



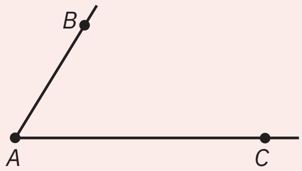
Rezolvare:
Deoarece unghiurile au același vârf, punctul B, nu le mai putem citi cu o singură literă.
Cele trei unghiuri sunt ∢*ABC*, ∢*CBD* și ∢*ABD*, pe care le mai putem citi ∢*CBA*, ∢*DBC*, respectiv ∢*DBA*.

Probleme propuse

1 În figura alăturată este desenat un unghi. Acesta poate fi citit:
a ∢*E*; **b** ∢*A*; **c** ∢*VAE*; **d** ∢*EVA*.

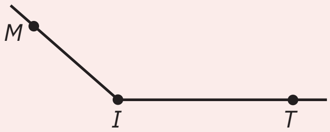


2 În figura alăturată este desenat unghiul *BAC*. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
- **a** Unghiul *BAC* poate fi citit *CAB* sau *A*.
- **b** Unghiul *BAC* are vârful în punctul *A*.
- **c** Latura *AB* poate fi citită *BA*.
- **d** Latura *AB* este mai scurtă decât latura *AC*.



3 Desenați pe caiet figura alăturată și următorul tabel, apoi completați corespunzător enunțurile din tabel.

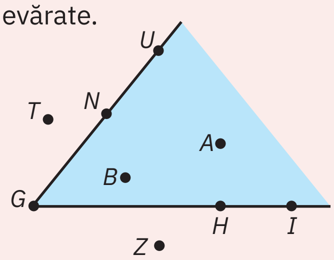
Unghiul desenat se numește	...
Vârful unghiului este	...
Laturile unghiului sunt	...



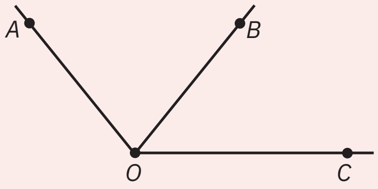
4 Realizați pe caiet următorul tabel și bifați corespunzător, pentru a completa enunțurile.

	∢*GEO*	∢*DOR*	∢*FAN*	∢*ADI*
Vârful unghiului este				
Laturile unghiului sunt semidreptele				

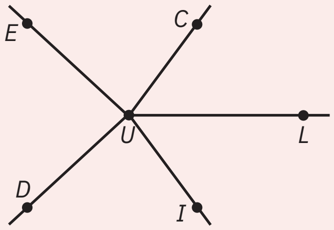
5 Priviți figura alăturată și completați oral enunțurile, pentru a obține propoziții adevărate.
- **a** Punctul *N* aparține laturii ... a unghiului *UGI*.
- **b** Punctul *A* este ... laturii *GI*.
- **c** Punctul *H* este ... laturii *GI*.
- **d** Punctele ... aparțin unghiului *UGI*.
- **e** Punctele ... se află în interiorul unghiului *UGI*.
- **f** Punctele ... se află în exteriorul unghiului *UGI*.



6 Completați enunțurile incomplete, pentru a obține propoziții adevărate.
- **a** În figura alăturată sunt desenate trei unghiuri: ∢*AOC*, ∢... și ∢... .
- **b** Laturile unghiului *AOB* sunt semidreptele *OA* și ..., iar vârful este ... .
- **c** Laturile unghiului *BOC* sunt semidreptele ... și ..., iar vârful este ... .
- **d** Laturile unghiului ... sunt semidreptele *OA* și *OC*, iar vârful este ... .
- **e** Unghiurile *AOB* și *BOC* au latură comună semidreapta ..., iar unghiurile ... și *AOC* au latură comună semidreapta *OA*.
- **f** Toate cele trei unghiuri au același ..., punctul ... .



7 Priviți figura alăturată și stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate.
- **a** Punctul *C* se află în interiorul unghiului *EUL*.
- **b** Punctul *I* se află în interiorul unghiului *DUL*.
- **c** Punctul *C* se află în exteriorul unghiului *DUI*.
- **d** Punctul *C* se află în exteriorul unghiului *IUL*.
- **e** Unghiurile *EUC* și *EUD* au în comun latura *UE*.
- **f** Toate unghiurile au vârf comun, punctul *U*.



8 Construiți, cu rigla sau echerul, două unghiuri cu vârfuri distincte.

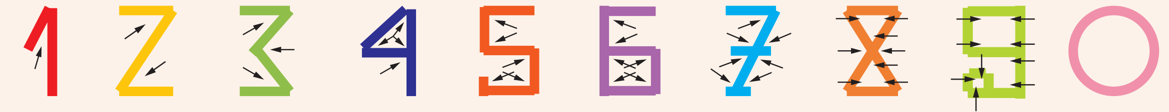
9 Construiți, cu rigla sau echerul, un unghi *AOB*, apoi un unghi în interiorul unghiului *AOB*, astfel încât cele două unghiuri să aibă același vârf.

10 Construiți cu rigla sau echerul două unghiuri cu același vârf, astfel încât unul să fie în exteriorul celuilalt.

11 Construiți un unghi *ERB*, astfel încât segmentele *RE* și *RB* să fie congruente și apoi:
- **a** trasați dreapta *EB* și notați mijlocul segmentului *EB* cu *O*;
- **b** trasați semidreapta *RO*;
- **c** construiți simetricul lui *R* față de *O* și notați-l cu *M*;
- **d** trasați segmentele *ME* și *MB*.

Știați că... ?

În vechime, pentru scrijelirea lor mai uşoară pe nisip, pe tăbliţe de lut sau în piatră, cifrele arabe erau formate din linii drepte. Ulterior, pe măsură ce instrumentele de scris şi suportul pe care se scria s-au perfecţionat, a crescut viteza de scriere şi segmentele de dreaptă care formau cifrele s-au rotunjit, ajungându-se la forma de astăzi.
Observați cifrele arabe de mai jos și descoperiți logica formei fiecăreia.


1 unghi 2 unghiuri 3 unghiuri 4 unghiuri 5 unghiuri 6 unghiuri 7 unghiuri 8 unghiuri 9 unghiuri 0 unghiuri

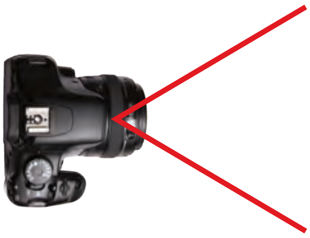
Portofoliu

Desenați un unghi *AOB*. Trasați dreapta *AB* și marcați un punct *I*, care să fie punct interior atât dreptei *AB*, cât și unghiului *AOB*. Marcați un punct *E*, care să fie interior dreptei *AB*, dar să fie exterior unghiului *AOB*.
Includeți desenul în portofoliul personal „Geometria este prietena mea”.

Lecția 6: Măsura unui unghi. Unghiuri congruente

6.1. Măsura unui unghi

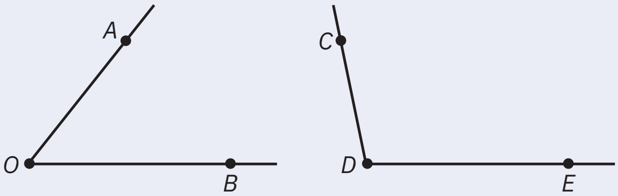
Atunci când cumperi un aparat de fotografiat bun, unul dintre criterii este să aibă un unghi de vizualizare mare.


Unghi de vizualizare mare


Unghi de vizualizare mic

Mate practică

Desenăm pe o foaie unghiul *AOB* și unghiul *CDE*.
Decupăm unghiul *AOB* și-l suprapunem peste unghiul *CDE*.



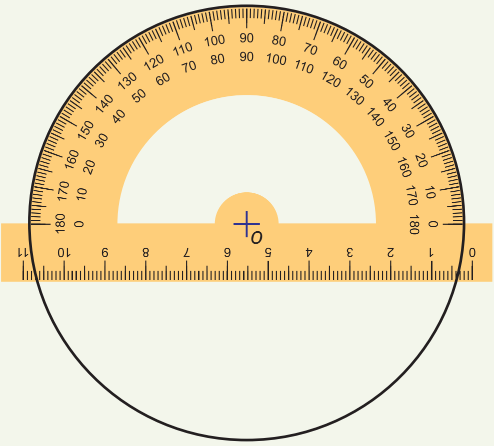
Ce observăm?
Unghiul *CDE* are deschiderea dintre laturile sale, *DC* și *DE*, mai mare decât decât deschiderea dintre laturile *OA* și *OB* ale unghiului *AOB*.

De reținut

Pentru a compara două unghiuri nu ne interesează lungimile laturilor. Acestea sunt semidrepte și, fiind infinite, nu pot fi măsurate. Ne interesează cât de mare este deschiderea dintre laturile unghiului.
Cea mai folosită unitate pentru măsurarea unghiurilor este unghiul de *un grad sexagesimal*. Denumirea provine de la faptul că *minutul* este unitatea de 60 de ori mai mică decât gradul: 1° = 60'.

Definiție. *Măsura unui unghi* este numărul care ne arată de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în interiorul acelui unghi.

Instrumentul gradat cu care măsurăm deschiderea dintre laturile unghiului este raportorul. Raportoarele sunt, de regulă, în formă de semicerc și au gradații circulare de la 0 la 180, notate pe margine. Pe bara orizontală este marcat cu *O*, *centrul cercului* din care face parte semicercul raportorului. De aceea, îl vom numi *centrul semicercului*.

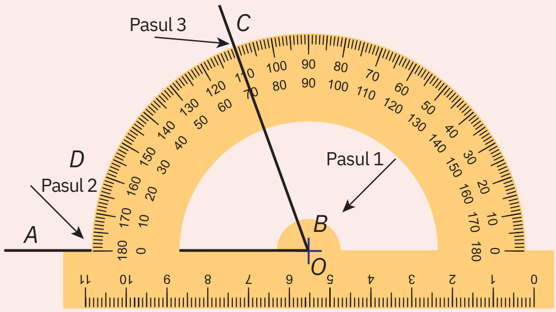


Aplicație practică

Măsurarea unui unghi dat, *ABC*

Pasul 1: Se așază raportorul astfel încât vârful unghiului să fie în punctul *O*, care este centrul semicercului raportorului. În cazul nostru, vârful *B* al unghiului *ABC* se așază în centrul semicercului, *O*.

Pasul 2: O latură a unghiului trebuie să treacă prin punctul de diviziune corespunzător lui 0°. În cazul nostru, latura *BA* trece prin punctul de diviziune corespunzător lui 0°.



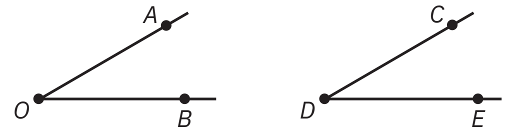
Pasul 3: Diviziunea de pe raportor situată pe direcția celeilalte laturi ne dă măsura unghiului *ABC*. În cazul nostru, latura *BC* este situată pe diviziunea de 70° a raportorului.

Pasul 4: Măsura unghiului este egală cu 70° și scriem că $\sphericalangle ABC = 70°$.

6.2. Unghiuri congruente

De reținut

Definiție. Două unghiuri care au aceeași măsură se numesc *unghiuri congruente*.

Desenăm	Citim	Notăm
	$\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle CDE$ au aceeași măsură	$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CDE$

Proprietățile relației de congruență

1 **Reflexivitatea.** Orice unghi este congruent cu el însuși: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$.
2 **Simetria.** Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, atunci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$.
3 **Tranzitivitatea.** Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$.

Aplicație practică

Construcția unui unghi congruent cu un unghi dat cu ajutorul raportorului

Se dă un unghi $\sphericalangle ABC$ și se cere construcția unui unghi $\sphericalangle DEF$ congruent cu acesta.

Pasul 1: Măsurăm unghiul dat, $\sphericalangle ABC$, și obținem că $\sphericalangle ABC = 50°$ (figura 1).

Pasul 2: Se construiește semidreapta ED, una dintre laturile unghiului DEF.

Pasul 3: Așezăm punctul O al raportorului în E și latura ED pe direcția diviziunii ce indică 0° (figura 2).

Pasul 4: Marcăm punctul F în dreptul diviziunii de 50° și trasăm semidreapta EF (figura 2).

Pasul 5: $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC = 50°$, deci $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle ABC$.

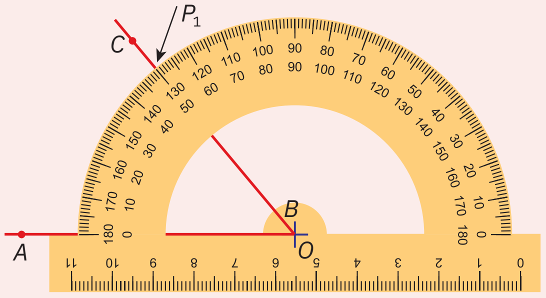


Figura 1

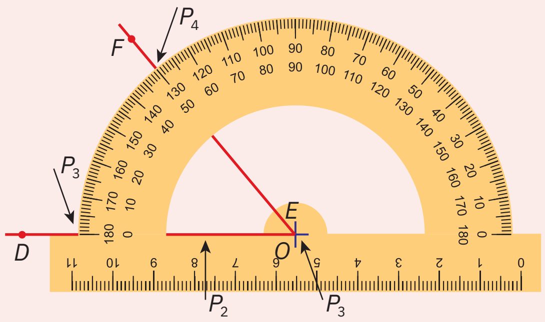
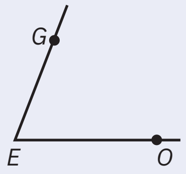


Figura 2

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 a Măsurați unghiul GEO desenat în figura alăturată și precizați măsura acestuia.
b Construiți un unghi MAT congruent cu unghiul GEO, apoi completați figura cu o semidreaptă AE, astfel încât măsura unghiului MAE să fie egală cu 20°.



Rezolvare:

a Cu ajutorul raportorului, măsura unghiului GEO este egală cu 70°.
b Distingem două cazuri: E se află în interiorul unghiului MAT (figura 3), respectiv E se află în exteriorul unghiului MAT (figura 4).

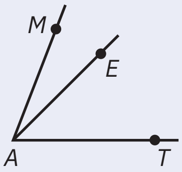


Figura 3

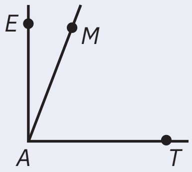


Figura 4

2 Ținând cont că relația de congruență se referă la unghiuri, iar relația de egalitate se referă la măsurile acestor unghiuri, citiți următoarele propoziții, justificând, în fiecare caz, ceea ce s-a aplicat:

a $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B$;

b $\sphericalangle A = \sphericalangle B \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$;

c $\left.\begin{matrix} \sphericalangle C \equiv \sphericalangle D \\ \sphericalangle C \equiv \sphericalangle E \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle D \equiv \sphericalangle E \Rightarrow \sphericalangle D = \sphericalangle E$;

d $\left.\begin{matrix} \sphericalangle C = \sphericalangle D \\ \sphericalangle C = \sphericalangle E \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle D = \sphericalangle E \Rightarrow \sphericalangle D \equiv \sphericalangle E$;

Rezolvare:

a Unghiul *A* este congruent cu unghiul *B*. Aplicând definiția unghiurilor congruente, rezultă că măsura unghiului *A* este egală cu măsura unghiului *B*.

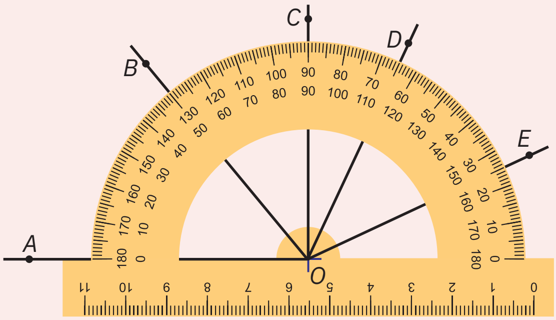
b Măsura unghiului *A* este egală cu măsura unghiului *B*. Conform definiției unghiurilor congruente, deducem că unghiul *A* este congruent cu unghiul *B*.

c Unghiul *C* este congruent cu unghiul *D* și unghiul *C* este congruent cu unghiul *E*. Aplicând tranzitivitatea relației de congruență a unghiurilor, rezultă că unghiul *D* este congruent cu unghiul *E*. Conform definiției unghiurilor congruente, deducem că măsura unghiului *D* este egală cu măsura unghiului *E*.

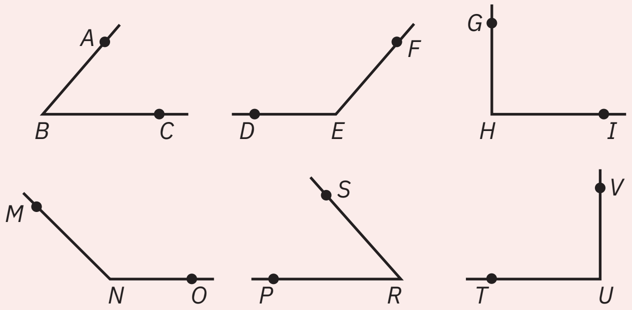
d Măsura unghiului *C* este egală cu măsura unghiului *D* și măsura unghiului *C* este egală cu măsura unghiului *E*. Aplicând tranzitivitatea relației de egalitate, măsura unghiului *D* este egală cu măsura unghiului *E*. În conformitate cu definiția unghiurilor congruente, deducem că unghiul *D* este congruent cu unghiul *E*.

Probleme propuse

1 Folosind diviziunile raportorului din figura alăturată, citiți măsurile următoarelor unghiuri: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle AOE$.



2 **a** Măsurați, cu ajutorul raportorului, următoarele unghiuri:



b Stabiliți dacă există unghiuri congruente printre acestea.

3 În figurile 5 și 6 nu este corect așezat raportorul pentru citirea măsurii unghiului $\sphericalangle ABC$. Precizați care este deficiența în fiecare caz.

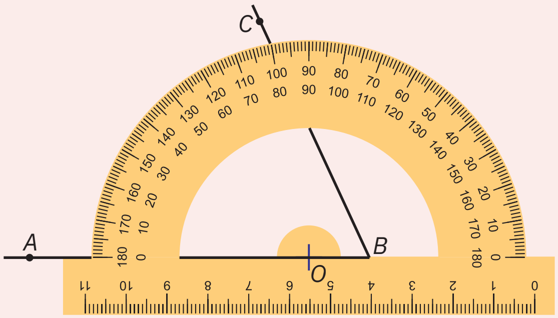


Figura 5

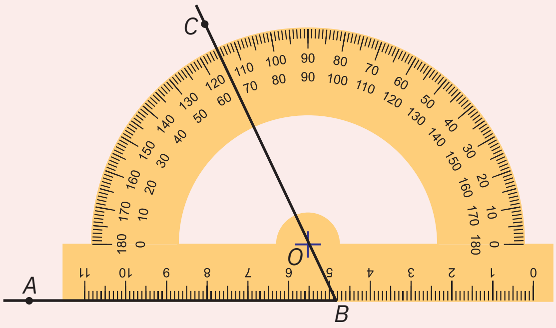
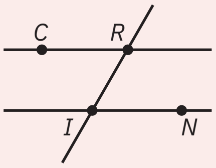


Figura 6

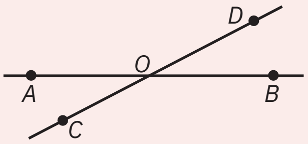
4 În figura alăturată, dreptele *CR* și *IN* sunt paralele. Se știe că măsura unghiului *CRI* este egală cu 60° și că $\sphericalangle RIN \equiv \sphericalangle CRI$. Determinați măsura unghiului *RIN*.



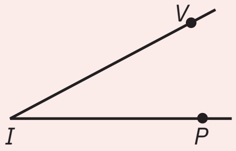
5 În figura alăturată, dreptele *AB* și *CD* sunt concurente în punctul *O*.

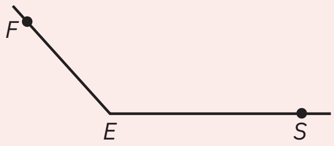
a Măsurați cu raportorul unghiurile *AOC* și *BOD* și stabiliți dacă sunt congruente.

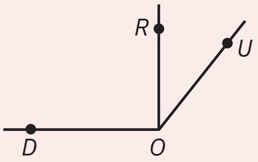
b Măsurați cu raportorul unghiurile *AOD* și *BOC* și stabiliți dacă sunt congruente.



6 **a** Fără a măsura unghiurile de mai jos, estimați măsura fiecăruia și notați-o.







b Măsurați, cu ajutorul raportorului, fiecare unghi și notați valoarea găsită.

c Găsiți eroarea pe care ați făcut-o prin estimare.

7 Desenați un unghi *ABC* cu măsura de 75° și un unghi *DEF* cu măsura de 150°.

8 Desenați un unghi *EVA* congruent cu unghiul *ABC*, știind că măsura unghiului *ABC* este egală cu 120°.

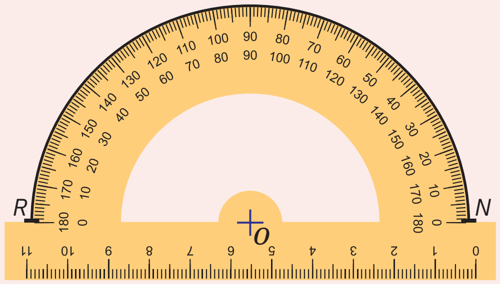
9 Transcrieți pe caiet textul următor, completând astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

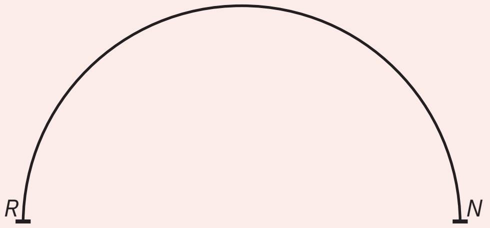
a $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Aplicând definiția unghiurilor congruente, rezultă că ... .

b Unghiurile *A* și *B* au măsurile egale $\Leftrightarrow \sphericalangle A =$ ... . Aplicând ... $\Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

c Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C \Rightarrow$ ... ≡ ... . Am aplicat ... relației de congruență.

10 Folosind conturul exterior al raportorului, desenați un semicerc cu extremitățile în *R* și, respectiv, *N*, ca în figura de mai jos. Marcați pe semicerc punctele distincte *O*, *M* și *A*. Măsurați unghiurile *RON*, *RMN*, *RAN* și stabiliți dacă sunt congruente.





11 Pe o coală A4, realizați o configurație geometrică ce îndeplinește următoarele cerințe:

a măsura unghiului *AOB* este egală cu 150°;

b punctul *C* este situat în interiorul unghiului *AOB*, astfel încât $\sphericalangle AOC = 50°$;

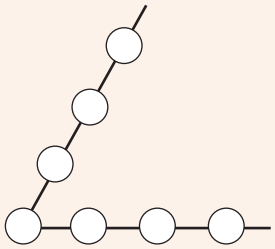
c punctul *D* este situat în exteriorul unghiului *AOB*, astfel încât $\sphericalangle AOD = 60°$;

d semidreapta *OE* este situată în interiorul unghiului *BOD*, astfel încât $\sphericalangle BOE = 50°$.

Includeți desenul în portofoliul personal „Geometria este prietena mea”.

Joc

Transcrieți figura alăturată pe caiet și așezați cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 în cerculețele atașate unghiului, astfel încât suma numerelor din cerculețele situate pe o latură să fie egală cu 20, tot atât cât suma cifrelor din cerculețele situate pe cealaltă latură a unghiului. Determinați măsura unghiului, știind că este egală cu *n*°, unde numărul natural *n* este de 12 ori mai mare decât numărul situat în cerculețul atașat vârfului acestui unghi.



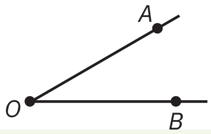
Lecția 7: Clasificarea unghiurilor. Calcule cu măsuri de unghiuri

7.1. Clasificarea unghiurilor

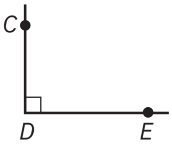
Amintiți-vă din clasa a IV-a! Unghiul ascuțit are deschiderea dintre laturi mai mică decât un unghi drept, iar unghiul obtuz are deschiderea dintre laturi mai mare decât un unghi drept.

De reținut

Definiție. Unghiul *ascuțit* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 0° și 90°.

Desenăm	Citim
	$0^\circ < \sphericalangle AOB < 90^\circ$, deci $\sphericalangle AOB$ este ascuțit.

Definiție. Unghiul *drept* este unghiul a cărui măsură este egală cu 90°.

Desenăm	**Citim**
	$\sphericalangle CDE = 90^\circ$, deci $\sphericalangle CDE$ este drept.

Observație. Laturile *DC* și *DE* ale unghiul drept *CDE* sunt perpendiculare.
Scriem: $\sphericalangle CDE = 90^\circ \Leftrightarrow DC \perp DE$.

Definiție. Unghiul *obtuz* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 90° și 180°.

Desenăm	**Citim**
	$90^\circ < \sphericalangle FGH < 180^\circ$, deci $\sphericalangle FGH$ este obtuz.

Definiție. Unghiul *nul* este unghiul a cărui măsură este egală cu 0°.

Desenăm	**Citim**
	$\sphericalangle SIN = 0^\circ$, deci $\sphericalangle SIN$ este nul.

Observație. Laturile unghiului *SIN* sunt semidreptele *IS* și *IN*, care au aceeași origine (punctul *I*, vârful unghiului) și *același sens* (se suprapun, sunt identice, coincid).

Definiție. Unghiul *alungit* este unghiul a cărui măsură este egală cu 180°.

Desenăm	**Citim**
	$\sphericalangle ISN = 180^\circ$, deci $\sphericalangle ISN$ este alungit.

Observație. Laturile unghiului *ISN* sunt semidreptele *SI* și *SN* care au aceeași origine, dar *sensuri opuse*. *SI* și *SN* formează dreapta *IN*, iar vârful unghiului, *S*, este punct interior segmentului *IN*.

Coliniaritatea a trei puncte

Pentru a arăta că trei puncte *A*, *B*, *C* sunt coliniare, în această ordine, în anumite probleme, este suficient să arătăm că unghiul *ABC* este alungit (metoda unghiului alungit)!

7.2. Operații cu măsuri de unghiuri

Adunarea. Operația se face adunând grade cu grade și minute cu minute:

43°25' + 24°5' = (43° + 24°) + (25' + 5') = 67°30'.

Dacă se obțin mai mult de 60 de minute, transformăm minutele în grade, ținând cont că 60' = 1°:

25°45' + 57°43' = (25° + 57°) + (45' + 43') = 82° + 88' = 82° + 1°28' = 83°28'.

$$\begin{array}{r} 43^\circ25'+\\ 24^\circ\ \ 5'\\ \hline 67^\circ30' \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 25^\circ45'+\\ 57^\circ43'\\ \hline 82^\circ88' \end{array}$$

Scăderea. Se scad minutele din minute și gradele din grade:

78°45' – 34°20' = (78° – 34°) + (45' – 20') = 44°25'.

Dacă nu avem suficiente minute la descăzut, ne împrumutăm cu 1 grad:

73°18' – 35°53' = 72°78' – 35°53' = 37°25'.

$$\begin{array}{r} 78^\circ45'-\\ 34^\circ20'\\ \hline 44^\circ25' \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 72^\circ78'-\\ 35^\circ53'\\ \hline 37^\circ25' \end{array}$$

Înmulțirea cu un număr natural. Operația se face înmulțind cu acel număr numărul de grade, respectiv numărul de minute:

(25°14') · 3 = 75°42'.

Dacă numărul minutelor este mai mare de 60, transformăm minutele în grade:

(21°37') · 6 = 126°222' = 126° + (3°42') = 129°42'.

$$\begin{array}{r} 25^\circ14'\cdot\\ 3\\ \hline 75^\circ42' \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 21^\circ\ \ 37'\cdot\\ 6\\ \hline 126^\circ222' \end{array}$$

Împărțirea la un număr natural. Împărțim numărul de grade la numărul dat, respectiv numărul de minute la numărul dat:

70°55' : 5 = 14°11'.

Dacă, după ce împărțim numărul de grade la numărul dat, rămâne rest, acesta se transformă în minute și se adună la minutele existente la deîmpărțit, apoi împărțim suma la numărul dat:

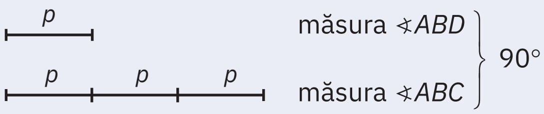
87°24' : 4 = 21°51'.

$$\begin{array}{r|l} 70^\circ55' & 5\\ \cline{2-2} 70^\circ\ \ \ \ & 14^\circ11'\\ \cline{1-1} ===55' & \\ 55' & \\ \cline{1-1} === & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 87^\circ\ \ \ \ 24' & 4\\ \cline{2-2} 84^\circ\ \ \ \ \ \ \ & 21^\circ51'\\ \cline{1-1} 3^\circ=180'\ + & \\ 24' & \\ \cline{1-1} 204' & \\ 204' & \\ \cline{1-1} ==== & \end{array}$$

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Semidreptele *BA*, *BC*, *BD* formează o figură geometrică, în care unghiul *CBD* este drept, iar măsura unghiului *ABC* este de trei ori mai mare decât măsura unghiului *ABD*. Determinați măsurile unghiurilor *ABC* și *ABD*.

Rezolvare:
Unghiul *CBD* este un unghi drept ⇒ ∢*CBD* = 90°.
Distingem două cazuri, reprezentate în figura 1 și, respectiv, în figura 2.
Vom aplica *metoda figurativă*, reprezentând măsura unghiului *ABD* cu o parte și măsura unghiului *ABC* cu 3 părți.
Cazul I: ∢*ABC* + ∢*ABD* = ∢*CBD* = 90°.



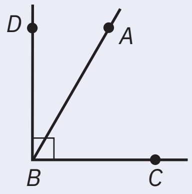
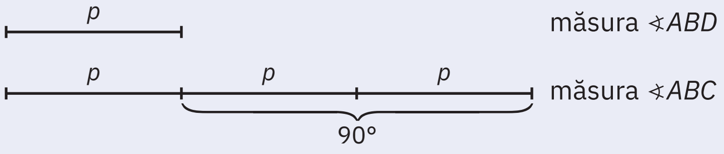


Figura 1

Măsura unghiului *ABD* este egală cu 90°: 4 = 22°30', iar ∢*ABC* = 22°30' · 3 = 67°30'.
Cazul al II-lea: ∢*ABC* – ∢*ABD* = ∢*CBD* = 90°.



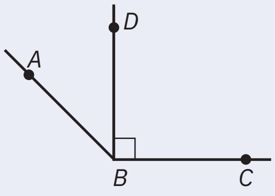


Figura 2

Măsura unghiului *ABD* este egală cu 90°: 2 = 45°, iar măsura unghiului *ABC* este egală cu 45° · 3 = 135°.

2 Măsura unghiului AOB este $53° + n°$. Determinați numărul natural n pentru care unghiul este succesiv:
a ascuțit; **b** drept; **c** obtuz.

Rezolvare:

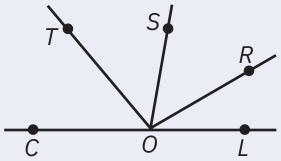
a $\sphericalangle AOB$ este ascuțit, deci $0° < \sphericalangle AOB < 90°$, de unde $0° < 53° + n° < 90°$, iar $0° \leq n° < 37°$ și, ținând cont că numărul n este natural, n poate lua valorile 0, 1, 2, 3, ..., 36.

b $\sphericalangle AOB$ este drept, de unde $\sphericalangle AOB = 90°$, deci $53° + n° = 90°$, iar $n = 37$.

c $\sphericalangle AOB$ este obtuz, de unde $90° < \sphericalangle AOB < 180°$, deci $90° < 53° + n° < 180°$, iar $37° < n° < 127°$ și, ținând cont că numărul n este natural, n poate lua valorile 38, 39, 40, ..., 126.

3 În interiorul unghiului COR, care are măsura egală cu 150°, se construiește o semidreaptă OS, astfel încât măsura unghiului COS este egală cu 100°, iar în exteriorul unghiului COR, se construiește o semidreaptă OL, astfel încât măsura unghiului ROL este egală cu 20% din măsura unghiului COR. În interiorul unghiului COS, se construiește o semidreaptă OT, astfel încât $\sphericalangle TOC \equiv \sphericalangle TOS$. Arătați că:
a $\sphericalangle ROS \equiv \sphericalangle TOS$; **b** C, O, L sunt puncte coliniare.

Rezolvare:



a Din ipoteză $\sphericalangle TOC \equiv \sphericalangle TOS \Rightarrow \sphericalangle TOC = \sphericalangle TOS = \dfrac{\sphericalangle COS}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°.$

$$\left.\begin{aligned}&\sphericalangle ROS = \sphericalangle COR - \sphericalangle COS = 150° - 100° = 50°\\&\sphericalangle TOS = 50°\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ROS = \sphericalangle TOS \Rightarrow \sphericalangle ROS \equiv \sphericalangle TOS.$$

b $\sphericalangle ROL = 20\% \cdot \sphericalangle COR = \dfrac{20}{100} \cdot \sphericalangle COR = \dfrac{1}{5} \cdot 150° = 30°.$

$\sphericalangle COL = \sphericalangle COR + \sphericalangle ROL = 150° + 30° = 180° \Rightarrow \sphericalangle COL$ este alungit $\Rightarrow C, O, L$ sunt puncte coliniare.

Probleme propuse

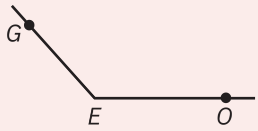
1 Completați oral, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
- **a** Unitatea principală de măsură pentru unghiuri este ... .
- **b** Unghiul alungit are măsura egală cu ... grade sexagesimale.
- **c** Unghiul nul are măsura egală cu... grade sexagesimale.
- **d** Unghiul ascuțit are măsura cuprinsă între ... grade sexagesimale și ... grade sexagesimale.
- **e** Unghiul obtuz are măsura cuprinsă între ... grade sexagesimale și ... grade sexagesimale.

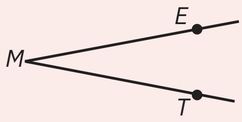
2 În imaginile de mai jos, acele unui ceas mecanic indică orele 12, 2, 4, 3, respectiv, 6. Precizați, în fiecare caz, dacă unghiul determinat de acul orar și acul minutar este ascuțit, drept, obtuz, nul sau alungit.





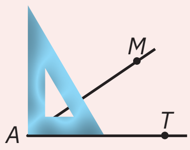
3 Măsurați unghiurile de mai jos și precizați ce fel de unghi este GEO, EMT, respectiv RIE.



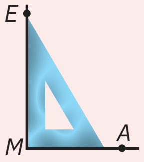


4 Putem stabili dacă un unghi dat este ascuțit, drept sau obtuz cu ajutorul echerului, care se așază ca în desenele de mai jos. Precizați felul fiecărui unghi:

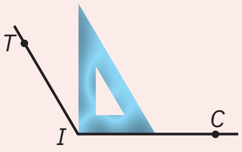
a



b



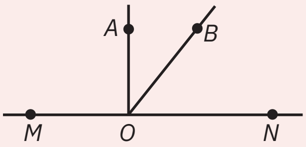
c



5 Se consideră mai multe unghiuri cu diverse măsuri: $\sphericalangle A = 90^\circ$; $\sphericalangle B = 40^\circ$; $\sphericalangle C = 0^\circ$; $\sphericalangle D = 120^\circ$; $\sphericalangle E = 180^\circ$; $\sphericalangle F = 70^\circ 30'$; $\sphericalangle G = 0^\circ$; $\sphericalangle H = 124^\circ 30'$; $\sphericalangle I = 179^\circ + 60'$; $\sphericalangle J = 88^\circ + 120'$.
Transcrieți tabelul de mai jos în caiet și, ținând seama de măsura lor, scrieți aceste unghiuri în tabel.

Unghiuri nule	Unghiuri ascuțite	Unghiuri drepte	Unghiuri obtuze	Unghiuri alungite

6 Folosind figura alăturată, stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:



a $\sphericalangle OMN$ este unghi nul; **b** $\sphericalangle MON$ este unghi alungit;
c $\sphericalangle MNO$ este unghi nul; **d** $\sphericalangle MOB$ este unghi ascuțit;
e $\sphericalangle MOA$ este unghi drept; **f** $\sphericalangle MOB$ este unghi obtuz;
g $\sphericalangle NOA$ nu este unghi drept; **h** $\sphericalangle AOB$ este unghi ascuțit.

7 Transformați în minute sexagesimale:
a 8°; **b** 35°; **c** $9^\circ 10'$; **d** $15^\circ 30'$; **e** $65^\circ 45'$.

8 Transformați în grade sexagesimale:
a $300'$; **b** $1\,200'$; **c** $3\,720'$; **d** $3\,750'$; **e** $4\,845'$.

9 Efectuați:
a $34^\circ + 56^\circ$; **b** $75^\circ - 28^\circ$; **c** $19^\circ \cdot 8$; **d** $154^\circ : 7$; **e** $27^\circ 18' + 56^\circ 24'$;
f $5^\circ 38' + 8^\circ 53'$; **g** $75^\circ - 28^\circ 53'$; **h** $27^\circ 45' \cdot 5$; **i** $75^\circ : 4$; **j** $122^\circ 50' : 5$.

10 Următorul calcul este greșit: $71^\circ 4' - 30^\circ 54' = 40^\circ 50'$. Explică greșeala și află rezultatul corect!

11 Aproximați următoarele măsuri, cu o eroare de 1°, prin lipsă, respectiv, prin adaos și stabiliți care dintre cele două aproximări reprezintă valoarea rotunjită:
a $56^\circ 28'$; **b** $27^\circ 51'$; **c** $107^\circ 10'$; **d** $59^\circ 30'$; **e** $89^\circ 35'$.

12 Asociați fiecare măsură din coloana **A** cu o măsură din coloana **B**, astfel încât suma celor două măsuri să reprezinte măsura unui unghi alungit.

A	B
a 118°	**1** 107°
b 73°	**2** 136°
c 44°	**3** 62°

13 Fie un unghi *ABC*, astfel încât măsura sa este egală cu $65^\circ + n^\circ$. Determinați numărul natural n pentru care unghiul $\sphericalangle ABC$, este succesiv:
a ascuțit; **b** drept; **c** obtuz; **d** alungit.

14 Știind că $\sphericalangle A = 40^\circ$ și $\sphericalangle B = 2400'$, arătați că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

15 Știind că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle B = 1800'$, determinați măsura unghiului A și exprimați-o în grade sexagesimale.

16 Priviți figura 3. Calculând suma dintre măsura unghiului *ABD* și măsura unghiului *CBD*, obținem măsura unghiului:
a *ACB*; **b** *ABC*; **c** *BAC*; **d** *ADC*.

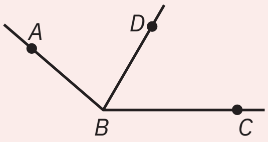
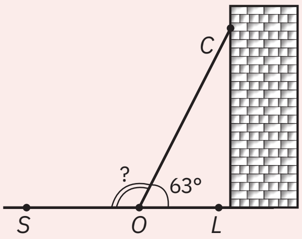


Figura 3

17 Calculând diferența dintre măsura unghiului *ABC* și măsura unghiului *CBD*, din figura 3, obținem măsura unghiului:
a *ADB*; **b** *BDA*; **c** *ABD*; **d** *BAD.*

18 O scară, reprezentată prin segmentul *OC*, se sprijină de un perete, ca în figura alăturată. Știind că scara formează cu linia solului, reprezentată de dreapta *LO*, un unghi *COL*, cu măsura egală cu 63°, calculați măsura unghiului *SOC*.



19 În figura 4, măsura unghiului *ABC* este egală cu 24°, iar măsura unghiului *BCD* este egală cu $4x^\circ$. Știind că cele două unghiuri sunt congruente, valoarea lui x este egală cu:
a 4°; **b** 6°; **c** 8°; **d** 24°.

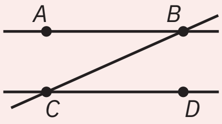


Figura 4

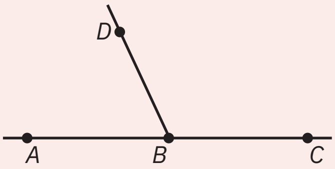


Figura 5

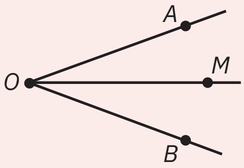
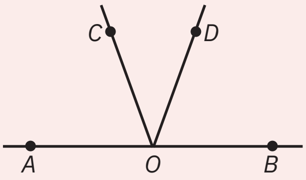


Figura 6

20 În figura 5, *ABC* este unghi alungit, iar măsura unghiului *CBD* este egală cu 115°. Atunci măsura unghiului *ABD* este egală cu:
a 180°; **b** 85°; **c** 75°; **d** 65°.

21 În figura 6, măsura unghiului *AOB* este egală cu 40°, iar măsura unghiului *AOM* este egală cu 20°. Arătați că $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$.

22 Dacă în figura 6, măsura unghiului *AOM* este egală cu 20° și $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$, atunci determinați măsura unghiului *AOB*.



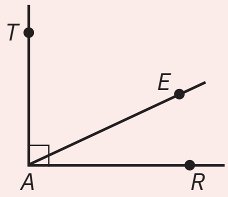
23 În figura alăturată, *AOB* este un unghi alungit, iar *AOC* și *COD* au măsura egală cu 70° și, respectiv, cu 40°. Arătați că $AOC \equiv BOD$.

24 În interiorul unghiului *AOB*, cu măsura egală cu 158°, construiți semidreptele *OD* și *OE*, astfel încât $\sphericalangle AOD = 50°$ și $\sphericalangle EOB = 79°$.
a Determinați măsura unghiului *DOE*. **b** Arătați că $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle BOE$.

25 Desenați un unghi *COL* cu măsura de 140° și un punct T în exteriorul acestuia, astfel încât măsura unghiului *LOT* să fie egală cu două șeptimi din măsura unghiului *COL*. Arătați că punctele *C*, *O*, *T* sunt coliniare.

26 Măsura unghiului *ABC* este 45°. În exteriorul dreptei *AB* desenați un punct *D*, astfel încât măsura unghiului *CBD* să fie egală cu 75% din 60°. Arătați că:
a $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CBD$; **b** *BA* și *BD* sunt perpendiculare.

27 Unghiul *AIL* este alungit, iar *S* este un punct exterior dreptei *AL*, astfel încât măsura unghiului *AIS* este egală cu 120°. În interiorul unghiului *AIS* se ia un punct *B*, astfel încât $BIA \equiv BIS$.
a Determinați măsura unghiului *BIS*. **b** Arătați că $BIS \equiv LIS$.



28 În figura alăturată, unghiul *TAR* este unghi drept. Punctul *E* se află în interiorul unghiului, astfel încât, măsura *TAE* este de două ori mai mare ca măsura unghiului *EAR*. Determinați măsura unghiului *EAR*, respectiv, măsura unghiului *TAE*.

29 În același semiplan determinat de dreapta *RI* se consideră punctele *C* și *N*, astfel încât măsura unghiului *NRI* este egală cu 100°, iar măsura unghiului *CRI* este de 3 ori mai mare decât măsura unghiului *CRN*. Determinați măsurile unghiurilor *CRN* și *CRI*.

Portofoliu

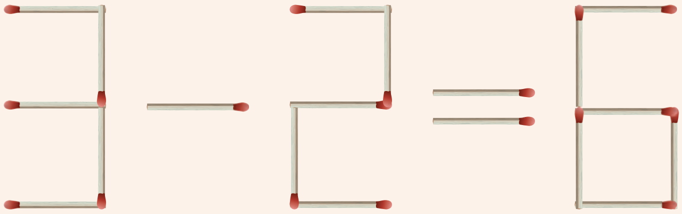
Pe o coală A4, realizați o configurație geometrică ce trebuie să îndeplinească următoarele condiții:
- unghiul *AOD* este alungit și unghiul *AOB* este drept;
- semidreapta *OC* formează cu semidreapta *OB* un unghi cu măsura de 50°.

Studiați configurația realizată și răspundeți la următoarele cerințe:
a Stabiliți dacă în configurație există două semidrepte perpendiculare.
b Determinați măsura unghiului *AOC* și stabiliți dacă este obtuz.
c Determinați măsura unghiului *COD* și stabiliți dacă este ascuțit.
Includeți desenul în portofoliul personal „Geometria este prietena mea”.

Joc

Așezați 19 bețe de chibrit ca în figura de mai jos.

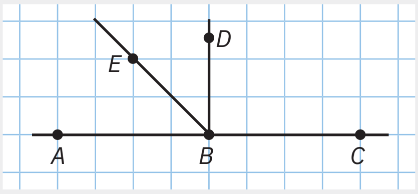
a Câte unghiuri alungite sesizați?
b Câte unghiuri drepte au format chibriturile?
c Mutați un singur chibrit pentru a obține egalitate.
d Din configurația inițială luați două chibrituri pentru a obține egalitate.
e Este posibil să mutați două chibrituri, în configurația inițială, pentru a obține egalitate?



AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 În figura alăturată, *ABC* este unghi alungit, *DBC* este unghi drept, iar unghiurile *ABE* și *DBE* sunt congruente. Măsura unghiului *ABE* este egală cu:
A 45°; **B** 50°; **C** 90°; **D** 180°.



2 Desenează un unghi *BAC* cu măsura de 100°, iar în exteriorul acestuia marchează un punct *I*, astfel încât măsura unghiului *CAI* să fie egală cu 80% din măsura unghiului *BAC*. Atunci unghiul *BAI* este:
A ascuțit; **B** drept; **C** obtuz; **D** alungit.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră unghiul *VAP* cu măsura egală cu 60°. În exteriorul unghiului se ia un punct *O*, astfel încât măsura unghiului *PAO* să fie jumătate din măsura unghiului *VAP*. Apoi se ia un un punctul *R*, astfel încât unghiul *PAR* să fie drept, iar *O* să fie punct interior unghiului *PAR*.
a Arată că unghiul *VAO* este drept.
b Demonstrează că *VAP* ≡ *RAO*.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

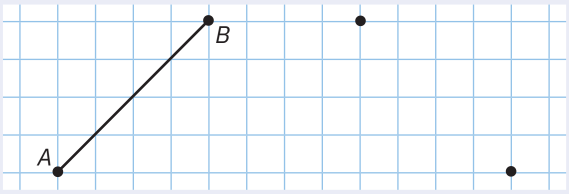
Timp de lucru: 30 de minute

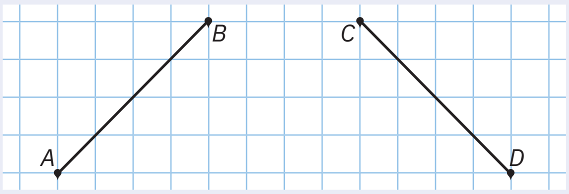
Lecția 8: Figuri congruente. Axa de simetrie

8.1. Figuri congruente

Mate practică

1 Pe o foaie dreptunghiulară, în partea stângă, desenăm un segment de dreaptă, *AB*. Punem două picături fine de acuarelă în A și B. Pliem foaia pe jumătate, apoi presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, după care o desfacem. Notăm cele două puncte obținute în partea dreaptă cu *C* și *D*, apoi trasăm segmentul *CD*.

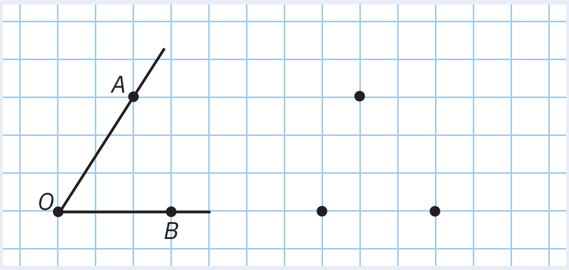


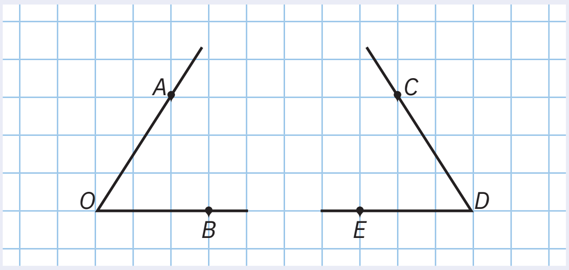


Ce observăm?

Măsurăm cu rigla cele două segmente. Observăm că au aceeași lungime.
Cele două segmente sunt congruente și scriem $AB \equiv CD$.

2 Pe o foaie dreptunghiulară, desenăm în partea stângă un unghi *AOB*. Punem trei picături de acuarelă în *A*, *O* și *B*. Pliem foaia pe jumătate, apoi presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, după care o desfacem. Notăm cele trei puncte obținute în partea dreaptă cu *C*, *D* și *E*, apoi desenăm unghiul *CDE*.





Ce observăm?

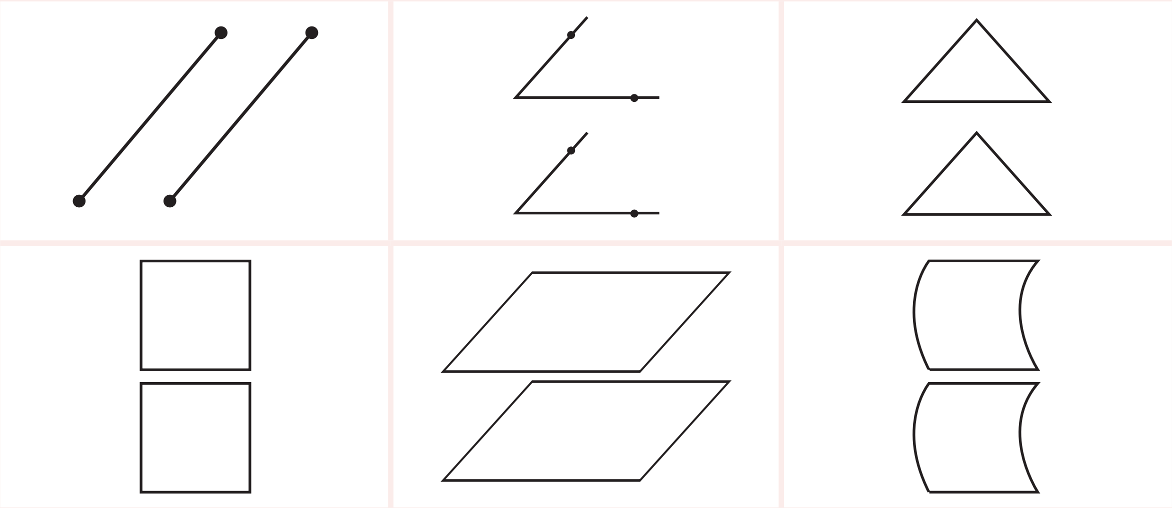
Măsurăm cu raportorul cele două unghiuri. Observăm că au aceeași măsură.
Cele două unghiuri sunt congruente și scriem $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CDE$.

De reținut

În general, despre două figuri geometrice plane se spune că sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid.

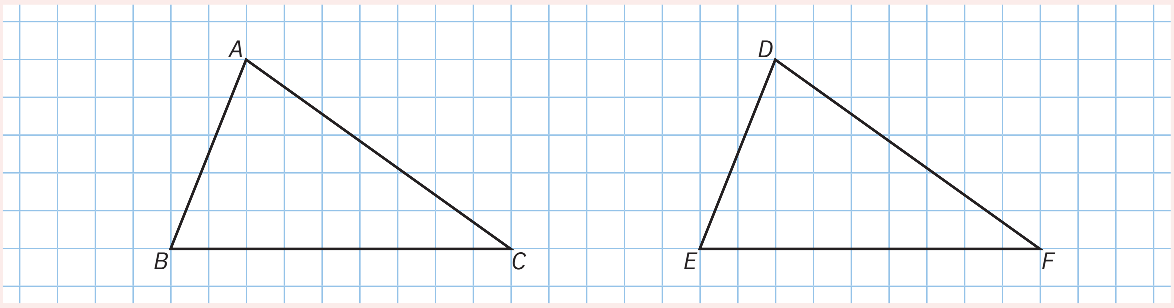
Exemple

Următoarele figuri geometrice, din fiecare pereche, sunt congruente:



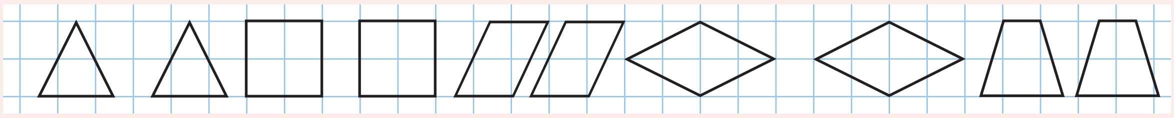
Aplicație practică

Pe un carton sau pe un placaj desenăm un triunghi. Decupăm suprafața triunghiulară obținută, o notăm cu *ABC* și o așezăm pe un alt carton. Cu un creion bine ascuțit, desenăm conturul triunghiului, îl decupăm și-l notăm cu *DEF*. Cele două triunghiuri coincid prin suprapunere și, automat, coincid și elementele lor corespondente.



Astfel, din $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ avem și corespondența laturilor: $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$, $CA \equiv DF$, respectiv corespondența unghiurilor $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$.

Următoarele perechi de poligoane sunt congruente:



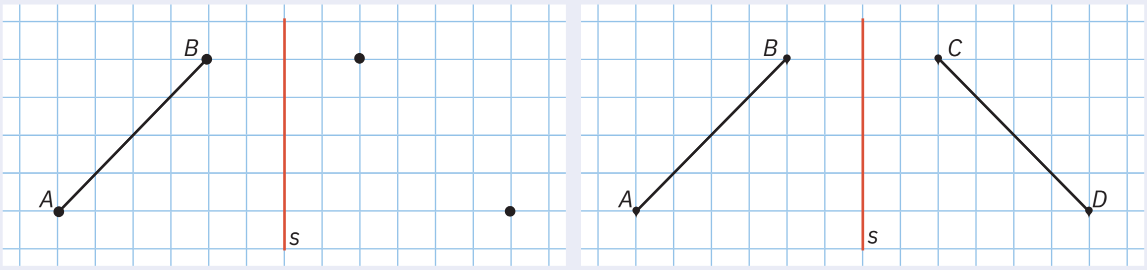
De reținut

Poligoanele congruente au exact aceeași dimensiune și formă. Elementele corespondente a două poligoane congruente sunt congruente.

8.2. Axa de simetrie

Mate practică

1 Pe o foaie dreptunghiulară, desenăm în partea stângă un segment de dreaptă, *AB*. Punem două picături fine de acuarelă în *A* și *B*. Pliem foaia de-a lungul dreptei *s*, presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, apoi o desfacem. Notăm cele două puncte obținute în partea dreaptă cu *C*, respectiv *D* și trasăm segmentul *CD*.



Ce observăm?
Dacă îndoim foaia de-a lungul dreptei *s*, cele două segmente coincid prin suprapunere.
Segmentele *AB* și *CD* sunt congruente.

2 Pe o foaie dreptunghiulară, desenăm în partea stângă un unghi *AOB*. Punem trei picături fine de acuarelă în *A*, *O* și, respectiv *B*. Pliem foaia de-a lungul dreptei *s*, presăm hârtia astfel îndoită, apoi o desfacem. Notăm cele trei puncte obținute în partea dreaptă cu *C*, *D*, respectiv *E* și desenăm unghiul *CDE*.

Ce observăm?
Dacă îndoim foaia de-a lungul dreptei *s*, cele două unghiuri coincid prin suprapunere.
Unghiurile *AOB* și *CDE* sunt congruente.

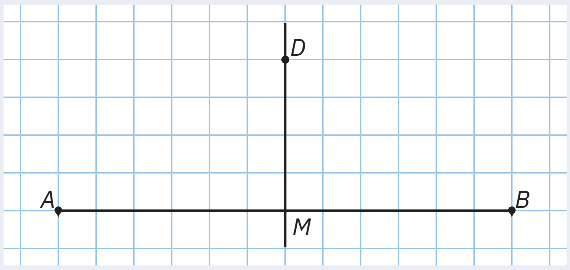
De reținut

Dacă putem îndoi o figură geometrică de-a lungul unei drepte, astfel încât cele două părți formate să coincidă prin suprapunere, spunem că figura geometrică este *simetrică*. Dreapta după care s-a realizat îndoirea se numește *axă de simetrie*.

Mate practică

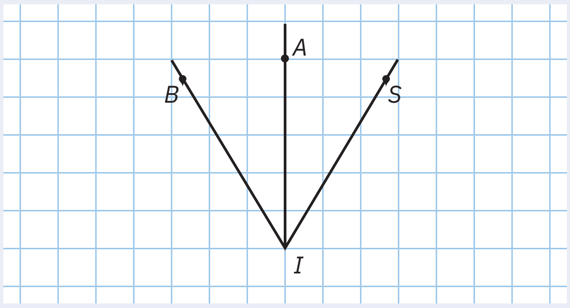
1 Desenăm un segment de dreaptă *AB* și marcăm punctul *M*, mijlocul acestui segment. Construim o dreaptă *DM* perpendiculară pe *AB*. Punem o picătură fină de acuarelă în *A* și pliem foaia de-a lungul dreptei *DM*, presăm cu mâna peste hârtia astfel îndoită și apoi o desfacem.

Ce observăm?
Dreapta *MD* este axa de simetrie a segmentului *AB*.



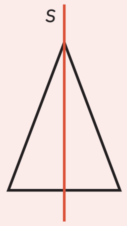
2 Desenăm un unghi *BIA*, punem o picătură fină de acuarelă în *B* și pliem foaia de-a lungul semidreptei *IA*. Presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, apoi o desfacem. Marcăm punctul *S* în urma lăsată de acuarelă și trasăm semidreapta *IS*.

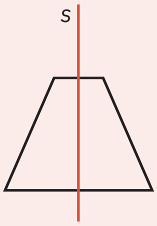
Ce observăm?
Dreapta *IA* este axa de simetrie a unghiului *BIS*.

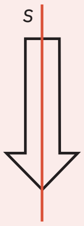


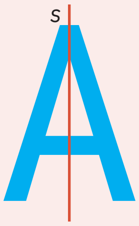
Exemple

Unele figuri admit axă de simetrie verticală:

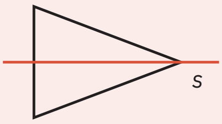


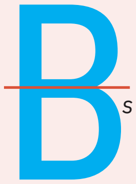


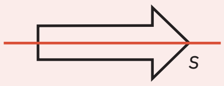




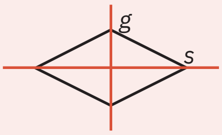
Alte figuri admit axă de simetrie orizontală:

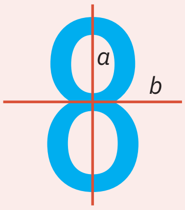


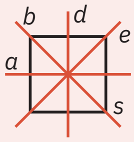


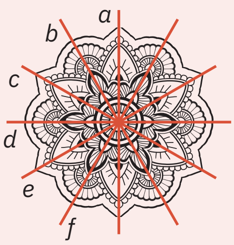


Există și figuri care admit mai multe axe de simetrie:



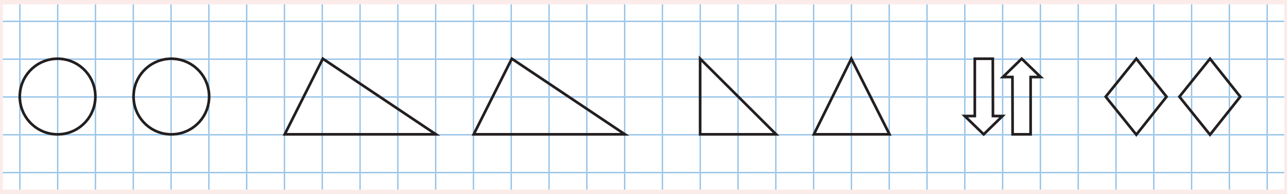






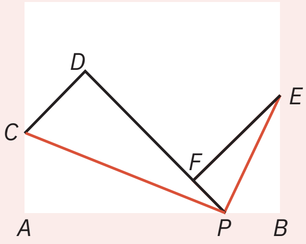
Probleme propuse

1 Desenați pe o foaie următoarele figuri de mai jos:



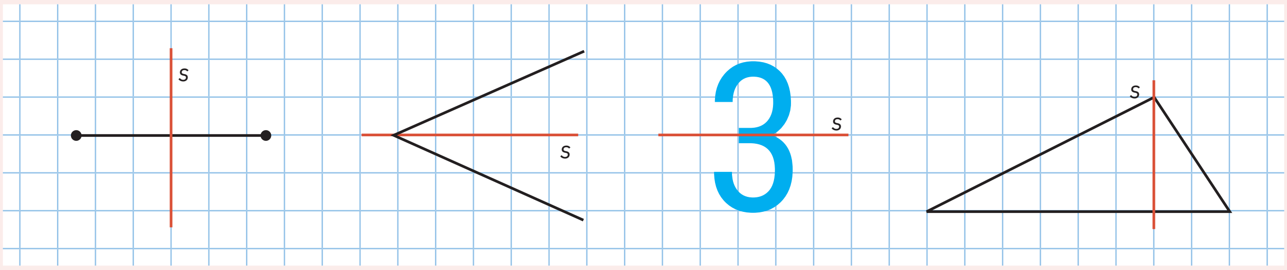
Decupați-le și, prin suprapunere, stabiliți perechile de figuri congruente.

2 Luați o foaie de hârtie dreptunghiulară și notați lungimea cu *AB*.
Îndoiți colțul hârtiei care conține punctul *A* și trasați conturul colțului îndoit. Notați cu *D* punctul care îi corespunde punctului *A* pe foaie și apoi desfaceți colțul.
Notați dreapta rezultată prin presare cu *PC*. Procedăm la fel cu colțul din dreapta hârtiei, astfel încât corespondentul punctului *B* să fie un punct *F*, interior segmentului *DP*.
Notăm cu *E* celălalt capăt al dungii imprimate prin presare.



a Triunghiul *ACP* s-a suprapus peste triunghiul *DCP* și atunci Δ*ACP* ≡ Δ... .
b Triunghiul *EBP* s-a suprapus peste triunghiul ... și atunci Δ... ≡ Δ*EFP*.
c Stabiliți prin măsurare cu raportorul dacă ∢*A* ≡ ∢*B* ≡ ∢*CPE*.

3 Desenați următoarele figuri de mai jos:



Decupați-le și, prin suprapunere, stabiliți, în fiecare caz, dacă dreapta *s* este axă de simetrie.

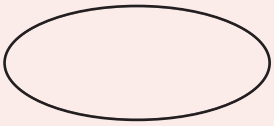
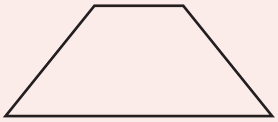
4 Construiți pe o hârtie un unghi *xOy* cu măsura egală cu 60°, iar pe laturile *Ox*, *Oy* marcați punctele *A* și *B*, astfel încât *OA* = *OB* = 6 cm. Puneți în evidență segmentul *AB*. Decupați triunghiul *AOB* obținut.
a Îndoiți triunghiul *AOB*, astfel încât *A* să se suprapună peste *B*, presați, desfaceți hârtia și notați cu *M* punctul unde dunga imprimată întâlnește segmentul *AB*. Datorită suprapunerii efectuate, putem afirma că:
- Punctul *M* este ... segmentului *AB* și *AM* ≡ ... .
- *OM* este axa de simetrie a unghiului ... și ∢*AOM* ≡ ∢... .

b Îndoiți triunghiul *AOB*, astfel încât *A* să se suprapună peste *O*, presați, desfaceți hârtia și notați cu *T* punctul în care dunga imprimată întâlnește segmentul *AO*. Datorită suprapunerii efectuate, putem afirma că:
- Punctul *T* este mijlocul segmentului ... și *AT* ≡ ... .
- *BT* este ... a unghiului *ABO* și ∢... ≡ ∢... .

c Creați singuri o sarcină suplimentară și scrieți cel puțin 4 afirmații.

5 Trasați axele de simetrie ale următoarelor figuri geometrice:



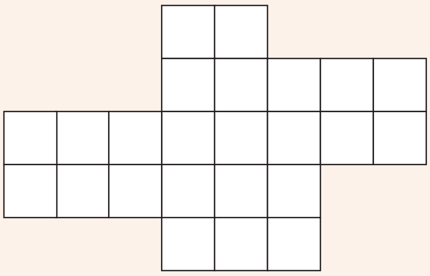



6 Folosind, eventual, desenele din această lecție, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
- **a** Un segment are o singură axă de simetrie.
- **b** Un unghi are o singură axă de simetrie.
- **c** Cifra 8 admite două axe de simetrie.
- **d** Litera H admite două axe de simetrie.
- **e** Dreptunghiul admite două axe de simetrie.
- **f** Pătratul admite patru axe de simetrie.

7 Scrieți literele *A*, *D*, *E*, *F*, *M*, *T*, *V*, *W*, *O* și precizați care dintre ele au axă de simetrie.

Joc

Împărțiți figura alăturată în patru părți congruente construind doar trei segmente.



AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 În figura 1, prin îndoire de-a lungul dreptei *DB*, punctul *A* se suprapune peste punctul *C*. Atunci axa de simetrie a segmentului *AC* este dreapta:

A *AC*; **B** *AD*; **C** *BD*; **D** *CD*.

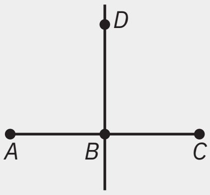


Figura 1

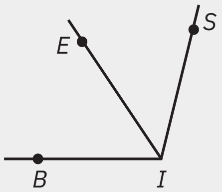


Figura 2

2 În figura 2, prin îndoire de-a lungul dreptei *IE*, punctul *B* se suprapune peste punctul *S*. Atunci unghiul *BIE* este congruent cu unghiul:

A ∢*IES*; **B** ∢*SIE*; **C** ∢*ISE*; **D** ∢*BIS*.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 **a** Scrie cifra zero și trasează o axă de simetrie.
b Trasează axele de simetrie ale altor cifre din sistemul zecimal.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 9: Unități de măsură pentru lungime. Perimetrul

9.1. Multiplii și submultiplii metrului

Mate practică

Împărțiți în trei grupe, elevii clasei a V-a au primit următoarele sarcini de lucru: echipa coordonată de Horia trebuia să compună o problemă care să aibă ca rezultat lungimea etapei Sibiu—Transfăgărășan—Bâlea Lac din cadrul Turului Ciclist al României. Grupa coordonată de Radu trebuia să calculeze lungimea unui traseu turistic egală cu 40% din 195 hm. Grupa coordonată de Ioana trebuia să afle lungimea unui stilou, știind că 40% din lungimea acestuia este egală cu 31,2 mm.
Ce rezultat au obținut elevii fiecărei grupe?
Răspuns: 78.

Rezolvare:
- Lungimea etapei Sibiu—Transfăgărășan—Bâlea Lac din cadrul Turului Ciclist al României este de 78 km.
- 40% din $195 \text{ hm} = \frac{40}{100} \cdot 195 \text{ hm} = \frac{2}{5} \cdot 195 \text{ hm} = 78 \text{ hm}$.
- Dacă s este lungimea stiloului, atunci: 40% din $s = 31{,}2$ mm, adică $\frac{40}{100} \cdot s = 31{,}2$ mm.

$$s = 31{,}2 \text{ mm} : \frac{40}{100} = 31{,}2 \text{ mm} : \frac{2}{5} = 31{,}2 \text{ mm} \cdot \frac{5}{2} = 78 \text{ mm}.$$

Ce observăm?
Deși pare că cele trei răspunsuri sunt identice, cele trei răspunsuri exprimate corect sunt: 78 km, 78 hm, respectiv 78 mm sunt diferite și scot în evidență faptul că pentru măsurarea adecvată a diverselor lungimi a fost necesară introducerea multiplilor și submultiplilor metrului.

De reținut

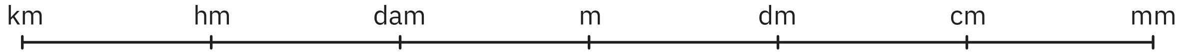
Multiplii metrului	Submultiplii metrului
decametrul (notat dam); hectometrul (notat hm); kilometrul (notat km);	decimetrul (notat dm); centimetrul (notat cm); milimetrul (notat mm).

Știați că...

Pentru estimarea unor lungimi s-au utilizat de-a lungul timpului unități precum: pasul, palma, cotul, stânjenul, prăjina, leghea etc. Pentru a rezolva inconvenientele create de utilizarea diverselor etaloane de măsură pentru lungimi, în data de 20 mai 1875, s-a încheiat la Paris *Convenția metrului*. Astfel, pentru ca măsurarea unei mărimi să nu aibă rezultate diferite, oamenii au stabilit un sistem de unități de măsură valabil în aproape toate țările lumii. Metrul etalon, cu mărimea acceptată oficial ca unitate de bază într-un sistem de măsurare, se află la Paris.

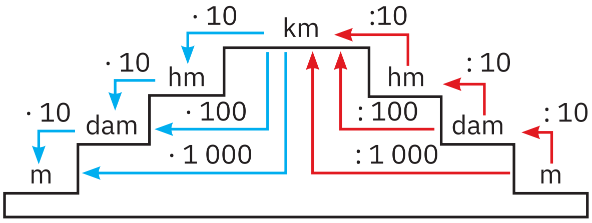
9.2. Transformarea unităților de măsură

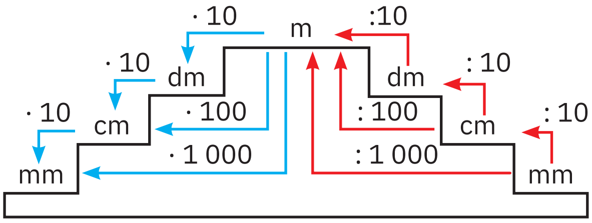
Pentru a transforma o unitate de măsură în alta folosim următoarea schemă:



- Unitățile de măsură mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu 10^n.
- Unitățile de măsură mici se transformă în unități mari prin împărțire cu 10^n, unde n este numărul segmentelor dintre cele două unități.

Utilă este și următoarea scară a multiplilor, respectiv a submultiplilor metrului:





Exemple

1 8,53 dam = 8,53 · 10 m = 85,3 m;

2 1,2 hm = 1,2 · 100 m = 120 m;

3 3,5 km = 3,5 · 1 000 m = 3 500 m;

4 0,75 dam = 0,75 · 1 000 cm = 750 cm;

5 8,53 m = (8,53 : 10) dam = 0,853 dam;

6 1,6 dm = (1,6 : 100) dam = 0,016 dam;

7 3,5 m = (3,5 : 1 000) km = 0,0035 km;

8 7 dm = (7 : 1 000) hm = 0,007 hm.

9.3. Perimetrul

De reținut

Perimetrul unei figuri geometrice mărginite de segmente de dreaptă este egal cu suma lungimilor acestor segmente. Se notează cu *P*.

1. Perimetrul unui pătrat cu lungimea laturilor egală cu *l* este $P = 4\,l$.
2. Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea laturilor egală cu *L* (pentru lungime) și *l* (pentru lățime) este $P = 2 \cdot (L + l)$.
3. Dacă lungimile laturilor unui triunghi sunt *a*, *b*, *c*, atunci perimetrul său este $P = a + b + c$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Radu pleacă de acasă în excursie pe Vârful Cozia și merge cu mașina 295 hm, cu bicicleta 9,6 km, iar ultimii 370 dam îi parcurge pe jos. Care este distanța dintre casa lui Radu și Vârful Cozia?

Rezolvare:
Distanța este egală cu 295 hm + 9,6 km + 370 dam = 29,5 km + 9,6 km + 3,7 km = 42,8 km.

2 Un teren de formă triunghiulară are perimetrul egal cu 210 m, iar două laturi ale triunghiului au aceeași lungime. Știind că una din laturi are lungimea egală cu 60 m, să se afle lungimile celorlalte două laturi.

Rezolvare:
Notăm cu *a* și *b* lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului.
Perimetrul său este $P = a + b + 60\text{ m} = 210\text{ m}$.
Distingem două cazuri:

- Dacă $a = 60$ m, atunci $b = P - 60\text{ m} - 60\text{ m} = 210\text{ m} - 120\text{ m} = 90$ m.
- Dacă $a = b \neq 60$ m, atunci $a = b = (P - 60\text{ m}) : 2 = (210\text{ m} - 60\text{ m}) : 2 = 150\text{ m} : 2 = 75$ m.

3 O grădină are forma unui dreptunghi cu lungimea egală cu 48 m, iar lățimea egală cu 0,75 din lungime. Cât costă gardul necesar împrejmuirii grădinii, dacă un metru liniar de gard costă 20 de lei?

Rezolvare:

$$l = 0{,}75 \text{ din } 48\text{ m} = \frac{75}{100} \cdot 48\text{ m} = \frac{3}{4} \cdot 48\text{ m} = 3 \cdot 12\text{ m} = 36\text{ m}$$

$P = 2 \cdot (L + l) = 2 \cdot (48\text{ m} + 36\text{ m}) = 2 \cdot 84\text{ m} = 168$ m.
Gardul costă 20 lei · 168 = 3 360 lei.

Probleme propuse

1 Comparați:
a 85 dam cu 85 dm;
b 24 cm cu 240 mm;
c 72 km cu 7 200 dam;
d 6,8 km cu 601 dam;
e 3,4 dm cu 333 mm;
f 0,764 dam cu 7 630 mm.

2 Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
a 78,9 dam = 0,789 hm;
b 2 500 cm = 25 m;
c 867 mm = 86,7 cm;
d 438 dam = 4,4 km;
e 0,54 m = 539 mm;
f 0,47 dm = 47,5 mm.

3 Transformați în metri:
a 0,75 dam;
b 4, 58 hm;
c 0,2465 km;
d 23,5 hm;
e 8,25 km.

4 Transformați în decimetri:
a 6,25 m;
b 2, 36 dam;
c 24,506 hm;
d 0,175 km;
e 0,036 dam;
f 4,75 cm;
g 45, 5 mm;
h 3,2 mm;
i 23,5 cm;
j 6 mm.

5 Transformați în decametri:
a 3,25 km;
b 0,85 hm;
c 0,068 km;
d 13,2 km;
e 0,06 hm;
f 82,7 m;
g 405 dm;
h 200 mm;
i 4,5 cm;
j 8 dm.

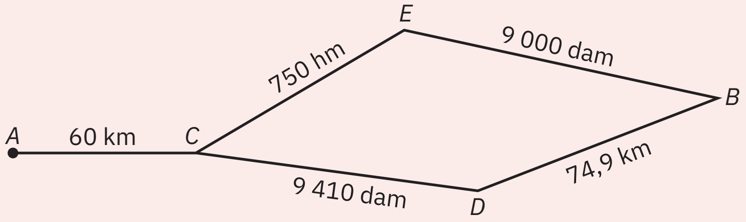
6 Calculați:
a 87 m + 2,8 dam + 88 dm = ? dm;
b 87 cm + 103 mm – 2 dm = ? cm;
c 654 hm – 3 km + 24 m = ? dam;
d 0,87 dam – 2,5 m + 186 dm = ? m;
e 0,82 km + 170 dam – 45 m = ? hm;
f 5,6 hm + 240 dam – 150 m = ? km.

7 Calculați:
a 3 · 1,4 cm + 5 · 0,36 cm = ? cm;
b 8 · 153 dm – 280 000 mm : 100 = ? m;
c 1,2 km : 4 – 0,3(54) dam · 11 = ? hm;
d 8 500 mm + 8,75 cm – 0,007 dam = ? dm;
e 106 dam · 4 – 18 hm : 6 = ? km;
f 4 · 103 dm – 18 hm : 10^2 = ? dam.

8 Indicați unitățile de măsură adecvate pentru a măsura:
a lungimea unui creion;
b lungimea sălii de clasă;
c distanța dintre două orașe;
d grosimea unui geam;
e lungimea unui ac;
f lungimea Dunării.

9 Estimați următoarele lungimi, apoi verificați prin măsurare și calculați eroarea făcută:
a lungimea unui creion;
b lungimea sălii de clasă;
c lățimea cărții de matematică.

10 O mașină pleacă din orașul *A* să aducă marfă din orașul *B*. Distanțele dintre localități sunt indicate în figura de mai jos:



Ce itinerar trebuie ales pentru a optimiza cheltuielile necesare pentru motorină?

11 Copiați tabelul de mai jos în caiete, calculați și completați:

Lungimea laturii pătratului	4,3 m		24,5 cm	
Perimetrul pătratului		6,8 km		666 dam

12 Calculați perimetrul unui triunghi *ABC*, în care *AB* = 24 cm, *AC* = 100 mm și *BC* = 2,6 dm.

13 Latura unui pătrat are lungimea cuprinsă între 300 cm și 0,32 dam. Determinați numerele *x* și *y*, știind că perimetrul acestui pătrat este cuprins între *x* metri și *y* metri?

14 Copiați tabelul de mai jos în caiete, calculați și completați:

Perimetrul dreptunghiului		182 hm		456 cm	
Lungimea	67 m	6,3 km	8,5 m		855 m
Lățimea	338 dm		680 mm	186 mm	855 dm

15 Horia, Radu și Ioana au măsurat lungimea unei cărți și au obținut valorile: 26,8 cm, 277 mm și 2,72 dm. Transformați în aceeași unitate de măsură și stabiliți cine a măsurat corect, știind că lungimea cărții era egală cu 20% din 1,36 m.

16 Perimetrul unui triunghi este de 354 cm. Calculați lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea sunt numere pare consecutive, exprimate în centimetri.

17 Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 48 m. Determinați lungimea și lățimea dreptunghiului, știind că lungimea este de trei ori mai mare decât lățimea.

18 Un dreptunghi are lungimea egală cu 700 m, iar lățimea egală cu trei sferturi din lungime. Perimetrul unui pătrat reprezintă 50% din perimetrul acestui dreptunghi. Ce lungime are latura pătratului?

19 Dacă mărim lungimea unui dreptunghi cu 2 cm și lățimea cu 3 cm, obținem un pătrat cu perimetrul de 49 cm. Calculați perimetrul dreptunghiului.

Proiect

a Măsurați și calculați perimetrul curții casei voastre.

b Realizați planul curții școlii, astfel încât 1 cm pe desen reprezintă 10 m pe teren.

Introduceți desenul în portofoliul personal, „Geometria este prietena mea”.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Perimetrul unui pătrat este egal cu 82,4 m. Lungimea laturii pătratului este egală cu:
A 4,6 m; **B** 20,4 m; **C** 20,6 m; **D** 21,6 m.

2 O grădină are forma unui dreptunghi cu lungimea de 648 hm, iar lățimea egală cu 75% din lungime. Lungimea gardului ce înconjoară grădina este egală cu:
A 1 124 hm; **B** 1 134 hm; **C** 2 248 hm; **D** 2 268 hm.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Perimetrul unui triunghi este de 549 m.
- **a** Dacă laturile triunghiului ar fi congruente, arată că lungimea unei laturi este mai mare decât 1 820 dm.
- **b** Calculează lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea reprezintă numere naturale consecutive, exprimate în metri.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
Timp de lucru: 30 de minute	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

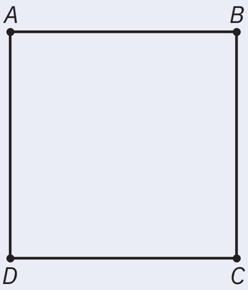
Lecția 10: Unități de măsură pentru arie. Aplicații: aria pătratului/dreptunghiului

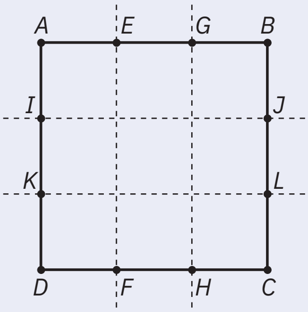
10.1. Unități de măsură pentru arie

Mate practică

Ioana are mai multe pătrate colorate cu latura de 1 cm pe care le lipește, unul lângă altul, peste pătratul cu latura de 3 cm, din figura alăturată. De câte pătrate colorate are nevoie Ioana pentru a acoperi tot pătratul cu latura de 3 cm?

Răspuns: Ioana împarte fiecare latură a pătratului în trei segmente de lungime 1 cm și realizează desenul de mai jos:





Ioana observă că pentru a acoperi tot pătratul de latură 3 cm are nevoie de 9 pătrate cu latura de 1 cm.

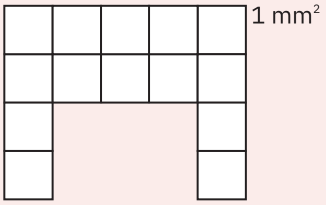
De reținut

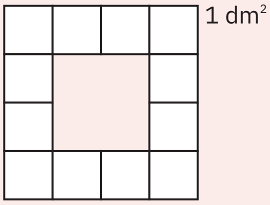
Aria unei figuri geometrice este o măsură a întinderii figurii geometrice. Unitatea principală de măsură pentru aria suprafețelor este metrul pătrat, notat m². Un m² reprezintă aria suprafeței unui pătrat cu latura de 1 m (1 cm² reprezintă aria suprafeței unui pătrat cu latura de 1 cm etc.). Pentru ușurința exprimării, în loc de aria suprafeței pătratului, vom utiliza aria pătratului.

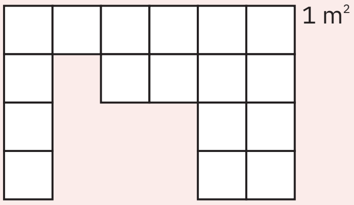
Exemple

1 În cazul Ioanei, aria pătratului cu latura de 3 cm este egală cu 9 cm².

2 Determinați ariile următoarelor figuri geometrice:



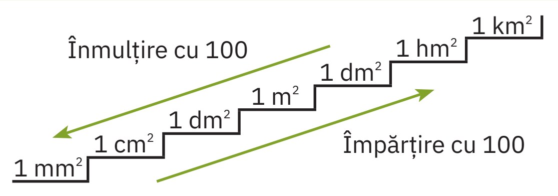




Prima figură geometrică este formată din 14 pătrate, deci aria sa este 14 mm².
A doua figură geometrică este formată din 12 pătrate, deci aria sa este 12 dm².
A treia figură geometrică este formată din 17 pătrate, deci aria sa este 17 m².

10.2. Multiplii și submultiplii metrului pătrat. Transformări

De reținut



Multiplii metrului pătrat sunt unități de măsură utilizate, în general, pentru a măsura aria unor suprafețe mai mari de 1 m²:

- decametrul pătrat, notat dam²
- hectometrul pătrat, notat hm²
- kilometrul pătrat, notat km²

Submultiplii metrului pătrat sunt unități de măsură utilizate, în general, pentru a măsura aria unor suprafețe mai mici decât 1 m²:

- decimetrul pătrat, notat dm²
- centimetrul pătrat, notat cm²
- milimetrul pătrat, notat mm²

Pentru a transforma o unitate de măsură într-o altă unitate de măsură, imediat superioară, împărțim la 100, iar pentru transfomarea într-o unitate de măsură imediat inferioară, înmulțim cu 100.

Observații

Pentru exprimarea suprafeței unui teren se mai folosesc ca unități de măsură:
- arul: 1 ar = 1 dam^2;
- hectarul: 1 ha = 1 hm^2.

Exemple

1 3,4 km^2 = 3,4 · 100 hm^2 = 340 hm^2 = 340 · 100 dam^2 = 34 000 dam^2;

2 125 cm^2 = (125 : 100) dm^2 = 12,5 dm^2 = (12,5 : 100) m^2 = 0,125 m^2;

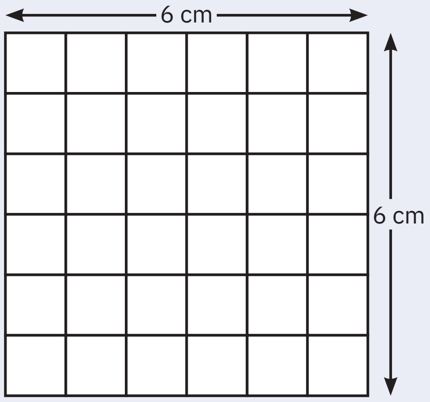
3 0,78 ha = 0,78 hm^2 = 0,78 · 100 dam^2 = 78 ari.

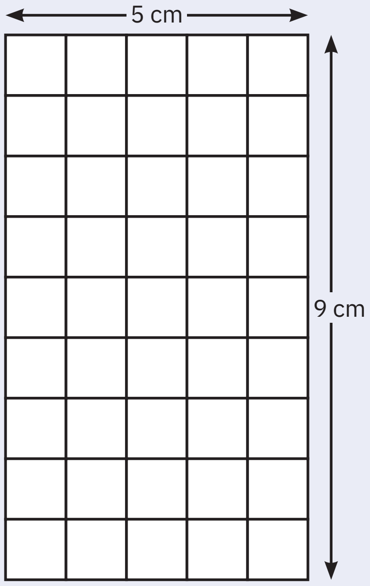
10.3. Aplicații: aria pătratului/dreptunghiului

Mate practică

Ioana dorește să calculeze aria unui pătrat cu latura de 6 cm.

Adi vrea să calculeze aria unui dreptunghi cu lungimea de 9 cm și lățimea de 5 cm.





Răspuns:

Ioana observă că pe fiecare linie sunt câte 6 pătrate cu aria de 1 cm^2, iar pe fiecare coloană sunt pătrate cu aria de 1 cm^2. Suprafața pătratului este acoperită complet de 6 · 6 = 36 de pătrate cu aria de 1 cm^2. În concluzie, aria pătratului este egală cu 36 cm^2.

Horia observă ca pe fiecare linie sunt câte 5 pătrate cu aria de 1 cm^2, iar pe fiecare coloană sunt 9 pătrate cu aria de 1 cm^2. Suprafața dreptunghiului este acoperită complet de 9 · 5 = 45 de pătrate cu aria de 1 cm^2. Deci aria dreptunghiului este egală cu 45 cm^2.

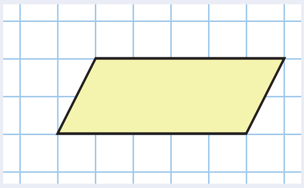
De reținut

Aria unui pătrat cu lungimea laturii *l* este egală cu $l \cdot l = l^2$.

Aria unui dreptunghi cu lungimea *L* și lățimea *l* este egală cu $L \cdot l$.

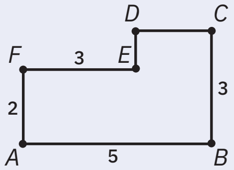
1 Dreptunghi			**2 Pătrat**	
Lungime = *L*	Lățime = *l*	Aria = $L \cdot l$	Latura = *l*	Aria = l^2
1,2 cm	0,6 cm	$A = (1{,}2 \cdot 0{,}6)$ cm^2 = 0,72 cm^2	2,5 cm	$A = (2{,}5$ cm$)^2 = 6{,}25$ cm^2
$\frac{5}{2}$ dm	$\frac{10}{9}$ dm	$A = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{9}\right)$ dm^2 = $\frac{25}{9}$ dm^2	0,12 dam	$A = (0{,}12$ dam$)^2 = 0{,}0144$ dam^2
0,4 hm	0,04 hm	$A = (0{,}4 \cdot 0{,}04)$ hm^2 = 0,016 hm^2	$\frac{7}{3}$ m	$A = \left(\frac{7}{3}\text{ m}\right)^2 = \frac{49}{9}$ m^2

Probleme rezolvate: strategii și metode



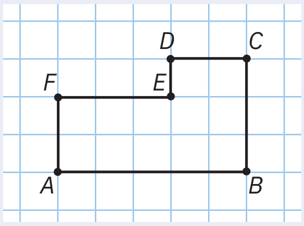
1 În desenul alăturat, aria unui pătrat mic este egală cu 1 dm^2. Determinați aria suprafeței paralelogramului colorat.

Rezolvare:
Paralelogramul este format din 8 pătrate întregi și din două triunghiuri care coincid prin suprapunere (diferă doar poziția lor pe desen). Cele două triunghiuri formează un dreptunghi care acoperă două pătrate din desen. În concluzie, aria paralelogramului este egală cu aria a 10 pătrate, adică 10 dm^2.

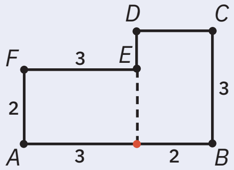


2 Podeaua unei bucătării are forma din figura alăturată. Dimensiunile precizate de figură sunt exprimate în metri. Precizați trei moduri practice de a determina aria podelei bucătăriei.

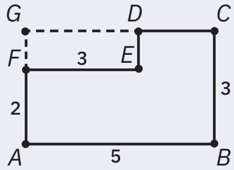
Rezolvare:



a Realizând un caroiaj pe figura dată, obținem figura alăturată.
Suprafața podelei bucătăriei este formată din 12 pătrate cu latura de 1 m, deci aria suprafeței este egală cu 12 m^2.



b Prelungim segmentul *DE* până când intersectează latura *AB* și obținem figura alăturată. Aria podelei este egală cu suma ariilor celor două dreptunghiuri, *AGEF* și *GBCD*.
Aria podelei este egală cu 3 m · 2 m + 3 m · 2 m = 12 m^2.



c Dreptele *DC* și *AF* se intersectează în punctul *G* și obținem figura alăturată. Aria podelei este egală cu diferența dintre aria dreptunghiului *ABCG* și aria dreptunghiului *FEDG*.
Aria podelei este egală cu 5 m · 3 m – 3 m · 1 m = 12 m^2.

3 Calculați aria unui dreptunghi cu lungimea de 12,3 dm și lățimea de 115 cm.

Rezolvare:
Pentru a putea calcula aria dreptunghiului, este necesar ca dimensiunile sale să fie exprimate prin aceeași unitate de măsură. Vom utiliza decimetrul. Pentru aceasta, observăm că lățimea dreptunghiului este egală cu 115 cm = 11,5 dm. În concluzie, obținem aria dreptunghiului egală cu 12,3 dm · 11,5 dm = 141,45 dm^2.

Probleme propuse

1 Calculați aria unui pătrat cu latura de lungime:
a 3 cm; **b** 12 m; **c** 2,5 dam; **d** 0,3 km;
e 120 mm; **f** 0,01 hm; **g** 7,5 cm; **h** 4,5 dm.

2 Calculați aria unui dreptunghi ce are dimensiunile:
a *L* = 0,5 dam, *l* = 3,2 m; **b** *L* = 10,1 cm, *l* = 50 mm;
c *L* = 35 dm, *l* = 200 cm; **d** *L* = 2,7 dam, *l* = 210 dm.

3 Desenați un dreptunghi cu lungimea de 6 cm și lățimea de 5 cm. Calculați perimetrul și aria dreptunghiului.

4 Transformați în metri pătrați:
a 0,072 dam^2; **b** 3,9 ha; **c** 25 ari;
d 67 000 cm^2; **e** 0,0003 km^2; **f** 7 200 000 mm^2.

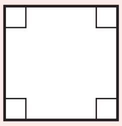
5 Transformați în unitatea de măsură indicată:
a 15,28 dm^2 în cm^2;
b 8,2 dam^2 în dm^2;
c 700 000 cm^2 în dam^2;
d 147 000 m^2 în km^2;
e 0,025 km^2 în ari;
f 10 000 000 cm^2 în ha.

6 Precizați ce unitate de măsură este adecvată pentru exprimarea ariei:
a unei coli de hârtie;
b podelei unui dormitor;
c unei țări.

7 Utilizând o riglă gradată și, alegând o unitate de măsură adecvată, determinați ariile figurilor geometrice din desenul de mai jos.

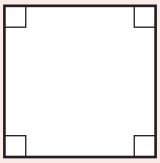
a

b



c

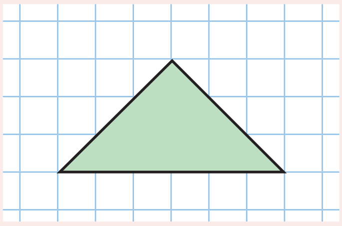
d



8 Comparați:
a 36 cm^2 cu 123 mm^2;
b 22 dam^2 cu 1 ha;
c 72 ari cu 0,072 km^2;
d 74 m^2 cu 7,4 hm^2;
e 0,05 dam^2 cu 500 dm^2;
f 3,5 m^2 cu 3,49 dm^2.

9 Curtea unei școli, care are formă de dreptunghi cu lungimea de 47 m și lățimea de 21 m, se pavează cu plăci de beton în formă de pătrat cu latura de 50 cm.
Determinați numărul plăcilor de beton necesare pavării curții.

10 O combină treieră într-o zi grâul de pe o suprafață de 1,5 ha. În câte zile va treiera grâul de pe o tarla în formă de pătrat cu latura de 300 m?



11 În desenul alăturat, aria unui pătrat este egală cu 1 cm^2. Determinați aria triunghiului colorat cu albastru.

12 O curte cu aria de 36 de ari este pavată cu 7 200 de dale. Determinați aria suprafeței unei dale.

13 Pentru a placa un perete, se folosesc plăci de mozaic cu aria de 200 cm^2 fiecare. Plăcile se așază pe 30 de rânduri a câte 24 de plăci. Determinați aria peretelui și exprimați-o în m^2.

14 Curtea casei lui Radu are forma unui pătrat cu latura de 0,6 dam. Într-o zi, a plouat atât de intens, încât pe fiecare metru pătrat de teren a căzut o cantitate de apă egală cu 75 de litri. Ce cantitate de apă, exprimată în kilolitri, a căzut în acea zi în curtea casei?

15 O grădină are formă de pătrat cu lungimea laturii egală cu 75% din 160 m.
a Ce lungime are gardul ce înconjoară grădina, știind că există o poartă cu lungimea de 3 m?
b Determinați aria grădinii și exprimați-o în hectare.

16 Un teren cultivat cu căpșuni are formă de dreptunghi cu lungimea de 90 dam, iar lățimea egală cu 60% din lungime. Dacă de pe fiecare metru pătrat s-au recoltat 200 de grame de căpșuni, iar toată cantitatea culeasă a fost valorificată cu 7 lei pe kilogram, determinați ce sumă s-a încasat.

17 Eva le povestește prietenilor: *În fața casei bunicilor este o grădină. Acum două luni, în primăvară, bunicul a adus doi pari scurți, ascuțiți doar la un capăt și i-a legat cu o sfoară lungă de 10 m. A înfipt bine un par în pământ, iar cu vârful ascuțit al celuilalt a trasat un cerc. A efectuat această operație de trei ori. Bunica a plantat flori din răsad sau a pus semințe în pământul din ronduri, iar în restul suprafeței a semănat gazon. Acum sunt trei ronduri de flori ce-ți încântă privirea.*

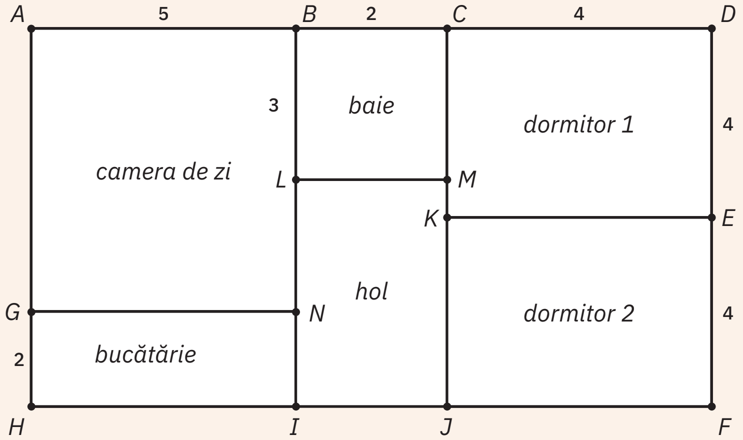
Răspundeți la cerințele de mai jos, știind că toată grădina de flori are forma unui dreptunghi cu lungimea de 70 m și lățimea de 25 m.

a Determinați aria și perimetrul grădinii.

b Știind că aria fiecărui rond este cuprinsă între 314 m^2 și 315 m^2, calculați între ce limite este cuprinsă aria suprafeței gazonului.

Activitate pe grupe

În figura de mai jos, Horia a realizat schematic planul casei sale. Utilizând dimensiunile din schemă, exprimate în metri, calculați:



a Aria suprafeței celor două dormitoare.

b Aria suprafeței holului.

c Comparați aria suprafeței celor două dormitoare cu aria suprafeței camerei de zi.

d Realizați schematic planul casei, apoi răspundeți la cerințele **a**, **b** și **c** ținând cont de noile dimensiuni.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Un dreptunghi are lungimea de 4,3 dm și lățimea de 3,4 dm. Aria acestuia este egală cu:

A 1,462 dm^2; **B** 14,62 dm^2; **C** 146,2 dm^2; **D** 1 462 dm^2.

2 Numărul plăcilor de gresie, având formă de pătrat cu latura de 20 cm, necesare pentru a placa podeaua unei băi în formă de pătrat cu latura de 3 m, este egal cu:

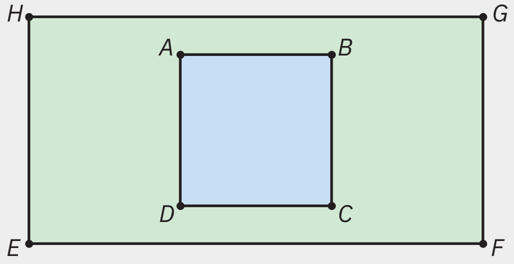
A 15; **B** 25; **C** 125; **D** 225.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 În figura alăturată este reprezentat schematic un parc *EFGH* în formă de dreptunghi, care are în centru un lac în formă de pătrat *ABCD*. De jur împrejurul lacului, parcul este acoperit cu gazon. Dacă $AB = 10$ m, $EF = 50$ m și $FG = 30$ m, atunci calculează:

a perimetrul parcului;

b aria suprafeței acoperite cu gazon.



Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 11: Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

11.1. Unități de măsură pentru volum

Situație problemă

Clara a pregătit pentru întâlnirea cu prietenele un aranjament din cuburi de zahăr ca în imaginea alăturată.
Dacă știm că fiecare cub are muchia de 1 cm, ce dimensiuni ar trebui să aibă cutia în care ar trebui puse?

Rezolvare:
Din imagine, observăm că aranjamentul are forma unui paralelipiped cu $L = 4$ cuburi, $l = 4$ cuburi și $h = 5$ cuburi. Dacă muchia unui cub este de 1 cm, atunci dimensiunile cutiei ar trebui să fie: $l = L = 4$ cm, iar $h = 5$ cm.

Ce observăm?
Având în vedere că un cub are muchia de 1 cm, spunem că volumul său este egal cu 1 cm · 1 cm · 1 cm = 1 cm^3 (citim *un centimetru cub*).

Metrul cub

De reținut

Orice corp ocupă un loc în spațiu numit *volum*.

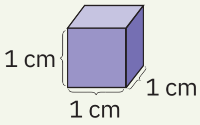
Unitatea principală de măsură pentru volumul corpurilor este metrul cub, notat m^3.

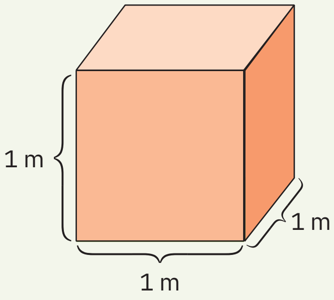
1 m^3 reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 m.

Exemple

1 Cubul mov are muchiile egale cu 1 cm.
El are volumul 1 cm^3.

2 Cubul portocaliu are muchiile de 1 m.
El are volumul 1 m^3.





Multiplii și submultiplii metrului cub

De reținut

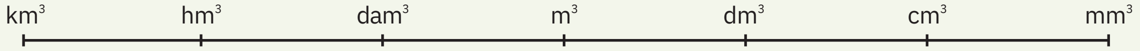
Multiplii metrului cub	Submultiplii metrului cub
• decametrul cub (notat dam^3);	• decimetrul cub (notat dm^3);
• hectometrul cub (notat hm^3);	• centimetrul cub (notat cm^3);
• kilometrul cub (notat km^3);	• milimetrul cub (notat mm^3).

Observație. Fiecare unitate de măsură reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 dam, 1 hm, 1 km, respectiv 1 dm, 1 cm, 1 mm.

11.2. Transformarea unităților de măsură

De reținut

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta folosim următoarea schemă:



- Unitățile de măsură mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu $(10^3)^n$.
- Unitățile de măsură mici se transformă în unități mari prin împărțire cu $(10^3)^n$, unde n este numărul segmentelor de dreaptă dintre cele două unități.

Exemple

1 $2{,}5\ dam^3 = 2{,}5 \cdot 10^3\ m^3 = 2\ 500\ m^3$;

2 $0{,}8\ hm^3 = 0{,}8 \cdot (10^3)^2\ m^3 = 800\ 000\ m^3$;

3 $0{,}6\ km^3 = 0{,}6 \cdot (10^3)^3\ m^3 = 600\ 000\ 000\ m^3$;

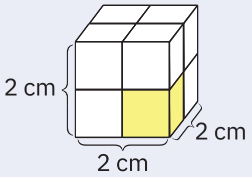
4 $4\ mm^3 = [4 : (10^3)^2]\ dm^3 = 0{,}000004\ dm^3$;

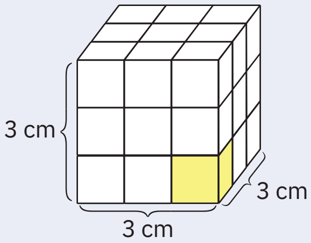
5 $85\ m^3 = (85 : 10^3)\ dam^3 = 0{,}085\ dam^3$;

6 $1{,}6\ dm^3 = (1{,}6 : 10^3)\ m^3 = 0{,}0016\ m^3$.

11.3. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

Situație problemă





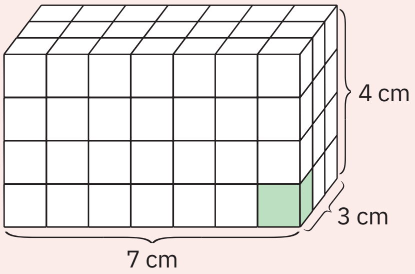
Să numărăm din câte cuburi unitate de 1 cm^3 sunt formate cele două cuburi.

Ne punem întrebarea: ce legătură există între lungimea muchiei cubului și numărul cuburilor unitate din care este format cubul?

Primul cub este format din 8 cuburi unitate de 1 cm^3 și observăm că $2\ cm \cdot 2\ cm \cdot 2\ cm = 8\ cm^3$.
Al doilea este format din 27 de cuburi unitate de 1 cm^3 și observăm că $3\ cm \cdot 3\ cm \cdot 3\ cm = 27\ cm^3$.

De reținut
Deducem formula de calcul pentru volumul cubului: $V = l^3$, unde l este lungimea muchiei cubului.
Volumul unui corp este numărul care ne arată de câte ori se cuprinde o unitate de măsură în acel corp.

Exemplu



Paralelipipedul dreptunghic alăturat este format din 84 de cuburi unitate de 1 cm^3.

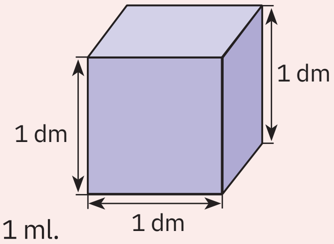
Corpul are lungimea $L = 7$ cm, lățimea $l = 3$ cm și înălțimea $h = 4$ cm.

Observăm că $7\ cm \cdot 3\ cm \cdot 4\ cm = 84\ cm^3$, adică exact numărul de cuburi unitate din care este format corpul.

Volumul paralelipipedului dreptunghic: $V = L \cdot l \cdot h$.

11.4. Relația dintre volum și capacitate

Aplicație practică



Turnați un litru de apă într-un vas cubic cu lungimea muchiei de 1 dm.
Ce observați?
Răspuns:
Vasul este plin.

De reținut
Un vas cu volumul egal cu 1 dm^3 are capacitatea de un litru: $1\ dm^3 = 1\ l$.
Un vas cu volumul egal cu 1 cm^3 are capacitatea de un mililitru: $1\ cm^3 = 1\ ml$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Într-o cutie cubică cu latura de 10 cm încap 2 portocale.
- **a** Câte portocale încap într-o cutie cubică cu muchia de 20 cm?
- **b** Dar într-o cutie imaginară cu latura de 100 m?

Rezolvare:

a Volumul cutiei cu latura de 10 cm este egal cu $(10\ cm)^3 = 1\ 000\ cm^3 = 1\ dm^3$.
Volumul cutiei cu latura de 20 cm este egal cu $(20\ cm)^3 = 8\ 000\ cm^3 = 8\ dm^3$.

1 dm^3 .... 2 portocale
8 dm^3 .... 2 portocale $\cdot 8 = 16$ portocale.

b Volumul cutiei cu latura de 100 m este egal cu $(100\ m)^3 = 1\ 000\ 000\ m^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ dm^3$.
1 dm^3 .... 2 portocale
1 000 000 000 dm^3 .... 2 portocale $\cdot 1\ 000\ 000\ 000 = 2\ 000\ 000\ 000$ portocale.

2 Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 75 cm, lățimea de 40 cm și înălțimea de 6 dm.

a Determinați volumul acvariului.

b La ce înălțime se ridică apa, dacă în acvariu se toarnă 120 de litri?

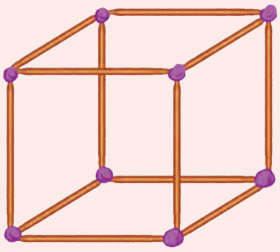
Rezolvare:

a Mai întâi trebuie să efectuăm transformări pentru ca cele trei dimensiuni să aibă aceeași unitate de măsură.
$L = 75\ cm = 7{,}5\ dm$, iar $l = 40\ cm = 4\ dm$ și atunci $V = L \cdot l \cdot h = 7{,}5\ dm \cdot 4\ dm \cdot 6\ dm = 180\ dm^3$.

b Ținând cont că $1\ \ell = 1\ dm^3$, cei 120 de litri de apă ocupă un volum egal cu $120\ dm^3$.
Fie $\hat{\imath}$ înălțimea la care se ridică apa. Atunci volumul apei este egal cu $V = 7{,}5\ dm \cdot 4\ dm \cdot \hat{\imath}\ dm$.
Din $7{,}5\ dm \cdot 4\ dm \cdot \hat{\imath}\ dm = 120\ dm^3$, obținem $\hat{\imath} = 4\ dm$.

Probleme propuse

1 Folosind bețe de chibrit și plastilină, construiți acasă un cub asemănător cu cel din figura alăturată și completați pentru a obține propoziții adevărate. Cubul are:
a ... vârfuri; **b** ... fețe; **c** ... muchii. **d** Fețele cubului sunt ... .



2 Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
a $78{,}9\ dam^3 = 0{,}789\ hm^3$; **b** $2\ 500\ cm^3 = 25\ dm^3$;
c $867\ mm^3 = 0{,}867 cm^3$; **d** $0{,}4\ m^3 = 400\ dm^3$.

3 Transformați în decimetri cubi:
a $6{,}25\ m^3$; **b** $0{,}006\ dam^3$; **c** $0{,}0000005\ hm^3$;
d $3\ 000\ cm^3$; **e** $4\ 000\ 000\ mm^3$; **f** $47{,}5\ cm^3$.

4 Determinați termenul necunoscut:
a $2{,}8\ dam^3 + 800\ dm^3 =?\ m^3$; **b** $87\ cm^3 + 103\ mm^3 - 0{,}02\ dm^3 =?\ cm^3$;
c $654\ hm^3 - 35\ 000\ m^3 =?\ dam^3$; **d** $0{,}82\ km^3 + 170\ dam^3 - 4\ 000\ m^3 =?\ hm^3$.

5 Indicați unitățile de măsură adecvate pentru a măsura:
a volumul sălii de clasă; **b** volumul unei cutii de chibrituri;
c volumul unui bloc; **d** capacitatea unui bazin de înot.

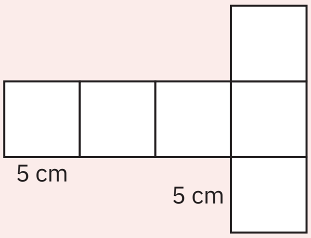
6 Lungimea muchiei unui cub este egală cu p metri, unde p este un număr natural, par, care are exact doi divizori. Determinați volumul cubului.

7 Volumul unui cub este egal cu $\overline{2a}\ dm^3$. Determinați lungimea muchiei cubului.

8 În București, în anul 2017, tariful pentru consumul unui m^3 de apă/canal a fost de 1,15 euro. Câți lei a plătit o familie, știind că a consumat 25 m^3 de apă/canal și că 1 euro era egal cu 4,56 lei?

9 Suma lungimilor muchiilor unui cub este egală cu 180 cm.
a Determinați perimetrul și aria unei fețe.
b Calculați volumul cubului.

10 În figura alăturată avem desfășurarea plană a fețelor unui cub.
a Determinați aria desfășurării.
b Calculați perimetrul desfășurării.



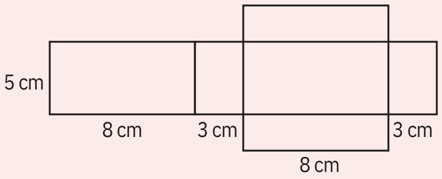
11 Copiați tabelul de mai jos în caiete, calculați și completați:

Lungimea muchiei cubului	2,5 m		24 cm	
Volumul cubului		8 000 dm^3		216 hm^3

12 În figura alăturată este reprezentată desfășurarea plană a fețelor unui paralelipiped dreptunghic.

a Determinați aria desfășurării.

b Calculați perimetrul desfășurării.



13 Un bazin de înot are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 0,60 hm, lățimea de 400 dm și înălțimea de 0,25 dam. Câți litri de apă încap în bazin?

14 Dimensiunile unei cărămizi sunt: 240 mm, 125 mm și 140 mm. Într-un metru cub de zidărie intră 210 cărămizi și mortar. Care este volumul mortarului?

15 Un teren de fotbal de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 100 m și lățimea de 70 m, trebuie curățat de zăpadă. Câte tone de zăpadă trebuie să fie transportate de pe teren, știind că grosimea stratului de zăpadă este egală cu 25 cm, iar 1 m^3 de zăpadă cântărește 60 kg?

16 Bunicii lui Horia colectează apă de ploaie într-un butoi fără capac, pentru udatul legumelor. Butoiul are forma unui cub cu lungimea muchiei de 1 m. După 10 zile consecutive de ploaie, s-au acumulat, în medie, câte 72,9 litri de apă pe metrul pătrat, după fiecare zi. La ce înălțime se ridică apa?

17 Într-un acvariu de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea egală cu 80 cm, lățimea de 50 cm și înălțimea de 6 dm, apa se ridică la $\frac{5}{6}$ din înălțimea acvariului. Din acvariu se scot 80 litri de apă.

a Determinați volumul acvariului.

b Cu câți centimetri a scăzut nivelul apei?

Știați că... ?

Cubul lui Rubik este un *joc-problemă* inventat în anul 1974 de către sculptorul și profesorul de arhitectură maghiar Ernő Rubik.
Pentru majoritatea dintre voi, acesta este o adevărată provocare. Accesează *internetul* pentru a afla câteva secrete privind aranjarea pătrățelelor, astfel încât să se formeze fețe în care toate cele 9 pătrate au aceeași culoare!

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Transformând 150,6 m^3 în decimetri cubi, obținem:

A 0,1506 dm^3; **B** 15,06 dm^3; **C** 1 506 dm^3; **D** 150 600 dm^3.

2 Un vas are forma unui cub cu suma lungimilor muchiilor egală cu 108 dm. Capacitatea vasului, exprimată în decalitri, este egală cu:

A 0,729; **B** 7,29; **C** 72,9; **D** 729.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Un container are interiorul de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 10 m, 6 m și 5 m. În interior sunt cărămizi cu dimensiunile de 250 mm, 120 mm și 100 mm.

a Află volumul acestui container.

b Câte cărămizi sunt în container, știind că acesta este plin?

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

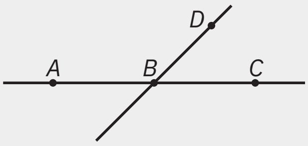
Timp de lucru: **30 de minute**

Elemente de geometrie și unități de măsură

1 *A* și *B* sunt două puncte distincte. Numărul dreptelor care conțin cele două puncte este egal cu:
a 2 **b** 1
c 3 **d** nu se poate determina

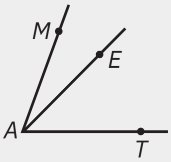
2 Dintre un pătrat, un cerc, un dreptunghi și un unghi, două axe de simetrie are:
a dreptunghiul **b** cercul
c unghiul **d** pătratul

3 Dintre propozițiile ce urmează, falsă este:



- **a** Punctele *A*, *B*, și *D* sunt coliniare.
- **b** Semidreptele *AC* și *CA* coincid.
- **c** Segmentele *AC* și *CA* coincid.
- **d** Dreptele *AC* și *BD* sunt concurente.

4 Dintre propozițiile ce urmează, adevărată este:



- **a** Punctul *E* se află în exteriorul unghiului *EAT*.
- **b** Vârful unghiului *MAT* este *M*.
- **c** Laturile unghiului *MAT* sunt *AM* și *AT*.
- **d** Unghiul *MAE* este obtuz.

5. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

12,7 hm = 1,27 km
$0{,}98\ \text{dam}^3 = 980\ \text{m}^3$
$5\ \text{ha} = 5\,000\ \text{m}^2$
Aria unui pătrat cu latura de 26 m este egală cu 6,76 ari

6. Asociați fiecărui calcul din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**:

A	**B**
$60° - 24°$	**a** 22°24'
	b 60°
$58° - 35°36'$	**c** 59°20'
$8°10' \cdot 5 + 19°10'$	**d** 36°

7 Un pătrat are aria egală cu 576 m^2, iar alt pătrat are aria de 4 ori mai mică. Atunci lungimea laturii celui de-al doilea pătrat este egală cu:
a 12 m **b** 144 m **c** 16 m **d** 13 m

8 Lungimea unui dreptunghi este de 2,5 ori mai mare ca lățimea, iar aria dreptunghiului este egală cu 90 m^2. Lungimea și lățimea acestuia sunt egale cu:
a 10 m și 9 m **b** 15 m și 6 m
c 18 m și 5 m **d** 30 m și 3 m

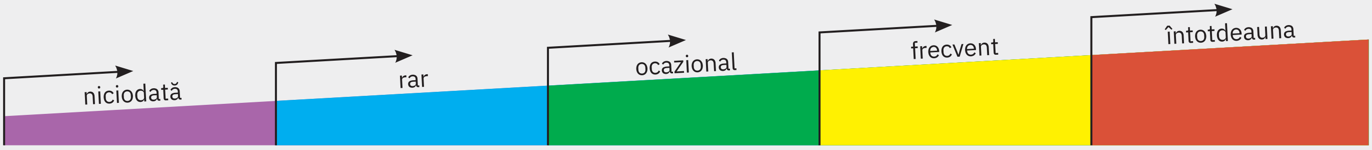
9 Pe o dreaptă *g* considerați punctele *D*, *R*, *P* și *T*, coliniare, în această ordine, astfel încât $DR = PT = 3$ cm, iar $RP = 4$ cm.
- **a** Ce lungime are segmentul *DT*?
- **b** Fie *E* mijlocul segmentului *RP*. Arătați că *D* și *T* sunt simetrice față de *E*.

10 Unghiul *COD* are măsura egală cu 110°, iar *L* este un punct exterior acestuia, astfel încât măsura unghiului *DOL* este egală cu 0,(63) din măsura unghiului *COD*. Fie *T* un punct interior unghiului *COD*, astfel încât măsura unghiului *TOD* reprezintă $\frac{4}{7}$ din măsura unghiului *COT*. Arătați că:
- **a** punctele *C*, *O*, *L* sunt coliniare;
- **b** unghiurile *COT* și *DOL* sunt congruente.

11 Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea egală cu 0,8 m, lățimea de 5 dm și înălțimea de 60 cm.
- **a** Determinați volumul acvariului.
- **b** La ce înălțimea se ridică apa, dacă în acvariu se toarnă 200 de litri?

Fișa de observare sistematică

- ▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- ▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



Soluții

Unitatea 1. Operații cu numere naturale

Lecția 1. Scrierea și citirea numerelor naturale

1 a opt sute patruzeci și trei de mii douăzeci și șapte; **b** cinci sute de mii doi; **c** cinci mii șaptesprezece; **d** unsprezece mii o sută unsprezece; **e** douăzeci și unu de mii cinci; **f** patru sute trei mii șaizeci și șapte; **g** o sută douăzeci de mii patru; **h** douăzeci de milioane trei sute cinci mii douăzeci și trei. **3 a** 27; **b** 358 000; **c** 5 008; **d** 9 705; **e** 2 837 002; **f** 7 003 605. **4 a** 12 numere; **b** 3 numere; **c** 6 numere. **5 a** $\overline{abc} = 379$; **b** $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$; **c** $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$, $d = 4$. **6 a** 852 cifre; **b** 240 pagini. **8 a** 28, 34, 40; **b** 43, 54, 65; **c** 54, 162, 486; **d** 41, 65, 95; **e** 95, 284, 852; **f** 45, 56, 67. **9 a** de exemplu: 123, 321, 1 213; **b** 532, 424, 2 350, 154. **10 a** 2 numere; **b** 6 numere. **11 a** 12, 21, 30; **b** dacă $b = 0$, atunci $a + c = 6$ și obținem numerele naturale 105, 204, 303, 402, 501, 600; dacă $b = 1$, atunci $a + c = 4$ și obținem numerele 410, 311, 212, 113; dacă $b = 2$, atunci $a + c = 2$ și obținem numerele 121 și 220; dacă $b \geq 3$, atunci egalitatea nu poate avea loc; **c** 42. **12** 192 de numere. **13 b** $a = 7$, $b = 6$, $c = 3$; **c** $a = 6$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 9$.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** 45; **b** 45.

Lecția 2. Reprezentarea pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, rotunjiri, estimări

2 $A(6)$, B(5), $C(10)$, $D(7)$. **3** 4 321 > 2 314 > 2 143 > 1 342 > 1 234. **4** Da. Ioana a folosit ca unitate de măsură o pătrățică din caietul de matematică, iar Eva a folosit ca unitate de măsură două pătrățele. **5 a** 0, 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; **b** 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24; **c** 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37. **6 a** 23 456 < 23 546; **b** 236 780 < 236 800; **c** 123 456 > 23 456. **7 a** 124 360; 124 300; 124 000; 100 000; **b** 892 530; 892 600; 893 000; 900 000; **c** prin lipsă: 587 320, 587 300; 587 000; 500 000; prin adaos: 587 330, 587 400, 588 000, 600 000; **d** 89 280; 89 300; 89 000; 100 000. **8** 2 400; 3 100; 1 100; 98 100; 64 000; 13 800; 56 300; 56 300; 81 000; 80 800. **9 a** 123; **b** 9 876; **c** 98 764; **d** 120 354. **10 a** 6 puncte; **b** 7 puncte. **11 a** de exemplu: 13 029, 13 037, 13 040, 13 043; **b** de exemplu: 13 463; 13 478; 13 482; 13 491; **c** de exemplu: 13 972; 13 979; 13 981; 13 982. **12 a** 6 578 234; **b** 85 374. **13 a** de exemplu: 23 464; 23 458; 23 470; 23 475; 23 478; 23 480; **b** de exemplu: 23 429; 23 431; 23 436; 23 439; 23 441; 23 446; **c** 23 475; 23 476; 23 477; 23 478; 23 479; 23 481. **14** Numerele sunt: 350, 351, ..., 449. Numărul lor este 100. **15** (13, 19); (13, 20); (13, 21); (14, 19); (14, 20); (14, 21); (15, 19); (15, 20); (15, 21); (16, 19); (16, 20); (16, 21); (17, 19); (17, 20); (17, 21); (18, 19); (18, 20); (18, 21); (19, 19); (19, 20); (19, 21). **16** 30 289. **17** de exemplu: $(1, b)$; $(2, d)$; $(3, c)$; $(4, e)$. **18** $b > d > a > c > e$. **19 a** $\overline{ab4}$, $\overline{ab6}$. **b** $\overline{a15}$, $\overline{a17}$, $\overline{a19}$, $\overline{a21}$, $\overline{a23}$, $\overline{a25}$, $\overline{a27}$. **20 a** Numerele de la 1 la 100 care conțin cifra 3 sunt: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 53, 63, 73, 83, 93. Cifra 3 se folosește de 20 de ori. **b** 301.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** 400 – 200 – 1 = 199; **b** 106, 207, 117, 308, 218, 128, 409, 319, 229, 139.

Lecția 3. Adunarea numerelor naturale, proprietăți

1 a 588; **b** 361; **c** 7 653; **d** 6 116; **e** 5 035; **f** 873; **g** 4 136; **h** 220 925; **i** 63 689; **j** 5 704; **k** 99 354; **l** 22 233. **2 a** $S = (3 + 97) + (12 + 88) + (45 + 55) + (17 + 83) + 100 = 500$; **b** 800; **c** 487. **3 a** (24 + 76) + (68 + 32) = 200; **b** 456; **c** 1 100; **d** 2 000; **e** 2 000; **f** 400. **4 a** 465; **b** 464; **c** 429. **5 a** $a + a + 1 = 43$, numerele sunt 21 și 22; **b** 15, 16, 17; **c** 12, 14; **d** 17, 19, 21. **6 a** $702 + 11 \cdot \overline{ab} = 977$, $\overline{ab} = 25$. **b** $101 \cdot b + 20 \cdot a = 443$, $\overline{ab} = 73$. **7 a** $\overline{a4b8}$; **b** $\overline{ab6d}$; **c** $\overline{abcdef}$. **8 a** A; **b** F; **c** F; **d** A. **9 a** $n = 8$, numerele sunt: 20, 22, 24, 26, 28, 30; **b** $n = 8$, numerele sunt: 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47. **10 c** corect; **d** incorect/corect este 46; **e** corect. **11 a** 187 + 27 = 213; **b** 5 837 + 7 946 = 13 783 sau 5 836 + 7 947 = 13 783 sau 5 838 + 7 945 = 13 783 sau 5 835 + 7 948 = 13 783 sau 5 839 + 7 944 = 13 783 sau 5 834 + 7 949 = 13 783; **c** 47 + 582 = 629. **12 a** Suma minimă este 25 de lei, iar suma maximă este 37 de lei. **b** 10 caiete: șapte caiete de 3 lei, două caiete de 4 lei și un caiet de 6 lei. **13 a** Numerele m și n nu pot avea fiecare câte trei sau mai multe cifre (nu sunt simultan mai mari decât 100), deoarece suma lor este mai mică decât 200. Dacă m și n ar avea cel mult două cifre, răsturnatele lor ar avea tot cel mult două cifre, iar suma lor ar fi mai mică decât 200, fals. Așadar, m și n nu au același număr de cifre. **b** 74 și 631. **14** Rămâne suma numerelor aflate la început pe tablă: 1 + 2 + ... + 25 = 325. **15** Presupunem că cele 40 de numere ar fi distincte două câte două. Atunci, suma lor ar fi cel puțin egală cu suma celor mai mici 40 de numere naturale distincte, adică ar fi cel puțin 0 + 1 + 2 + ... + 39 = 780, contradicție. Așadar, cel puțin două dintre numerele date sunt egale. **16** Punctaj Ioana: 2 · 9 + 3 · 7 + 4 · 5 + 5 · 3 + 1 = 75, punctaj Radu: 3 · 9 + 1 · 7 + 5 · 5 + 4 · 3 + 2 · 1 = 73. Câștigătorul concursului este Ioana.

Autoevaluare. **1** B. **2** A. **3 a** nu este posibil; **b** 7 + 4 = 11, 11 + 11 = 22, 22 + 11 = 33, 33 + 22 = 55, 55 + 4 = 59, 59 + 4 = 63.

Lecția 4. Scăderea numerelor naturale

1 a 1 215; **b** 3 732; **c** 989; **d** 568; **e** 17 723; **f** 22 937; **g** 14 210; **h** 4 944. **2 a** 8 888; **b** 885; **c** 9 765; **d** 1 223. **3 a** 290; **b** 101; **c** 4 589; **d** 849 991. **4 a** 536; **b** 2 149; **c** 218; **d** 749; **e** 13 497; **f** 957; **g** 630; **h** 987; **i** 5 041. **5 a** 232; **b** 1 264; **c** 11 860; **d** 76 778. **6** Numerele sunt 90 și 8. **7** 1 016 km. **8** 437; 580; 985. **9 a** $y = 5$; **b** $x = 4$; **c** $y + z = 7$.**10 a** $a - c = 347$; **b** $a - b = 9$; **c** $c = 27$. **11 a** 80 601; **b** 20 503; **c** 111 111. **12** $a = 9$, $b = 1, 2, ..., 9$, $c = 3$, $d = 5$, sunt 9 numere.

Autoevaluare. **1** B. **2** c. **3 a** 23; **b** 29.

Lecția 5. Înmulțirea numerelor naturale

1 a 420; **b** 875; **c** 5 760; **d** 4 860; **e** 26 112; **f** 63 135. **2 a** 3 553; **b** 2 600; **c** 19 040; **d** 2 730; **e** 15 540; **f** 5 824. **3 a** $2 \cdot 37 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 37 = 370$; **b** 17 000; **c** 5 790 000. **4 a** 5 229; **b** 938; **c** 2 196; **d** 3 158; **e** 7 238; **f** 1 920. **5 a** 3 465; **b** 2 727; **c** 1 530; **d** 3 038; **e** 3 996; **f** 5 020. **6 a** $p = 475$; **b** $p = 5\,880$. **7** 139 km. **8** 83 lei. **9** $10 \leq a \leq 16$, $12 \leq b \leq 21$, obținem $120 \leq a \cdot b \leq 336$, cea mai mică valoare posibilă a produsului este 120, iar cea mai mare este 336. **10** 20. **11** $(x, y) = (2, 16), (5, 1), (6, 0), (3, 6)$. **12** Numerele sunt 18 și 23. **13 a** 35, 45, 55; **b** 28, 35, 42; **c** 360, 1 800, 10 800; **d** 7 568, 99 010, 1 113 212; **e** 6 742, 8 972, 1 011 110; **f** 576, 27 648, 15 925 248. **14** 13 zerouri. **15 b** și **d**. **16 a** F; **b** A; **c** F; **d** F. **17 a** $(13 + 2) \cdot 5 = 25 \cdot 3$; **b** $19 - (5 \cdot 3 - 2) = 6$; **c** $(19 - 5) \cdot (3 - 2) = 14$; **18 a** $15 - 7 \cdot 2 = 1$; **b** $128 - 22 \cdot 4 - 38 = 2$; **c** $24 - 5 \cdot 3 - 2 = 7$. **20** $a + b = 431$, $2 \cdot a + 5 \cdot b = 2 \cdot (a + \text{b}) + 3 \cdot b = 1\,696$, $3 \cdot b = 834$, $b = 278$, $a = 153$. **21 a** $2 \cdot x \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $x = 1$, numărul căutat este 2 134; **b** $x \cdot y = 6$, numerele căutate sunt 2 164, 2 234, 2 324, 2 614. **22** Ultima cifră a produsului a 2 numere naturale consecutive se obține din produsul numerelor: $0 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, ..., $8 \cdot 9$; **b** Nu. Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par, iar 2 017 este un număr impar. Deci, nu putem avea egalitate.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3 a** 60; **b** 756.

Lecția 6. Factor comun

1 a 160; **b** 1 000; **c** 14 000; **d** 12 788; **e** 3 000; **f** 70 200; **g** 2 413 000; **h** 1 217 400; **i** 1 289 000. **2 a** 1 200; **b** 50 000; **c** 702 000; **d** 478 000. **3 a** 106; **b** 15; **c** 102; **d** 1 302. **4 a** 100; **b** 114; **c** 700; **d** 2 021. **5 a** $x = 2$; **b** $x = 100$; **c** $x = 13$; **d** $x = 2\,028$. **6 b** 20 020; **c** 85 995; **d** 499 950. **7** $91 \cdot \overline{ab} = 6\,188$, $\overline{ab} = 68$.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** $a + b + c = 8$; **b** $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$.

Lecția 7. Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

1 a 156; **b** 86; **c** 61; **d** 54; **e** 20; **f** 28; **g** 89; **h** 4 606; **i** 420; **j** 58. **2 a** 24, proba: $24 \cdot 65 = 1\,560$; **b** 21; **c** 48; **d** 36; **e** 70; **f** 23; **g** 126; **h** 241. **3 a** 655, proba: $47\,160 : 655 = 72$; **b** 57; **c** 264; **d** 89; **e** 304; **f** 36; **g** 67; **h** 27. **4** 45 kg. **5** 82 lei. **6** 23 lei. **7** 4 lei, 3 lei, 4 lei, 3 lei. **8 a** A; **b** F; **c** A; **d** A; **e** F; **f** A. **9** 32; **10** Câtul este 11, restul este 0.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** DA; **b** 270.

Lecția 8. Împărțirea cu rest a numerelor naturale

1 a 20 rest 5; **b** 33 rest 4; **c** 62 rest 8; **d** 93 rest 1; **e** 154 rest 4; **f** 73 rest 11; **g** 129 rest 5; **h** 84 rest 5; **i** 156 rest 10; **j** 27 rest 140; **k** 609 rest 21; **l** 102 rest 48. **2 a** A; **b** A; **c** F; **d** F. **3 a** $a : 32 = 36$ rest 28, $a = 1\,180$; **b** 1 428. **4 a** $a = 6 \cdot 13 + r$, $r < 6$, $a = 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84$; **b** 348.**5** $a + b + c = 135$, $a = 12\,c + 1$, $b = 31c + 2$, obținem $44c = 132$, $c = 3$, $a = 37$, $b = 95$. **6** $a - b = 72$, $a + b = 362$, $a = 217$, $b = 145$. **7 a** $a = 13c + r$, $r < 13$, $r = c$, obținem $a = 14c$, de unde $a = 0, 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168$; **b** numerele sunt: 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119; **c** $x : 2\,009 = c$ rest r, $r < 2\,009$, $r = 10c$, $10c = 2\,000$, $c = 200$, obținem $x = 2\,019c = 403\,800$. **8 b** Cel mai mic număr este $120 = 37 \cdot 3 + 9$, iar cel mai mare număr este $971 = 37 \cdot 26 + 9$, sunt $26 - 3 + 1 = 24$ numere, suma lor este egală cu 13 092. **9 a** $x = 6c + 3$, $x = 3(2c + 1) + 0$, deci restul împărțirii numărului natural x la 3 este 0, diferit de 2. **10 a** $A = 17a + 17b + 17 + 8 = 17(a + b + 1) + 8$, $8 < 17$, restul împărțirii numărului A la 17 este 8; **b** $B = 4(4a + 7b + 3) + 1$, $1 < 4$, restul împărțirii numărului B la 4 este 1. **11** $x = 30c + 8$, $y = 35d + 34$, $3x + 2y = 10(9c + 7d + 9) + 2$, $2 < 10$, restul împărțirii numărului $3x + 2y$ la 10 este 2. **12** $a + b + c = 232$, $b = 7c + 1$, $a = 98\,c + 19$, obținem $c = 2$, $a = 215$, $b = 15$. **13** Numerele sunt 195, 85, 17. **14** $a - b = 139$, $a = 20b + 6$, $a = 146$, $b = 7$. **15 a** $\overline{abc} = 5 \cdot \overline{bc} + 4$, $25 \cdot a = \overline{bc} + 1$, $\overline{abc} = 124, 249, 374, 499$; **b** $\overline{abad} = \overline{ab00} + \overline{ad} = q \cdot \overline{ab} + 5$, $\overline{ab00} : \overline{ab} = 100$, $\overline{ad} : \overline{ab} = 1$ rest 5, $d = b + 5$, $a = 1, 2, ..., 9$, (b, **d** $= (0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)$, sunt 45 de numere naturale care verifică condițiile problemei. **16 a** $126 = 2 \cdot 9 \cdot 7$, $N = (2 \cdot 9 \cdot 7) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot ... \cdot 125 + 126 + 124 = 126 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot ... \cdot 125 + 1) + 124$, câtul împărțirii lui N la 126 este $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot ... \cdot 125 + 1$, iar restul este 124.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** 108; **b** 997.

Lecția 9. Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural

1 $a = 7$, $b = 9$, $c = 11^4$, $d = 3$, $e = 37$, $f = 31$, $g = 18$. **2** $a = 10$, $b = 625$, $c = 24$, $d = 1\,024$, $e = 9\,801$. **3 a** 5^6; **b** 12^3; **c** 7^5; **d** $(8 \cdot 3)^4$; **e** 1^5; **f** 3^{2017}. **4 a** 1; **b** 126; **c** 217; **d** 47; **e** 63; **f** 87; **g** 0; **h** 1; **i** 1 000; **j** 400; **k** 49; **l** 4. **5 a** $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$; **b** $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2$. **6 a** 2; **b** 3; **c** 5; **d** 6; **e** 1; **f** 8; **g** 1; **h** 4. **7** 0. **8 a** $6^2 < 39 < 7^2$; **b** $26^2 < 700 < 27^2$; **c** $12^2 < 160 < 13^2$; **d** $11^2 < 123 < 12^2$. **9 a** ultima cifră a numărului este 7, deci el nu poate fi pătratul niciunui număr natural; **b** $u(2^{403} + 2^{402}) = 2$, deci numărul dat nu poate fi pătratul niciunui număr natural.**10 a** Soluțiile sunt: $x = 0$, $y = 8$ sau $x = 8$, $y = 0$. **b** Soluțiile sunt: $x = 0$, $y = 5$, $z = 6$ sau $x = 0$, $y = 6$, $z = 5$ sau $x = 5$, $y = 0$, $z = 6$ sau $x = 6$, $y = 0$, $z = 5$ sau $x = 5$, $y = 6$, $z = 0$ sau $x = 6$, $y = 5$, $z = 0$.

Autoevaluare. **1** B. **2** B. **3 a** $U(A) = 0$; **b** a, b impare $\Rightarrow U(A) = 3$.

Lecția 10. Reguli de calcul cu puteri

1 a 7^{45}; **b** 16^{33}; **c** 3^{11}; **d** 5^{23}; **e** 23^{57}; **f** 5^{153}. **2 a** 2^{70}; **b** 75^3; **c** 3^7; **d** 5^{39}; **e** 7^{25}; **f** 14^{25}. **3 a** 3^{28}; **b** 13^{72}; **c** 17^{54}; **d** 7^{44}; **e** 16^{48}; **f** 5^{12}. **4 a** 21^{16}; **b** 35^{10}; **c** 70^{34}; **d** 10^4; **e** 165^{12}; **f** 84^{30}. **5 a** 4^{24}; **b** 25^{45}; **c** 2^{17}; **d** 3^{36}; **e** 3^{21}; **f** 25^8. **6 a** 5^{67}; **b** 3^{37}; **c** 2^{57}. **7 a** $2^{76} \cdot 21$; **b** $5^{47} \cdot 163$; **c** $13^{12} \cdot 480$. **8 a** $(5^{23})^2$; **b** $(23^{50})^2$; **c** $(7^{15})^2$;

d $(5^{37})^2$; **e** $(2^{75})^2$; **f** $(5^{14})^2$; **g** 20^2; **h** $(2^9 \cdot 3^3)^2$; **i** $(5 \cdot 3^9)^2$. **9** A; F; A; N; F. **Exemplu:** $(9 + 16)^9 = 25^9 = (5^9)^2$ (**A**; $(3 + 2)^3 = 5^3$ (**F**. **10** (13, 2); (36, 7); (7, 8); (25, 5).11. **b** $5^2 = 3^2 + 4^2$, $5^{200} = 5^2 \cdot 5^{198} = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{198} = (3 \cdot 5^{99})^2 + (4 \cdot 5^{99})^2$.12. **a** $n = 3^{23} \cdot 2^{46} - 2^{44} \cdot 3^{23} = 3^{23} \cdot 3 \cdot 2^{44} = (3^{12} \cdot 2^{22})^2$. **b** $n = 3^{2008} \cdot 49 = (3^{1004} \cdot 7)^2$.

Autoevaluare. **1** A. **2** D. **3 a** *8*; **b** 243.

Lecția 11. Compararea puterilor

1 a 25^{28}; **b** 26^{1234}; **c** $2\,011^5$; **d** 393^{100}; **e** 125^{126}; **f** 111^{44}. **2 a** 15^{27}; **b** 24^{123}; **c** $2\,010^4$; **d** 987^{123}; **e** 25^{125}; **f** $1\,010^{201}$.**3 a** $5^{87} > 25^{36}$; **b** $4^{333} > 8^{122}$; **c** $2^{65} < 16^{20}$; **d** $125^{34} < 25^{75}$; **e** $36^{224} > 6^{363}$; **f** $27^{303} < 9^{502}$. **4 a** $3^{22} > 2^{33}$; **b** $4^{33} < 3^{44}$; **c** $11^{22} > 22^{11}$; **d** $2^{39} < 3^{26}$; **e** $5^{45} > 6^{30}$; **f** $15^{90} > 6^{135}$. **5** De exemplu:($2^a < 2^b$; $a = 3$, $b = 7$); ($a^{21} > b^{21}$; $a = 5$, $b = 3$); ($4^a > 2^b$; $a = 4$, $b = 6$). **6 a** $\overline{ab} > 97$, $\overline{ab} = 98, 99$; **b** $\overline{ab} < 13$, $\overline{ab} = 10, 11, 12$; **c** $\overline{abc} < 132$, $\overline{abc} = 100, 101, ..., 131$. **7 a** $25^{18} < 5^{40} < 125^{15}$; **b** $3^{95} < 9^{51} < 27^{48}$; **c** $32^7 < 8^{12} < 27^8$.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** *13*; **b** 10, 11, 12.

Lecția 12. Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2

1 a $812 = 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10^0$; **b** $1\,121 = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0$; **e** $\overline{a7b} = a \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + b \cdot 10^0$; **f** $\overline{a19b} = a \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + b \cdot 10^0$. **2 a** 4 708; **b** 64 790; **c** 8 095; **d** 704 803; **e** 4 906. **3 a** $5_{(10)}$; **b** $13_{(10)}$; **c** $22_{(10)}$; **d** $25_{(10)}$. **4 a** $11\,011_{(2)}$; **b** $100\,110_{(2)}$; **c** $101\,101_{(2)}$; **d** $111\,001_{(2)}$; **e** $111\,101_{(2)}$; **f** $1\,001\,000_{(2)}$; **g** $1\,010\,101_{(2)}$; **h** $1\,100\,001_{(2)}$. **5 a** $2\,010 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2$; **b** $1\,999 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2 + 2^0$. **6** $a = 10\,010_{(2)}$; $b = 2^4 + 2$; $c = 1 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0$; $d = 10$; $e = 2^3 + 2$; $f = 1 \cdot 10 +$; $g = 37$; $h = 100\,101_{(2)}$; $i = 3 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0$; $j = 5\,087$; $k = 1\,001\,111\,011\,111_{(2)}$. **7 a** $x = 1\,111\,001$; **b** $x = 100\,010$; **c** $x = 27$; **d** $x = 43$. **8 a** F; **b** A; **c** A; **d** A.

Lecția 13. Ordinea efectuării operațiilor, utilizarea parantezelor rotunde, pătrate și acolade

1 a 31; **b** 29; **c** 66; **d** 66; **e** 1 386; **f** 392. **2 a** 4; **b** 216; **c** 2; **d** 4; **e** 2; **f** 500. **3 a** 100; **b** 1 225; **c** 1; **d** 1; **e** 11; **f** 11. **4 a** 585; **b** 1 914; **c** 1 119; **d** 0. **5 a** 70; **b** 1. **6** $a = 30$; $b = 135$. Numerele cuprinse între 30 și 135 sunt: 31, 32, ...,134. Numărul lor este 104. **7 a** $5 \cdot (4 : 2 + 8) -2 = 48$; **b** $6 \cdot (9 : 3 + 5 - 2) = 36$; **c** $3 \cdot (8 : 4 + 6 \cdot 2) - 18 = 24$. **8** 365 lei. **9** $(10^4 \cdot a + 100 \cdot \overline{bc} + \overline{de} - 100 \cdot \overline{bc} - \overline{de} : 10^4 = 7$ sau $(10^4 \cdot \mathrm{a}) : 10^4 = 7$, de unde obținem $a = 7$. **10 a** $11 \cdot a + 11 \cdot b + 11 \cdot c = 88$, deci $a + b + c = 8$; **b** $a + b + c = 18$; **c** $a + b + c = 7$; **d** $a + b + \mathrm{c} = 5$.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3 a** $(828 - 24 \cdot 12) : 18 = 30$; **b** $(828 - 6 \cdot 18) : (18 + 12) = 24{,}24 + 6 = 30$.

Unitatea 2. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Lecția 1. Metoda reducerii la unitate

1 9 lei. **2** 36 cm, 16 cm, 12 cm, 8 cm. **a** Dacă lungimea laturii se mărește, atunci și perimetrul pătratului se mărește. **b** Dacă lungimea laturii se micșorează, atunci și perimetrul pătratului se micșorează. **3 a** adevărată. **4 a** Este posibil! Dintr-o cantitate de apă de două ori mai mare, se va obține de două ori mai multă sare. **b** 25 000 litri. **5** 180 km. **6** 400 000 €. **8** Completăm cu 20, 15, 5, 6 și 10. **a** Dacă valoarea lui *x* se mărește, atunci valoarea lui *y* se micșorează. **b** Dacă valoarea lui *x* se micșorează, atunci valoarea lui *y* se mărește. **9 a** Este posibil! Numărul muncitorilor s-a micșorat de două ori și atunci timpul necesar s-a mărit de două ori. **b** 20 de muncitori. **10** Două ore. **12** 8 100 000 m. **13** Între trei bătăi consecutive de clopot sunt două intervale de timp a 6 secunde fiecare; 66 de secunde.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** 8 ore și 20 de minute = 500 de minute. Debitul este egal cu 30 000 litri: 500 de minute = 60 litri pe minut. **b** A doua pompă are debitul egal cu 40 litri pe minut. Se va umple în 5 ore.

Lecția 2. Metoda comparației

1 c 16 lei. **2 a** adevărată. **3** 228 ℓ. **4 a** Nu este posibil. Deoarece 5 pungi cu mălai și 7 pungi cu făină cântăresc 31 kg, deducem că 10 pungi cu mălai și 14 pungi cu făină cântăresc 62 kg. **b** 2 kg, respectiv 3 kg. **5 a** Prin însumare, deducem că 9 băieți și 9 fete au confecționat 45 de mărțișoare. Un băiat și o fată au confecționat 5 mărțișoare. **b** 3, respectiv două mărțișoare. **6** Ogarul parcurge 60 m, iar vulpea 30 m. **8** 1 m. **9 a** Nu este posibil. Trei trandafiri costă tot atât cât 9 garoafe. **b** 6 lei, respectiv, 2 lei. **10** În prima egalitate, adăugăm o tamburină în ambii membri și apoi înlocuim membrul drept cu 160 lei. O tamburină costă 40 lei. **11** Boul. **12** Comparând primele două egalități, deducem că $\square + \triangle + \bigcirc = 8$. Comparând această egalitate nou obținută tot cu cea de-a doua egalitate, obținem că diferența cerută este 4.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** Înlocuind 3 kg de mere și 4 kg de pere cu 5 kg de gutui, deducem că 10 kg de gutui costă 50 lei. Un kilogram de gutui costă 5 lei. **b** 3 lei, respectiv 4 lei.

Lecția 3. Metoda figurativă

1 d 72 kg. **2 b** falsă. **3 a** Este posibil, deoarece în a treia zi a citit 25 de pagini. **b** 40 de pagini. **4** 11 trandafiri, 13 frezii și 15 lalele. **5** 468 m. **6 a** Nu este posibil, deoarece pe al doilea ar trebui să fie 60 de pietre prețioase și s-ar depăși numărul total al pietrelor. **b** 48. **7** Locul X. **8** 28 de ani. **9 a** Chiar dacă $74 = 5 \cdot 12 + 14$, nu este posibil, deoarece restul nu îndeplinește condiția de a fi mai mic decât împărțitorul. **b** 94, respectiv 16.

10 94, respectiv 16. **11** Reprezentăm numărul rămas cu o parte. Cel inițial este reprezentat prin 10 părți plus numărul 7. Numărul inițial este 2 017. **12 a** L = 450 m și $l = 150$ m. Sunt 75 de intervale a 6 m fiecare, deci 76 de pomi. **b** 200 de pomi. **13** Mai întâi se arată că numărul mic nu poate avea o cifră. Așezându-i unui număr de două cifre cifra 1 în stânga, îl mărim cu 100. Numerele sunt 53 și 153. **14** Reprezentăm al doilea factor cu 3 părți și după ce se micșorează cu 750 devine o parte. Diferența 750 reprezintă două părți. Al doilea factor este egal cu 1 125. Avem două soluții: 225 și 1 125, respectiv, 5 625 și 1 125. **15** Reprezentăm numărul trandafirilor galbeni, roșii și albi cu o parte, două părți, respectiv, 4 părți. Numărul total al trandafirilor este 21 sau 28, deoarece trebuie să se împartă exact la 7. A adus 3 galbeni, 6 roșii, 12 albi, respectiv 4 galbeni, 8 roșii și 16 albi. **16** 30 de elevi și 12 bănci. **17** 10 mere și 30 de prune. **18 a** Avem reprezentările:

Faza inițială: $\underbrace{\frac{2b}{f},\frac{2b}{f},\frac{2b}{f},\dots,\frac{2b}{f}}_{\text{de două ori mai multe bomboane decât fursecuri}}$. **Faza finală:** $\underbrace{\frac{5b}{3f},\frac{5b}{3f},\frac{5b}{3f},\dots,\frac{5b}{3f}}_{\text{nr. acestor grupe coincide cu nr. elevilor participanți la masa festivă}}$ (servite) $\underbrace{\underbrace{f,f,f,\dots,f}_{12}\ \underbrace{b,b,b,\dots,b}_{40}}_{\text{rămase pe platoul mare}}$.

Faza intermediară. Ținând cont că fiecărui elev i se servesc 3 fursecuri, facem următorul *aranjament* pe platoul mare: $\frac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$, $\frac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$, $\frac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$, ..., $\frac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$. În final, pe platou au rămas 12 fursecuri, ceea ce înseamnă că au rămas 4 aranjamente de tipul $\frac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$. Acestea conțin 12 fursecuri și 24 de bomboane. Există o diferență de 16 bomboane, astfel încât pe platoul mare să rămână 40 de bomboane. Fiecare participant a fost servit cu 5 bomboane, ceea ce înseamnă că de la fiecare aranjament de tipul $\frac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$ rămâne o bomboană. Deducem că existau 16 aranjamente de tipul $\frac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$. La eveniment au fost 16 elevi, iar în clasă erau 31 de elevi. **b** 60 de fursecuri și 120 de bomboane.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3 a** Nu este posibil, deoarece prin împărțirea lui 63 la 12 obținem câtul 5 și restul 3. **b** 87 și, respectiv, 18.

Lecția 4. Metoda mersului invers

1 b 2022. **2 a** adevărată. **3** 63. **4** 350. **5 a** 22. **b** 324. **6** Din $(x + 5) : 6 = 11$ obținem $x = 61$ și $(61 - 6) : 5 = 11$. **7** 1. **8** 54. **9** Atenție la ordinea operațiilor! Problema este transpusă de **b**. **10** $(2 \cdot x + 2) \cdot 3 - 3 = 57$; 9 nuferi. **11** $(z \cdot 2 + 64) \cdot 5 + l = 443$. În paranteză dăm factor comun pe 2 și obținem: $(z + 32) \cdot 2 \cdot 5 + l = 443$, adică $(z + 32) \cdot 10 + l = 443$. Deoarece ultima cifră a produsului este zero, deducem că $l = 3$. Atunci $z = 12$. Data aniversării este 12 martie. **12** 64 de bile. Adi câștigă. **13 a** Combinăm *metoda figurativă* cu *metoda mersului invers*. Reprezentăm lungimea traseului cu 6 părți. Distanța dintre primele două obiective reprezintă o parte din lungimea traseului. Dacă 40 km reprezintă o parte, atunci distanța dintre ultimele două obiective, reprezentată prin două părți, este de 80 km. Deci este posibil. **b** Jumătate din traseu are 40 km + 80 km = 120 km. Lungimea traseului este egală cu 240 km. **14 a** Nu este posibil. Jumătate din 16 km este egal cu 8 km și un sfert din 8 km este egal cu 2 km. **b** Un sfert din jumătatea distanței este egal cu 1 km și atunci jumătatea distanței este egală cu 4 km. Traseul are 8 km. **15** 33 de mere în prima grămadă și 15 mere în a doua grămadă.

Autoevaluare. **1** B. **2** D. **3 a** Nu este posibil, deoarece pe masă ar fi rămas 5 nuci. **b** Bunica a lăsat 24 de nuci. Vlad a luat 12 nuci, iar Ștefan a luat 6 nuci.

Lecția 5. Metoda falsei ipoteze

1 d 80. **2 a** adevărată. **3** 5 kg. **4 a** Nu este posibil, deoarece 6 veverițe și 5 vrăbiuțe au împreună 34 de piciorușe. **b** 7 vrăbiuțe. **5** 5 bancnote de 5 lei. **6** 22 de albine. **7** Zece acțiuni de 25 de euro și 8 acțiuni de 12 euro. **8** 120 de vite și 200 păsări. **9** Trei vase a 3 litri. **10** 23 de victorii. **11 a** Doi iepuri și 3 rațe; **b** Două picioare (ale gospodinei). **12** Atenție! La fiecare rezolvare greșită pierde 12 puncte. Cinci probleme. **13** Șase săgeți. **14 a** 6 zile. **b** Însorită. **15** Presupunând că toate monedele erau de 5 €, există o nepotrivire de 35 €. Ca să aflăm numărul monedelor de 2 €, număr natural, trebuie să împărțim 35 € la 3 € și să obținem un număr natural, ceea ce este imposibil. **16** 6 lei.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** Nu este posibil, deoarece ar fi primit 13 puncte. **b** 6 probleme.

Recapitulare și evaluare. **1** a. **2** d. **3** c. **4** a. **5** a. **6** c. **7** b. **8** a. **9** 475 și 156. **10** 9 băieți și 21 de fete. **11** 63 de lei. **12** $A = 367$; $B = 2$; C = 80. **13** Le-a lăsat 16 fursecuri. **14** Erau 26 de bănci și 100 de persoane.

Unitatea 3. Divizibilitatea numerelor naturale

Lecția 1. Divizor, multiplu; divizori comuni; multipli comuni

1 a 16 : 4 = 4 rest 0, deci $16 \,\vdots\, 4$; **b** $30 \,\vdots\, 5$; **c** 27 : 13 = 2 rest 1, deci $27 \not\vdots\, 13$; **d** $42 \,\vdots\, 7$; **e** $22 \not\vdots\, 4$; **f** $72 \,\vdots\, 9$; **g** $65 \not\vdots\, 7$; **h** $90 \,\vdots\, 10$; **i** $0 \,\vdots\, 6$. **2 a**1, 5; **b** 1, 2, 4, 8, 16; **c** 1, 23; **d** 1, 3, 9, 27; **e** 1, 2, 4, 7, 14, 28; **f** 1, 3, 11, 33; **g** 1, 2, 3, 6, 12, 14, 21, 42; **h** 1, 3, 7, 9, 21, 63; **i** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; **j** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80. **3 a** 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76; 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72; 27, 36, 45, 54, 63, 72. **b** 21, 28, 35, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91; 30, 45, 60, 75, 90; 29, 58, 87. **4 a** 108 : 18 = 6 rest 0, deci 18 este un divizor al lui 108; 18 : 6 = 3 rest 0, deci 18 este un multiplu al lui 6. **b** 2 184 : 91 = 24 rest 0, deci 91 este un divizor al lui 2 184; 91 : 21 = 4 rest 7, deci 91 nu este multiplu al lui 21. **c** $11 \cdot 2 = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, deci $11 \cdot 12$ este un multiplu al lui $2 \cdot 3$; $22 \cdot 33 = 11 \cdot 6 \cdot 11$, deci $22 \cdot 33$ nu se poate scrie ca produsul dintre $11 \cdot 12$ și alt număr natural, adică $11 \cdot 12$ nu este divizor al lui $22 \cdot 33$. Altfel, se efectuează $22 \cdot 33 = 726$ și $11 \cdot 12 = 132$, apoi se observă că $726 : 132 = 5$ rest 66. Deci $11 \cdot 12$ nu este divizor al lui $22 \cdot 33$. **5 a** Divizorii lui 34 sunt 1, 2, 17, 34. $3n - 1 = 1$, n nu este număr natural; $3n - 1 = 2$, $n = 1$; $3n - 1 = 17$, $n = 6$; $3n - 1 = 34$, n nu este număr natural. **b** Divizorii lui 98 sunt 1, 2, 7, 14, 49, 90. Obținem $n = 3$, $n = 10$. **6 a** Valorile lui m sunt 34, 41, 48, 55, 62, 69. **b** $2n + 1$ este multiplu al lui 45; valorile lui n sunt 22 și 67. **7 a** $x = 7 \cdot 5 \cdot a + 7 \cdot 9 \cdot b = 7 \cdot (5a + 9b) \vdots 7$. **b** $u + v = 9a + 9b + 9c = 9(a + b + c) \vdots 9$. **8 a** $a = 12c + 9 = 3(4c + 3) \vdots 3$; **b** $b = 57d + 38 = 19(3d + 2) \vdots 19$. **9** Grupăm termenii câte doi și aplicăm strategia de la problema rezolvată 4. **10a** Cel mai mare divizor comun este 12. **b** Cel mai mic multiplu comun nenul este 36. **11** Numărul egal de baloane, fluiere și coifuri este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 18, 12 și 8, adică numărul 72. Radu ar trebui să cumpere 3 seturi de baloane, 6 seturi de fluiere și 9 seturi de coifuri. **12** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 9 și 12 este egal cu 36. Deci, cei doi copii se vor întâlni la start peste 36 de minute. Bogdan va efectua 4 tururi, iar Corina 3 tururi. **13 a** deoarece 4 este divizor al lui 24, obținem că vizitatorii care primesc rucsac primesc și insignă. **b** Insignă și tricou vor primi din 36 în 36 vizitatori. Insignă și ochelari de soare din 60 în 60 vizitatori. **c** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 9, 15 și 24 este egal cu 360. Primesc toate cele patru obiecte cadou vizitatorii cu numărul 360 și 720, adică doi vizitatori din primii 1 000. **14** Cel mai mic număr de cutii este 6. **15 a** $30 \vdots 3$, $24 \vdots 3$ și $18 \vdots 30$, deci se pot pune câte trei fructe în fiecare coș; deoarece $30 \not\vdots 4$, obținem că nu se pot pune câte 4 fructe de același fel, în fiecare coș. **b** Numărul coșurilor este 6. Fiecare coș conține 5 portocale, 4 piersici și 3 pere. **16** Corul școlii este format din 36 de fete și 24 de băieți. Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 24 este 12. Vor fi trei rânduri a câte 12 fete și două rânduri a câte 12 băieți. Numărul elevilor de pe fiecare rând este 12, iar numărul rândurilor este 5.

Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 a** De 8 ori cel cu lumină albastră și de 12 ori cel cu lumină albă. **b** Proiectoarele clipesc simultan după un număr de secunde egal cu cel mai mic număr natural multiplu și de 5, și de 7, adică după 35 de secunde. 10 minute = 600 secunde; cum $600 : 35 = 17$ rest 5, proiectoarele vor clipi simultan de 35 de ori.

Lecția 2. Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10n, 3 și 9

2 a 50, 12, 38, 84; **b** 5, 20, 25; **c** 24, 60; **d** 18; **e** 78, 84, 12; **f** 60, 45. ***3.*** **a** 105, 165, 195, 605, 615, 695, 905, 915, 965; **b** 910, 950, 960, 906, 916, 956; **c** 501, 561, 591, 651, 951, 105, 165, 195, 615, 159, 519, 609; **d** 105, 165, 615, 195, 915. **4 a** 120; **b** 140, 240, 340, 440, 540, 640, 740, 840, 940; **c** 6 300, 6 310, 6 320, ..., 6 390; **d** 910, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990. **5 a** 190, 192, 194, 196, 198; **b** 500, 522, 544, 566, 588; **c** 708, 718, 728, ..., 798; **d** 202, 404, 606, 808. **6 a** 740, 745; **b** 800, 810, 820, ..., 890; **c** 4 020, 4 525; **d** 1 510, 2 520, 3 530, ..., 9 590, 1 515, 2 525, 3 535, ..., 9 595. **7 a** 705, 735, 765, 795; **b** 981, 984, 987; **c** 4 080, 4 383, 4 686, 4 989. **8 a** 153; **b** 279; **c** 3 330, 3 339; **d** 12 060, 12 150, 12 240, 12 330, 12 420, 12 510, 12 600, 12 690, 12 780, 12 870, 12 960. **9 a** 0; **b** 2, 5 sau 8; **c** 0 sau 5; **d** 0, 2, 4, 6 sau 8; **e** 6; **f** 1, 4 sau 7; **g** 0; **h** 7. **10 a** b poate lua una dintre valorile 0, 2, 4, 6 sau 8. Din $a + b + 8 + 7 = 29$, obținem $a + b = 14$. Dacă $b = 8$, atunci $a = 6$ și obținem numărul 8 768. Dacă $b = 6$, atunci $a = 8$ și obținem numărul 8 786. Dacă b ia valorile 0, 2 sau 4, atunci a nu este cifră. **b** 33 970. **c** 45 020, 45 110, 45 200. **11 a** 720, 750, 780. **b** 9 060, 9 360, 9 660, 9 990, 9 165, 9 465, 9 765. **c** 52 650, 42 642, 32 634, 22 626, 12 618. **12** Studiind ultima cifră a lui A obținem n par.

Autoevaluare. **1** D. **2** A. **3 a** Nu, 7 374 nu este divizibil cu 9, întrucât $7 + 3 + 7 + 4 = 21$, care nu este divizibil cu 9. **b** Numărul de locuri din noua tribună este divizibil cu 5, deci are ultima cifră 5, adică $a = 5$. Numărul total de locuri al stadionului este $7\,374 + 5\,685 = 13\,059$, care este divizibil cu 9, deoarece $1 + 3 + 0 + 5 + 9 = 18$, care este divizibil cu 9.

Lecția 3. Numere prime. Numere compuse

2 a 3; **b** 3; **c** 5; **d** 2; **e** 13; **f** 17. **3 a** 1, 3, 7; **b** 1, 3, 9; **c** 1, 2, 4, 5, 7, 8; **d** 1, 3, 7, 9; **e** 1; **f** 3, 6. **4 a** 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8; **b** 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9; **c** 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9; **d** 2, 5, 8, 9; **e** 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9; **f** 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9. **5** De exemplu: **b** $22 = 3 + 19$; **c** $46 = 53 - 7$; **d** $26 = 29 - 3$; **e** $77 = 7 \cdot 11$; **f** $39 = 3 \cdot 13$. **7a** (13,2); (11,4); (7,8); (5,10); **b** (2,73), (73,2); **c** (43,2); **d** (5,17), (17,5). **8a** Studiem cazuri după valorile lui b; obținem $a = 13$, $b = 2$; **b** $a = 11$, $b = 5$; **c** $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$ sau $a = 11$, $b = 3$, $c = 3$. **9a** $n = 0$; **b** $n = 1$; **c** $n = 7$. **10a** $A = (2^n + 1) \cdot (3^n + 1)$; **b** $B = (3^n + 5) \cdot (5^n + 1)$. **11** $n = 0$ sau $n = 1$ nu convin. Pentru $n = 2$, se obțin numerele prime 3, 13 și 29. Pentru $n \geq 3$, vom studia cazurile $n = 3k$, $n = 3k + 1$ sau $n = 3k + 2$. În fiecare dintre cele trei cazuri obținem cel puțin un număr compus din cele 3.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** Nu, deoarece $\overline{7b}$ ar fi număr impar, deci suma $2a + 7b + 6c$ ar fi egală cu un număr impar, iar 78 este par. **b** $\overline{7b}$ este număr par, deci $b = 2$. Obținem $a + 3c + 32$, deci (a, b, c) pot fi (11, 2, 7), (17, 2, 5) sau (23, 2, 3). Din condiția asupra sumei rezultă că $a = 17$, $b = 2$ și $c = 5$.

Recapitulare și evaluare. **1** b. **2** d. **3** c. **4** d. **5** b. **6** b. **7** c. **8** b. **9** F, F, A, F. **10** $(a, 2)$, $(b, 4)$, $(c, 1)$. **11** De exemplu: (36,2), (45,5), (84,3). **12** De exemplu (2,80), (3,39), (5,75). **13** $a = 7$, $b = 3$. **14** $n = 24 \cdot c + 15 = 3 \cdot (8c + 5)$ care este divizibil cu 3. Deoarece $24 \cdot$ c este număr par și 15 este număr impar, obținem că $24 \cdot c + 15$ este număr impar.

Unitatea 4. Fracții ordinare

Lecția 1. Fracții ordinare. Fracții echivalente. Procente

2 a g i j l subunitare; **b f h** echiunitare; **c d e k** supraunitare. **3 a** 3; **b** 0, 1; **c** 0, 1, 2; **d** 3. **4 a** Horia 38%, Ioana 15%, Radu 18%, Eva 20%; **b** 56%; **c** 35%; **d** 9%. **5** Perechi de fracții echivalente sunt la **a b d g i**. **6 a** 30; **b** 8; **c** 48; **d** 6; **e** 12; **f** 4; **g** 2; **h** 4; **i** 4.

Autoevaluare. **1** B. **2** C. **3 a** 0, 1, 2, ..., 12. **b** 98.

Lecția 2. Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător. Reprezentarea fracțiilor pe axa numerelor

1 a $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}, \frac{12}{7}, \frac{14}{7}$; **b** $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{9}{9}, \frac{11}{9}, \frac{16}{9}$; **c** $\frac{4}{91}, \frac{4}{11}, \frac{4}{9}, \frac{4}{5}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}$. **2** $\frac{4}{7}<\frac{5}{7}$; $\frac{3}{5}<\frac{4}{5}$; $\frac{16}{25}<\frac{17}{25}$. **3 a** $\frac{2}{7}<\frac{4}{7}$; **b** $\frac{4}{9}<\frac{5}{9}$; **c** $\frac{3}{2}<\frac{5}{2}$. **4 a** $\frac{3}{7}<\frac{3}{5}$; **b** $\frac{5}{5}>\frac{5}{6}$; **c** $\frac{5}{4}>\frac{5}{8}$. **5** $A\left(\frac{2}{9}\right); B\left(\frac{6}{9}\right); C\left(\frac{8}{9}\right); D\left(\frac{11}{9}\right); E\left(\frac{14}{9}\right); M\left(\frac{16}{9}\right); N\left(\frac{20}{9}\right); P\left(\frac{23}{9}\right); R\left(\frac{26}{9}\right)$. **8** $\frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{6}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{3}{9}$. **9** Se obțin două puncte distincte, deoarece fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$ și $\frac{3}{6}$ sunt echivalente și, la fel, fracțiile $\frac{2}{2}, \frac{4}{4}$ și $\frac{5}{5}$ sunt echivalente. **10 a** 0,1 ; **b** 0 ; **c** 1 ; **d** 0, 1, 2.

Autoevaluare. **1** D. **2** A. **3 a** 6, 7, 8, ... **b** $\frac{2}{2n+1}, \frac{3}{2n+1}, ..., \frac{6}{2n+1}$.

Lecția 3. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție

1 a $1\frac{2}{5}$; **b** $2\frac{3}{5}$; **c** $3\frac{4}{5}$; **d** $5\frac{1}{5}$; **e** $5\frac{3}{8}$; **f** $7\frac{1}{9}$. **2 a** $\frac{15}{7}$; **b** $\frac{23}{7}$; **c** $\frac{31}{7}$; **d** $\frac{49}{9}$; **e** $\frac{59}{9}$; **f** $\frac{80}{9}$. **3 a** între 2 și 3; **b** între 2 și 3; **c** între 3 și 4; **d** între 3 și 4; **e** între 12 și 13; **f** între 7 și 8. **4** $3\frac{5}{6}$ kg.

Lecția 4. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

1 a $\frac{4}{20}$; **b** $\frac{16}{28}$; **c** $\frac{8}{100}$; **d** $\frac{116}{40}$; **e** $\frac{68}{200}$; **f** $\frac{140}{48}$. **2 a** $\frac{18}{12}$; **b** $\frac{12}{42}$; **c** $\frac{66}{18}$; **d** $\frac{24}{54}$; **e** $\frac{96}{150}$; **f** $\frac{66}{216}$. **3 a** $\frac{1}{7}$; **b** $\frac{4}{5}$; **c** $\frac{9}{2}$; **d** $\frac{13}{24}$; **e** $\frac{22}{33}$; **f** $\frac{12}{32}$. **4 a** $\frac{1}{2}$; **b** $\frac{2}{5}$; **c** $\frac{10}{3}$; **d** $\frac{8}{18}$; **e** $\frac{12}{15}$; **f** $\frac{5}{20}$. **5 a** $\frac{3}{12}$; **b** $\frac{16}{20}$. **6 a** 4; **b** 10. **7 a** 5; **b** 3. **8 a** $\frac{1}{18}$; **b** $\frac{8}{11}$; **d** $\frac{49}{64}$; **f** $\frac{25}{27}$. **9 a** $\frac{1}{4}$; **b** $\frac{7}{3}$; **c** $\frac{3}{5}$; **d** $\frac{1}{2}$; **e** $\frac{7}{4}$; **f** $\frac{8}{25}$. **10 a** Din $3n+1<20$ obținem $n \le 6$. Fracții ireductibile se obțin dacă n este 0, 2, 4 sau 6. **b** n poate fi 0,1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12 sau 13. **11 a** $\overline{64a}$ se divide cu 5, deci a este 0 sau 5. Fracțiile sunt $\frac{640}{885}$ și $\frac{645}{885}$. **b** Suma cifrelor numerelor $\overline{11a2}$ și $\overline{2b70}$ trebuie să fie divizibilă cu 3; a poate fi 2, 5 sau 8; b poate fi 0, 3, 6 sau 9. **12** Fracția scrisă de Radu se obține în urma simplificării fracției $\frac{18}{36}$. Divizorii comuni diferiți de 1 ai numerelor 18 și 36 sunt 2, 3, 6, 9 și 18. Radu a scris una dintre fracțiile: $\frac{9}{18}, \frac{6}{12}, \frac{3}{6}, \frac{2}{4}$ sau $\frac{1}{2}$.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3** a 0, 1, 2, 4, 6, 7, 8. **b** $a=4$.

Lecția 5. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

1 a $\frac{3}{6}, \frac{5}{6}$; **b** $\frac{2}{8}, \frac{3}{8}$; **c** $\frac{16}{84}, \frac{13}{84}$; **d** $\frac{30}{96}, \frac{49}{96}$. **2 a** ${}^{15)}\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, ${}^{2)}\frac{7}{15}=\frac{14}{30}$, $\frac{1}{2}>\frac{7}{15}$; **b** ${}^{25)}\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$, ${}^{4)}\frac{16}{25}=\frac{64}{100}$, $\frac{3}{4}>\frac{16}{25}$; **c** ${}^{9)}\frac{3}{14}=\frac{27}{126}$, ${}^{14)}\frac{2}{9}=\frac{28}{126}$, $\frac{2}{9}>\frac{3}{14}$; **d** ${}^{5)}\frac{7}{12}=\frac{35}{60}$, ${}^{12)}\frac{8}{5}=\frac{96}{60}$, $\frac{8}{5}>\frac{7}{12}$. **3 a** $[10,15]=30$; ${}^{3)}\frac{1}{10}=\frac{3}{30}$, ${}^{2)}\frac{11}{15}=\frac{22}{30}$; **b** $[12,20]=60$; ${}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$, ${}^{3)}\frac{9}{20}=\frac{27}{60}$; **c** $[18,27]=54$; ${}^{3)}\frac{7}{18}=\frac{21}{54}$, ${}^{2)}\frac{8}{27}=\frac{16}{54}$; **d** $[14,49]=98$; ${}^{7)}\frac{3}{14}=\frac{21}{98}$, ${}^{2)}\frac{5}{49}=\frac{10}{98}$. **4 a** $\frac{6^{(6}}{12}=\frac{1}{2}$, $\frac{14^{(7}}{21}=\frac{2}{3}$; ${}^{3)}\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, ${}^{2)}\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; **b** $\frac{5^{(5}}{20}=\frac{1}{4}$, $\frac{22^{(11}}{55}=\frac{2}{5}$; ${}^{5)}\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$, ${}^{4)}\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$; **c** $\frac{9^{(9}}{27}=\frac{1}{3}$, $\frac{9^{(9}}{36}=\frac{1}{4}$; $\frac{1^{(4}}{3}=\frac{4}{12}$, ${}^{3)}\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$; **d** $\frac{48^{(12}}{60}=\frac{4}{5}$, $\frac{32^{(8}}{56}=\frac{4}{7}$; ${}^{7)}\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$, ${}^{5)}\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$. **5** $[10,3,5]=30$; ${}^{3)}\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$, ${}^{10)}\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$, ${}^{6)}\frac{4}{5}=\frac{24}{30}$; $\frac{24}{30}>\frac{21}{30}>\frac{20}{30}$, deci echipa galbenă a câștigat cele mai puține meciuri. **6 a** ${}^{4)}\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$, ${}^{2)}\frac{7}{10}=\frac{14}{20}$, ${}^{5)}\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $\frac{14}{20}<\frac{15}{20}<\frac{16}{20}$; **b** ${}^{24)}\frac{2}{3}=\frac{48}{72}$, ${}^{8)}\frac{4}{9}=\frac{32}{72}$, ${}^{3)}\frac{20}{24}=\frac{60}{72}$; $\frac{32}{72}<\frac{48}{72}<\frac{60}{72}$; **c** ${}^{20)}\frac{11}{12}=\frac{220}{240}$, ${}^{15)}\frac{6}{16}=\frac{90}{240}$, ${}^{8)}\frac{25}{30}=\frac{200}{240}$; $\frac{90}{240}<\frac{200}{240}<\frac{220}{240}$; **d** $3\frac{1}{6}={}^{2)}\frac{19}{6}=\frac{38}{12}$, $1\frac{2}{3}={}^{4)}\frac{5}{3}=\frac{20}{12}$, $2\frac{3}{4}={}^{3)}\frac{11}{4}=\frac{33}{12}$; $\frac{20}{12}<\frac{33}{12}<\frac{38}{12}$.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** al doilea copil. **b** 15.

Lecția 6. Adunarea și scăderea fracțiilor

1 a $\frac{4}{5}$; **b** $\frac{8}{13}$; **c** $\frac{13}{15}$; **d** $\frac{20}{21}$. **2 a** $\frac{14}{15}$; **b** $\frac{34}{93}$; **c** $\frac{5}{32}$; **d** $\frac{8^{(2}}{42}=\frac{4}{21}$. **3 a** $\frac{5}{8}$; **b** $\frac{91}{42}$; **c** $\frac{5}{12}$; **d** $\frac{2}{3}$; **e** $\frac{1}{12}$; **f** $\frac{1}{12}$; **g** $\frac{4}{15}$; **h** $\frac{1}{3}$. **4 a** $3\frac{4}{7}$; **b** $4\frac{1}{2}$; **c** $5\frac{11}{15}$; **d** $4\frac{23}{28}$; **e** $4\frac{2}{3}$; **f** $1\frac{1}{6}$; **g** $3\frac{6}{7}$; **h** $1\frac{1}{4}$. **5 a** $\frac{1}{3}$; **b** $\frac{8}{9}$; **c** $\frac{17}{36}$; **d** $\frac{2}{3}$. **6** $\frac{5}{17}$. **7** $12\frac{9}{10}$ metri. **8** Solul A: $1\frac{1}{12}$ cm, solul B: $1\frac{1}{12}$ cm, solul C $\frac{1}{2}$ cm. **9** $6\frac{11}{12}$ litri. **10** $\frac{6}{7}$ și $\frac{6}{21}$.

Autoevaluare. **1** D. **2** D. **3 a** $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. **b** $\frac{1}{4}$.

Lecția 7. Înmulțirea fracțiilor

1 a $\frac{6}{7}$; **b** $\frac{28}{31}$; **c** $\frac{55}{78}$; **d** $\frac{91}{99}$; **e** $\frac{8}{21}$; **f** $\frac{20}{33}$; **g** $\frac{21}{80}$; **h** $\frac{44}{85}$. **2 a** $\frac{6}{5}$; **b** $\frac{5}{6}$; **c** $\frac{2}{15}$; **d** $\frac{5}{33}$; **e** $\frac{7}{24}$; **f** $\frac{1}{15}$; **g** $\frac{5}{6}$; **h** $\frac{3}{20}$. **3 a** 28; **b** $2\frac{2}{5}$; **c** $7\frac{1}{5}$; **d** 9. **4 a** $\frac{1}{11}$; **b** $\frac{3}{2}$; **c** $\frac{1}{39}$; **d** $\frac{1}{3}$. **5 a** $\frac{18}{49}=\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{7}$; **b** $\frac{15}{28}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$; **c** $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$; **d** $\frac{5}{7}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{7}$ (sunt și alte posibilități). **6** Grosimea tuturor CD-urilor este de $24\cdot\frac{3}{2}$ cm $=36$ cm, deci încap în cutie. **7 a** Pentru 4 perdele se folosesc $4\cdot\frac{23}{5}=\frac{92}{5}=18\frac{2}{5}$ metri de material. Cum $18\frac{2}{5}>18$, nu se pot confecționa 4 perdele. **b** Pentru 6 perdele sunt necesari $6\cdot\frac{23}{5}=27\frac{3}{5}$ metri, deci ajung 28 metri de material. **8 a** $\frac{1}{8}$; **b** $\frac{1}{5}$.

Autoevaluare. **1** B. **2** D. **3 a** $\frac{3}{2}$kg, $\frac{21}{5}$ pahare de apă, $\frac{9}{4}$ lingurițe de esență. **b** $\frac{1}{6}, \frac{7}{15}, \frac{1}{4}$.

Lecția 8. Împărțirea fracțiilor

1 a $\frac{13}{11}$; **b** $\frac{7}{16}$; **c** $\frac{9}{47}$; **d** $\frac{7}{50}$. **2 a** $\frac{15}{8}$; **b** $\frac{44}{35}$; **c** $\frac{7}{23}$; **d** $\frac{3}{8}$; **e** $\frac{8}{33}$; **f** $\frac{11}{36}$; **g** $\frac{47}{19}$; **h** $\frac{10}{13}$. **3 a** $\frac{5}{7}$; **b** $\frac{9}{8}$; **c** $\frac{4}{3}$; **d** $\frac{6}{11}$; **e** $\frac{28}{9}$; **f** $\frac{10}{7}$; **g** $\frac{1}{8}$; **h** $\frac{3}{8}$. **4 a** $\frac{10}{3}$; **b** $\frac{1}{6}$; **c** $\frac{1}{2}$; **d** $\frac{8}{5}$. **5 a** $\frac{8}{9}$; **b** $\frac{20}{27}$. **6 a** $\frac{5}{2}$; **b** $\frac{1}{16}$; **c** $\frac{1}{5}$. **7 a** $2\frac{3}{10}:\frac{3}{5}=\frac{23}{10}\cdot\frac{5}{3}=\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$, deci Radu taie trei bucăți de $\frac{3}{5}$ metri. **b** Lungimea porțiunii rămase este $\frac{23}{10}-3\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ metri. **8** $200:7\frac{1}{2}=200:\frac{15}{2}=200\cdot\frac{2}{15}=\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$, deci poate confecționa 26 de ecusoane.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** 10 zile. **b** $\frac{7}{8}$km.

Lecția 9. Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

1 a $\frac{1}{128}$; **b** $\frac{32}{243}$; **c** $\frac{64}{729}$; **d** $\frac{1\,331}{343}$; **e** $\frac{625}{256}$; **f** 1; **g** $\frac{19}{43}$; **h** 1. **2 a** $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$; **b** $\left(\frac{3}{10}\right)^{13}$; **c** $\left(\frac{11}{5}\right)^{10}$; **d** $\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$; **e** $\frac{8}{3}$; **f** $\left(\frac{13}{17}\right)^{2}$; **g** $\left(\frac{2}{15}\right)^{55}$; **h** $\left(\frac{14}{27}\right)^{24}$; **i** $\left(\frac{3}{100}\right)^{0}=1$. **3 a** 1; **b** $\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$; **c** $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; **d** $\left(\frac{1}{3}\right)^{5}$; **e** $\left(\frac{4}{3}\right)^{6}$; **f** $\left(\frac{5}{4}\right)^{12}$. **4 a** $\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$; **b** $\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$; **c** $\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$. **5 a** $\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$; **e** $\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$; **f** $\left(\frac{7}{6}\right)^{3}$.

Lecția 10. Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

1 a 25; **b** 224; **c** 30; **d** 333; **e** 88; **f** 72; **g** 39; **h** 1 078. **2 a** $\frac{1}{7}$; **b** 1; **c** $\frac{21}{19}$; **d** $1\frac{1}{2}$; **e** $\frac{2}{3}$; **f** $2\frac{4}{7}$; **g** $\frac{5}{9}$; **h** $3\frac{2}{3}$. **3 a** 1; **b** 1; **c** 4; **d** 45; **e** 64; **f** 324; **g** 416; **h** 252. **4 a** 84 kg; **b** 56 l; **c** 840 lei; **d** 35 km. **5** $3\frac{3}{4}$ metri. **6** $2\frac{1}{4}$ km. **7** S-au vândut 375 de bilete cu 14 lei, 1 400 de bilete cu 10 lei și 725 de bilete cu 5 lei; s-au încasat în total 22 875 lei. **8** 140 parcele cu grâu, 84 parcele cu floarea soarelui. **9** 3% din 4 800 lei este 144 lei. Prețul se mărește cu 144 de lei și devine 4 944 de lei. **10** 12% din 2 400 lei este 288 lei. Prețul scade cu 288 de lei și devine 2 112 lei. **11** Lungimea drumului este 9 km$:\frac{3}{5}=15$ km. Au rămas de parcurs 6 km. **12** $24:\frac{6}{11}=44$ de volume. **13** Masă: 93 600 lei, întreținere 41 400 lei, transport 16 200 lei, activități culturale 12 600 lei, activități sportive 9 000 lei, alte cheltuieli 7 200 lei. **14 a** $\frac{2}{5}$ kg castraveți. **b** Se folosesc $\frac{7}{4}$ kg pentru 7 salate Gourmet și $\frac{9}{5}$ kg pentru 9 salate Caesar; $\frac{9}{5}=\frac{36}{20}, \frac{7}{4}=\frac{35}{20}; \frac{9}{5}>\frac{7}{4}$, deci mai multe roșii se folosesc la salatele Gourmet. **c** Salata Caesar cântărește $\frac{49}{60}$ kg, iar salata Gourmet cântărește $\frac{26}{35}$ kg; $\frac{49}{60}>\frac{26}{35}$, deci salata Caesar cântărește mai mult.

Autoevaluare. **1** B. **2** A. **3 a** 12. **b** 4.

Unitatea 5. Fracții zecimale

Lecția 1. Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

1 a 0,3; **b** 2,07; **c** 0,043; **d** 20,008; **e** 6,07; **f** 0,09. **2 a** 2; 7. **b** 26; 0,784. **c** 8; 2 678; **d** 26 784; 4. **3** 0,2; 0,32; 0,0032; 0,007; 25,67; 79,58; 0,079. **4** $\frac{2}{100}; \frac{1\,023}{1\,000}; \frac{4\,532}{100}; \frac{156\,003}{1\,000}; \frac{78}{10}; \frac{9}{10}$. **5** $\left(\frac{123}{1\,000}; 0{,}123\right), \left(\frac{234}{1\,000}; 0{,}234\right)$. **6** Se amplifică fracțiile ordinare cu: 4, 2, 5, 8, 2, 4, 4, 2, respectiv 5. **7 a** 43,56; **b** 305,107. **8 a** $n = 637$; **b** $n = 3$; **c** $n = 130$.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** fals. **b** 100 bidoane.

Lecția 2. Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1 a $1{,}7 < 1{,}8$; **b** $23{,}5 = 23{,}50 < 23{,}51$; **c** $304{,}2 > 204{,}2$; **d** $15{,}7 = 15{,}70$; **e** $0{,}34 < 0{,}44$; **f** $0{,}07 > 0{,}007$. **2 a** >; **b** <; **c** >; **d** > . **3 a** F; **b** A; **c** A; **d** A; **e** F; **f** A. **4 a** ordine crescătoare: 0,09; 0,5; 4,25; 7,9; 63,7; ordine descrescătoare: 63,7; 7,9; 4,25; 0,5; 0,09. **6 a** 23,15; **b** 23,1; **c** 23; **d** 20. **7 a** $3 < 3{,}12 < 4$; **b** $0 < 0{,}5 < 1$; **c** $6 < 6{,}29 < 7$; **d** $23 < 23{,}24 < 24$. **8 a** 7,211; 7,213; 7,229; **b** 6,192; 6,194; 6,197; **c** 8,3421; 8,3423; 8,3428; **d** 7,004; 7,125; 7,264. **9** $370 < n \leq 527$; numerele căutate sunt 371, 372, ..., 527, adică $527 - 371 + 1 = 157$ numere.

Autoevaluare. **1** B. **2** C. **3 a** $F = 12{,}32$, $f = 12{,}40$. **b** $36 + 100 + 100 = 236$ fracții.

Lecția 3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1 a 10,8; **b** 9; **c** 4,39; **d** 221,72; **e** 59,82; **f** 105,325. **2** 151,25. **3**15,37. **4 a** 3,5; **b** 5,8; **c** 8,54; **d** 25,39; **e** 19,002; **f** 201,91. **5** 8,9. **6** 88,35. **7** 76. **8 a** 9,4; **b** 17,9; **c** 76,36; **d** 302,7; **e** 22,5429; **f** 52,4407. **9 a** 4,5; 3,23; **b** 28,65; 17,45. **10** $a = 1$, $b = 2$ sau $a = 2$, $b = 1$. **11** $D - S = d$ și $(D + 23{,}456) - (S - 1{,}544) = D - S + 23{,}456 + 1{,}544 = D - S + 25 = d + 25$; diferența se mărește cu 25. **12 a** Numărul căutat este 458; **b** Numărul căutat este 1 110. **13** Răspuns corect, **a** mai mic decât 10 lei.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** 72,65 lei. **b** Poate cumpăra o carte și un caiet sau un caiet și un penar; trebuie să renunțe, ori la penar ori la carte.

Lecția 4. Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1 a 23; **b** 17,3; **c** 3; **d** 1 251; **e** 49 537; **f** 253; **g** 42 003,5; **h** 20. **2 a** 6; **b** 8,25; **c** 411,57; **d** 448,224; **e** 11 023,76; **f** 3 490,63. **3 a** 1,027 kg; **b** 0,276 l. **4 a** 26,6; **b** 22,264; **c** 147,2115; **d** 8,82688; **e** 0,648; **f** 430,752. **5 a** 9; **b** 84; **c** 362,8; **d** 112,416; **e** 66,48; **f** 1,075; **g** 5,103; **h** 47,6. **6 a** 323,925 m; **b** 6,04 kg. **7** $15{,}75 < a \cdot b < 21$; de exemplu $15 < a \cdot b < 21$. **8 a** $3{,}7 \cdot 5 = 18{,}5$; **b** $6{,}12 \cdot 0{,}2 = 1{,}224$; **c** $15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$; **d** $0{,}19 \cdot 100 = 19$. **9 a** $2 \cdot 0{,}1 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}1 = 10 \cdot 0{,}1 = 1$; **b** 27; **c** 56; **d** 534; **e** 436,8; **f** 15,7. **10** $4{,}2 - 3{,}14 = 1{,}06$; $5{,}3 \cdot 0{,}81 = 4{,}293$; $12{,}6 + 4{,}08 = 16{,}68$. **11** $3{,}36 < a \cdot b < 4{,}16$; $n = 3$. **12** $a \cdot b = 9{,}45$ și $(a + 1) \cdot b = 12{,}95$ sau $a \cdot b + b = 12{,}95$; $b = 12{,}95 - 9{,}45 = 3{,}5$. **13 a** $6{,}51 = 0{,}651 \cdot 10^1 = 0{,}0651 \cdot 10^2$; **b** $18{,}33 = 1{,}833 \cdot 10^1 = 0{,}1833 \cdot 10^2$; **c** $378{,}123 = 37{,}8123 \cdot 10^1 = 3{,}78123 \cdot 10^2 = 0{,}378123 \cdot 10^3$. **14** $4{,}3 \odot 2{,}5 = 12{,}24$.

Autoevaluare. **1** A. **2** D. **3 a** 9 km. **b** Cu $14{,}4 - 12{,}6 = 1{,}8$ km mai mult.

Lecția 5. Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multor numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate

1 a 4,6; **b** 21,25; **c** 0,7; **d** 0,28; **e** 1,18; **f** 47,2; **g** 3,655; **h** 0,064. **2** 0,8; 1,(6); 4,6; 20,5; 4,25; 3,(2); 1,4(6); 95,676; 3,04; 2,08(3); 546,472; 0,0688. **3 a** 1,1(6); **b** 2,4(6); **c** 2,(7); **d** 25,91(6); **e** 0,72; **f** 0,037; **g** 1,975; **h** 109,(6). **4 a** 24; **b** 32; **c** 4,5; **d** 7,7; **e** 2,44; **f** 3,8. **5** 24,4. **6** 21,42. **7** Fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale periodice simple: $\frac{8}{9}, \frac{1}{13}, \frac{239}{17}, \frac{45}{43}, \frac{25}{75}$; fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale periodice mixte: $\frac{5}{6}, \frac{2}{45}, \frac{1}{62}, \frac{37}{15}, \frac{403}{600}$. **8 a** $n = 10$; **b** $n = 1$; **c** $n = 5$. **9 a** $n = 5$; **b** $n = 13$; **c** $n = 0$. **10 a** $2\,012 - 1 = 2\,011$; $2\,011 : 2 = 1\,005$ rest 1; a 2012-a zecimală este 3; **b** $S = 3 + 49 \cdot (3 + 5) + 3 = 398$. **11 a** $32{,}126 = 321{,}26 : 10^1 = 3\,212{,}6 : 10^2$; **b** $25{,}48 = 254{,}8 : 10^1 = 2\,548 : 10^2$; **c** $672{,}9873 = 6\,729{,}873 : 10^1 = 67\,298{,}73 : 10^2$. **12** 8. **13 a** 15; **b** 254,5; **c** 7,7; **d** 11,66; **e** 28,92; **f** 17,4. **14 a** 21,1; **b** 4 758; **c** 46. **15** 7. **16 a** suma notelor, S, este egală cu 180, deci media notelor este 7,5; **b** calculam suma notelor mai rapid astfel $S = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 = 180$. **17** $a + b + c = 132$, $b = a + 18$, $c = 2 \cdot a$, $d = a + 9$; obinem $a = 21$, $b = 39$, $c = 42$, $d = 30$. **18** $a = 34$, $b = 30$, $c = 48$. **19 a** 8; **b** 7,5; **c** 8.

Autoevaluare. **1** B. **2** A. **3 a** 2. **b** $3 + 1 + 32(3 + 2 + 5) + 3 + 2 = 329$.

Lecția 6. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

1 a 2,86; **b** 0,635; **c** 13,9475; **d** 3,885; **e** 12,011; **f** 7,82; **g** 16,275; **h** 7,54. **2 a** 0,02345; **b** 6,75; **c** 9,123; **d** 1,578; **e** 1,29567; **f** 0,0004; **g** 0,01234; **h** 0,075. **3 a** 0,65 tone; **b** 24,096 kg; **c** 0,2345 kg. **4** 2,63; 0,058; 3,271; 5,003; 44,87324; 0,252525; **5 a** 12; **b** 11,2; **c** 3; **d** 29,2625; **e** 5672; **f** 800; **g** 5,90625; **h** 17,94. **6 a** $2\frac{5}{9}$, $13\frac{7}{9}$, $125\frac{8}{9}$, $\frac{29}{99}$, $4\frac{37}{99}$, $125\frac{106}{999}$, $29\frac{471}{999}$; **b** $\frac{25}{90}$, $4\frac{59}{90}$, $8\frac{214}{900}$, $16\frac{1\,421}{9\,900}$, $200\frac{79\,046}{99\,900}$. **7 a** 185; **b** 250,15; **c** 10; **d** 20; **e** 100. **8 a** 1 666,(6); **b** 2 100; **c** 426,(6); **d** 26 666,(6); **e** 36,(6). **9** 23,789 : 100 = 0,23789; 237,89 : 100 = 2,3789; 2,3789 : 100 = 0,023789. **10 a** 5,5(6); **b** 3,7(08).

Lecția 7. Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive

1 a 15,4; **b** 3,27; **c** 4,4; **d** 1,524; **e** 41,2; **f** 129,8; **g** 1,6588; **h** 9. **2 a** $\frac{5}{8}$; **b** $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; **c** $\frac{17}{18}$; **d** $\frac{28}{3}$; **e** $\frac{17}{7}$; **f** $Z\frac{5}{11}$. **3 a** 22,7; **b** 4,15; **c** 27,027; **d** 13,86; **e** 68,7; **f** 374,829. **4 a** 43,4; **b** 131,12; **c** 47,92; **d** 34,62; **e** 1,732; **f** 9,01. **5 a** $\frac{43}{45}$; **b** 7; **c** $\frac{5}{18}$; **d** 14. **6 a** 83,7; **b** 228; **c** 9,84; **d** 640; **e** 25,5; **f** 34,162; **g** 1; **h** 90. **7** 2,86; 0,371; 0,36; 0,385. **8 a** $\frac{2}{9}$; **b** 3; **c** 0; **d** $\frac{1}{2}$. **9 a** Model 1: (12,56 + 41,275 + 29,11) · 10 = 829,45. Model 2: 12,56 · 10 + 41,275 · 10 + 29,11 · 10 = = 829,45. **b** 5 km. **c** 10 zile.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** fals. **b** (18,16 – 12,3) : 2,5 = 2,344.

Lecția 8. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții

1 40% din 25 de pătrate reprezintă 10 pătrate. Aplicând metoda reducerii la unitate, obținem că acoperirea unui pătrat costă 27,95 lei și toată gresia costă 698,75 lei. **2 a** Nu este posibil, deoarece 9 cărți costă 54 de lei, ceea ce depășește valoarea coletului. **b** Aplicăm metoda falsei ipoteze: 7 cărți și 5 caiete. **3** 1 200 de tone de orz și 7 200 de tone de grâu. **4** Aplicăm metoda reducerii la unitate; 1,350 kg. **5** Aplicăm metoda mersului invers. Din î : 2 : 2 : 2 = 80 cm, obținem î = 640 cm. **6 b** Din (m + 1) kg : $1{,}50^2$ = 20, aplicând metoda mersului invers, obținem că masa lui Radu este m = 44 kg și are indicele 19,(5). **7** 5 lei, respectiv, 4 lei. **8 a** Nu este posibil. Dacă ar fi răspuns corect la toate întrebările, ar fi primit 100 de puncte, iar dacă ar fi răspuns greșit la o întrebare, ar fi primit 93,5 puncte. **b** La un răspuns greșit, Edi este penalizat cu 6,5 puncte. Aplicând metoda falsei ipoteze, obținem că Edi a dat 18 răspunsuri corecte. **9** Este adevărată. **10** Aflăm a câta parte din bazin umple leul: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$. Deducem că leul va umple bazinul într-o zi. **11** Aplicăm metoda comparației. Debitul unui robinet este egal cu 5,4 hl, iar al unei pompe cu 16,2 hl. Cele 5 pompe ar umple bazinul în $\frac{19}{15}$ ore = o oră și $\frac{4}{15}$ din 60 de minute, adică într-o oră și 16 minute. **12** Aplicând metoda mersului invers, obținem x = 0,4(6). **13 a** Nu este posibil, deoarece $\frac{2}{7}$ din 15 nu este număr natural. **b** Aplicăm *metoda mersului invers* și *metoda figurativă.* Deoarece 60% din rest fac tumbe, deducem că 40% din rest aplaudă. Reprezentăm restul cu 5 părți. Atunci cele 4 maimuțe reprezintă două părți. Restul este egal cu 10 maimuțe. Reprezentând numărul total al maimuțelor cu 7 părți, deducem că cele 10 maimuțe reprezintă 5 părți. Erau 14 maimuțe. **14** Reprezentăm cantitatea de lapte cu 10 părți. În prima zi s-a consumat 40% din 10 părți, adică 4 părți. A doua zi s-au consumat 4 părți și încă un litru. Deci două părți reprezintă 12 litri. Inițial se aflau în bidon 60 litri de lapte. **15** Semiperimetrul este egal cu 384 m **:** 2 = 192 m. Aplicăm *metoda figurativă*: reprezentăm lățimea cu 3 părți, iar jumătate din lungime cu două părți și încă 26 m. Atunci lungimea reprezintă 4 părți și încă 52 m. O parte reprezintă (192 m – 52 m) : 7 = 20 m. Lungimea grădinii este egală cu 132 m.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** Nu este posibil, deoarece, dacă 40% din rest ar reprezenta 3,5 km, atunci 60% din rest nu poate reprezenta 3,3 km. **b** Reprezentăm lungimea traseului cu 15 părți. În prima etapă a parcurs o treime din traseu, ceea ce reprezintă 5 părți. În a doua etapă a parcurs 40% din restul de 10 părți, adică 4 părți. Restul de 6 părți reprezintă 3,3 km. Traseul măsura 8,25 km.

Recapitulare și evaluare. **1** a. **2** b. **3** c. **4** a. **5** a. **6** c. **7** b. **8** a. **9** d. **10** c. **11** b. **12** c. **13** Semiperimetrul este egal cu 516 m : 2 = 258 m. Aplicăm *metoda figurativă,* reprezentând lungimea cu 5 părți și lățimea cu 3 părți. O parte reprezintă 258 m : 8 = 32,25 m. Lungimea este egală cu 161,25 m, iar lățimea este egală cu 96,75 m. **14** Fie s suma inițială. La Piață a cheltuit $\frac{3}{7}\cdot s$ și i-a rămas un rest, $r_1=\frac{4}{7}\cdot s$. La carmangerie a cheltuit 40% · r_1 și i-a rămas un rest, r_2 = 60% · r_1 = 120 lei. Aplicând *metoda mersului invers,* obținem r_1 = 200 lei și apoi s = 350 lei.

Lecția 9. Probleme de organizare a datelor. Frecvență. Grafice cu bare. Grafice cu linii. Media unui set de date statistice

1 a Clasa a V-a A: fotbal 12, handbal 4, baschet 7; a V-a B: handbal 6, total 25; a V-a C: handbal 12, baschet 9. În total, 31 de elevi preferă fotbalul și 22 preferă handbalul. **b** fotbalul (31 de elevi); **c** $\frac{22}{80} = 27{,}5\%$; **d** 30%. **2** Mihnea 6p, Cătălin 6p, Dana 8p, Mădălina 8p, Andrei 8p, Ștefan 10p. **4 a** clasa a VI-a; **b** $30\% \cdot 300 = 90$ de elevi; **c** În clasa a VI-a sunt $20\% \cdot 300 = 60$ de elevi, un număr mai mic decât 70% din numărul elevilor de clasa a VII-a, care înseamnă $70\% \cdot 90 = 63$ de elevi. **5 a** vineri; **b** aproximativ 27 de mașini. **6 a** media estimată este 6 (cele mai multe note); **b** media clasei este $\frac{10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{3 + 4 + 2 + 8 + 4 + 1} = 7$, mai mare decât media estimată. **7 a** 200 de bilete; **b** 15%; **c** 10%; **d** 3450 lei; **e** 17,25 lei.

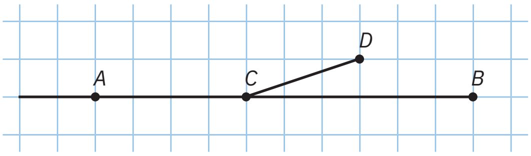
Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 a** 6; **b** 76%.

Unitatea 6. Elemente de geometrie și unități de măsură

Lecția 1. Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment de dreaptă

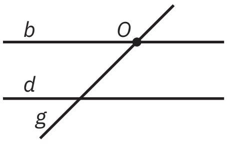
1 a *A* și *B* sunt puncte identice și notăm $A = B$; **b** *A* și *C* sunt puncte distincte și notăm $A \neq C$. **2 c** $A \neq B = C$. **3** Afirmația $A \neq C \neq B$ este adevărată. **5** *A* și *C* pot fi atât identice, cât și distincte, deoarece în ipoteză nu scrie *A* diferit de *C*. **6** Propozițiile **a** și **b** sunt adevărate, iar **c** este falsă. Desenul din figura 5 reprezintă semidreapta *EF*. **7 a** *A* și *B* se numesc extremitățile (capetele) segmentului *AB*. **b** Pentru semidreapta *EF*, punctul *E* indică originea, iar punctul *F* indică sensul. **8** Sunt 3 segmente: *AB*, *AC*, *BC*. **9** În figura 7 a notat greșit două puncte distincte cu aceeași literă. În figura 8 a desenat semidreapta *CD*, iar în figura 9 a desenat semidreapta *FE*. **10 a** segment de dreaptă; **b** segment de dreaptă; **c** o semidreaptă. **11 a** *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*; **b** *AC*, *AD*, *BC*, *BD*. **12 a** segment de dreaptă; **b** dreaptă; **c** punct; **d** semidreaptă; **e** punct; **f** plan; **g** semidreaptă. **14** Punct, semidreaptă, dreaptă, plan, semidreaptă, punct, triunghi, cerc, dreaptă, segment de dreaptă, respectiv, cub. **15 a** *BC* și *DE*; **b** *AB*, *BC* și *BD*; **c** *AC*, *AE*, *BC* și *CE*; **d** *AD* și *AC*; **e** *AD* și *BD*. **16** *B*, *I*, *N* sunt marcate vertical, în această ordine.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3** Vezi figura alăturată.



Lecția 2. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele

1 a adevărată. **2 c** *A*, *B* și *E*. **3 d** și **e** sunt false, iar celelalte sunt adevărate. **4 a** *G*, *E* și *O*. **b** punct interior; **c** punct exterior; **d** puncte coliniare; **e** puncte necoliniare; **f** drepte identice. **8** o infinitate de drepte. **9 a** identice; **b** o infinitate; **c** distincte; **d** dreaptă. **10 a** 3; **b** 6. **11 a** *AV* și *a*; *AV* și *b*; *AV* și *c*; **b** dreptele *a* și *b*; *b* și *c*; *a* și *c*; **c** *AB* și *a*; *TE* și *b*; *VF* și *c*. **13** Vezi figura. **15** Dacă $A = B = C$, determină o infinitate de drepte. Dacă $A = B \neq C$, atunci determină o singură dreaptă. Dacă $A \neq B \neq C \neq A$, atunci determină o dreaptă, dacă sunt coliniare, respectiv, 3 drepte, dacă sunt necoliniare. **16 a** Dacă punctele sunt coliniare, atunci determină o dreaptă. **b** Dacă oricare 3 puncte sunt necoliniare, atunci determină 28 de drepte distincte. **17** Dacă cele 3 drepte sunt paralele, numărul punctelor de intersecție este egal cu zero; dacă două dintre drepte sunt paralele, numărul punctelor de intersecție este egal cu 2; dacă cele 3 drepte sunt concurente în același punct, au un singur punct de intersecție, iar dacă sunt concurente două câte două, atunci există 3 puncte de intersecție.



Autoevaluare. **1** B. **2** B. **3 a** O singură dreaptă, dacă toate cele 20 de puncte sunt coliniare. **b** 190 de drepte distincte, dacă oricare 3 puncte din cele 20 sunt necoliniare.

Lecția 3. Lungimea unui segment. Distanța dintre două puncte. Segmente congruente

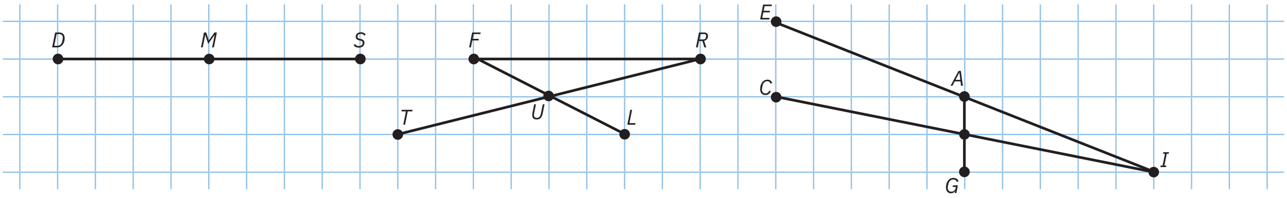
1 Ioana. **4** 18 cm. **5 b** 5 cm. **6** $AB = CD \Rightarrow d(A, B) = d(C, D)$. **7 i b** 1 154 m; **ii d** 1 275 m. **9 c** $AB \equiv BC$. **10 a** Segmentul *AB* este congruent cu segmentul *CD*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *CD*. **b** Lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *CD*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că segmentul *AB* este congruent cu segmentul *CD*. **c** Segmentul *AB* este congruent cu segmentul *CD* și segmentul *CD* este congruent cu segmentul *EF*. Aplicând tranzitivitatea relației de congruență, rezultă că segmentul *AB* este congruent cu segmentul *EF*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *EF*. **d** Lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *CD* și lungimea segmentului *CD* este egală cu lungimea segmentului *EF*. Aplicând tranzitivitatea relației de egalitate, rezultă că lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *EF*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că segmentul *AB* este congruent cu segmentul *EF*. **11** $AB = CD \Rightarrow AB \equiv CD$. **12** $AB \equiv AC \Rightarrow AC = AB = 3$ cm $\Rightarrow BC = AB + AC = 6$ cm. **13** $AB = AC \Rightarrow AB \equiv AC$. **14 a** $AB + BC = AC \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare, în această ordine. **b** $AB + AC = BC \Rightarrow B, A, C$ sunt coliniare, în această ordine. **c** $BC + AC > AB \Rightarrow A, B, C$ sunt necoliniare. **d** $AC + BC = AB \Rightarrow A, C, B$ sunt coliniare, în această ordine. **15** În funcție de ordinea punctelor avem $BC = 3$ cm sau $BC = 7$ cm. **16 a** Este posibil. $AB = 40$ m și $BC = 50$ m, iar 40 m = 80% din 50 m. **b** 200 m. **17** 8 cm. **18** 3 cm. **19 d** $E - U - C - L - I - D$. **20** Observăm că lungimea segmentului $A_nA_{n+1} = n$ cm; 6 cm, 4 cm, 19 cm, respectiv, $(1 + 2 + 3 + \ldots + 19)$ cm = 190 de cm. **21** Observăm că lungimea segmentului $A_nA_{n+1} = 3n$ cm; 57 cm, respectiv 570 cm. **22** $2AC = AB + AD \Leftrightarrow 2(AB + BC) = AB + (AB + BC + CD) \Leftrightarrow BC = CD$. Obținem $BC = 2^{11}$ cm : $2 = 2^{10}$ cm = 1 024 cm.

Autoevaluare. **1** D. **2** D. **3 a** *QR* este jumătate din *PQ*, ceea ce înseamnă că *PQ* reprezintă două treimi din *PR*, adică 8 cm. **b** Distingem două cazuri. Dacă *S* este punct interior segmentului *PQ*, atunci $PS = 5{,}6$ cm. Dacă *S* este punct interior segmentului *QR*, atunci $PS = 10{,}4$ cm.

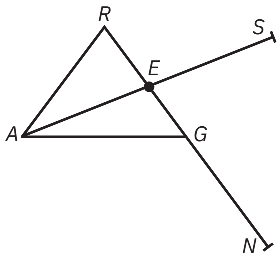
Lecția 4. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct

3 a 4 cm. **4 c** *M*. **5 b** Este falsă, deoarece formularea este greșită: mijlocul unui segment este un punct. **6** $AC = 5$ cm. **7** $BC = AC = 5 \text{ cm} \Rightarrow BC \equiv AC \Rightarrow C$ este mijlocul segmentului *AB*. **8 a** *F* este mijlocul segmentului $GH \Rightarrow FH \equiv FG \Rightarrow FH = FG = 4$ cm; $EH = 12$ cm; **b** 6 cm. **9** *M* este mijlocul segmentului $BC \Rightarrow MB \equiv MC \Rightarrow MB = MC = x$. *M* este mijlocul segmentului $AD \Rightarrow MA \equiv MD \Rightarrow MA = MD = y$; $AB = MA - MB = y - x$ și $CD = MD - MC = y - x$. Prin tranzitivitate, $AB = CD \Rightarrow AB \equiv CD$. **10** Ca la problema anterioară, $MB = MC = x$. Din $AB \equiv CD \Rightarrow AB = CD = t$. Atunci $MA = AB + BM = t + x$ și $MD = CD + CM = t + x \Rightarrow MA = MD \Rightarrow MA \equiv MD \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului *AD*. **11 a** 29,70 m : 16,5 = 1,8 m. **12 a** *I* este mijlocul segmentului *AD*. **b** *E* și *A* sunt simetrice față de *V*. **13 b** *D*. **14 a** *A* și *C* sunt simetrice față de *O*. **b** *B* este simetricul lui *D* față de *O*.

15



16

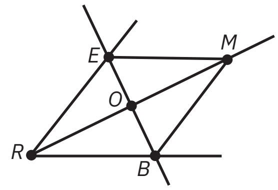


17 $ON = OT = 4$ cm. **18** $ON = OT = 5 \text{ cm} \Rightarrow ON \equiv OT \Rightarrow O$ este mijlocul segmentului $NT \Rightarrow T$ și *N* sunt simetrice față de *O*. **19 a** *C*, *E*, *A*, *S* sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $CE \equiv EA \equiv AS$. **b** Notăm $CE = EA = AS = 2x$. Fie *M* mijlocul segmentului $CS \Rightarrow MC \equiv MS \Rightarrow MC = MS = CS : 2 = 6x : 2 = 3x$; $ME = MC - CE = 3x - 2x = x$; $MA = MS - AS = 3x - 2x = x$. Deci $ME = MA \Rightarrow ME \equiv MA \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $EA \Rightarrow E$ și *A* sunt simetrice față de *M*. **20** $d(H, R) = 10 \text{ m} \Rightarrow HR = 10$ m; $d(D, H) = d(D, R) = 10 \text{ m} : 2 = 5$ m. *D* și *H* sunt simetrice față de $I \Rightarrow$ $\Rightarrow I$ este mijlocul segmentului $DH \Rightarrow DI \equiv HI \Rightarrow DI = HI = HD : 2 = 5 \text{ m} : 2 = 2{,}5$ m. Obținem că $d(I, R) = 2{,}5 \text{ m} + 5 \text{ m} = 7{,}5$ m. **21** Vezi *Gândire critică*, pagina 193. **a** $n = 32$.

Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 a** $PQ = ST = 3 \text{ cm} \Rightarrow PQ \equiv ST$. **b** *R* este mijlocul segmentului $QS \Rightarrow QR \equiv SR \Rightarrow QR = SR = x$ cm. Atunci $PR = TR = (x + 3) \text{ cm} \Rightarrow$ $\Rightarrow PR \equiv TR \Rightarrow R$ este mijlocul segmentului $PT \Rightarrow P$ și *T* sunt simetrice față de *R*.

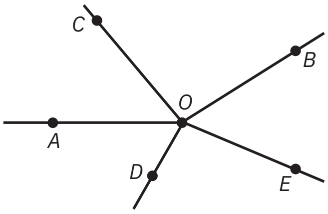
Lecția 5. Unghi: definiție, notații, elemente. Interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi

1 d $\sphericalangle EVA$. **2** Primele două sunt adevărate, iar ultimele sunt false. A patra este falsă, deoarece laturile unghiului, fiind semidrepte, sunt infinite și nu pot fi măsurate. **3** $\sphericalangle MIT$ sau $\sphericalangle TIM$; vârful este *I*, iar laturile sunt semidreptele *IM* și *IT*. **4** Vârfurile sunt *E*, *O*, *A*, respectiv, *D*, iar laturile sunt semidreptele *EG* și *EO*, *OD* și *OR*, *AF* și *AN*, respectiv, *DA* și *DI*. **5 a** *GU*; **b** exterior; **c** interior; **d** *U*, *N*, *G*, *H* și *I*; **e** *A* și *B*; **f** *T* și *Z*. **6 a** $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$; **b** *OA* și *OB*, iar vârful este *O*; **c** *OB* și *OC*, iar vârful este *O*; **d** $\sphericalangle AOC$, iar vârful este *O*; **e** *OB*, respectiv, *AOB*; **f** vârf, punctul *O*. **7** Toate sunt adevărate. **11** Vezi configurația geometrică alăturată.



Lecția 6. Măsura unui unghi. Unghiuri congruente

1 50°, 90°, 115°, respectiv, 155°. **2 b** $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PRS$; $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle MNO$; $\sphericalangle GHI \equiv \sphericalangle TUV$. **3** În figura 5, vârful *B* al unghiului *ABC* nu este poziționat în *O*. În figura 6, vârful *B* al unghiului *ABC* nu este poziționat în *O* și nici latura *BA* în dreptul diviziunii de 0°. **4** Din $\sphericalangle RIN \equiv \sphericalangle CRI \Rightarrow \sphericalangle RIN = \sphericalangle CRI = 60°$. **5 a** $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$; **b** $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$. **9 a** măsura unghiului *A* este egală cu măsura unghiului *B* și scriem: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. **b** $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. Aplicând definiția unghiurilor congruente $\Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. **c** $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Am aplicat tranzitivitatea relației de congruență. **10** Toate au măsura egală cu 90° și atunci cele trei unghiuri sunt congruente. **11** Vezi configurația geometrică alăturată.



Lecția 7. Clasificarea unghiurilor. Calcule cu măsuri de unghiuri

1 a unghiul de 1° sexagesimal; **b** 180°; **c** 0°; **d** între 0° și 90°; **e** între 90° și 180°. **2** Nul, ascuțit, obtuz, drept, respectiv, alungit. **3** Obtuz, ascuțit, respectiv, drept. **4 a** ascuțit; **b** drept; **c** obtuz. **5** Nule: $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle G$; ascuțite: $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle F$; drepte: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle J$; obtuze: $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle H$; alungite: $\sphericalangle E$ și $\sphericalangle I$. **6** Doar propozițiile **d** și **g** sunt false. **7 a** 480'; **b** 2 100'; **c** 550'; **d** 930'; **e** 3 945'. **8 a** 5°; **b** 20°; **c** 62°; **d** 62°30'; **e** 80°45'. **9 a** 90°; **b** 47°; **c** 152°; **d** 22°; **e** 83°42'; **f** 14°31'; **g** 46°7'; **h** 138°45'; **i** 18°45'; **j** 24°34'. **10** A transformat greșit 1°. Rezultat corect: 40°10'. **11 a** 56°; 57°; 56°; **b** 27°; 28°; 28°; **c** 107°; 108°; 107°; **d** 59°; 60°; 60°; **e** 89°; 90°; 90°. **12** $118° + 62° = 73° + 107° = 44° + 136° = 180°$. **13 a** *n* ia valorile 0, 1, 2, 3, ..., 24; **b** 25; **c** 26, 27, 28, ..., 114; **d** 115. **14** $\sphericalangle B = 2\,400' = 40° = \sphericalangle A \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. **15** $\sphericalangle A = 1\,800' = 30°$. **16 b** *ABC*. **17 c** *ABD*. **18** $\sphericalangle SOC = 117°$. **19 b** 6°. **20 d** 65°. **21** Măsura unghiului *BOM* este egală $40° - 20° = 20°$. Din $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM \Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$. **22** $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM \Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = 20°$. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOM + \sphericalangle BOM = 20° + 20° = 40°$. **23** $\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC - \sphericalangle COD = 180° - 70° - 40° = 70°$, deci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 70° \Rightarrow \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$. **24 a** $\sphericalangle DOE = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOD - \sphericalangle EOB = 158° - 50° - 79° = 29°$. **b** $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BOE = 79° \Rightarrow \sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle BOE$. **25** $\sphericalangle LOT = 40°$; $\sphericalangle COT = \sphericalangle COL + \sphericalangle LOT =$

$= 140° + 40° = 180° \Rightarrow \sphericalangle COT$ este unghi alungit $\Rightarrow C, O, T$ sunt coliniare. **26 a** $\sphericalangle CBD = 75\% \cdot 60° = 45° = \sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CBD$; **b** $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 45° + 45° = 90° \Rightarrow \sphericalangle ABD$ este unghi drept $\Rightarrow BA \perp BD$. **27 a** $\sphericalangle BIA \equiv \sphericalangle BIS \Rightarrow \sphericalangle BIA = \sphericalangle BIS = \sphericalangle AIS : 2 = 120° : 2 = 60°$. **b** $\sphericalangle LIS = \sphericalangle AIL - \sphericalangle AIS = 180° - 120° = 60°$. Din $\sphericalangle BIS = \sphericalangle LIS \Rightarrow \sphericalangle BIS \equiv \sphericalangle LIS$. **28** $\sphericalangle EAR = 30°$; $\sphericalangle TAE = 60°$. **29** Distingem două cazuri: C se află în interiorul unghiului NRI, caz în care $\sphericalangle CRN = 25°$ și $\sphericalangle CRI = 75°$, respectiv, C se află în exteriorul unghiului NRI, caz în care $\sphericalangle CRN = 50°$ și $\sphericalangle CRI = 150°$.

Autoevaluare. **1** A. **2** D. **3 a** $\sphericalangle PAO = 30°$; $\sphericalangle VAO = \sphericalangle VAP + \sphericalangle PAO = 60° + 30° = 90° \Rightarrow \sphericalangle VAO$ este unghi drept. **b** Din $\sphericalangle VAP = \sphericalangle RAO = 60° \Rightarrow \sphericalangle VAP \equiv \sphericalangle RAO$.

Lecția 8. Figuri congruente. Axa de simetrie

2 a $\Delta ACP \equiv \Delta DCP$. **b** ΔEBP s-a suprapus peste ΔEFP și atunci $\Delta EBP \equiv \Delta EFP$. **c** Sunt congruente. **4 a** M este mijlocul segmentului AB și $AM \equiv BM$; OM este axa unghiului AOB și $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$. **b** T este mijlocul segmentului AO și $AT \equiv TO$; BT este axa de simetrie a unghiului ABO și $\sphericalangle ABT \equiv \sphericalangle OBT$. **6** Toate sunt adevărate. **7** *A, D, E, M, T, V, W, O*.

Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 b** Cifra 3 are o axă de simetrie, iar cifra 8 admite două axe de simetrie.

Recapitulare și evaluare. **1** a. **2** b. **3** c. **4** b. **5** a. **6** a. **7** b. **8** c. **9** A; A; F; A. **10** d, a, b. **11 a** 10 cm. **b** $DP = RT = 7$ cm $\Rightarrow DP \equiv RT$. **c** Se arată că E este mijlocul segmentului DT. **12 a** $\sphericalangle DOL = 70°$. Din $0° < \sphericalangle DOL < 90° \Rightarrow \sphericalangle DOL$ este unghi ascuțit. **b** $\sphericalangle COL = \sphericalangle COD + \sphericalangle DOL = 110° + 70° = 180° \Rightarrow \sphericalangle COL$ este unghi alungit $\Rightarrow C, O, L$ sunt coliniare. **c** $\sphericalangle COT = \sphericalangle DOL = 70° \Rightarrow \sphericalangle COT \equiv \sphericalangle DOL$.

Lecția 9. Unități de măsură pentru lungime. Aplicație: perimetre

1 a 85 dam > 85 dm; **b** 24 cm = 240 mm; **c** 72 km = 7 200 dam; **d** 6,8 km > 601 dam; **e** 3,4 dm > 333 mm; **f** 0,764 dam > 7 630 mm. **2 b c** sunt adevărate; **a d e f** false. **3 a** 7,5 m; **b** 458 m; **c** 246,5 m; **d** 2 350 m; **e** 8 250 m. **4 a** 62,5 dm; **b** 236 dm; **c** 24 506 dm; **d** 1 750 dm; **e** 3,6 dm; **f** 0,475 dm; **g** 0,455 dm; **h** 0,032 dm; **i** 2,35 dm; **j** 0,06 dm. **5 a** 325 dam; **b** 8,5 dam; **c** 6,8 dam; **d** 1 320 dam; **e** 0,6 dam; **f** 8,27 dam; **g** 4,05 dam; **h** 0,02 dam; **i** 0,0045 dam; **j** 0,08 dam. **6 a** 1 238 dm; **b** 77,3 cm; **c** 6 242,4 dam; **d** 24,8 m; **e** 24,75 hm; **f** 2,81 km. **7 a** 6 cm; **b** 119,6 m; **c** 2,61 hm; **d** 85,175 dm; **e** 3,94 km; **f** 2,32 dam. **8 a** cm; **b** m; **c** km; **d** mm; **e** cm; **f** km. **10** A – C – E – B. **11** Lungimile lipsă: 1,7 km și 166,5 dam; perimetrele care lipsesc 17,2 m și 98 cm. **12** 60 cm. **13** $x = 12$ m și $y = 12{,}8$ m. **14** Perimetre lipsă: 201,6 m; 18,36 m; 1 881 m; lungime: 209,4 cm; lățime: 28 hm. **15** Ioana. **16** 116 m, 118 m, respectiv, 120 m. **17** $L = 18$ m; $l = 6$ m. **18** Perimetrul dreptunghiului este egal cu 2 450 m. Latura pătratului are 306,25 m. **19** 39 cm.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** 549 m : 3 = 183 m = 1 830 dm > 1 820 m. **b** 182 m, 183 m, respectiv, 184 m.

Lecția 10. Unități de măsură pentru arie. Aplicații: Aria pătratului/dreptunghiului

1 a 9 cm^2; **b** 144 m^2; **c** 6,25 dam^2; **d** 0,09 km^2; **e** 14 400 mm^2; **f** 0,0001 ha; **g** 56,25 cm^2; **h** 20,25 dm^2. **2 a** 16 m^2; **b** 50,5 cm^2; **c** 7 m^2; **d** 567 m^2. **3** $P = 22$ cm, $A = 30$ cm^2. **4 a** 7,2 m^2; **b** 39 000 m^2; **c** 2 500 m^2; **d** 6,7 m^2; **e** 300 m^2; **f** 7,2 m^2. **5 a** 1 528 cm^2; **b** 82 000 dm^2; **c** 0,7 dam^2; **d** 0,147 km^2; **e** 250 ari; **f** 0,1 ha. **6 a** cm^2; **b** m^2; **c** km^2. **8 a** 36 cm^2 > 123 mm^2; **b** 22 dam^2 < 1 ha; **c** 72 ari < 0,072 km^2; **d** 74 m^2 < 7,4 hm^2; **h** 0,05 dam^2 = 500 dm^2; **f** 3,5 m^2 > 3,49 dm^2. **9** Suprafața curții este de 987 m^2, iar suprafața unei plăci este de 0,25 m^2. Sunt necesare 3 948 plăci. **10** 6 zile. **11** 9 cm^2. **12** 3 600 m^2 : 7 200 = 0,5 m^2. **13** 200 cm^2 · 30 · 24 = 144 000 cm^2 = 14,4 m^2. **14** 75 l · 36 = 2 700 l = 2,7 kl. **15 a** 120 m · 4 – 3 m = 477 m. **b** 14 400 m^2 = 1,44 ha. **16** 90 dam · 54 dam = 4 860 dam^2 = 486 000m^2; 7 lei · 0,2 · 486 000 = 680 400 lei. **17 a** 1 750m^2, respectiv 190 m. **b** Este cuprinsă între 1 750 m^2 – 315 m^2 · 3 și 1 750 m^2 – 314 m^2 · 3, adică între 805 m^2 și 808 m^2.

Autoevaluare. **1** B. **2** D. **3 a** (50 m + 30 m) · 2 = 160 m. **b** 50 m · 30 m – 100 m^2 = 1 400 m^2.

Lecția 11. Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

1 a 8; **b** 6; **c** 12; **d** pătrate. **2 a b** false; **c d** adevărate. **3 a** 6 250 dm^3; **b** 6 000 dm^3; **c** 500 dm^3; **d** 3 dm^3; **e** 4 dm^3; **f** 0,0475 dm^3. **4 a** 2 800,8 m^3; **b** 67,103 cm^3; **c** 653 965 dam^3; **d** 820,166 hm^3. **6** $p = 2$; $V = 8$ m^3. **7** $\overline{2a}$ dm^3 = 27 dm^3 = (3 dm)^3 $\Rightarrow l = 3$ dm. **8** 131,10 lei. **9 a** O muchie are 15 cm lungime. Perimetrul unei fețe este 60 cm, iar aria 225 cm^2. **b** 3 375 cm^3. **10 a** 150 cm^2; **b** 70 cm. **11** Lungimi lipsă: 20 dm, 6 hm. Volume lipsă: 15,625 m^3; 13 824 cm^3. **12 a** (2 · 5 · 8 + 2 · 3 · 5 + 2 · 8 · 3)cm^2 = 158 cm^2; **b** P = (8 · 4 +5 · 2 + 3 · 8)cm = 66 cm. **13** Bazinul are volumul de 6 000 m^3; 6 000 000 litri. **14** O cărămidă are volumul de 0,0042 m^3, iar cele 210 cărămizi ocupă 0,882 m^3. Volumul mortarului este 0,118 m^3. **15**. Zăpada căzută formează un paralelipiped dreptunghic cu volumul de 1 750 m^3. Ea cântărește 105 tone. **16** În butoi se colectează 729 de litri, adică 0,729 m^3. Apa se ridică la înălțimea de 729 mm. **17 a** 240 dm^3; **b** În acvariu erau 200 l apă, din care au rămas 120 l. Apa rămasă se ridică la înălțimea de 3 dm, deci nivelul a scăzut cu 20 cm.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** $V = 300$ m^3. **b** Volumul unei cărămizi este de 300 m^3 : 0,003 m^3 = 100 000. Se pot pune 100 000 de cărămizi. Alternativ, lungimea containerului este egală cu lungimea a 40 de cărămizi, lățimea containerului egală cu lățimea a 50 de cărămizi, iar înălțimea egală cu cea a 50 de cărămizi și atunci încap 40 cărămizi · 50 · 50 = 100 000 de cărămizi.

Recapitulare și evaluare. **1** b. **2** a. **3** b. **4** c. **5** A, A, F, A. **6** d, a, b. **7** a. **8** b. **9 a** 10 cm. **b** Se arată că E este mijlocul segmentului DT. **10 a** $\sphericalangle DOL = 70°$; $\sphericalangle COL = \sphericalangle COD + \sphericalangle DOL = 110° + 70° = 180° \Rightarrow \sphericalangle COL$ este unghi alungit $\Rightarrow C, O, L$ sunt coliniare. **b** $\sphericalangle COT = \sphericalangle DOL = 70° \Rightarrow \sphericalangle COT \equiv \sphericalangle DOL$. **11 a** 240 dm^3; **b** 5 dm.