Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}\cdot 2^3=1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(3,3)$ și M, mijlocul segmentului AB. Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.

5p **6.** Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a&2-2a\\1-a&1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=aI_2$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 2=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-1$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m<n$, pentru care $m\circ n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\left|f(x)-f(y)\right|\leq 1$, pentru orice x, $y\in[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=e^2+1$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=4-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}-3=$	**3p**
	$=4-3=1$	**2p**
2.	$5a-3=2a+3$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$2^{2x+4}=2^0$, de unde obținem $2x+4=0$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4\cdot 3=12$ numere	**3p**
5.	$M(2,1)$, de unde obținem $MO=\sqrt{5}$	**3p**
	$MC=\sqrt{5}$, deci $MO=MC$	**2p**
6.	$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 1=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$A(a)-A(0)=\begin{pmatrix}a & -2a\\ -a & 3a\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=aI_2$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A\left(a^2\right)=\begin{pmatrix}3+a^2 & 2-2a^2\\ 1-a^2 & 1+3a^2\end{pmatrix}$, $A\left(a^2\right)-aA(a)=\begin{pmatrix}3-3a & 2-2a\\ 1-a & 1-a\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)=3(1-a)^2-2(1-a)^2=(1-a)^2\geq 0$, pentru orice număr real a	**3p**
2.a)	$0\circ 2=0^2-4\cdot 0\cdot 2+3\cdot 2^2=$	**3p**
	$=0-0+12=12$	**2p**
b)	$(2x)\circ x=-x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x^2=-1$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

c)	$m\circ n=m^2-mn-3mn+3n^2=(m-n)(m-3n)$, pentru orice numere întregi m și n	**2p**
	$(m-n)(m-3n)=3$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m<n$, obținem perechile $(-4,-1)$ și $(0,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{4x^2-(4x-4)\cdot 2x}{x^4}=$	**3p**
	$=\dfrac{4x(2-x)}{x^4}=\dfrac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{4x-4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)=5$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=5$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; pentru orice $x\in[1,2]$, $f'(x)\geq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,2]$ și pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\leq 0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$f(1)=5$, $f(2)=6$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$, deci $5\leq f(x)\leq 6$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, de unde obținem $\lvert f(x)-f(y)\rvert\leq 1$, pentru orice x, $y\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2(f(x)-4\ln x)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_1^e 4x\ln x\,dx=\int_1^e\left(2x^2\right)'\ln x\,dx=2x^2\ln x\Big\vert_1^e-x^2\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=2e^2-0-e^2+1=e^2+1$	**2p**
c)	$F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}f(x)F''(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}}f(x)f'(x)dx=\frac{f^2(x)}{2}\Big\vert_1^{\sqrt{e}}=\frac{(3e+2)^2-3^2}{2}=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$	**3p**