Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=1-a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+4\right)=\log_4(6x-4)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-5)$ și $B(5,5)$. Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=6$ și $\operatorname{tg}C=\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1-a&a\\-3a&3a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=5$.

5p **b)** Arătați că $A(a)-I_2=a\left(A(1)-I_2\right)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-x-y+4$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 3=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=3x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $x\circ a=x+a$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2+4x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=1$.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\le 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Examenul naţional de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)=\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
2.	$a^2+1=1-a$, deci $a^2+a=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=0$	**2p**
3.	$x^2+4=6x-4$, deci $x^2-6x+8=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $3\cdot 5=15$ numere	**3p**
5.	$x_M=3$ și $y_M=0$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$OM=3$	**2p**
6.	$\operatorname{tg}C=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow AB=6\sqrt{3}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -6 & 7\end{vmatrix}=(-1)\cdot 7-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-7+12=5$	**2p**
b)	$A(a)-I_2=\begin{pmatrix}-a & a\\ -3a & 3a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow a\left(A(1)-I_2\right)=a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, deci $A(a)-I_2=a\left(A(1)-I_2\right)$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A(m)\cdot A(2m)=A\left(4m^2+3m\right)$, pentru orice număr întreg m	**3p**
	$A\left(4m^2+3m\right)=A(1)$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=-1$	**2p**
2.a)	$0\circ 3=0\cdot 3-0-3+4=$	**3p**
	$=0-3+4=1$	**2p**
b)	$x\circ x=x^2-2x+4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-2x+4=3x\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=4$	**3p**
c)	$xa-x-a+4=x+a\Leftrightarrow xa-2x-2a+4=0$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x(a-2)-2a+4=0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x, obținem $a=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)+e^x\left(2x+2\right)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2+2x-2+2x+2\right)=e^x\left(x^2+4x\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(x^2+2x-2\right)}{e^x\left(x^2+4x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2+4x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x}}=1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-4$ sau $x=0$; pentru $x\in(-\infty,-4]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-4]$ și, pentru $x\in[-4,0]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-4,0]$	**2p**
	$f(x)\leq f(-4)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$ și $f(-4)=\frac{6}{e^4}$, deci $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\leq 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\int_1^2 x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{16}{4}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$	**2p**
b)	G este o primitivă a funcției $g\Rightarrow G'(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^3+\frac{3}{x}\right),\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^3+\frac{3}{x}\right)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția G este crescătoare	**3p**
c)	$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^4+3}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+3}dx=\left.\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right\|_1^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$	**2p**