

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
12 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $\frac{z}{z^2 + 3z + 1} = \frac{1}{3}$, deci $z^2 + 1 = 0$	3p
	$z_1 = i, z_2 = -i$, care convin	2p
	b) $ z = 1$, deci $z\bar{z} = 1$, de unde obținem $\bar{z} = \frac{1}{z}$	2p
	$\overline{E(z)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z} + 1} = \frac{z}{z^2 + 3z + 1} = E(z)$, deci $E(z) \in \mathbb{R}$, pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu proprietatea $ z = 1$	3p
2.	c) $E(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow E(z) = \overline{E(z)} \Rightarrow \frac{z}{z^2 + 3z + 1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1} \Rightarrow \bar{z}^2 \cdot z + 3z \cdot \bar{z} + z = z^2 \cdot \bar{z} + 3\bar{z} \cdot z + \bar{z}$	2p
	$\bar{z} \cdot z(\bar{z} - z) + (z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow (\bar{z} \cdot z - 1)(\bar{z} - z) = 0$ și, cum $\bar{z} \neq z$, obținem $\bar{z} \cdot z = 1$, deci $ z = 1$	3p
	a) Semidreapta BM este bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle DBM$	2p
	Cum unghiurile ABM și AMB sunt complementare și unghiurile DBM și DMB sunt complementare, obținem $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle DMB$, deci semidreapta MB este bisectoarea unghiului AMD	3p
b) Semidreapta BM este bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $MA \perp AB$ și $MD \perp BC$, deci $MA = MD$	2p	
	$\triangle AMI \equiv \triangle DMI$, deoarece $AM = DM$, $MI = MI$ și $\sphericalangle AMI \equiv \sphericalangle DMI$, deci $AI = DI$	3p
	c) Pentru $E \in BC$ astfel încât $NE \perp BC$ obținem că $\triangle ANI \equiv \triangle ENI$, deci $AI = EI$, de unde obținem $EI = DI$, deci $IQ \perp BC$, unde punctul Q este mijlocul segmentului DE	3p
PQ este linie mijlocie în trapezul $DMNE$, deci $PQ \parallel MD \Rightarrow PQ \perp BC$, de unde obținem că punctele P, I și Q sunt coliniare, deci $PI \perp BC$	2p	

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $x \circ x^{n-1} = x \circ \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n-1 \text{ ori } x} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = x^n = e$, pentru orice $x \in G$	2p
	$x^{n-1} \circ x = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n-1 \text{ ori } x} \circ x = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = x^n = e$, pentru orice $x \in G$, deci x^{n-1} este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „ \circ ”	3p

	<p>b) $x^2 = e$, pentru orice $x \in G$, deci $(x \circ y)^2 = e$, pentru orice $x, y \in G$</p> <p>$x \circ y \circ x \circ y = e \Rightarrow x^2 \circ y \circ x \circ y = x \circ e \Rightarrow y \circ x \circ y = x \Rightarrow x \circ y = y \circ x$, pentru orice $x, y \in G$, deci grupul (G, \circ) este comutativ</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>c) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}}_{\text{de } n \text{ ori } \frac{x}{n}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{x}{n}\right) \circ f\left(\frac{x}{n}\right) \circ \dots \circ f\left(\frac{x}{n}\right)}_{\text{de } n \text{ ori } f\left(\frac{x}{n}\right)} = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$</p> <p>Cum $f\left(\frac{x}{n}\right) \in G \Rightarrow \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = e$, deci $f(x) = e$, pentru orice număr rațional x</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>2.</p>	<p>a) $f'(x) = \left(x + \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 2)\right)' = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 2} =$ $= 1 + 2x \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2}\right) = 1 + \frac{2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}, x \in \mathbb{R}$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
	<p>b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}\right) = 1$, deci panta asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este egală cu 1</p> <p>$f'(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0$ și, cum $f(0) = \ln \frac{1}{2}$, obținem că $y = x + \ln \frac{1}{2}$ este ecuația tangentei la graficul funcției f, care este paralelă cu asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
	<p>c) $g(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow S_n = \int_0^n g(x) dx = \int_0^n \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) \Big _0^n - \int_0^n \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx =$ $= n \ln(n^2 + 1) - 2n + 2 \arctg n$, deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n^2 + 1) - 2 + \frac{2}{n} \arctg n\right) = +\infty$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate 1p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat 1p - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item 1p - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item 1p - respectarea formatului itemului 1p - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 1p 	
<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate 1p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat 1p - precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item 1p - precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item 1p - respectarea formatului itemului 1p - respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat 1p 	

<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item- respectarea formatului itemului- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat	1p 1p 1p 1p 1p 1p