Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3}=\frac{1}{2^{2x}}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,3)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\operatorname{tg}x+\sin\frac{3x}{2}-2\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=4$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+10x+10y+18$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 0=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\geq 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+4}{6x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\left(6x^2+1\right)dx=10$.

5p	**b)** Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2+1} \right) dx = \frac{\ln 5}{6}$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = m\left(e^2 - 1\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
2.	$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x^2-4x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
3.	$2^{x-3}=2^{-2x}\Leftrightarrow x-3=-2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**3p**
5.	$AC=5$	**2p**
	$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$, deci $AC=BC$, de unde obținem că triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+1-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M\left(1\right)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(M\left(1\right)\right)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-(-1)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)=\begin{pmatrix}4x+2 & -4x-1\\ -8x-2 & 8x+3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}(4x+1)+1 & -(4x+1)\\ -2(4x+1) & 2(4x+1)+1\end{pmatrix}=M\left(4x+1\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)\cdot M\left(1\right)=\left(M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)\right)\cdot M\left(1\right)=M\left(4x+1\right)\cdot M\left(1\right)=M\left(16x+5\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$M\left(16x+5\right)=M\left(x+2\right)$, de unde obținem $16x+5=x+2$, deci $x=-\dfrac{1}{5}$	**2p**
2.a)	$(-1)\circ 0=5\cdot(-1)\cdot 0+10\cdot(-1)+10\cdot 0+18=$	**3p**
	$=-10+18=8$	**2p**
b)	$x\circ y=5xy+10x+10y+20-2=5x(y+2)+10(y+2)-2=$	**3p**
	$=(5x+10)(y+2)-2=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$m \circ m = 5(m+2)^2 - 2$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$5(m+2)^2 - 2 = m \Rightarrow (m+2)(5m+9) = 0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} =$	**3p**
	$= \dfrac{x^2 - 2x - 1 + x - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$	**2p**
b)	$f(2) = 5$, $f'(2) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, adică $y = 5$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$; pentru $x \in (1,2] \Rightarrow f'(x) \le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ și pentru $x \in [2,+\infty) \Rightarrow f'(x) \ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(x) \ge f(2)$, pentru orice $x \in (1,+\infty)$, de unde obținem $\dfrac{x^2+1}{x-1} + \ln(x-1) \ge 5$, pentru orice $x \in (1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2 f(x)(6x^2+1)\,dx = \int_0^2 (x+4)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg\|_0^2 =$	**3p**
	$= 2 + 8 = 10$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2+1}\right)dx = \int_0^2 \frac{x}{6x^2+1}\,dx = \frac{1}{12}\int_0^2 \frac{(6x^2+1)'}{6x^2+1}\,dx = \frac{1}{12}\ln(6x^2+1)\Bigg\|_0^2 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{12}\ln 25 = \dfrac{\ln 5}{6}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x}\,dx = \int_0^1 (6x^2+1) \cdot e^{2x}\,dx = \int_0^1 (6x^2+1) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = (6x^2+1) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg\|_0^1 - \int_0^1 6xe^{2x}\,dx =$ $= \dfrac{7e^2-1}{2} - 3xe^{2x}\Big\|_0^1 + \dfrac{3e^{2x}}{2}\Big\|_0^1 = 2e^2 - 2$	**3p**
	$2e^2 - 2 = m(e^2 - 1)$, de unde obținem $m = 2$	**2p**