

Examenul național de bacalaureat 2022  
Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul  $a_1$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2 = 6$  și  $a_3 = 12$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 5$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) + f(2a) = 2$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^x \cdot \frac{1}{5} = 25$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 16.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3,2)$  și  $B(1,4)$ . Determinați coordonatele punctului  $C$ , astfel încât punctul  $A$  este mijlocul segmentului  $BC$ .
- 5p 6. Se consideră expresia  $E(x) = \sin x + \sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2}$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det A = 0$ .
- 5p b) Arătați că  $B(x) - B(0) = xA$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p c) Arătați că matricea  $C(a) = B(a) \cdot B(1) - B(a+1)$  este inversabilă, pentru orice număr întreg  $a$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (2x - 1)(2y - 1) + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 2 = 4$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * x = 2$ .
- 5p c) Determinați numărul întreg nenul  $m$  pentru care  $m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 1$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + 1 + \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \ln x}{x^2 + x + 4} = 2$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este bijectivă.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(e^x + 2x^2)$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x + 2x^2} dx = 8$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - 2x^3) dx = 1$ .

**5p** c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e}{2} + a$ .

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**

**Matematică *M\_șt-nat***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$r = a_3 - a_2 = 6$ , unde $r$ este rația progresiei aritmetice $a_1 = a_2 - r = 6 - 6 = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.</b>	$a - 5 + 2a - 5 = 2 \Leftrightarrow 3a = 12$ $a = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$5^{x-1} = 5^2$ , deci $x - 1 = 2$ $x = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 6 numere care sunt multipli de 16, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$A\left(\frac{1+x_C}{2}, \frac{4+y_C}{2}\right)$ , de unde obținem $x_C = 5$ $y_C = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) =$ $= 1 - 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(x) - B(0) = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} =$ $= x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = xA$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$C(a) = \begin{pmatrix} a & 3-a \\ 2-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+1 & 2-a \\ 1-a & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & 2a+1 \\ a+1 & 3-2a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C(a)) = -10a + 5$ , pentru orice număr întreg $a$ $-10a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , deci matricea $C(a)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$1 * 2 = (2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 2 - 1) + 1 =$ $= 1 \cdot 3 + 1 = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x * x = 4x^2 - 4x + 2$ , pentru orice număr real $x$ $4x^2 - 4x + 2 = 2 \Rightarrow 4x^2 - 4x = 0$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = (2m - 1) \left(1 + \frac{2}{m}\right) + 1$ , pentru orice număr întreg nenul $m$ $(2m - 1) \left(1 + \frac{2}{m}\right) = 0$ și, cum $m$ este număr întreg nenul, obținem $m = -2$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (2x^2)' + 1' + (\ln x)' =$ $= 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 + 1}{x}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \ln x}{x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci $f$ este injectivă $f$ este continuă, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , deci $f$ este surjectivă, de unde obținem că $f$ este bijectivă	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x + 2x^2} dx = \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^4 =$ $= \frac{16}{2} - 0 = 8$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 (f(x) - 2x^3) dx = \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big _0^1 =$ $= e - e + 1 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x^2 (e^{x^2} + 2x^4) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2)' e^{x^2} dx + \int_1^2 2x^5 dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big _1^2 + \frac{x^6}{6} \Big _1^2 = \frac{e^4 - e}{2} + 21$ $\frac{e^4 - e}{2} + 21 = \frac{e^4 - e}{2} + a$ , de unde obținem $a = 21$	<b>3p</b> <b>2p</b>