Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media aritmetică a numerelor $a = 20 - \sqrt{21}$ și $b = 22 + \sqrt{21}$ este egală cu 21.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$. Arătați că $f(a) + g(a) = 2$, pentru orice număr real a.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7x - 6} = x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(6,6)$. Arătați că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $AC = 4$ și măsura unghiului B este egală cu $60°$. Arătați că înălțimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 3$.

5p **b)** Arătați că $A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = 2I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = 3I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 4(xy + 1) - 3(x + y)$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 2 = 3$.

5p **b)** Arătați că, dacă $a \circ 3 = 4$, atunci $a \circ (-a) = 0$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x \circ 1) \circ (x - 1) \le 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 3 - 5\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) + 5\ln x}{3 - x - x^2} = -2$.

5p **c)** Demonstrați că $2x^2 + x \ge 3 + 5\ln x$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - 2x)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = 2$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = e^2 - 5$.

5p **c)** Determinați $a \in (-\infty,1)$ pentru care $\displaystyle\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx = \frac{2}{9}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{20-\sqrt{21}+22+\sqrt{21}}{2}=$	**3p**
	$=\frac{42}{2}=21$	**2p**
2.	$f(a)=a-1$, pentru orice număr real a	**2p**
	$g(a)=3-a\Rightarrow f(a)+g(a)=a-1+3-a=2$, pentru orice număr real a	**3p**
3.	$7x-6=x^2\Rightarrow x^2-7x+6=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=6$, care convin	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 4=8$ numere	**3p**
5.	$M(3,3)$	**2p**
	$OM=3\sqrt{2}$, $AM=3\sqrt{2}$, de unde obținem că triunghiul AOM este isoscel	**3p**
6.	Măsura unghiului ACB este egală cu $30°$	**2p**
	Dacă AD este înălțimea din vârful A a triunghiului ABC, atunci triunghiul ACD este dreptunghic, cu unghiul ACD de $30°$, de unde obținem $AD=\frac{AC}{2}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=2+1=3$	**2p**
b)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}\Rightarrow A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=\begin{pmatrix}1+x^2&x^2\\-x^2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&-x^2\\x^2&x^2+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x+x^2&0\\0&1+x+x^2\end{pmatrix}=(x^2+x+1)I_2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x^2+x+1)I_2=3I_2$, de unde obținem $x^2+x-2=0$, deci $x=-2$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$1\circ 2=4(1\cdot 2+1)-3(1+2)=$	**3p**
	$=12-9=3$	**2p**
b)	$a\circ 3=9a-5$, deci $9a-5=4$, de unde obținem $a=1$	**3p**
	$a\circ(-a)=1\circ(-1)=4(-1+1)-3(1-1)=0$	**2p**

c)	$x\circ 1=x+1$, $(x\circ 1)\circ(x-1)=4x^2-6x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2-6x\le 4$, de unde obținem $x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x+1-\frac{5}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4x^2+x-5}{x}=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+3}{3-x-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-1}=-2$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=6$, deci $2x^2+x+3-5\ln x\ge 6$, de unde obținem $2x^2+x\ge 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1(3-2x)\,dx=\left(3x-2\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
b)	$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(3-2x)e^x dx=(3-2x)\,e^x\Big\|_0^2+2e^x\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=-e^2-3+2e^2-2=e^2-5$	**2p**
c)	$\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}dx=\int_a^1\frac{1}{(3-2x)^3}dx=-\frac{1}{2}\int_a^1\frac{(3-2x)'}{(3-2x)^3}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3-2x)^2}\Big\|_a^1=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(3-2a)^2}\right)$, pentru orice $a\in(-\infty,1)$	**3p**
	$\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(3-2a)^2}\right)=\frac{2}{9}$ și, cum $a\in(-\infty,1)$, obținem $a=0$	**2p**