

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe  $z_1 = 1 - 2i$  și  $z_2 = 2 + i$ . Arătați că  $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 4x + m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care  $f(x) > 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $1 + 2 \log_2 \sqrt{x-2} = \log_2 x$ .
- 5p** 4. Se consideră mulțimea  $A$ , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $A$ , acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea  $A$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-2, -2)$ ,  $B(3, 1)$  și  $M(2, 4)$ . Determinați coordonatele punctului  $N$ , știind că patrulaterul  $ABMN$  este paralelogram.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , în care  $\sin(A+B) + \cos C = 1$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 0$ .
- 5p** b) Arătați că  $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$ , pentru orice număr real  $a$ , unde  $B(a) = A(a) - A(0)$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci  $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \leq 0$ , pentru orice soluție  $(x_0, y_0, z_0)$  a sistemului de ecuații, cu  $x_0, y_0$  și  $z_0$  numere reale.
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție  $z_1 * z_2 = \frac{z_1 + z_2}{4 \cdot |z_1 z_2| + 1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $(-1) * 2 = \frac{1}{9}$ .
- 5p** b) Arătați că  $e = 0$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea  $|z * z| = |z|$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**5p** c) Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care ecuația  $f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = m$  are exact două soluții.

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ .

**5p** a) Arătați că  $\int_0^3 e^x f(x) dx = 12$ .

**5p** b) Arătați că orice primitivă  $G$  a funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  este convexă.

**5p** c) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}} dx = \frac{a - \sqrt{2}}{3}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$(z_1 + i)(z_2 - 1) = (1 - 2i + i)(2 + i - 1) = (1 - i)(1 + i) =$ $= 1 - i^2 = 2$	2p 3p
2.	$\Delta < 0$ și, cum $\Delta = 16 - 4m$ , obținem $16 - 4m < 0$ $m \in (4, +\infty)$	3p 2p
3.	$1 + \log_2(x - 2) = \log_2 x$ , deci $\log_2 \frac{x}{x-2} = 1$ , de unde obținem $\frac{x}{x-2} = 2$ $x = 4$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numărul $n$ din mulțimea $A$ are exact doi multipli în mulțimea $A$ dacă $2n \leq 99 < 3n$ , de unde obținem că numerele din mulțimea $A$ care au exact doi multipli în mulțimea $A$ sunt 34, 35, 36, ..., 49, deci sunt 16 cazuri favorabile și $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$	2p 3p
5.	$P(0,1)$ , unde $P$ este mijlocul segmentului $AM$ Segmentele $AM$ și $BN$ au același mijloc, de unde obținem $N(-3,1)$	2p 3p
6.	$A + B = \pi - C$ , deci $\sin C + \cos C = 1$ $\sin^2 C + 2\sin C \cos C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin 2C = 0$ și, cum $C \in (0, \pi)$ , obținem $C = \frac{\pi}{2}$ , deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 =$ $= 1 + 6 - 3 - 1 + 3 - 6 = 0$	3p 2p
b)	$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $a$ $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 B(1)$ , pentru orice număr real $a$	2p 3p

c)	$\det(A(a))=0$ ; cum $\det(A(a))=-a^2+3a-2$ , obținem $a=1$ , pentru care sistemul este incompatibil, deci nu convine, sau $a=2$ , pentru care sistemul are o infinitate de soluții Dacă $a=2$ , soluția sistemului este $(x_0, y_0, z_0)=(\alpha-1, -\alpha+1, \alpha)$ și, cum $\alpha$ este număr real, obținem $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0=(\alpha-1)(-\alpha+1)+\alpha(-\alpha+1)+\alpha(\alpha-1)=-(\alpha-1)^2 \leq 0$ , pentru orice soluție $(x_0, y_0, z_0)$ a sistemului de ecuații, cu $x_0, y_0$ și $z_0$ numere reale	2p  3p
2.a)	$(-1)*2 = \frac{-1+2}{4 \cdot  -1 \cdot 2  + 1} =$ $= \frac{1}{4 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{9}$	3p  2p
b)	$z*0 = \frac{z+0}{4 \cdot  z \cdot 0  + 1} = z$ , pentru orice număr complex $z$ $0*z = \frac{0+z}{4 \cdot  0 \cdot z  + 1} = z$ , pentru orice număr complex $z$ , deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p  3p
c)	$z*z = \frac{2z}{4 \cdot  z^2  + 1}$ , pentru orice număr complex $z$ $\left  \frac{2z}{4 \cdot  z^2  + 1} \right  =  z $ și $z$ este număr complex nenul, deci $4 \cdot  z ^2 + 1 = 2$ , de unde obținem $ z  = \frac{1}{2}$ și, de exemplu, numerele distincte nenule $\frac{1}{2}$ , $-\frac{1}{2}$ și $\frac{i}{2}$ verifică egalitatea dată	2p  3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}} \cdot x - \sqrt{x^4+16} = \frac{2x^4 - x^4 - 16}{x^2\sqrt{x^4+16}} =$ $= \frac{x^4 - 16}{x^2\sqrt{x^4+16}} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}, x \in (0, +\infty)$	3p  2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x(\sqrt{x^4+16} + x^2)} = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	2p  3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ; $f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (0, 2)$ și $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (2, +\infty)$ $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = 2f(x)$ , deci $g$ este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ și $g$ este strict crescătoare pe $(2, +\infty)$ și, cum $g$ este continuă, $g(2) = 4\sqrt{2}$ , $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , obținem că ecuația $g(x) = m$ are exact două soluții pentru $m \in (4\sqrt{2}, +\infty)$	2p  3p

<b>2.a)</b>	$\int_0^3 e^x f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	<p><math>G</math> este primitivă a funcției <math>g \Rightarrow G'(x) = g(x)</math>, deci <math>G''(x) = g'(x) =</math></p> $= \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ , deci funcția $G$ este convexă	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x - x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' \cdot \left( \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \left( \frac{2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3} - 2\sqrt{x^2 + 1} \right) \Big _0^1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ $\frac{2 - \sqrt{2}}{3} = \frac{a - \sqrt{2}}{3}$ , de unde obținem $a = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>