Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(1+i)^2-2(1+i)+2=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(1,2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,4)$, $N(0,1)$ și $P(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în C. Arătați că $\operatorname{tg} B=\dfrac{1}{\operatorname{tg} A}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)$.

5p **a)** Arătați că $2*0=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\le b$, atunci $a*b=b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)\,dx=2$.

5p	**b)** Arătați că $\int_1^2 g(x)\,dx = \ln\frac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.
5p	**c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$. Calculați $(g\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-5}=\frac{1}{16}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=4$, $BC=6$ și măsura unghiului ABC de 120°. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale .

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg} x}dx=3$.

5p	**b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x\, f(x)\,dx = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor reale $a = 2021 - \sqrt{2}$ și $b = 2021 + \sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(\sqrt{x}+3\right)+\log_3\left(\sqrt{x}-3\right)=2$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,0)$, $N(8,3)$ și $P(6,3)$. Determinați coordonatele punctului Q, știind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A\cdot\cos A=\sin A$. Arătați că $A=\dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 1+\log_2 a & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)\geq 8$, unde $\left(A(a)\right)^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y = xy - m(x+y) + m(m+1)$, unde $m\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $2\circ 2=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $2\circ 1=5$, atunci $2\circ 5=1$.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $\left(mx^3\right)\circ\left(-mx^2\right)=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^4+1\right) f(x)\,dx=\dfrac{11}{5}$.

5p **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\int_0^1 xG(x)\,dx=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2$.